Universitatea Babeş - Bolyai Cluj Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

Teză de doctorat

CONTRIBUŢII ASUPRA PROCESELOR DE APROXIMARE DE TIP KING

Coordonator ştiinţific:
Prof. univ. dr. Agratini Octavian

Doctorand:
Indrea D. Adrian

Cluj Napoca
2015

Cuprins

Introducere

1. Despre Teoria Aproximării şi procesele de aproximare de tip King

În general Teoria Aproximării răspunde la următoarea problemă: cum se poate aproxima o funcţie cu o altă funcţie mai simplă a cărei lege este uşor de determinat. De asemenea, se preocupă de caracterizarea cantitativă a erorii dată de aproximarea făcută.

Pentru a fi mai explicit şi riguros, autorul prezintă noţiunea de schemă de aproximare. Fie (X, d) un spaţiu metric. O metodă de aproximare necesită o mulţime de funcţii de aproximare, de exemplu $\mathcal{F}$, care este o submulţime a lui X. Metoda e doar o aplicaţie de la X la $\mathcal{F}$. Cu alte cuvinte, fiind dată orice funcţie $f \in X$, metoda extrage elementul e_f din $\mathcal{F}$, care este o aproximare a lui f. Pentru a afla cât de bună este metoda aleasă, e_f ar trebui comparată cu cea mai bună aproximare a lui $f \in X$ din $\mathcal{F}$ care este un element $e^* \in \mathcal{F}$ astfel încât

$$d(f, e^*) = \inf\{d(f, e) \ : \ e \in \mathcal{F}\} \ := \mathrm{dist}(f, \mathcal{F}).$$

Condiţiile de existenţă, unicitate şi de caracterizare a celei mai bune aproximări în cazul în care $\mathcal{F}$ este un spaţiu Hilbert poate fi găsit, e.g., în cartea lui Coman, Chiorean şi Cătinaş [10, *Secţiunea 1.4*].

Astfel, o problemă importantă este de a determina ce tip de funcţii de aproximare se poate folosi. Una dintre direcţiile din Teoria Aproximării este dată de procesele de aproximare liniare şi pozitive. Este o tendinţă nouă, care a apărut în anii '50 în urma cercetării lui T. Popoviciu, H. Bohman şi P.P. Korovkin. Teorema lor faimoasă de caracterizare a şirurilor de operatori liniari şi pozitivi care aproximează operatorul identitate, se bazează pe un criteriu simplu şi uşor de verificat.

Următoarele trei aspecte sunt vitale în această direcţie: construcţia acestor procese, studiul ordinului de aproximare, abilitatea lor de a păstra proprietăţile calitative ale funcţiilor aproximate ca de exemplu monotonia, convexitatea. În ceea ce priveşte construcţia proceselor de aproximare, un principiu important a fost dat de F. Altomare şi M. Campiti [3, p. 229] privind procesele pozitive de aproximare. Principiul spune că dacă E şi F sunt două spaţii de funcţii definite pe acelaşi spaţiu Hausdorff compact astfel încât $E \subset F$, atunci un proces pozitiv de aproximare pe E cu valori în F este un şir $(L_i)_{i\in I}$ de operatori liniari şi pozitivi definiţi pe E cu valori în F astfel încât pentru orice f din E, $(L_i)_{i\in I}$ converge la f, convergenţa fiind înţeleasă raportată la o anumită topologie pe F.

Mulţi operatori liniari şi pozitivi păstrează doar o funcţie din mulţimea $\{e_0, e_1, e_2\}$. J.P. King [18] a prezentat un şir non-trivial de operatori liniari şi pozitivi care păstrează e_0 şi e_2. Toate informaţiile de bază sunt concentrate în Capitolul 1 al acestei teze.

Pentru diversele abordări ale evaluării cantitative a erorii se poate menţiona rezultatul lui R. Mamedov [19], sau G. Shisha şi B. Mond [22].

Această direcţie de cercetare s-a dovedit a fi foarte productivă, în consecinţă mulţi matematicieni au dezvoltat aceste subiecte: construcţia proceselor liniare pozitive şi evaluarea cantitativă a erorii acestora. Teza se îndreaptă în această direcţie de investigaţie.

2. Arhitectura tezei

Scopul lucrării este de a construi diferite clase de operatori liniari şi pozitivi de tip discret sau continuu în sens King şi de a studia procesele de aproximare obţinute. Pentru proprietăţile de aproximare, autorul a studiat eroarea de aproximare şi convergenţa lor.

Teza este structurată în patru capitole.

Capitolul 1 cuprinde o colecţie de noţiuni semnificative legate de operatorii liniari şi pozitivi. Aici sunt date definiţii, exemple, proprietăţi pe care le au operatorii liniari şi pozitivi, teoremele clasice ale lui Korovkin, noţiunea de module de netezime şi proprietăţi ale acestora, rezultate legate de viteza de convergenţă a unui şir de operatori liniari. Toate entităţile matematice implicate sunt descrise complet. De asemenea, sunt prezentate exemple de operatori liniari şi pozitivi diferiţi de operatorii clasici. Într-o secţiune distinctă, sunt detaliaţi operatorii pozitivi introduşi de J.P. King în 2003 şi sunt prezentate proprietăţile lor de aproximare.

Capitolul 2 tratează clase de operatori Bernstein modificaţi în sens King. Sunt prezentaţi operatorul Bernstein original şi o clasă de operatori de tip King care păstrează funcţiile test e_1 şi e_2. După o prezentare a operatorului de bază Stancu şi a două clase de operatori de tip Stancu, sunt studiate două clase particulare de operatori de tip Schurer-Stancu.

Capitoul 3 începe cu prezentarea operatorului Baskakov original şi continuă cu prezentarea unei clase generale de operatori de tip Baskakov modificaţi. De asemenea, sunt prezentate trei clase particulare de operatori de tip Baskakov modificaţi în sens King.

În Capitolul 4 se studiază operatori de tip continuu, este prezentat operatorul Durrmeyer, şi se continuă cu construcţia claselor particulare de operatori de tip Durrmeyer modificaţi în sens King.

În construcţia acestei lucrări, autorul a încercat să includă prima dată rezultate personale. Deşi tentaţia a fost mare, autorul nu a vrut să prezinte numeroase rezultate existente în acest domeniu, altfel lucrarea s-ar fi transformat într-o amplă sinteză, care nu ar fi fost scopul final al acestei lucrări de doctorat. Astfel, s-au inclus doar rezultatele prezentate în lucrările publicate.

Rezultatele descrise provin din lucrări proprii sau lucrări cu alţi coautori: Ovidiu T. Pop, Petru I. Braica, Anamaria Indrea, Laurian I. Pişcoran. Astfel, au fost publicate opt articole în următoarele reviste

• *Applied Mathematics and Information Sciences*, 2013 ISI Impact Factor: 1.232,

• *Miskolc Mathematical Notes*, 2013 ISI Impact Factor: 0.357,

• *Creative Mathematics and Informatics*,

• *Annals of the University of Craiova*,

• *Acta Universitatis Apulensis* (three articles),

• *Acta Mathematica Universitatis Comenianae.*

Menţionam faptul că autorul a participat la următoarele conferinţe:

1) International Conference on Applied Mathematics, (ICAM 9), a noua ediţie, Baia Mare, 25 - 28 Septembrie 2013. Titlul prezentării "On an operator of Stancu-type with fixed points e_1 and e_2".
2) International Conference on Numerical Analysis and Approximation Theory (NAAT 2014), a treia ediţie, Cluj Napoca, 17 - 20 Septembrie 2014. Titlul prezentării "About a class of linear and positive Stancu-type operators".

3. Rezultate originale

Rezultatele autorului se regăsesc pe parcursul Capitolului 2, Capitolului 3 şi Capitolului 4 după cum urmează:

• Secţiunea 2.2: Lema 2.2.1, Lema 2.2.2, Teorema 2.2.1, Lema 2.2.3, Teorema 2.2.2, Teorema 2.2.3

• Secţiunea 2.4: Lema 2.4.1, Lema 2.4.2, Lema 2.4.3, Lema 2.4.4, Teorema 2.4.1

• Secţiunea 2.5: Teorema 2.5.1, Teorema 2.5.2

• Secţiunea 2.6: Teorema 2.6.1, Teorema 2.6.2, Teorema 2.6.3, Lema 2.6.1, Lema 2.6.2, Teorema 2.6.4, Teorema 2.6.5, Teorema 2.6.6

• Secţiunea 3.2: Teorema 3.2.1, Teorema 3.2.2

• Secţiunea 3.3: Teorema 3.3.1, Teorema 3.3.2, Lema 3.3.1, Lema 3.3.2, Teorema 3.3.3, Teorema 3.3.4, Teorema 3.3.5, Teorema 3.3.6

• Secţiunea 4.2: Lema 4.2.1, Teorema 4.2.1, Teorema 4.2.2, Lema 4.2.2, Teorema 4.2.3, Teorema 4.2.4, Teorema 4.2.5

Pe scurt, ca o abordare sintetică, noile rezultate obţinute în această teză de doctorat se concentrează asupra următoarelor aspecte:

a) sunt construiţi operatori liniari şi pozitivi, care depind de anumiţi parametrii, atât de tip discret cât şi continuu, generalizând astfel unii operatori clasici;
b) sunt investigate proprietăţile noilor operatori, insistându-se pe eroarea de aproximare şi pe comportamentul asimptotic; de asemenea, aceşti operatori au capacitatea de a reproduce funcţiile test Korovkin, de obicei cuplurile (e_0, e_1), (e_0, e_2), (e_1, e_2), fiind vorba în special despre operatorii de tip King.

