Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

Rezumatul Tezei de Doctorat

ABORDAREA VARIAŢIONALĂ A ECHILIBRULUI STACKELBERG

Conducător ştiinţific
Prof. Dr. Alexandru Kristály

Doctorand
Szilárd Nagy

Cluj-Napoca, 2015

Cuprins

Introducere

Modelul de competiţie Stackelberg este un joc în care jucătorul lider (leader) face primul pas, iar jucătorul însoţitor (follower) reacţionează la strategia acestuia. Pentru a rezolva acest joc, se utilizează *metoda inducţiei inverse*: primul pas este găsirea răspunsului optim din partea jucătorului însoţitor considerând strategia liderului ca un *parametru*; după aceea, având acest răspuns parametric, urmează alegerea celei mai bune strategii din partea liderului. Din acest joc reiese faptul că liderul este tot timpul în avantaj, iar însoţitorul trebuie neapărat să reacţioneze la pasul primului jucător căci altfel, jocul se reduce la modelul Nash clasic. În modelul Nash, cei doi jucători sunt la acelaşi nivel, în timp ce în modelul Stackelberg, jucătorii sunt subordonaţi unul faţă de celălalt. Câteva rezultate de comparaţie pot fi citite în lucrările R. Amir şi I. Grilo [2], A.J. Novak, G. Feichtinger şi G. Leitmann [53], şi W. Stanford [62]. De exemplu, în lucrarea [53], autorii demonstrează că modelul Stackelberg poate descrie eficient lupta împotriva acţiunilor teroriste (teroriştii fiind liderii care iniţiază acţiunea, iar însoţitorii sunt oficialităţile).

Obiectivul tezei este de a prezenta o abordare variaţională a echilibrului Stackelberg, concentrându-se în primul rând pe atitudinea jucătorului însoţitor, folosind elemente din teoria calculului variaţional. Deoarece strategia jucătorului însoţitor este minimizarea pierderii (ce depinde de strategia liderului), vom aplica mai multe metode şi rezultate din teoria inegalităţilor variaţionale, analiza nenetedă şi geometria riemanniană. Această abordare este motivată de:

- *Inegalităţi variaţionale.* Deoarece vrem să minimizăm nişte funcţii de pierdere, este natural să utilizăm elemente din teoria punctului critic (neneted) şi teoria inegalităţilor variaţionale. Exemple simple confirmă acest procedeu; de exemplu, dacă $f(x) = x$ pentru $x \in [0, 1]$, nu există niciun punct critic în sensul clasic, dar inegalitatea variaţională $f'(x_0)(x-x_0) \geq 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$ are o soluţie unică $x_0 = 0$, care este şi minimul funcţiei f pe mulţimea $[0, 1]$. Conceptul potrivit pentru a trata aceste fenomene neliniare este garantat de *funcţionalele de tip Motreanu-Panagiotopoulos*, care sunt funcţii local Lipschitz perturbate de o funcţie proprie, convexă şi inferior semicontinuă (precum funcţia indicator a unei mulţimi convexe).

- *Geometria riemanniană.* Există anumite jocuri/probleme unde mulţimile de strategii nu sunt convexe în sensul clasic (euclidian), dar sunt convexe în raport cu o metrică riemanniană. O clasă specială de spaţii Riemann unde se poate elabora teoria echilibrului Stackelberg şi Nash este dată de *varietăţile Hadamard* (varietăţi riemanniene simplu conexe, complete având curbura secţională nepozitivă).

Teza este structurată în patru părţi.

În primul capitol prezentăm acele noţiuni şi rezultate care sunt folosite pe parcursul tezei. În particular, reamintim principiul variaţional al lui Ekeland, teoreme de punct fix, elemente din analiza neliniară şi analiza multivocă, elemente din teoria punctului critic neneted şi elemente din geometria riemanniană.

În capitolul doi studiem existenţa şi localizarea punctelor de echilibru Stackelberg pentru doi jucători, folosind inegalităţi variaţionale şi teoreme de punct fix; în acest caz, funcţiile de pierdere nu trebuie neapărat să fie netede. Dacă mulţimile de strategii sunt *compacte*, stabilim un rezultat de existenţă pentru *răspunsul variaţional Stackelberg* folosind teorema de punct fix a lui Begle pentru aplicaţii multivoce. Tot aici arătăm şi existenţa unei funcţii de pierdere pentru care echilibrul Stackelberg există (şi este calculat explicit), în timp ce mulţimea punctelor de echilibru Nash este vidă. Dacă mulţimile de strategii sunt *necompacte*, demonstrăm unicitatea punctelor de echilibru Stackelberg în anumite condiţii, folosind sisteme dinamice disrete şi continue, ambele convergând exponenţial către unicul punct din mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg. Rezultatele în acest capitol sunt bazate pe lucrarea Sz. Nagy [49] (în care prezentarea este făcută în cazul neted).

În capitolul trei sunt extinse rezultatele din capitolul doi pentru mulţimi de strategii *curbate*. Fiind inspiraţi de lucrările lui A. Kristály [36, 37], presupunem că mulţimile de strategii sunt submulţimi geodezic convexe ale unor varietăţi riemanniene finit dimensionale. Pentru a obţine rezultate calitative, considerăm varietăţi de tip Hadamard care au două proprietăţi esenţiale: neexpansivitatea proiecţiei metrice şi proprietatea Moskovitz-Dines (numită şi proprietatea de unghi obtuz). Vom considera mulţimi strategice *compacte* şi *necompacte* pentru a stabili rezultate de existenţă, de localizare şi de unicitate pentru elementele din mulţimea de *răspuns variaţional Stackelberg*. Remarcăm faptul că prezenţa structurii de varietate Hadamard joacă un rol esenţial în argumentele noastre nu numai din punct de vedere analitic (anumite estimări sunt bazate pe teorema de comparaţie a lui Rauch şi pe proprietăţi de bază ale proiecţiei metrice) ci şi din punct de vedere geometric. Într-adevăr, conform rezultatelor din lucrarea A. Kristály [37], cele două proprietăţi amintite mai sus ale proiecţiei metrice caracterizează spaţiile Hadamard în clasa varietăţilor riemanniene simplu conexe şi complete. Rezultatele din acest capitol apar în lucrarea A. Kristály şi Sz. Nagy [38].