Cuvinte cheie: operator liniar şi pozitiv, proces de aproximare, modul de continuitate, viteză de convergenţă, formulă de tip Voronovskaja, operator Bernstein, operator Baskakov

Capitolul 1

Preliminarii

1.1 Operatori liniari şi pozitivi

Sunt prezentate noţiuni introductive despre operatori, proprietăţile acestora, noţiunea de proces de aproximare, teoremele Korovkin şi mulţimile Korovkin.

1.2 Module de netezime

Sunt definite modulele de netezime şi sunt prezentate proprietăţile acestora.

1.3 Evaluarea cantitativă a erorii

În această secţiune se prezintă câteva estimări cantitative clasice punctuale sau pentru aproximarea uniformă de către operatorii liniari şi pozitivi.

1.4 Exemple de operatori liniari şi pozitivi

Se dau câteva exemple de operatori liniari şi pozitivi diferiţi faţă de operatorii clasici.

1.5 Operatori de tip King

Se defineşte operatorul introdus de J. P. King în 2003, se prezintă câteva proprietăţi ale acestuia specificându-se noţiuni referitoare la iteratele acestuia şi rezultate privind convergenţa iteratelor.

Capitolul 2

Operatori de tip Bernstein modificaţi în sens King

2.1 Operatorii Bernstein

Se prezintă operatorul Bernstein, se dau proprietăţile acestuia şi se reamintesc formulele de tip Voronovskaja pentru acest operator.

2.2 Un nou tip de operatori Bernstein-King

Această secţiune cuprinde rezultate publicate în *Applied Mathematics and Information Sciences*, No. 6 (1) (2012), 191-197.

În [18], J.P. King defineşte operatorii liniari pozitivi care generalizează operatorii clasici Bernstein. Aici noi definim o nouă clasă de operatori Bernstein-King. Pentru noii operatori se discută unele proprietăţi şi se demonstrează o teoremă de aproximare şi o formulă de tip Voronovskaja.

Se consideră un număr fixat $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 > 2$. Pentru funcţia $f : [0;1] \to R$, se defineşte şirul de operatori $(B_m^* f)_{m \geq m_0}$ prin

$$(2.2.1)\quad \begin{aligned}(B_m^* f)(x) = \frac{(m-1)x}{mx-1}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \\ \times (1-x)^{m-k}\left(x-\frac{1}{m}\right)^k f\left(\frac{k}{m}\right),\end{aligned}$$

pentru orice $m \geq m_0$ şi orice $x \in [(m_0-1)^{-1}, 1]$.

Dacă $m \in N$, $m \geq m_0$, atunci operatorul B_m^* este liniar şi pozitiv.

Lema 2.2.1. (Braica, P.I., Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, [9]) *Fie* $(B_m^*)_{m \in \mathbb{N}}$ *definit prin* (2.2.1). *Identitităţile*

$$(2.2.2)\quad (B_m^* e_0)(x) = \frac{(m-1)x}{mx-1},$$

$$(2.2.3)\quad (B_m^* e_1)(x) = x,$$

$$(2.2.4)\quad (B_m^* e_2)(x) = x^2,$$

$$(2.2.5)\quad (T_{m,0} B_m^*)(x) = \frac{(m-1)x}{mx-1},$$

$$(2.2.6)\quad (T_{m,1} B_m^*)(x) = \frac{mx(x-1)}{mx-1}$$

şi

$$(2.2.7)\quad (T_{m,2} B_m^*)(x) = \frac{m^2x^2(1-x)}{mx-1}$$

sunt adevărate pentru orice $m \in \mathbb{N}$, $m \geq m_0$ *şi orice* $x \in [(m_0-1)^{-1}, 1]$.

Lema 2.2.2. (Braica, P.I., Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, [9]) *Fie* $(B_m^*)_{m\in\mathbb{N}}$ *definit prin* (2.2.1). *Avem*

$$B_0(x) = \lim_{m\to\infty} (T_{m,0}B_m^*)(x) = 1, \tag{2.2.8}$$

$$B_2(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{(T_{m,2}B_m^*)(x)}{m} = x(1-x) \tag{2.2.9}$$

şi

$$(T_{m,0}B_m^*)(x) \le m_0 - 1 = k_0, \tag{2.2.10}$$

$$\frac{(T_{m,2}B_m^*)(x)}{m} \le \frac{m_0}{4} = k_2, \tag{2.2.11}$$

pentru orice $x \in [(m_0-1)^{-1}, 1]$.

Teorema 2.2.1. (Braica, P.I., Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, [9]) *Fie* $(B_m^*)_{m\in\mathbb{N}}$ *definit prin* (2.2.1) *şi* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $[0,1]$.

Atunci

$$\begin{aligned} &|(B_m^*f)(x) - f(x)| \\ &\le |f(x)|\frac{1-x}{mx-1} + \frac{x}{mx-1}\left(m - 1 + \frac{1}{\delta}\sqrt{(m-1)x(1-x)}\right)\omega(f;\delta) \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

şi

$$|(B_m^*f)(x) - f(x)| \le \frac{(m_0-2)M}{m-m_0+1} + \frac{2(m-1)}{m-m_0+1}\omega\left(f; \frac{1}{2\sqrt{m-1}}\right), \tag{2.2.13}$$

pentru orice $\delta > 0, m \in \mathbb{N}, m \ge m_0$ *şi* $x \in [(m_0-1)^{-1}, 1]$, *unde*

$$M = \sup\left\{|f(x)| : x \in \left[(m_0-1)^{-1}, 1\right]\right\}.$$

Lema 2.2.3. (Braica, P.I., Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, [9]) *Fie* $(B_m^*)_{m\in\mathbb{N}}$ *definit prin* (2.2.1) *şi* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $[0,1]$.

Atunci există $m(0)$ *astfel încât*

$$\left|(B_m^* f)(x) - \frac{(m-1)x}{mx-1}f(x)\right| \leq \frac{5m_0-1}{4}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{2.2.14}$$

şi

$$|(B_m^* f)(x) - f(x)| \leq |f(x)|\,\frac{1-x}{mx-1} + \frac{5m_0-1}{4}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{2.2.15}$$

pentru orice $x\in[(m_0-1)^{-1},1]$, $m\in\mathbb{N}$, $m\geq m(0)$.

Teorema 2.2.2. (Braica, P.I., Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, [9]) *Fie* $(B_m^*)_{m\in\mathbb{N}}$ *definit prin* (2.2.1) *şi* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $[0,1]$. *Atunci avem*

$$\lim_{m\to\infty}(B_m^* f)(x) = f(x) \tag{2.2.16}$$

uniform pe $[(m_0-1)^{-1},1]$ *şi există* $m(0)$ *astfel încât*

$$|(B_m^* f)(x) - f(x)| \leq \frac{(m_0-2)M}{m-m_0+1} + \frac{5m_0-1}{4}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{2.2.17}$$

pentru orice $x\in[(m_0-1)^{-1},1]$ *şi orice* $m\in\mathbb{N}$, $m\geq m(0)$.

Teorema 2.2.3. (Braica, P.I., Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, [9]) *Fie* $(B_m^*)_{m\in\mathbb{N}}$ *definit prin* (2.2.1) *şi* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *o funcţie continuă pe* $[0,1]$. *Dacă* $x\in[(m_0-1)^{-1},1]$, f *este de două ori derivabilă pe* $[(m_0-1)^{-1},1]$ *şi* $f^{(2)}$ *este continuă pe* $[(m_0-1)^{-1},1]$, *atunci*

(2.2.18)
$$\lim_{m\to\infty} m\left((B_m^* f)(x) - \frac{(m-1)x}{mx-1}f(x)\right) = (x-1)f^{(1)}(x) + \frac{x(1-x)}{2}f^{(2)}(x)$$

şi

(2.2.19)
$$\lim_{m\to\infty} m\left((B_m^* f)(x) - f(x)\right) = \frac{1-x}{x} f(x) + (x-1) f^{(1)}(x) + \frac{x(1-x)}{2} f^{(2)}(x).$$

2.3 Operatorii Stancu

Se prezintă operatorul introdus de D. D. Stancu [23] în 1969, se formulează proprietăţile acestuia, se dă o teoremă de tip Korovkin şi o formulă de tip Voronovskaja. Toate aceste rezultate sunt deja cunoscute.

2.4 Studiul unui proces general de aproximare de tip Stancu

Rezultatul principal al acestei secţiuni se află în lucrarea [14], apărută în *Acta Mathematica Universitatis Comenianae* 84 (2015), 1, 123-131.