Capitolul patru tratează rezultate de multiplicitate pentru elementele din mulţimea de răspunsuri variaţionale Stackelberg. În literatura clasică sunt exemple în care mulţimea de răspunsuri variaţionale Stackelberg are un singur element, adică răspunsul însoţitorului este unic determinat. Pe de altă parte, există situaţii în care unicitatea răspunsului nu mai este valabilă. Obiectivul acestui capitol este determinarea unei clase de funcţii de pierdere în vederea garantării a trei răspunsuri distincte variaţionale Stackelberg. Această clasă de funcţii conţine un parametru real, care joacă un rol important în rezolvarea problemei. Într-adevăr, dacă parametrul este destul de mic (cvantificat), demonstrăm că însoţitorul are numai răspunsul nul (adică, nu este implicat activ în joc), iar când parametrul depăşeşte un anumit prag, însoţitorul are la dispoziţie cel puţin trei variante de răspunsuri variaţionale. Pentru a demonstra aceste rezultate, vom utiliza teoria punctului critic pentru funcţionale de tip Motreanu-Panagiotopoulos (minimizare globală, forma nenetedă a teoremei trecătorii montane, condiţia Palais-Smale nenetedă). Exemple numerice arată optimalitatea rezultatelor teoretice de mai sus. Aceste rezultate sunt prezentate în lucrarea Sz. Nagy [50].

Teza se bazează pe următoarele trei lucrări:

- A. Kristály, **Sz. Nagy**, Followers strategy in Stackelberg equilibrium problems on curved strategy sets, *Acta Polytech. Hung.* 10 (2013), no. 7, 69–80. ISI Journal (IF: 0.471)
- **Sz. Nagy**, Stackelberg equilibria via variational inequalities and projections. *J. Global Optim.* 57 (2013), no. 3, 821–828. ISI Journal (IF: 1.355)
- **Sz. Nagy**, Multiple Stackelberg variational responses, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, accepted, 2015.

Menţionăm o altă lucrare ce conţine rezultate originale, dar nu este strict legată de prezenta teză:

- Cs. Farkas, A.É. Molnár, **Sz. Nagy**, A generalized variational principle in $b-$metric spaces. *Matematiche* (Catania) 69 (2014), no. 2, 205–221.
  În acest articol se demonstrează mai multe principii variaţionale pe spaţii $b-$metrice. În particular, se obţine un principiu variaţional al lui Zhong în forma slabă pe spaţii $b-$metrice şi se prezintă aplicabilitatea acestui rezultat în demonstraţia unei teoreme de punct fix de tip Caristi.

Rezultatele originale în cadrul tezei sunt:

- Capitolul 1: câteva observaţii.
- Capitolul 2: Teoremele 2.2.1, 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3; Propoziţiile 2.2.1, 2.2.2; Observaţiile 2.2.1, 2.2.2, 2.3.1, 2.3.2; Exemplele 2.3.1, 2.3.2; Figurile 2.1, 2.2.
- Capitolul 3: Teoremele 3.2.1, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3; Lema 3.2.1; Observaţia 3.2.1; Exemplele 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3; Figura 3.1.
- Capitolul 4: Teorema 4.1.1; Lema 4.3.1; Propoziţiile 4.3.1, 4.4.1, 4.4.2; Observaţiile 4.1.1, 4.1.3, 4.2.1, 4.3.1, 4.4.1; Exemplul 4.1.1; Figura 4.1.

Cuvinte cheie: Puncte de echilibru Stackelberg, mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg, puncte de echilibru Nash, metode variaţionale, puncte fixe, principiul variaţional al lui Ekeland, puncte critice, teorema trecătorii montane, condiţia Palais-Smale, minimizare, funcţii local Lipschitz, funcţionale de tip Motreanu-Panagiotopoulos.

Mulţumiri

Îmi face o deosebită plăcere să îmi exprim recunoştinţa faţă de câţiva oameni pentru sprijinul acordat pe parcursul doctoratului.

Finalizarea doctoratului şi a tezei de doctorat, a fost o experienţă foarte interesantă, căci de la domeniul economic până la domeniile matematicii aplicate şi geometriei riemanniene este un drum foarte lung.

În primul rând sunt recunoscător conducătorului meu de doctorat Prof. dr. Alexandru Kristály pentru sprijinul acordat în timpul studiilor doctorale. A fost un privilegiu să lucrez alături de el.

De asemenea, aş dori să-mi exprim recunoştinţa faţă de Prof. dr. Csaba Varga György şi faţă de Conf. dr. Árpád Baricz pentru sfaturile şi încurajările oferite pe parcursul doctoratului. Doresc să extind aprecierile mele membrilor comisiei de îndrumare, Prof. dr. Adrian Olimpiu Petruşel, Prof. dr. Radu Precup şi Prof. dr. Csaba Varga György, pentru sfaturile şi ajutorul lor în tratarea modelelor economice folosind metodele matematice.

Mulţumiri speciale prietenului meu Csaba Farkas, care a fost mereu prezent atunci când am avut nevoie de ajutor în folosirea programelor matematice.

Nu în ultimul rând, aş dori să mulţumesc membrilor familiei mele pentru sprijinul şi dragostea lor unică. Fără ajutorul şi sprijinul lor nu aş fi terminat această teză de doctorat. Ştiu că le datorez mult mai mult decât o simplă mulţumire.

Capitolul 1

Preliminarii

În acest capitol prezentăm noţiunile şi rezultatele care sunt folosite pe parcursul tezei, în care am urmărit lucrările lui H. Brezis [13], F.H. Clarke [20], M.P. do Carmo [22], D. Motreanu şi P.D. Panagiotopoulos [48], A. Kristály, V. Rădulescu şi Cs. Varga [39]. Vom reaminti pe scurt titlurile secţiunilor şi subsecţiunilor.

1.1 Principii variaţionale

- Spaţii metrice (şi spaţii $b-$metrice).
- Funcţii inferior semicontinue şi convexe.
- Principii variaţionale: teorema lui Weierstrass, principiul variaţional al lui Ekeland, principiul variaţional al lui Borwein-Preiss.

1.2 Noţiuni subdiferenţiale şi puncte critice

1.2.1 Calcul subdiferenţial

- Funcţii local Lipschitz.
- Proprietăţi ale derivatei direcţionale generalizate şi ale gradientului generalizat.
- Rezultate de regularitate.

1.2.2 Teoria punctului critic pentru funcţionale netede

- Funcţionale de tip Motreanu-Panagiotopoulos. Condiţia Palais-Smale nenetedă.
- Argumente de minimizare. Forma nenetedă a teoremei trecătorii montane.

1.3 Puncte fixe

- Teoremele de punct fix ale lui Brouwer, Begle, Banach şi Caristi.

1.4 Elemente din geometria riemanniană

1.4.1 Linii geodezice, aplicaţia exponenţială şi curbura

- Funcţia distanţă. Linii geodezice. Conexiunea Levi-Civita.
- Aplicaţia exponenţială.
- Diferenţiala funcţiilor pe varietăţi.
- Curbura. Paralelogramoidul Levi-Civita.
- Teorema lui Hopf-Rinow. Varietăţi Hadamard.
- Teorema de comparaţie a lui Rauch.

1.4.2 Proiecţii metrice

- Definiţia proiecţiei metrice.
- Neexpansivitatea proiecţiei metrice.
- Proprietatea Moskovitz-Dines.
- Caracterizarea varietăţilor Hadamard.

Capitolul 2

Echilibrul Stackelberg în spaţii euclidiene

În acest capitol studiem existenţa şi localizarea echilibrului Stackelberg pentru doi jucători, folosind inegalităţi variaţionale şi teoreme de punct fix. Studiem atât cazul mulţimilor de strategii compacte cât şi necompacte în spaţii euclidiene. Rezultatele din acest capitol au fost publicate în lucrarea Sz. Nagy [49].

2.1 Formularea problemei

Aşa cum am remarcat în Introducere, modelul Stackelberg se poate trata cu *metoda inducţiei inverse*: se determină cel mai bun răspuns pentru însoţitor (acţiunea liderului fiind un parametru), iar apoi trebuie aleasă cea mai bună strategie din perspectiva liderului. De aici rezultă clar că obiectivul principal este determinarea răspunsului pentru jucătorul însoţitor.

Fără a restrânge generalitatea problemei, presupunem că mulţimile de strategii K_1, K_2 sunt submulţimi ale lui $\mathbb{R}^m$. Notăm cu $l : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funcţia de pierdere pentru jucătorul lider, iar cu $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a jucătorului însoţitor.

Primul pas constă în determinarea mulţimii de răspuns Stackelberg (*Stackelberg equilibrium response set*), definită prin

$$R_{SE}(x_1) = \{x_2 \in K_2 : f(x_1, y) - f(x_1, x_2) \geq 0,\ \forall y \in K_2\}$$

pentru fiecare $x_1 \in K_1$. Presupunând că $R_{SE}(x_1) \neq \emptyset$ pentru orice $x_1 \in K_1$, pasul următor (pentru lider) este minimizarea funcţiei $x \mapsto$

$l(x, r(x))$ pe K_1, unde r este o selecţie convenabilă a aplicaţiei multivoce R_{SE}; mai precis, mulţimea de echilibru Stackelberg pentru lider (*Stackelberg equilibrium leader set*) este definită prin

$$S_{SE} = \{x_1 \in K_1 : l(x, r(x)) - l(x_1, r(x_1)) \geq 0,\ \forall x \in K_1\}.$$

Obiectivul nostru principal este localizarea elementelor din *mulţimea de răspuns Stackelberg*. În vederea rezolvării acestei probleme, definim o mulţime mai largă decât mulţimea de răspuns Stackelberg cu ajutorul inegalităţilor variaţionale. Dacă $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ este funcţia de pierdere pentru jucătorul însoţitor, presupunem că $f(x_1, \cdot)$ este local Lipschitz pentru fiecare $x_1 \in K_1$. Introducem *mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg*, definită prin

$$R_{SV}(x_1) = \left\{x_2 \in K_2 : f^0_{x_2}((x_1, x_2); y - x_2) \geq 0,\ \forall y \in K_2\right\},$$

unde $f^0_{x_2}((x_1, x_2); v)$ notează derivata direcţională generalizată a funcţiei $f(x_1, \cdot)$ în punctul $x_2 \in K_2$ şi direcţia $v \in \mathbb{R}^m$.

Remarcăm faptul că este mai uşor să determinăm punctele din mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg, decât elementele din mulţimea $R_{SE}(x_1)$. În consecinţă, mai întâi localizăm elementele din $R_{SV}(x_1)$, după care alegem de aici elementele mulţimii $R_{SE}(x_1)$. În plus, elementele din mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg sunt punctele fixe ale unei aplicaţii multivoce care conţine proiecţia metrică a mulţimii de strategie K_2. De aceea, putem garanta nu numai rezultate de existenţă, dar şi rezultate de localizare prin sisteme dinamice proiective când mulţimile de strategii sunt compacte sau necompacte. Aceste metode proiective au fost aplicate în cazul modelului Nash de către E. Cavazzuti, M. Pappalardo, M. Passacantando [16], A. Kristály [37], J.-S. Pang şi M. Fukushima [55], Y.S. Xia şi J. Wang [67], J. Zhang, B. Qu şi N. Xiu [70]. În literatura de specialitate există diverse metode pentru studiul problemelor de echilibru, a se vedea [19], [29].

Presupunem că funcţia de pierdere $l : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ a liderului este local Lipschitz. Dacă $R_{SV}(x_1) \neq \emptyset$ pentru fiecare $x_1 \in K_1$ şi se poate alege o selecţie $r : K_1 \to K_2$ destul de netedă din aplicaţia multivocă R_{SV}, atunci putem introduce *mulţimea variaţională Stackelberg* (*pentru lider*), definită prin

$$S_{SV} = \left\{x_1 \in K_1 : l^0_{x_1}((x_1, r(x_1)); y - x_1) \geq 0,\ \forall y \in K_1\right\}.$$

Este observă că mulţimea S_{SV} conţine strategia cea mai bună a liderului, adică punctul minim al aplicaţiei $x \mapsto l(x, r(x))$ pe K_1.

Capitolul este structurat în felul următor: În Secţiunea 2.2 prezentăm câteva rezultate de bază referitoare la mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg. În Secţiunea 2.3 menţionăm rezultatele principale ale acestui capitol, considerând atât mulţimi de strategii compacte cât şi necompacte.

2.2 Mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg

În această secţiune enumerăm câteva proprietăţi de bază ale mulţumii de răspuns variaţional Stackelberg.