Se introduce o clasă de operatori de tip Stancu, cu proprietatea că păstrează funcţiile test e_1 şi e_2. În această abordare, se dă o teoremă de aproximare a erorii şi se obţine o formulă de tip Voronovskaja.

Fiind dat $m_0 \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_1 = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \geq m_0\}$ şi $0 \leq \alpha \leq \beta$ parameterii reali fixaţi, se consideră funcţiile $a_m : J \longrightarrow \mathbb{R}$, $b_m : J \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $a_m(x) \geq 0$, $b_m(x) \geq 0$ pentru orice $x \in J$, $m \in \mathbb{N}_1$ şi $I = [0,1]$. J va fi definit pe parcurs.

Se definesc operatorii de forma

(2.4.1)
$$(H_m^{(\alpha,\beta)} f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a_m^k(x) b_m^{m-k}(x) \cdot f\left(\frac{k+\alpha}{m+\beta}\right),$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_1$, $x \in J$ şi $f \in E([0,1])$, unde $E([0,1])$ este un spaţiu liniar de funcţii cu valori reale definite pe $[0,1]$.

În ceea ce urmează se impun următoarele condiţii

$$(H_m^{(\alpha,\beta)}e_0)(x) = 1 + u_m(x),\ m \in \mathbb{N}_1,\ x \in J \tag{2.4.2}$$

şi

$$(H_m^{(\alpha,\beta)}e_1)(x) = x + v_m(x),\ m \in \mathbb{N}_1,\ x \in J, \tag{2.4.3}$$

Apoi se obţine

$$a_m(x) = (1 + u_m(x))^{\frac{1}{m}}\left(\frac{m+\beta}{m} \cdot \frac{x + v_m(x)}{1 + u_m(x)} - \frac{\alpha}{m}\right) \tag{2.4.4}$$

şi

$$b_m(x) = (1 + u_m(x))^{\frac{1}{m}}\left(1 - \frac{m+\beta}{m} \cdot \frac{x + v_m(x)}{1 + u_m(x)} + \frac{\alpha}{m}\right), \tag{2.4.5}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_1$ şi $x \in J$.

Avem $I = [0,1]$, $E([0,1]) = C([0,1])$.

Dacă $H_m^{(\alpha,\beta)}e_1 = e_1$, pentru orice $m \in \mathbb{N}_1$, atunci $v_m(x) = 0$. Avem

$$a_m(x) = (1 + u_m(x))^{\frac{1}{m}}\left(\frac{m+\beta}{m} \cdot \frac{x}{1 + u_m(x)} - \frac{\alpha}{m}\right) \tag{2.4.6}$$

şi

$$b_m(x) = (1 + u_m(x))^{\frac{1}{m}}\left(1 - \frac{m+\beta}{m} \cdot \frac{x}{1 + u_m(x)} + \frac{\alpha}{m}\right), \tag{2.4.7}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_1$ şi $x \in J$.

Lema 2.4.1. (**Indrea, D. Adrian**, [14]) *Fie $m \in \mathbb{N}_1$. Următoarele relaţii sunt echivalente*

(i) $a_m(x) \geq 0$ *şi* $b_m(x) \geq 0$,

(ii) $x \in J$ *şi* $J = \left[\frac{\alpha}{m_0+\beta}, \frac{m_0+\alpha}{m_0+\beta}\right]$.

Din $H_m^{(\alpha,\beta)} e_2 = e_2$ şi $v_m(x) = 0$, $m \in \mathbb{N}_1$, se obţine

(2.4.8)
$$(\alpha^2+\alpha m)u_m^2(x) + \Big(m(m+\beta)^2x^2 - (m+\beta)(m+2\alpha)x + 2(\alpha^2+\alpha m)\Big)u_m(x)$$
$$+ (m+\beta)^2x^2 - (m+\beta)(m+2\alpha)x + (\alpha^2+\alpha m) = 0.$$

Relaţia (2.4.8) este o ecuaţie de gradul al doilea în $u_m(x)$, soluţia pozitivă a acesteia fiind

$$u_m(x) = \frac{(m+\beta)(m+2\alpha)x - m(m+\beta)^2x^2 - 2(\alpha^2+\alpha m) + \sqrt{\Delta}}{2(\alpha^2+\alpha m)} \tag{2.4.9}$$

Lema 2.4.2. (**Indrea, D. Adrian**, [14]) *Dacă* $x \in \left[\frac{\alpha}{m_0+\beta}, \frac{m_0+\alpha}{m_0+\beta}\right]$ *şi* $m \in \mathbb{N}_1$, *atunci operatorii* $H_m^{(\alpha,\beta)}$ *sunt liniari şi pozitivi pe* $C([0,1])$.

Lema 2.4.3. (**Indrea, D. Adrian**, [14]) *Dacă* $x \in \left[\frac{\alpha}{m_0+\beta}, \frac{m_0+\alpha}{m_0+\beta}\right]$, *atunci*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} u_m(x) = 0 \tag{2.4.10}$$

şi

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m u_m(x) = \frac{1-x}{x}. \tag{2.4.11}$$

Lema 2.4.4. (**Indrea, D. Adrian**, [14]) *Pentru* $m \in \mathbb{N}_1$ *şi* $x \in \left[\frac{\alpha}{m_0+\beta}, \frac{m_0+\alpha}{m_0+\beta}\right]$, *următoarele identităţi*

$$(T_{m,0}H_m^{(\alpha,\beta)})(x) = 1 + u_m(x), \tag{2.4.12}$$

$$(T_{m,1}H_m^{(\alpha,\beta)})(x) = mxu_m(x) \tag{2.4.13}$$

şi

$$(T_{m,2}H_m^{(\alpha,\beta)})(x) = m^2x^2u_m(x) \tag{2.4.14}$$

sunt adevărate.

Teorema 2.4.1. (**Indrea, D. Adrian**, [14]) *Fie* $(H_m^{(\alpha,\beta)})_{m\in\mathbb{N}}$ *definit prin* (2.4.1) *şi funcţia continuă* $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ *derivabilă de* s *ori pe* $[0,1]$*, având derivata de ordinul* s *continuă pe* $[0,1]$.

Pentru $s=0$ *avem*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} H_m^{(\alpha,\beta)}f = f \tag{2.4.15}$$

uniform pe $J=\left[\frac{\alpha}{m_0+\beta},\frac{m_0+\alpha}{m_0+\beta}\right]$*. Există* $m^*=max(m_0,m(0),m_1)$ *astfel încât*

$$|(H_m^{(\alpha,\beta)}f)(x)-f(x)|\le M\cdot\frac{m_0+\beta}{m\alpha}+\frac{13}{4}\omega\Big(f;\frac{1}{\sqrt{m}}\Big), \tag{2.4.16}$$

pentru orice $x\in\left[\frac{\alpha}{m_0+\beta},\frac{m_0+\alpha}{m_0+\beta}\right], m\in\mathbb{N}, m\ge m^*$*. În cele de mai sus* $M=\sup\limits_{x\in J}|f(x)|$.

Pentru $s=2$*, avem*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m\Big((H_m^{(\alpha,\beta)}f)(x)-f(x)\Big)=\frac{1-x}{x}f(x)+(1-x)f^{(1)}(x)+\frac{x(1-x)}{2}f^{(2)}(x). \tag{2.4.17}$$

2.5 O clasă specială de operatori de tip Stancu-King

Această secţiune conţine rezultate publicate în *Acta Universitatis Apulensis*, No. 31 (2012), 249-256.

Se introduce o clasă particulară de operatori de tip Stancu, care au proprietatea că păstrează funcţiile test e_0 şi e_1 ca şi în cazul operatorului Bernstein. De asemenea, se obţin două teoreme de aproximare a erorii şi două formule de tip Voronovskaja.

Definiţia 2.5.1. *Fie* $f \in C([0,1])$, $\beta \geq 0$ *şi* $m_0 \in \mathbb{N}_0$ *fixat, depinzând doar de* β. *Pentru orice* $m \in \mathbb{N}, m \geq m_0$, *se defineşte operatorul*

$$(2.5.1)\quad (Q_m^\beta f)(x) = \frac{1}{m^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}((m+\beta)x)^k(m-(m+\beta)x)^{m-k} f\left(\frac{k}{m+\beta}\right),$$

unde $x \in \left[0, \frac{m_0}{m_0+\beta}\right]$.

Remarca 2.5.1. *Operatorii* (Q_m^β), $m \geq m_0$, *sunt liniari şi pozitivi. Pentru* $\beta = 0$ *in* (2.5.1), *se obţin operatorii Bernstein.*

Teorema 2.5.1. (**Indrea, D. Adrian**, [15]) *Fie* $(Q_m^\beta)_{m\in\mathbb{N}}$ *definit prin* (2.5.1) *şi* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie derivablă de* s *ori pe* $[0,1]$, *având derivata de ordinul* s *continuă pe* $[0,1]$. *Pentru* $s = 0$, *avem*

$$(2.5.2)\qquad \lim_{m\longrightarrow\infty} Q_m^\beta f = f$$

uniform pe $\left[0, \frac{m_0}{m_0+\beta}\right]$ *şi există* $m^* = \max(m_0, m(0), m(2))$ *astfel încât*

$$(2.5.3)\qquad |(Q_m^\beta f)(x) - f(x)| \leq \frac{9}{4}\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

pentru orice $x \in \left[0, \frac{m_0}{m_0+\beta}\right]$, *orice* $m \in \mathbb{N}$, $m > m^*$.