Propoziţia 2.2.1 (Sz. Nagy [49]) *Fie $K_i \subset \mathbb{R}^m$ mulţimi nevide, convexe $(i = 1, 2)$ şi fie $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funcţia de plată (de pierdere) a jucătorului însoţitor astfel încât $f(x_1, \cdot)$ este local Lipschitz pentru fiecare $x_1 \in K_1$. Atunci au loc următoarele proprietăţi:*

(a) *$R_{SE}(x_1) \subseteq R_{SV}(x_1)$ pentru orice $x_1 \in K_1$.*

(b) *Dacă $f(x_1, \cdot)$ este convexă pe K_2 pentru un $x_1 \in K_1$ fixat, atunci $R_{SE}(x_1) = R_{SV}(x_1)$.*

Observaţia 2.2.1 Proprietatea (a) o demonstrăm cu ajutorul teoriei punctului critic. Într-adevăr, dacă $f(x_1, y) \geq f(x_1, x_2)$ pentru orice $y \in K_2$, atunci $x_2 \in K_2$ este un punct de minim global pentru funcţia $f(x_1, \cdot) + \delta_{K_2}$, unde δ_{K_2} este funcţia indicatoare a mulţimii K_2, adică,

$$\delta_{K_2}(y) = \begin{cases} 0\,, & \text{dacă} \quad y \in K_2; \\ +\infty\,, & \text{dacă} \quad y \notin K_2. \end{cases}$$

În consecinţă, x_2 este un punct critic pentru funcţia $f(x_1, \cdot) + \delta_{K_2}$, ceea ce implică faptul că

$$f^0_{x_2}((x_1, x_2); y - x_2) \geq 0, \ \forall y \in K_2,$$

adică, $x_2 \in R_{SV}(x_1)$.

În cele ce urmează, stabilim o legătură între mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg şi punctele fixe ale aplicaţiei multivoce $A^{x_1}_\alpha : K_2 \to 2^{K_2}$, care este definită prin

$$A^{x_1}_\alpha(x) = P_{K_2}\left(x - \alpha\partial_{x_2} f(x_1, x)\right), \tag{2.2.1}$$

unde $x_1 \in K_1$ şi $\alpha > 0$ sunt fixaţi.

Teorema 2.2.1 (Sz. Nagy [49]) *Fie $K_i \subset \mathbb{R}^m$ mulţimi nevide, convexe $(i = 1, 2)$ şi fie $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funcţia de plată (de pierdere) a jucătorului însoţitor astfel încât $f(x_1, \cdot)$ este local Lipschitz pentru fiecare $x_1 \in K_1$. Fie $x_1 \in K_1$ fixat arbitrar. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) $x_2 \in R_{SV}(x_1)$;

(b) $x_2 \in A_\alpha^{x_1}(x_2)$ *pentru orice* $\alpha > 0$;

(c) *Există un* $\alpha > 0$ *astfel încât* $x_2 \in A_\alpha^{x_1}(x_2)$.

Încheiem această secţiune cu un rezultat care se referă la strategia jucătorului lider.

Propoziţia 2.2.2 *Fie $l : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^1. Presupunem că $x \mapsto R_{SV}(x)$ este o funcţie univocă, de clasă C^1 pe K_1. Atunci $S_{SE} \subseteq S_{SV}$.*

Observaţia 2.2.2 Importanţa Propoziţiei 2.2.2 se va vedea în Capitolul 4, în care aplicaţia $x \mapsto R_{SV}(x)$ nu este neapărat univocă.

2.3 Existenţa şi localizarea răspunsurilor variaţionale Stackelberg

Pe baza Teoremei 2.2.1, determinarea elementelor în $R_{SV}(x_1)$ este echivalentă cu localizarea punctelor fixe ale aplicaţiei multivoce $A_\alpha^{x_1}$, $\alpha > 0$.

2.3.1 Strategii compacte în spaţii euclidiene

Teorema 2.3.1 (Sz. Nagy [49]) *Fie $K_i \subset \mathbb{R}^m$ mulţimi nevide, convexe $(i = 1, 2)$, K_2 compactă, şi fie $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funcţia de plată a jucătorului însoţitor astfel încât $f(x_1, \cdot)$ este local Lipschitz pentru fiecare $x_1 \in K_1$. Atunci, au loc următoarele proprietăţi:*

(a) $\emptyset \neq R_{SE}(x_1) \subseteq R_{SV}(x_1)$ *pentru orice* $x_1 \in K_1$;

(b) *Dacă* $\mathrm{card}(R_{SV}(x_1)) = 1$ *pentru orice $x_1 \in K_1$ şi aplicaţiile $x \mapsto R_{SV}(x)$ şi l (funcţia de pierdere pentru lider) sunt de clasă C^1, atunci $S_{SV} \neq \emptyset$.*

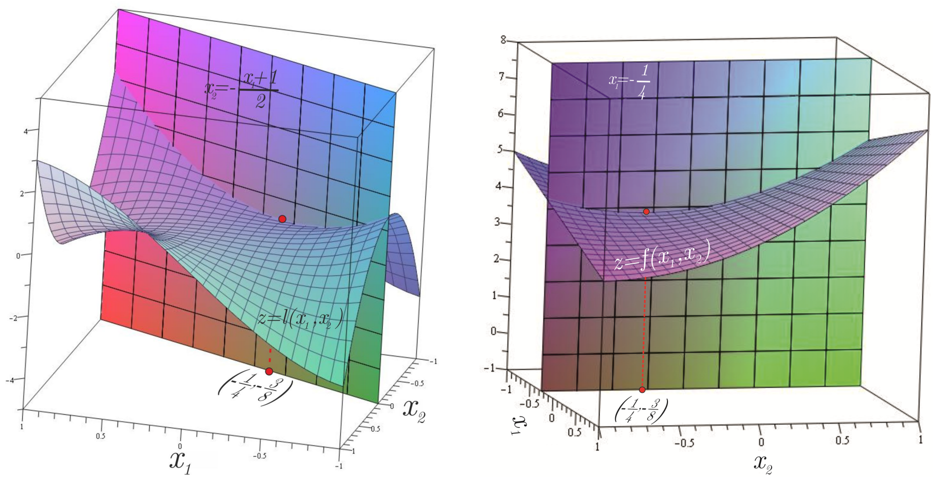

Figura 2.1: Minimizarea funcţiei $x_1 \mapsto l(x_1, R_{SV}(x_1))$, $x_1 \in K_1$, obţinând $x_1 = -\frac{1}{4}$ (stânga). Răspunsul însoţitorului la acţiunea $x_1 = -\frac{1}{4}$ este $R_{SE}(-\frac{1}{4}) = R_{SV}(-\frac{1}{4}) = \{-\frac{3}{8}\}$ (dreapta).

Exemplul 2.3.1 Fie $l, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ două funcţii de pierdere

$$l(x_1, x_2) = 4x_1x_2^2 - x_1^3;$$

$$f(x_1, x_2) = x_2^2 + x_2(x_1 + 1) + 4,$$

şi mulţimile de strategii $K_1 = K_2 = [-1, 1]$. Aplicând Teorema 2.3.1(a), un calcul simplu (bazat pe metoda inducţiei inverse) ne arată că

$$R_{SV}(x_1) = \left\{-\frac{x_1 + 1}{2}\right\}, \ x_1 \in K_1.$$

Fie $x_1 \in K_1$ fixat arbitrar. Observăm că funcţia $f(x_1, \cdot)$ este convexă pe K_2, iar cu ajutorul Propoziţiei 2.2.1(a) rezultă $R_{SE}(x_1) = R_{SV}(x_1)$. Mai mult, $\mathrm{card}(R_{SV}(x_1)) = 1$, iar funcţia $x \mapsto R_{SV}(x)$ este de clasă C^1; de aici rezultă că $S_{SV} \neq \emptyset$, a se vedea Teorema 2.3.1 (b). Un calcul simplu ne dă

$$S_{SV} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}.$$

Pe baza Propoziţiei 2.2.2 avem că mulţimea de echilibru Stackelberg pentru lider este $S_{SE} = \left\{-\frac{1}{4}\right\}$, iar mulţimea de răspuns variaţional/echilibru Stackelberg este $R_{SE}(-\frac{1}{4}) = R_{SV}(-\frac{1}{4}) = \left\{-\frac{3}{8}\right\}$, a se vedea Figura 2.1.

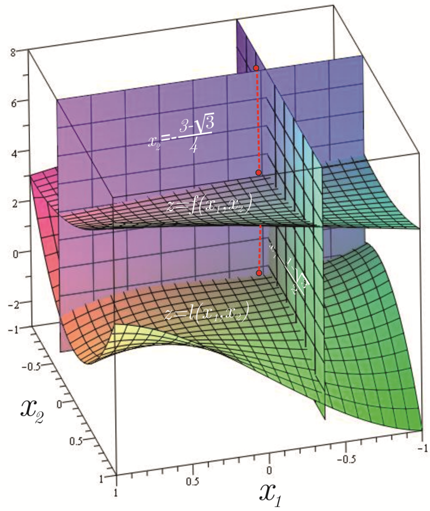

Figura 2.2: Deşi $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{3-\sqrt{3}}{4}\right)$ este un punct de echilibru Nash-Stampacchia pentru l şi f pe $K_1 \times K_2$, perechea nu este un punct de echilibru Nash în sensul clasic.

Observaţia 2.3.1 În cazul funcţiilor şi mulţimilor din Exemplul 2.3.1 demonstrăm că mulţimea punctelor de echilibru Nash este vidă. Pentru a demonstra acest fapt, utilizăm argumentele din A. Kristály [36], unde ideea generală conţine argumente valabile pentru funcţii nenetede pe varietăţi Riemann. Mai precis, determinăm mulţimea punctelor de echilibru Nash-Stampacchia, adică soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \left\langle l'_{x_1}(x_1,x_2), x - x_1 \right\rangle \geq 0 & \text{pentru orice} \quad x \in K_1; \\ \left\langle f'_{x_2}(x_1,x_2), y - x_2 \right\rangle \geq 0 & \text{pentru orice} \quad y \in K_2. \end{cases}$$

Acest sistem are soluţia unică

$$N_S = \left\{ \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, -\frac{3-\sqrt{3}}{4} \right) \right\}.$$

Mulţimea punctelor de echilibru Nash este o submulţime a mulţimii N_S, conform A. Kristály [37]. Însă, punctul N_S nu verifică sistemul pentru punctele de echilibru Nash

$$\begin{cases} l(x,x_2) \geq l(x_1,x_2) & \text{pentru orice} \quad x \in K_1; \\ f(x_1,y) \geq f(x_1,x_2) & \text{pentru orice} \quad y \in K_2, \end{cases}$$

a se vedea şi Figura 2.2.

2.3.2 Strategii necompacte în spaţii euclidiene

Dacă $l, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii definite prin

$$l(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) = e^{-x_1 - x_2},$$

şi $K_1 = K_2 = [0, \infty)$, atunci pentru orice element $x_1 \in K_1$ avem

$$R_{SE}(x_1) = R_{SV}(x_1) = \emptyset.$$

În consecinţă, pentru a garanta existenţa elementelor din mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg în cazul mulţimilor de strategii necompacte, sunt necesare anumite condiţii de creştere pe lângă regularitatea funcţiilor de plată.

Introducem două sisteme dinamice, presupunând că funcţiile de pierdere sunt de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Fie $x_1 \in K_1$ şi $\alpha > 0$ elemente fixate.

(a) Fie $(DDS)_{x_1}^{\mathbb{R}^m}$ *sistemul dinamic discret*

$$\begin{cases} y_{n+1} = A_\alpha^{x_1}(P_{K_2}(y_n)), \quad n \geq 0, \\ y_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

(b) Fie $(CDS)_{x_1}^{\mathbb{R}^m}$ *sistemul dinamic continuu*

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A_\alpha^{x_1}(P_{K_2}(y(t))) - y(t), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Rezultatul principal în această secţiune este următorul:

Teorema 2.3.2 (Sz. Nagy [49]) *Fie $K_i \subset \mathbb{R}^m$ mulţimi nevide, convexe (nu neapărat compacte) $(i = 1, 2)$, şi fie $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funcţia de plată a jucătorului însoţitor de clasa C^1. Fie $x_1 \in K_1$ fixat şi presupunem că $f'_{x_2}(x_1, \cdot) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ este o funcţie $L-$Lipschitz şi $\kappa-$strict monotonă. Atunci,* $\mathrm{card}(R_{SV}(x_1)) = 1$*; mai mult, sistemele dinamice $(DDS)_{x_1}^{\mathbb{R}^m}$ şi $(CDS)_{x_1}^{\mathbb{R}^m}$ converg exponenţial către unicul element din mulţimea $R_{SV}(x_1)$.*

Observaţia 2.3.2 Metodele bazate pe sisteme dinamice au fost aplicate în teoria punctelor de echilibru Nash, a se vedea lucrările E. Cavazzuti, M. Pappalardo, M. Passacantando [16], Y.S. Xia şi J. Wang [67], J. Zhang, B. Qu şi N. Xiu [70]. Menţionăm că rezultatul de mai sus pentru probleme de echilibru Stackelberg este mai general decât rezultatele în cazul problemelor Nash; argumente similare pot fi găsite în monografia A. Kristály, V. Rădulescu şi Cs. Varga [39, Chapter III] pentru probleme de echilibru Nash.