Teorema 2.5.2. (**Indrea, D. Adrian**, [15]) *Fie* $(Q_m^\beta)_{m\in\mathbb{N}}$ *definit prin* (2.5.1) *şi* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie derivablă de* s *ori pe* $[0,1]$, *având derivata de ordinul* s *continuă pe* $[0,1]$.

(*i*) *Pentru* $s = 2$, *avem*

$$(2.5.4)\qquad \lim_{m\longrightarrow\infty} m((Q_m^\beta f)(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2} f^{(2)}(x)$$

uniform pe $\left[0, \frac{m_0}{m_0+\beta}\right]$ *şi există* $m_1 = \max(m^*, m(4))$ *astfel încât*

$$(2.5.5)\qquad m\left|(Q_m^\beta f)(x) - f(x)\right| \leq \frac{5}{8}M + \frac{39}{32}\omega\left(f^{(2)}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

pentru orice $x \in \left[0, \frac{m_0}{m_0+\beta}\right]$, $m \in \mathbb{N}, m > m^*$, *unde* $M = \max_{x\in[0,1]} |f^{(2)}(x)|$.

(ii) *Pentru* $s = 4$ *avem*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m^2 \left((Q_m^\beta f)(x) - f(x) - \frac{1}{2m}\left(-x + \frac{m}{m+\beta}x\right) f^{(2)}(x) - \frac{1}{6m^3} f^{(3)}(x)(T_{m,3}\ Q_m^\beta)(x)\right) = \frac{3}{24}(x(1-x))^2 f^{(4)}(x), \tag{2.5.6}$$

pentru orice $x \in \left[0, \frac{m_0}{m_0+\beta}\right]$.

2.6 Două clase noi de operatori de tip Schurer-Stancu

Rezultatele acestei secţiuni se bazează pe lucrările [13, 17] apărute în *Acta Universitatis Apulensis*, 42 (2015), 1-8, respectiv în *Creative Mathematics and Informatics*, 24, (2015), No. 1, 61-67.

Se introduce o clasă de operatori de tip Schurer-Stancu. Aceşti operatori reproduc funcţiile test e_0 şi e_1. Se obţin două teoreme de aproximare a erorii şi două formule de tip Voronovskaja.

Fie α număr real, $\alpha \geq 0$, $m_0 \in \mathbb{N}$ fixat.

Se impune condiţia ca $m_0 \geq [\alpha] + 1$. Astfel avem $\frac{\alpha}{m_0} < 1$.

Fie $\mathbb{N}_1 = \{m \in \mathbb{N}_0 | m \geq m_0\}$.

Dacă $m \geq m_0$ atunci $\left[\frac{\alpha}{m_0}; 1\right] \subset \left[\frac{\alpha}{m}; 1\right]$.

Se consideră operatorii

$$\left(Q_m^{*\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{m^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (mx-\alpha)^k (m+\alpha-mx)^{m-k} f\left(\frac{k+\alpha}{m}\right) \tag{2.6.1}$$

pentru orice $f \in C([0, 1+\alpha]), m \in \mathbb{N}_1$ şi orice $x \in \left[\frac{\alpha}{m_0}; 1\right]$.

Remarca 2.6.1. *(i) Operatorii* $(Q_m^{*\alpha})_{m\geq m_0}$ *sunt liniari şi pozitivi.*

(ii) Alegând $\alpha = 0$, *in* (2.6.1), *se obţin operatorii Bernstein.*

Teorema 2.6.1. (**Indrea, D. Adrian**, Indrea, A., [13]) *Fie* $Q_m^{*\alpha},\ m \geq m_0$, *definit prin* (2.6.1). *Dacă* $f \in C([0, 1+\alpha])$, *atunci avem*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} Q_m^{*\alpha} f = f \tag{2.6.2}$$

uniform pe $J = \left[\frac{\alpha}{m_0}; 1\right]$. *Există* $m^* = \max(m_0, m(0), m(2))$ *astfel încât*

$$|(Q_m^{*\alpha} f)(x) - f(x)| \leq \frac{13}{4}\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}\right), \tag{2.6.3}$$

pentru orice $x \in \left[\frac{\alpha}{m_0}; 1\right], m \in \mathbb{N}, m \geq m^*$.

Teorema 2.6.2. (**Indrea, D. Adrian**, Indrea, A., [13]) *Fie* $Q_m^{*\alpha},\ m \geq m_0$, *definit prin* (2.6.1). *Dacă* $f : [0, 1+\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$ *este de două ori derivabilă pe* $[0, 1+\alpha]$, *având derivata de ordinul doi continuă pe* $[0, 1+\alpha]$, *atunci avem*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m((Q_m^{*\alpha} f)(x) - f(x)) = \frac{x(1-x)}{2} f^{(2)}(x) \tag{2.6.4}$$

uniform pe $\left[\frac{\alpha}{m_0}; 1\right]$ *şi există* $m_1 = \max(m^*, m(4))$ *astfel încât*

$$m|(Q_m^{*\alpha} f)(x) - f(x) - \frac{f^{(2)}(x)}{2m^2}(T_{m,2}Q_m^{*\alpha})(x)| \leq \frac{39}{32}\omega\left(f^{(2)}; \frac{1}{\sqrt{m}}\right), \tag{2.6.5}$$

pentru orice $x \in \left[\frac{\alpha}{m_0}; 1\right], m \in \mathbb{N}, m \geq m_1$.

Teorema 2.6.3. (**Indrea, D. Adrian**, Indrea, A., [13]) *Fie* $Q_m^{*\alpha},\ m \geq m_0$, *definit prin* (2.6.1). *Dacă* $f : [0, 1+\alpha] \longrightarrow \mathbb{R}$ *este de patru ori derivabilă pe* $[0, 1+\alpha]$, *având derivata de ordinul patru continuă pe* $[0, 1+\alpha]$, *atunci avem*

(2.6.6)

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m^2\left((Q_m^{*\alpha} f)(x) - f(x) - \frac{x(1-x)}{2m} f^{(2)}(x) - \frac{(2\alpha+1)x^2}{3m} f^{(3)}(x)\right)$$
$$= \frac{\alpha(2x-1)}{2} f^{(2)}(x) + \frac{x(1-x)(1-2x)}{6} f^{(3)}(x) + \frac{x^2(1-x)^2}{8} f^{(4)}(x),$$

pentru orice $x \in \left[\frac{\alpha}{m_0}; 1\right]$.

În continuare se introduce o clasă diferită de operatori de tip Schurer-Stancu cu proprietatea că păstrează funcţiile test e_0 şi e_1. Pentru aceşti operatori se obţine o teoremă de aproximare a erorii şi o formulă de tip Voronovskaja. Scopul principal este de a studia convergenţa iteratelor pentru această nouă clasă de operatori.

Fie $p \in \mathbb{N}$ fixat, $0 < \alpha + p < \beta$ şi funcţiile $a_m, b_m : J \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $a_m(x) \geq 0, b_m(x) \geq 0$ pentru orice $x \in J, m \in \mathbb{N}$. Fie $I = [0, 1+p]$. J va fi precizat pe parcurs.

Se defineşte operatorul de forma

$$\left(S_{m,p}^{(\alpha,\beta)} f\right)(x) = \sum_{k=0}^{m+p} \binom{m+p}{k} a_m^k(x) b_m^{m+p-k}(x) f\left(\frac{k+\alpha}{m+\beta}\right), \tag{2.6.7}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}, x \in J$ şi $f \in E([0, 1+p])$, unde $E([0, 1+p])$ este un spaţiu liniar de funcţii cu valori reale definte pe $[0, 1+p]$.

În ceea ce urmează, se impun condiţiile

$$\left(S_{m,p}^{(\alpha,\beta)} e_0\right)(x) = 1, \ m \in \mathbb{N}, \ x \in J \tag{2.6.8}$$

şi

$$\left(S_{m,p}^{(\alpha,\beta)} e_1\right)(x) = x, \ m \in \mathbb{N}, \ x \in J. \tag{2.6.9}$$

Rezultă

$$a_m(x) = \frac{(m+\beta)x - \alpha}{m+p} \tag{2.6.10}$$

şi

$$b_m(x) = \frac{m+p-(m+\beta)x+\alpha}{m+p}, \tag{2.6.11}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi $x \in J$.

Se consideră $m_0 \in \mathbb{N}$ fixat şi $\mathbb{N}_1 = \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \geq m_0\}$.