Exemplul 2.3.2 Fie $n \geq 2$ şi $M_n(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor simetrice de tip $n \times n$ cu valori reale. Produsul scalar pe $M_n(\mathbb{R})$ este definit prin

$$\langle U, V \rangle = \text{tr}(UV),$$

unde $\text{tr}(Y)$ este urma matricei $Y \in M_n(\mathbb{R})$. Este bine cunoscut faptul că $(M_n(\mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spaţiu euclidian, segmentul unic între punctele $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ este dat de

$$\gamma_{X,Y}(s) = (1-s)X + sY, \quad s \in [0,1]. \tag{2.3.1}$$

Fie funcţiile $l, f : \mathbb{R} \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$l(t, X) = t^3 - t\det(X), \;\; f(t, X) = \text{tr}((X - tA)^2),$$

unde $A \in M_n(\mathbb{R})$ este fixat şi

$$K_1 = [0, \infty), \;\; K_2 = \{X \in M_n(\mathbb{R}) : \text{tr}(X) \geq 1\}.$$

Se vede că mulţimile sunt convexe dar nu sunt compacte. Mai mult, pentru orice $t \in K_1$, funcţia

$$X \mapsto f'_{x_2}(t, X) = 2(X - tA)$$

este $2-$Lipschitz şi $2-$strict monotonă. Pe baza Teoremei 2.3.2, pentru orice $t \in K_1$ avem $\text{card}(R_{SV}(t)) = 1$, iar sistemele dinamice $(DDS)_t^{\mathbb{R}}$ şi $(CDS)_t^{\mathbb{R}}$ converg exponenţial către unicul punct din $R_{SV}(t)$. În acest caz, observăm că

$$R_{SV}(t) = \{P_{K_2}(tA)\}, \;\; \forall t \in K_1.$$

Pentru a obţine mulţimea S_{SE} de echilibru Stackelberg pentru lider, ne rămâne să minimizăm funcţia $t \mapsto l(t, P_{K_2}(tA)) = t^3 - t\det(P_{K_2}(tA))$ pe $K_1 = [0, \infty)$.

Încheiem acest capitol cu un rezultat de existenţă de tip Caristi pentru punctele de echilibru Stackelberg:

Teorema 2.3.3 (Sz. Nagy) *Fie $K_i \subset \mathbb{R}^m$ mulţimi nevide, convexe (nu neapărat compacte) $(i = 1, 2)$, şi fie $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funcţia de plată a jucătorului însoţitor de clasă C^1. Fie $x_1 \in K_1$ fixat. Dacă există o funcţie inferior semicontinuă $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_+$ şi $\alpha > 0$ astfel încât*

$$\|x - A_\alpha^{x_1}(x)\| \leq g(x) - g(A_\alpha^{x_1}(x)), \;\; \forall x \in \mathbb{R}^m,$$

atunci $R_{SV}(x_1) \neq \emptyset$.

Capitolul 3

Echilibrul Stackelberg pe varietăţi riemanniene

În acest capitol prezentăm extensia riemanniană a rezultatelor din Capitolul 2. Pentru a simplifica argumentele, elaborăm rezultatele într-un cadru neted, urmărind articolul A. Kristály şi Sz. Nagy [38].

3.1 Abordarea riemanniană a răspunsului variaţional Stackelberg

În capitolul anterior am prezentat câteva rezultate de existenţă şi localizare ale elementelor din mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg în cazul euclidian.

Obiectivul acestui capitol este extinderea rezultatelor analitice din Capitolul 2 pentru jocuri definite pe mulţimi de strategii curbate, care sunt *scufundate geodezic convex într-o varietate riemanniană.* Motivaţia acestui procedeu constă în faptul că în anumite situaţii, mulţimile de strategii nu sunt convexe în sensul clasic. Ideea de a scufunda mulţimile de strategii în mod geodezic convex într-o varietate riemanniană sau finsleriană provine de la T. Rapcsák [59], care a aplicat această metodă pentru rezolvarea unor probleme de optimizare neliniară. Argumente similare pot fi studiate în G.C. Bento şi J.G. Melo [7], A. Kristály [36, 37], X. Li, N. Huang [42], C. Li, G. López, V. Martín-Márquez [43], S.Z. Németh [52], etc.

Pentru simplitatea prezentării, considerăm numai doi jucători. Fie submulţimile $K_1 \subset M_1$ şi $K_2 \subset M_2$ în varietăţile riemanniene (M_1, g_1) şi (M_2, g_2), şi de asemenea $l, f : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ funcţiile de plată pentru cei doi jucători. Din metoda inducţiei inverse, primul pas este determinarea mulţimii de răspuns

$$\mathcal{R}_{SE}(x_1) = \{x_2 \in K_2 : f(x_1, y) - f(x_1, x_2) \geq 0,\ \forall y \in K_2\}$$

pentru orice $x_1 \in K_1$. Dacă $\mathcal{R}_{SE}(x_1) \neq \emptyset$ pentru orice $x_1 \in K_1$, pasul următor este minimizarea aplicaţiei $x \mapsto l(x, r(x))$ pe K_1, unde r este o selecţie din aplicaţia multivocă $x \mapsto \mathcal{R}_{SE}(x)$; în consecinţă, obiectivul liderului este determinarea mulţimii

$$\mathcal{S}_{SE} = \{x_1 \in K_1 : l(x, r(x)) - l(x_1, r(x_1)) \geq 0,\ \forall x \in K_1\}.$$