Lema 2.6.1. (**Indrea, D. Adrian**, Indrea, A., Braica, P.I.,[17]) *Fie $m \in \mathbb{N}_1$, atunci următoarele relaţii sunt echivalente*

(i) $a_m(x) \geq 0$ and $b_m(x) \geq 0$;

(ii) $x \in J$ and $J = \left[\frac{\alpha}{m_0+\beta}, \frac{m_0+p+\alpha}{m_0+\beta}\right]$.

Considerând relaţiile (2.6.10) şi (2.6.11), operatorul (2.6.7) devine

$$
\begin{aligned}
\left(S_{m,p}^{(\alpha,\beta)} f\right)(x) = \frac{1}{(m+p)^{m+p}} \sum_{k=0}^{m+p} \binom{m+p}{k} ((m+\beta)x-\alpha)^k \\
\times (m+p-(m+\beta)x+\alpha)^{m+p-k} \cdot f\left(\frac{k+\alpha}{m+\beta}\right)
\end{aligned}
\tag{2.6.12}
$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_1, x \in J$ şi $f \in E([0,1+p])$.

Remarca 2.6.2. *Dacă $x \in \left[\frac{\alpha}{m_0+\beta}, \frac{m_0+p+\alpha}{m_0+\beta}\right]$ şi $m \in \mathbb{N}_1$, atunci operatorii $S_{m,p}^{(\alpha,\beta)}$ sunt liniari şi pozitivi.*

Lema 2.6.2. (**Indrea, D. Adrian**, Indrea, A., Braica, P.I., [17]) *Fie $S_{m,p}^{(\alpha,\beta)}$ definit prin* (2.6.12). *Pentru $m \in \mathbb{N}_1$ şi $x \in \left[\frac{\alpha}{m_0+\beta}, \frac{m_0+p+\alpha}{m_0+\beta}\right]$, următoarele identităţi*

$$\left(T_{m,0} S_{m,p}^{(\alpha,\beta)}\right)(x) = 1, \tag{2.6.13}$$

$$\left(T_{m,1} S_{m,p}^{(\alpha,\beta)}\right)(x) = 0, \tag{2.6.14}$$

$$\left(T_{m,2} S_{m,p}^{(\alpha,\beta)}\right)(x) = m^2 \left(\left(S_{m,p}^{(\alpha,\beta)} e_2\right)(x) - x^2\right) \tag{2.6.15}$$

sunt adevărate.

Teorema 2.6.4. (**Indrea, D. Adrian**, Indrea, A., Braica, P.I., [17]) *Fie* $S_{m,p}^{(\alpha,\beta)}$ *definit prin* (2.6.12). *Dacă* $f:[0,1+p]\longrightarrow\mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe* $[0,1]$, *atunci avem*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} S_{m,p}^{(\alpha,\beta)} f = f \tag{2.6.16}$$

uniform pe $J=\left[\frac{\alpha}{m_0+\beta},\frac{m_0+p+\alpha}{m_0+\beta}\right]$ *şi există* $m^*=\max(m_0,m(0))$ *astfel încât*

$$\left|\left(S_{m,p}^{(\alpha,\beta)} f\right)(x)-f(x)\right| \le \frac{9+16\alpha^2+8\alpha}{4}\cdot\omega\left(f,\frac{1}{\sqrt{m}}\right), \tag{2.6.17}$$

pentru orice $x\in\left[\frac{\alpha}{m_0+\beta},\frac{m_0+p+\alpha}{m_0+\beta}\right], m\in\mathbb{N}, m\ge m^*$.

Teorema 2.6.5. (**Indrea, D. Adrian**, Indrea, A., Braica, P.I., [17]) *Fie* $S_{m,p}^{(\alpha,\beta)}$ *definit prin* (2.6.12). *Dacă* $f:[0,1+p]\longrightarrow\mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe* $[0,1]$ *şi de două ori derivabilă pe* $[0,1]$ *având derivata de odinul doi continuă pe* $[0,1]$, *atunci avem*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m\left(\left(S_{m,p}^{(\alpha,\beta)} f\right)(x)-f(x)\right)=\frac{f^{(2)}(x)}{2}x(4\alpha+1-x). \tag{2.6.18}$$

Teorema 2.6.6. (**Indrea, D. Adrian**, Indrea, A., Braica, P.I., [17]) *Fie* $I=[c,d]$. *Fie* $S_{m,p}^{(\alpha,\beta)}, m\in\mathbb{N}_1$, *definit prin* (2.6.12) *astfel încât* $\varphi_{m,0}(c)=\varphi_{m,m+p}(d)=1$. *Dacă* $f\in C([c,d])$, *atunci pentru şirul de iterate* $\left(\left(S_{m,p}^{(\alpha,\beta)}\right)^n\right)_{n\ge 1}$ *are loc*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\left(\left(S_{m,p}^{(\alpha,\beta)}\right)^n f\right)(x)=f(c)+\frac{f(d)-f(c)}{d-c}(x-c), \tag{2.6.19}$$

uniform pe $[c,d]$, *unde* $c=\frac{\alpha}{m+\beta}$, $d=\frac{m+p+\alpha}{m+\beta}$.

Capitolul 3

Operatori Baskakov de tip King

3.1 Operatorii Baskakov

În această secţiune sunt prezentaţi operatorii Baskakov originali şi proprietăţile acestora.

3.2 Studiul unui proces general de aproximare de tip Baskakov

Rezultatele incluse în această secţiune au fost publicate în *Miskolc Mathematical Notes*, 2 (2014), No. 2, 497-508.

În această secţiune se construieşte o clasă generală de operatori liniari şi pozitivi care generalizează operatorii Baskakov. Pentru aceşti operatori se studiază convergenţa lor şi se dă o formulă de tip Vornovskaja.

Fie $m_0 \in \mathbb{N}$ dat şi $\mathbb{N}_1 = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq m_0\}$. Se consideră funcţiile

$\alpha_m : J \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $\beta_m : J \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$\alpha_m(x) > 0,$$
$$\beta_m(x) > 0,$$
$$\beta_m(x) - \alpha_m(x) > 0,$$

pentru orice $x \in J$ şi orice $m \in \mathbb{N}_1$, J va fi precizat ulterior, pentru fiecare caz tratat.

Se defineşte operatorul de forma

$$(P_m f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} \alpha_m^k(x) \beta_m^{-m-k}(x) f\left(\frac{k}{m}\right), \tag{3.2.1}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_1, x \in J$ şi $f \in E([0, +\infty))$, unde $E([0, \infty))$ este un spaţiu liniar de funcţii reale definite pe $[0, \infty)$, pentru care operatorii P_m sunt bine definiţi.

Se impun condiţiile

$$(P_m e_0)(x) = 1 + u_m(x), \tag{3.2.2}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_1$ şi orice $x \in J$, unde $u_m : J \longrightarrow \mathbb{R}, u_m(x) > -1$ şi

$$(P_m e_1)(x) = x + v_m(x), \tag{3.2.3}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_1$ şi orice $x \in J$, unde $v_m : J \longrightarrow \mathbb{R}, v_m(x) > -x$.

Rezultă

$$\alpha_m(x) = \frac{x + v_m(x)}{1 + u_m(x)} (1 + u_m(x))^{-\frac{1}{m}} \tag{3.2.4}$$

şi

$$\beta_m(x) = \left(1 + \frac{x + v_m(x)}{1 + u_m(x)}\right) (1 + u_m(x))^{-\frac{1}{m}}, \tag{3.2.5}$$

$m \in \mathbb{N}_1$, $x \in J$.

Considerând (3.2.4) şi (3.2.5), operatorul (3.2.1) devine

$$(P_m f)(x) = (1+u_m(x)) \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{x+v_m(x)}{1+u_m(x)}\right)^k \times \left(1+\frac{x+v_m(x)}{1+u_m(x)}\right)^{-m-k} f\left(\frac{k}{m}\right), \tag{3.2.6}$$

$m \in \mathbb{N}_1$, $x \in J$, $f \in E([0,+\infty))$.

Presupunem că există şriul $\Big(a_m(x)\Big)_{m\in\mathbb{N}_1}$, $\Big(b_m(x)\Big)_{m\in\mathbb{N}_1}$, astfel încât

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} a_m(x) = \lim_{m\longrightarrow\infty} b_m(x) = 0, \tag{3.2.7}$$

$$|u_m(x)| \leq a_m(x), \tag{3.2.8}$$

$$|v_m(x)| \leq b_m(x), \tag{3.2.9}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_1$ şi orice $x \in K = I \cap J$, K interval compact.

Notăm

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m(v_m(x) - xu_m(x)) = l(x) \tag{3.2.10}$$

şi presupunem că $l : J \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie mărginită pe K.

Folosind (3.2.7)-(3.2.9), dacă

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} u_m(x) = \lim_{m\longrightarrow\infty} v_m(x) = 0, x \in K,$$

atunci obţinem

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m(v_m(x) - xu_m(x))^2 = 0.$$

Aceasta implică faptul că există $m_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$m(v_m(x) - xu_m(x))^2 \leq 1, m \in \mathbb{N}_1, m \geq m_1, x \in K. \tag{3.2.11}$$

Notăm

$$M_1(K) = \sup_{\substack{m\in\mathbb{N}_1\\ x\in K}} a_m(x),\; M_2(K) = \sup_{\substack{m\in\mathbb{N}_1,\\ x\in K}} b_m(x)$$

şi fie $\mathbb{N}_2 = \{m \in \mathbb{N} \mid m \geq \max(m_0, m_1)\}$.

Teorema 3.2.1. (**Indrea, D. Adrian**, Pop, O. T., [16]) *Fie operatorii P_m, $m \geq m_0$, definiţi prin* (3.2.6)*. Dacă $f \in C_2([0, +\infty))$, atunci*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} P_m f = f \tag{3.2.12}$$

uniform pe K.

Există $m(0) \in \mathbb{N}, m(0)$ depinzând de K, astfel încât următoarele inegalităţi au loc

$$|(P_m f)(x) - (1 + u_m(x))f(x)| \leq (k_0 + k_2)\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}\right), \tag{3.2.13}$$

$$|(P_m f)(x) - f(x)| \leq |u_m(x)| \cdot |f(x)| + (k_0 + k_2)\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{3.2.14}$$

şi

$$|(P_m f)(x) - f(x)| \leq a_m(x)M + (k_0 + k_2)\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{3.2.15}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_2, m \geq m(0)$ şi $x \in K$, unde

$$M = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}.$$

Teorema 3.2.2. (**Indrea, D. Adrian**, Pop, O. T., [16]) *Fie operatorii P_m, $m \geq m_0$, definiţi prin* (3.2.6)*. Dacă $f \in C_2([0, +\infty))$, f este de două* *ori derivabilă pe K şi $f^{(2)}$ este continuă pe K, atunci următoarea relaţie este adevărată*

(3.2.16)
$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m\left((P_m f)(x)-(1+u_m(x))f(x)\right)=l(x)f^{(1)}(x)+\frac{x(1+x)}{2}f^{(2)}(x)$$

pentru orice $m\in\mathbb{N}_1$, $x\in K$.

3.3 Clase de operatori de tip Baskakov

A. Prima clasă

Se consideră $K=[a,b]$, unde $a>0$. În acest caz $J=[0,+\infty)$ şi $m_0=1$, $\mathbb{N}_1=\mathbb{N}$. Dacă operatorii, $P_m, m\in\mathbb{N}$, reproduc e_0 şi e_1, avem

$$P_m e_0=e_0 \text{ şi } P_m e_1=e_1,$$

pentru orice $m\in\mathbb{N}$. Considerând (3.2.2) şi (3.2.3), rezultă că

$$u_m(x)=v_m(x)=0 \text{ şi } l(x)=0$$

pentru orice $m\in\mathbb{N}$ şi orice $x\in[0,+\infty)$.

În acest caz, se obţine din nou operatorul clasic Baskakov. Astfel

$$a_m(x)=b_m(x)=0,$$

pentru orice $m\in\mathbb{N}, x\in[a,b]$, $k_0=1$ şi $k_2=b(1+b)+2$.

Teorema 3.3.1. (**Indrea, D. Adrian**, Pop, O. T., [16]) *Fie operatorii P_m, $m\geq m_0$, definiţi prin* (3.2.6). *Dacă $f\in C_2([0,+\infty))$, atunci*

(3.3.1)
$$\lim_{m\longrightarrow\infty} P_m f=f$$

uniform pe un interval compact $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ *şi există* $m(0) \in \mathbb{N}$, $m(0)$ *depinzând de* $K = [a,b]$ *astfel încât*

$$|(P_m f)(x) - f(x)| \leq (3 + b + b^2)\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}\right), \tag{3.3.2}$$

$m \in \mathbb{N}_2, m \geq m(0), x \in [a,b]$.

Teorema 3.3.2. (**Indrea, D. Adrian**, Pop, O. T., [16]) *Fie operatorii* P_m, $m \geq m_0$, *definiţi prin* (3.2.6). *Dacă* $f \in C_2([0,+\infty))$, *f este de două ori derivabilă pe* $[a,b]$ *şi* $f^{(2)}$ *este continuă pe* $[a,b]$, *atunci are loc următoarea identitate*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} m((P_m f)(x) - f(x)) = \frac{x(1+x)}{2} f^{(2)}(x),\ x \in [a,b]. \tag{3.3.3}$$

B. A doua clasă

Pentru al doilea tip de operatori se consideră $J = [0,+\infty)$, $m_0 = 1$, $\mathbb{N}_1 = \mathbb{N}$. Deoarece $P_m e_0 = e_0$ şi $P_m e_2 = e_2$ pentru orice $m \in \mathbb{N}$, luând în considerare relaţia (3.2.2), rezultă $u_m(x) = 0$ şi

$$(m+1)(x + v_m(x))^2 + (x + v_m(x)) - mx^2 = 0 \tag{3.3.4}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}$ şi orice $x \in [0,+\infty)$.

Din relaţia (3.3.4) se obţine $v_m(x) = \frac{\sqrt{4m(m+1)x^2+1}-1}{2(m+1)} - x$, iar operatorii (3.2.6) devin

$$\begin{aligned}(P_m f)(x) = &\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{\sqrt{4m(m+1)x^2+1}-1}{2(m+1)}\right)^k \\ &\times \left(1 + \frac{\sqrt{4m(m+1)x^2+1}-1}{2(m+1)}\right)^{-m-k} f\left(\frac{k}{m}\right),\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

$m \in \mathbb{N},\ x \in [0,+\infty),\ f \in C_2([0,+\infty))$.

Lema 3.3.1. (**Indrea, D. Adrian**, Pop, O. T., [16]) *Următoarele relaţii sunt adevărate*

$$v_m(x) \leq \frac{\sqrt{4m(m+1)a^2+1}-1}{2(m+1)} - a,\ m \in \mathbb{N},\ x \in K = [a,b], \tag{3.3.6}$$

$$\frac{\sqrt{4m(m+1)a^2+1}-1}{2(m+1)} - a \leq \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{16}} - a,\ m \in \mathbb{N}. \tag{3.3.7}$$

Lema 3.3.2. (**Indrea, D. Adrian**, Pop, O. T., [16]) *Are loc următoarea relaţie*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} m v_m(x) = -\frac{1+x}{2}, \tag{3.3.8}$$

unde $x \in K$*.*

Teorema 3.3.3. (**Indrea, D. Adrian**, Pop, O. T., [16]) *Fie operatorii* P_m*,* $m \geq m_0$*, definiţi prin* (3.3.5)*. Pentru orice* $f \in C_2([0,+\infty))$ *rezultă*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} P_m f = f \tag{3.3.9}$$

uniform pe intervalul compact $[a,b]$ *şi există* $m(0) \in \mathbb{N}$*,* $m(0)$ *depinzând de* b*, astfel încât*

(3.3.10)

$$|(P_m f)(x) - f(x)| \leq (3 + b(1+b))\, \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}\right), m \in \mathbb{N}_2, m \geq m(0), x \in [a,b].$$

Teorema 3.3.4. (**Indrea, D. Adrian**, Pop, O. T., [16]) *Fie operatorii* P_m*,* $m \geq m_0$*, definiţi prin* (3.3.5)*. Dacă* $f \in C_2([0,+\infty))$*,* $x \in [a,b]$*,* f *este de două ori derivabilă pe* $[a,b]$ *şi* $f^{(2)}$ *este continuă pe* $[a,b]$ *atunci*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} m((P_m f)(x) - f(x)) = -\frac{1+x}{2} f^{(1)}(x) + \frac{x(1+x)}{2} f^{(2)}(x). \tag{3.3.11}$$

C. A treia clasă

Pentru ultimul caz se consideră $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq 2$ un număr fixat şi $J = [(m_0 - 1)^{-1}, +\infty)$. Dacă $P_m e_1 = e_1$, atunci $v_m(x) = 0$, pentru orice $x \in [(m_0 - 1)^{-1}, +\infty)$.

Din $P_m e_1 = e_1$ şi $P_m e_2 = e_2$, se obţine

$$\frac{m+1}{m} \cdot \frac{x^2}{1 + u_m(x)} + \frac{x}{m} = x^2, \ m \in \mathbb{N}_1$$

şi

(3.3.12) $$u_m(x) = \frac{x+1}{mx-1}, \ m \in \mathbb{N}_1 \ , \ x \in \Big[(m_0 - 1)^{-1}, +\infty\Big) .$$

Operatorii din relaţia (3.2.6) devin

(3.3.13)
$$(P_m f)(x) = \frac{(m+1)x}{mx-1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{mx-1}{m+1}\right)^k \left(1 + \frac{x-1}{m+1}\right)^{-m-k} f\left(\frac{k}{m}\right)$$

pentru $m \in \mathbb{N}_1$, $x \in [(m_0 - 1)^{-1}, +\infty)$ şi $f \in C_2([0, +\infty))$.