Utilizând argumentele din Capitolul 2, definim mulţimi mai largi decât mulţimea $\mathcal{R}_{SE}(x)$ prin inegalităţi variaţionale. Pe parcursul capitolului presupunem că funcţia $f : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1. Un studiu similar se poate face şi pentru funcţii local Lipschitz, urmărind lucrările D. Azagra, J. Ferrera şi F. López-Mesas [3], Yu. S. Ledyaev şi Q.J. Zhu [41]. Pentru fiecare $x_1 \in K_1$ definim mulţimea

$$\mathcal{R}_{SV}(x_1) = \left\{x_2 \in K_2 : g_2\left(f'_{x_2}(x_1, x_2), \exp_{x_2}^{-1}(y)\right) \geq 0,\ \forall y \in K_2\right\},$$

unde $f'_{x_2}(x_1, x_2)$ notează diferenţiala funcţiei $f(x_1, \cdot)$ în raport cu metrica g_2 în punctul $x_2 \in K_2$. Urmărind ideile din lucrările lui A. Kristály [36, 37], este mai uşoară determinarea elementelor mulţimii $\mathcal{R}_{SV}(x_1)$ decât a celor din $\mathcal{R}_{SE}(x_1)$. Ştim că

$$\mathcal{R}_{SE}(x_1) \subseteq \mathcal{R}_{SV}(x_1),$$

adică putem alege punctele corespunzătoare Stackelberg dintre elementele mulţimii $\mathcal{R}_{SV}(x_1)$. Mai mult, presupunând că varietatea riemanniană are anumite proprietăţi curbate, putem caracteriza elementele din mulţimea $\mathcal{R}_{SV}(x_1)$ prin punctele fixe ale unei aplicaţii ce conţine proiecţia metrică a mulţimii K_2. De fapt, vom presupune că mulţimile de strategii sunt scufundate în varietăţi riemanniene de curbură nepozitivă, în care proiecţia metrică posedă proprietăţi specifice, şi anume:

- neexpansivitatea, şi
- proprietatea Moskovitz-Dines.

Contextul geometric optim pentru a elabora această teorie a punctelor de echilibru Stackelberg în cadrul varietăţilor riemanniene este asigurat de varietăţile de tip Hadamard (varietăţi riemenniene complete, simplu conexe de curbură nepozitivă). Având caracterizarea prin intermediul punctelor fixe, putem aplica diferite rezultate din teoria punctului fix pe spaţii metrice (aciclice) pentru a garanta existenţa elementelor din mulţimea $\mathcal{R}_{SV}(x_1)$.

În final, presupunem că funcţia de plată a liderului $l : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1 şi $\mathcal{R}_{SV}(x_1) \neq \emptyset$ pentru orice $x_1 \in K_1$. Dacă există o selecţie $r : K_1 \to K_2$ de clasă C^1 din aplicaţia multivocă $\mathcal{R}_{SV}$, putem defini mulţimea

$$\mathcal{S}_{SV} = \left\{ x_1 \in K_1 : g_1 \left(l'(x_1, r(x_1)), \exp_{x_1}^{-1}(y) \right) \geq 0,\ \forall y \in K_1 \right\}.$$

În particular, mulţimea $\mathcal{S}_{SV}$ conţine strategiile optime ale liderului, adică punctele minime ale aplicaţiei $x \mapsto l(x, r(x))$ pe K_1.

3.2 Proprietăţi de bază ale mulţimii de răspuns

Stabilim câteva proprietăţi de bază ale mulţimii de răspuns, folosind rezultate din teoria inegalităţilor variaţionale pe varietăţi riemanniene. Utilizăm notaţiile din Secţiunea 3.1.

Lema 3.2.1 (A. Kristály şi Sz. Nagy [38]) *Fie (M_i, g_i) varietăţi riemanniene, $l, f : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ funcţii de plată de clasă C^1, şi $K_i \subset M_i$ mulţimi nevide, închise şi geodezic convexe, $i = 1, 2$. Atunci, au loc următoarele proprietăţi:*

(a) $\mathcal{R}_{SE}(x_1) \subseteq \mathcal{R}_{SV}(x_1)$ *pentru orice* $x_1 \in K_1$;

(b) $\mathcal{R}_{SE}(x_1) = \mathcal{R}_{SV}(x_1)$, *dacă* $f(x_1, \cdot)$ *este convexă pe* K_2 *pentru* $x_1 \in K_1$;

(c) $\mathcal{S}_{SE} \subseteq \mathcal{S}_{SV}$ *dacă* $x \mapsto \mathcal{R}_{SV}(x)$ *este o funcţie univocă având o* C^1*-extensie pe o vecinătate deschisă* $D_1 \subset M_1$ *a mulţimii* K_1.

Pentru $x_1 \in K_1$ şi $\alpha > 0$ fixat, fie aplicaţia $\mathcal{A}_\alpha^{x_1} : K_2 \to K_2$ definită prin

$$\mathcal{A}_\alpha^{x_1}(x) = P_{K_2} \left(\exp_x \left(-\alpha f'_{x_2}(x_1, x) \right) \right). \tag{3.2.1}$$

Menţionăm că $\mathcal{A}_\alpha^{x_1}$ este univocă dacă (M_2, g_2) este o varietate Hadamard (deoarece $P_{K_2}(x)$ este o mulţime Chebyshev pentru fiecare $x \in K_2$).

Teorema 3.2.1 (A. Kristály şi Sz. Nagy [38]) *Fie (M_1, g_1) o varietate riemanniană şi (M_2, g_2) o varietate Hadamard. Fie $f : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ funcţia de plată de clasă C^1 pentru însoţitor şi $K_i \subset M_i$ mulţimi nevide, închise şi geodezic convexe, $i = 1, 2$. Fie $x_1 \in K_1$ fixat. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) $x_2 \in \mathcal{R}_{SV}(x_1)$;

(b) $\mathcal{A}_\alpha^{x_1}(x_2) = x_2$ *pentru orice* $\alpha > 0$;

(c) *Există* $\alpha > 0$ *astfel încât* $\mathcal{A}_\alpha^{x_1}(x_2) = x_2$.

Observaţia 3.2.1 Avem

$$\mathcal{R}_{SV}(x_1) = \left\{ x_2 \in K_2 : P_{K_2}\left(\exp_{x_2}\left(-\alpha f'_{x_2}(x_1, x_2)\right)\right) = x_2 \right\}.$$

3.3 Strategia însoţitorului: existenţa echilibrului

3.3.1 Strategii compacte pe varietăţi Riemann

Teorema 3.3.1 (A. Kristály şi Sz. Nagy [38]) *Fie (M_i, g_i) varietăţi Hadamard, $l, f : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ funcţii de plată de clasă C^1 şi $K_i \subset M_i$ mulţimi nevide, compacte şi geodezic convexe, $i = 1, 2$. Atunci, au loc următoarele proprietăţi:*

(a) $\emptyset \neq \mathcal{R}_{SE}(x_1) \subseteq \mathcal{R}_{SV}(x_1)$ *pentru orice* $x_1 \in K_1$;

(b) $\mathcal{S}_{SV} \neq \emptyset$, *dacă* $\mathcal{R}_{SV}(x_1)$ *este univocă pentru orice* $x_1 \in K_1$ *şi aplicaţia* $x \mapsto \mathcal{R}_{SV}(x)$ *este o funcţie univocă având o* C^1*-extensie pe o vecinătate deschisă* $D_1 \subset M_1$ *a mulţimii* K_1.