În concordanţă cu relaţiile (3.2.7), (3.2.9) şi (3.2.10), avem

$$b_m(x) = 0, \ l(x) = -1 - x,$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_1, x \in [(m_0 - 1)^{-1}, +\infty)$. De asemenea, se obţine

$$u_m(x) \leq \frac{m_0}{m - m_0 + 1} = a_m(x)$$

pentru orice $x \in [(m_0 - 1)^{-1}, b]$ şi $M_2\left([(m_0 - 1)^{-1}, b]\right) = 0$. În consecinţă,

$$k_0 = 1 + m_0, \ k_2 = b(1+b) + 2 \ \text{ and } \ M_1\left(\Big[(m_0 - 1)^{-1}, b\Big]\right) = m_0.$$

Teorema 3.3.5. (**Indrea, D. Adrian**, Pop, O. T., [16]) *Fie* $P_m, \ m \geq m_0$, *definit prin* (3.3.13). *Pentru orice* $f \in C_2([0, +\infty))$ *rezultă*

(3.3.14) $$\lim_{m \longrightarrow \infty} P_m f = f$$

uniform pe intervalul compact $[(m_0-1)^{-1}, b]$ *şi există* $m(0) \in \mathbb{N}$ *depinzând de* b*, astfel încât*

$$|(P_m f)(x) - f(x)| \leq \frac{m_0}{m - m_0 + 1} M\left(\left[(m_0-1)^{-1}, b\right]\right) \tag{3.3.15}$$
$$+ (3 + m_0 + b(1+b))\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_2$*,* $m \geq m(0)$ *şi* $x \in [(m_0-1)^{-1}, b]$*. În cele de mai sus* $M\left([(m_0-1)^{-1}, b]\right) = \sup\left\{|f(x)| \mid x \in [(m_0-1)^{-1}, b]\right\}$.

Teorema 3.3.6. (**Indrea, D. Adrian**, Pop, O. T., [16]) *Fie* $P_m,\ m \geq m_0$*, definit prin* (3.3.13)*. Dacă* $f \in C_2([0, +\infty))$*,* $x \in [(m_0-1)^{-1}, b]$*,* f *este de două ori derivabilă pe* $[(m_0-1)^{-1}, b]$ *şi* $f^{(2)}$ *este continuă pe* $[(m_0-1)^{-1}, b]$*, atunci*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m((P_m f)(x) - f(x)) = \frac{1+x}{x} f(x) - (1+x) f^{(1)}(x) + \frac{x(1+x)}{2} f^{(2)}(x). \tag{3.3.16}$$

Capitolul 4

Operatori Durrmeyer de tip King

4.1 Operatorii Durrmeyer

În această secţiune este prezentat operatorul Durrmeyer şi proprietăţile lui.

4.2 Clase de operatori de tip Durrmeyer-King

Rezultatele principale ale acestei secţiuni se bazează pe [20], publicată în *Annals of the University of Craiova*, Math. Comp. Sci. Ser. 39 (2012), No. 2, 288-298.

Sunt obţinute trei clase de operatori liniari şi pozitivi care păstrează exact două funcţii din mulţimea $\{e_0, e_1, e_2\}$. Pentru fiecare clasă de operatori, sunt stabilite rezultate privind convergenţa uniformă, estimarea erorii cu ajutorul modulului de continuitate de speţa întâi şi formule de tip Voronovskaja.

Pornind de la ideea construcţiei operatorilor Durrmeyer, se consideră operatorii generali de următoarea formă

$$(Q_m f)(x) = (m+1) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (\alpha_m(x))^k (\beta_m(x))^{m-k} \int_0^1 p_{m,k}(t) f(t) dt, \tag{4.2.1}$$

unde $x \in J$, $m \in \mathbb{N}_1$ şi $f \in L_1([0,1])$.

Remarca 4.2.1. *Operatorii Q_m, $m \in \mathbb{N}_1$ sunt liniari şi pozitivi.*

A. Prima clasă

În cele ce urmează se construieşte un şir de operatori de tip Durrmeyer definiţi ca şi în relaţia (4.2.1), care păstrează funcţiile test e_0 şi e_1.

Se impun condiţiile $(Q_m e_0)(x) = e_0(x)$ şi $(Q_m e_1)(x) = e_1(x)$; se obţine

$$\alpha_m(x) = \frac{(m+2)x - 1}{m}, \tag{4.2.2}$$

$$\beta_m(x) = \frac{m+1-(m+2)x}{m}, \tag{4.2.3}$$

pentru orice $x \in J$ şi $m \in \mathbb{N}_1$.

Lema 4.2.1. (Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, Braica, P.I., [20]) *Are loc următoarea incluziune*

$$\left[\frac{1}{m_0+2}, \frac{m_0+1}{m_0+2}\right] \subset \left[\frac{1}{m+2}, \frac{m+1}{m+2}\right] \tag{4.2.4}$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}_1$.

Remarca 4.2.2. *Vom considera $J = \left[\frac{1}{m_0+2}, \frac{m_0+1}{m_0+2}\right]$. Astfel, pentru α_m, β_m definite în* (4.2.2) *şi* (4.2.3) *avem $\alpha_m(x) \geq 0$ şi $\beta_m(x) \geq 0$, pentru orice $x \in J$ şi $m \in \mathbb{N}_1$.*

Luând în considerare remarca anterioară, se construieşte şirul de operatori Durrmeyer $(Q_{1,m})_{m\geq m_0}$. Dacă $m \in \mathbb{N}_1$, definim operatorul

$$(Q_{1,m}f)(x) = \frac{m+1}{m^m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}((m+2)x-1)^k \times (m+1-(m+2)x)^{m-k}\int_0^1 p_{m,k}(t)f(t)dt, \tag{4.2.5}$$

pentru orice $x \in \left[\frac{1}{m_0+2}, \frac{m_0+1}{m_0+2}\right]$, $f \in L_1([0,1])$.

Teorema 4.2.1. (Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, Braica, P.I., [20]) *Fie* $Q_{1,m}$, $m \geq m_0$, *definit prin* (4.2.5). *Dacă* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă pe* $[0,1]$, *atunci*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} Q_{1,m}f = f \tag{4.2.6}$$

uniform pe J *şi există* $m(0) \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|(Q_{1,m}f)(x) - f(x)| \leq \frac{5}{2}\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}\right) \tag{4.2.7}$$

pentru orice $x \in J$ *şi* $m \in \mathbb{N}_1, m \geq m(0)$.

Teorema 4.2.2. (Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, Braica, P.I., [20]) *Fie* $Q_{1,m}$, $m \geq m_0$, *definit prin* (4.2.5). *Dacă* $f \in C([0,1]), x \in J, f$ *derivabilă de două ori pe* $[0,1]$ *şi* $f^{(2)}$ *este continuă pe* $[0,1]$, *atunci*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m((Q_{1,m}f)(x) - f(x)) = x(1-x)f^{(2)}(x), \tag{4.2.8}$$

pentru orice $x \in J$.

B. A doua clasă

Se construieşte un şir de operatori Durrmeyer care reproduc funcţiile test e_0 şi e_2.

Se impun condiţiile $(Q_m e_0)(x) = e_0(x)$ şi $(Q_m e_2)(x) = e_2(x)$; se obţine

$$\alpha_m(x) = \frac{-2m + \sqrt{\delta_m(x)}}{m(m-1)}, \quad \beta_m(x) = \frac{m^2 + m - \sqrt{\delta_m(x)}}{m(m-1)}, \tag{4.2.9}$$

unde

$$\delta_m(x) = m(2m + 2 + (m-1)(m+2)(m+3)x^2), \tag{4.2.10}$$

pentru $x \in J$ şi $m \in \mathbb{N}_1$.

Lema 4.2.2. (Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, Braica, P.I., [20]) *Fie* $m \in \mathbb{N}_1$. *Atunci* $\beta_m(x) \geq 0$ *pentru* $x \geq 0$ *dacă şi numai dacă*

$$0 \leq x \leq \sqrt{\frac{m+1}{m+3}}. \tag{4.2.11}$$

Remarca 4.2.3. *În continuare se consideră* $J = \left[\sqrt{\frac{2}{(m_0+2)(m_0+3)}}, \sqrt{\frac{m_0+1}{m_0+3}}\right]$. *Astfel, pentru* α_m, β_m *definite de relaţia* (4.2.9) *avem* $\alpha_m(x) \geq 0$ *şi* $\beta_m(x) \geq 0$, *pentru orice* $x \in J$ *şi* $m \in \mathbb{N}_1$.

Dacă $m \in \mathbb{N}_1$ şi $f \in L_1([0,1])$, se defineşte operatorul

$$(Q_{2,m}f)(x) = \frac{m+1}{(m(m-1))^m} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \left(-2m + \sqrt{\delta_m(x)}\right)^k \times \left(m^2 + m - \sqrt{\delta_m(x)}\right)^{m-k} \cdot \int_0^1 p_{m,k}(t) f(t) dt \tag{4.2.12}$$

pentru orice $x \in J$.

Teorema 4.2.3. (Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, Braica, P.I., [20]) *Fie* $Q_{2,m}$, $m \geq m_0$, *definit prin* (4.2.12).

(i) Fie $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe [0,1]. Atunci

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} Q_{2,m} f = f \tag{4.2.13}$$

uniform pe J şi există $m(0) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$|(Q_{2,m} f)(x) - f(x)| \leq \frac{5}{2} \omega \left(f; \frac{1}{\sqrt{m}} \right) \tag{4.2.14}$$

pentru orice $x \in J$ şi $m \in \mathbb{N}_1, m \geq m(0)$.

(ii) Dacă $f \in C([0,1]), x \in J$, f este de două ori derivabilă pe $[0,1]$ şi $f^{(2)}$ este continuă pe $[0,1]$, atunci

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} m((Q_{2,m} f)(x) - f(x)) = (x-1) f^{(1)}(x) + x(1-x) f^{(2)}(x). \tag{4.2.15}$$

C. A treia clasă

În final se construieşte un şir de operatori Durrmeyer definit prin (4.2.1) care păstrează funcţiile test e_1 şi e_2.

Se impun condiţiile

$$(Q_m e_1)(x) = e_1(x)$$

şi

$$(Q_m e_2)(x) = e_2(x).$$

Alegem $t_m(x) = \alpha_m(x) + \beta_m(x)$, se obţine

$$\alpha_m(x) = \frac{(m+2)}{m} \frac{x}{t_m^{m-1}(x)} - \frac{1}{m} t_m^m(x), \beta_m(x) = t_m(x) - \alpha_m(x) \tag{4.2.16}$$

şi următoarea ecuaţie în $t_m^m(x)$

$$\begin{aligned} (m+1) t_m^{2m}(x) + (m(m+3)(m+2)x^2 - 2(m+1)(m+2)x) t_m^m(x) \\ + (1-m)(m+2)^2 x^2 = 0. \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

Pentru această ecuaţie avem

$$\Delta_m = (m+2)^2 m x^2 (8(m+1) - 4(m+1)(m+3)x + m(m+3)^2 x^2) \geq 0, \tag{4.2.18}$$

pentru orice $x \in J$ şi $m \in \mathbb{N}_1$.

Fixăm $\delta_m(x) = m\left(8(m+1) - 4(m+1)(m+3)x + m(m+3)^2 x^2\right)$, pentru orice $x \in J$ şi $m \in \mathbb{N}_1$.

Deoarece $m \geq 2$, avem

$$(1-m)(m+2)^2 x^2 \leq 0 \tag{4.2.19}$$

şi astfel ecuaţia (4.2.17) are exact o soluţie pozitivă

$$t_m^m(x) = \frac{(m+2)x\left(2(m+1) - m(m+3)x + \sqrt{\delta_m}\right)}{2(m+1)}. \tag{4.2.20}$$

Remarca 4.2.4. *Fixăm*

$$J = \left[\frac{2}{m_0+3}, \frac{m_0+2}{m_0+3}\right] \subset \left[\frac{2}{m+3}, \frac{m+2}{m+3}\right] \subset [0,1]. \tag{4.2.21}$$

Dacă $m \in \mathbb{N}_1$ şi $f \in L_1([0,1])$ se defineşte operatorul

$$(Q_{3,m}f)(x) = (m+1)\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (\alpha_m(x))^k (\beta_m(x))^{m-k} \int_0^1 p_{m,k}(t) f(t)\,dt, \tag{4.2.22}$$

unde $\alpha_m(x)$ şi $\beta_m(x)$ sunt date de relaţiile (4.2.16), pentru orice $x \in J = \left[\frac{2}{m_0+3}, \frac{m_0+2}{m_0+3}\right]$.

Teorema 4.2.4. (Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, Braica, P.I., [20]) *Fie operatorii* $Q_{3,m}$, $m \in \mathbb{N}$, *definiţi prin* (4.2.22). *Dacă* $f \in C([0,1])$, *atunci*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} (Q_{3,m}f)(x) = f(x) \tag{4.2.23}$$

uniform pe J *şi există* $m(0) \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$|(Q_{3,m}f)(x) - f(x)| \leq \frac{7}{2}\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}\right), \tag{4.2.24}$$

pentru orice $x \in J$ *şi* $m \in \mathbb{N}_1, m \geq m(0)$.

Teorema 4.2.5. (Pop, O. T., **Indrea, D. Adrian**, Braica, P.I., [20]) *Fie operatorii* $Q_{3,m}, m \in \mathbb{N}$, *definiţi prin* (4.2.22). *Dacă* $f \in C([0,1])$, $x \in J$, f *este de două ori derivabilă pe* $[0,1]$ *şi* $f^{(2)}$ *este continuă pe* $[0,1]$, *atunci*

$$\lim_{m\longrightarrow\infty} m((Q_{3,m}f)(x)-f(x)) = \frac{2(1-x)}{x}f(x)+2(x-1)f^{(1)}(x)+x(x-1)f^{(2)}(x). \tag{4.2.25}$$

Bibliografie selectivă

[1] Agratini, O., *Approximation by linear operators*, Presa Universitară Clujeană, Cluj Napoca, 2000 (in Romanian).

[2] Agratini, O., Rus, I.A., *Iterates of a class of discrete linear operators via contraction principle*, Comment. Math. Univ. Carolin., 44 (2003), 555-563.

[3] Altomare, F., Campiti, M., *Korovkin Type Approximation Theory and its Applications*, Walter de Gruyter Studies in Math., Vol. 17, de Gruyter & Co., Berlin, 1994.

[4] Baskakov, V., *An example of sequence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nouk. SSSR, 113 (1957), 249-251.

[5] Bărbosu, D., *Polynomial Approximation by Means of Schurer-Stancu type operators*, Ed. Univ. de Nord Baia Mare, 2006.

[6] Bernstein, S.N., *Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur la calcul de probabilités*, Comm. Kharkov Math. Soc., 13 (1912), 1-2.

[7] Birou, M.M., *A Bernstein-Durrmeyer operator which preserves* e_0 *and* e_j, Applied Mathematics and Computation, 250 (2015) 1-11.

[8] Braica, P. I., Pişcoran, L.I., **Indrea, D. Adrian**, *Graphical lectures of some King type operators*, Acta Univ. Apulensis, No. 34 (2013), 163-171.

[9] Braica, P.I., Pop, O.T., **Indrea, D. Adrian**, *About a King-type operator*, Appl. Math. Inf. Sci, No. 6 (1) (2012), 191-197.

[10] Coman, Gh., Chiorean, I., Cătinaş, T., *Numerical Analysis, An Advanced Course*, Presa Universitară Clujeană, Cluj Napoca, 2007.

[11] Durrmeyer, J.L., *Une formule d' inversion de la transformée de Laplace: Application à la théorie des moments, Thése de 3 cycle*, Faculté des Sciences de l' Université de Paris, 1967.

[12] Gavrea, I., Ivan, M., *The Iterates of Positive Linear Operators Preserving Constants*, Appl. Math. Letters, Vol. 24 (2011), No. 12, 2068-2071.

[13] **Indrea, D. Adrian**, *A particular class of linear and positive Stancu-type operators*, Acta Univ. Apulensis, 31 (2012), 249-256.

[14] **Indrea, D. Adrian**, *On an operator of Stancu-type with fixed points* e_1 *and* e_2, Acta Math. Univ. Comenianae, 84 (2015), 1, 123-131.

[15] **Indrea, D. Adrian**, Indrea, A., *About a class of linear and positive Stancu-type operators*, Acta Univ. Apulensis, 42, (2015), 1-8.

[16] **Indrea, D. Adrian**, Pop, O.T., *Some general Baskakov type operators*, Miskolc Math. Notes, 2 (2014), No. 2, 497-508.

[17] **Indrea, D. Adrian**, Indrea, A., Braica, P.I., *Note on a Schurer-Stancu-type operator*, Creative Mathematics and Informatics, 24 (2015), No. 1, 61 - 67.

[18] King, J.P., *Positive linear operators which preserve x^2*, Acta. Math. Hungar., 99 (2003), 203-208.

[19] Mamedov, R.G., *On the order of approximation functions by sequences of linear positive operators*, Dokl. Akad. Nouk. SSSR, 128 (1959), 674-676 (in Russian).

[20] Pop, O.T., **Indrea, D. Adrian**, Braica, P.I., *Durrmeyer operators of King-type*, Annals of the University of Craiova, Math. Comp. Sci. Ser. 39 (2012), No. 2, 288-298.

[21] Schurer, F., *Linear positive operators in approximation theory*, Math. Inst. Techn. Univ. Delft Report, 1962.

[22] Shisha, O., Mond, B., *The degree of convergence of linear positive operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 60 (1968), 1196-1200.

[23] Stancu, D.D., *Asupra unei generalizări a polinoamelor lui Bernstein*, Studia Universitatis Babeş-Bolyai, 14 (1969), 2, 31-45.

[24] Stancu, D.D., Coman, Gh., Agratini, O., Trâmbiţaş, R., *Numerical Analysis and Approximation Theory*, 1, Presa Universitară Clujeană, Cluj Napoca, 2001 (in Romanian).

[25] Tarabie, S., *On Jain-Beta Linear Operators*, Appl. Math. Inf. Sci., 6 (2012), No. 2, 213-216.