3.3.2 Strategii necompacte pe varietăţi Riemann

Presupunem mai întâi că pentru un anumit element $x_1 \in K_1$ are loc:
$(H_{x_1}^f)$ există $x_2 \in K_2$ astfel încât

$$L_{x_1,x_2} = \limsup_{\substack{d_{g_2}(x,x_2)\to\infty \\ x\in K_2}} \frac{g_2\big(f'_{x_2}(x_1,x), \exp_x^{-1}(x_2)\big) + g_2\big(f'_{x_2}(x_1,x_2), \exp_{x_2}^{-1}(x)\big)}{d_{g_2}(x,x_2)} <$$

$$< -\left\| f'_{x_2}(x_1,x_2) \right\|_{g_2}.$$

Primul rezultat important în această secţiune este următorul:

Teorema 3.3.2 (A. Kristály şi Sz. Nagy [38]) *Fie* (M_1, g_1) *o varietate riemanniană şi* (M_2, g_2) *o varietate Hadamard. Fie* $f : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ *funcţia de plată de clasă* C^1 *pentru însoţitor şi* $K_i \subset M_i$ *mulţimi nevide, închise şi geodezic convexe,* $i = 1, 2$. *Fie* $x_1 \in K_1$ *fixat astfel încât ipoteza* $(H^f_{x_1})$ *este verificată. Atunci,* $\mathcal{R}_{SV}(x_1) \neq \emptyset$.

În continuare ne vom ocupa de o altă clasă de funcţii similară clasei tratate în capitolul anterior. Pentru $x_1 \in K_1$, $\alpha > 0$ şi $0 < \rho < 1$ fixat, introducem ipoteza:

$$(H^{\alpha,\rho}_{x_1}) :\ d_{g_2}\left(\exp_x\left(-\alpha f'_{x_2}(x_1, x)\right), \exp_y\left(-\alpha f'_{x_2}(x_1, y)\right)\right) \leq (1-\rho) d_{g_2}(x, y)$$

pentru orice $x, y \in K_2$. Pentru $x_1 \in K_1$ şi $\alpha > 0$, considerăm

(a) *Sistemul dinamic discret* $(DDS)_{x_1}$:

$$\begin{cases} y_{n+1} = \mathcal{A}^{x_1}_{\alpha}(P_{K_2}(y_n)), & n \geq 0, \\ y_0 \in M_2; \end{cases}$$

(b) *Sistemul dinamic continuu* $(CDS)_{x_1}$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \exp^{-1}_{y(t)}(\mathcal{A}^{x_1}_{\alpha}(P_{K_2}(y(t)))), \\ y(0) = x_2 \in M_2. \end{cases}$$

Aplicând principiul de comparaţie al lui Rauch şi proprietăţile de bază ale proiecţiei metrice, stabilim următorul rezultat:

Teorema 3.3.3 (A. Kristály şi Sz. Nagy [38]) *Fie* (M_1, g_1) *o varietate riemanniană şi* (M_2, g_2) *o varietate Hadamard şi considerăm* $f : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ *funcţia de plată de clasă* C^1 *pentru însoţitor şi* $K_i \subset M_i$ *mulţimi nevide, închise şi geodezic convexe,* $i = 1, 2$. *Fie* $x_1 \in K_1$ *oarecare fixat astfel încât ipoteza* $(H^{\alpha,\rho}_{x_1})$ *este adevărată pentru anumite valori* $\alpha > 0$ *şi* $0 < \rho < 1$. *Atunci mulţimea* $\mathcal{R}_{SV}(x_1)$ *are un singur element şi sistemele dinamice* $(DDS)_{x_1}$ *şi* $(CDS)_{x_1}$ *converg exponenţial către unicul elementul al mulţimii* $\mathcal{R}_{SV}(x_1)$.

Inspirându-se din A. Kristály [37], prezentăm câteva exemple relevante de varietăţi Hadamard şi mulţimi geodezic convexe pentru care rezultatele teoretice pot fi aplicate.

Exemplul 3.3.1 (*Spaţiul euclidian*) Fie $M_2 = \mathbb{R}^m$ şi presupunem că funcţia $f'_{x_2}(x_1, \cdot)$ este $L-$Lipschitz şi $\kappa-$strict monotonă pentru un $x_1 \in K_1$. Atunci Teorema 3.3.3 se reduce la Teorema 2.3.2. Într-adevăr, ipoteza $(H^{\alpha,\rho}_{x_1})$ este verificată pentru constantele $0 < \alpha < \frac{\kappa - \sqrt{(\kappa^2 - L^2)_+}}{L^2}$ şi $\rho = 1 - \sqrt{1 - 2\alpha\kappa + \alpha^2 L^2} \in (0, 1)$.

Exemplul 3.3.2 (*Spaţiul hiperbolic*) Fie $\mathbb{H} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\}$ semiplanul superior Poincaré înzestrat cu metrica riemanniană

$$g_{ij}(u, v) = \frac{1}{v^2}\delta_{ij}, \quad \text{for } i, j = 1, 2,$$

pentru orice $(u, v) \in \mathbb{H}$. Perechea $(\mathbb{H}, g)$ este o varietate Hadamard cu curbura secţională constantă -1. Geodezicele în $\mathbb{H}$ sunt semidreptele şi semicercurile ortogonale pe linia de bază $v = 0$. Distanţa riemanniană între punctele $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbb{H}$ este dată de expresia

$$d_{\mathbb{H}}\left((u_1, v_1), (u_2, v_2)\right) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2}{2v_1v_2}\right).$$

Fie

$$K = \{(u, v) \in \mathbb{H} : u^2 + v^2 \leq 9 \leq (u - 2)^2 + v^2\}. \tag{3.3.1}$$

Observăm că mulţimea $K \subset \mathbb{R}^2$ nu este convexă în sens clasic, dar este geodezic convexă în $(\mathbb{H}, g)$, a se vedea Figura 3.1.

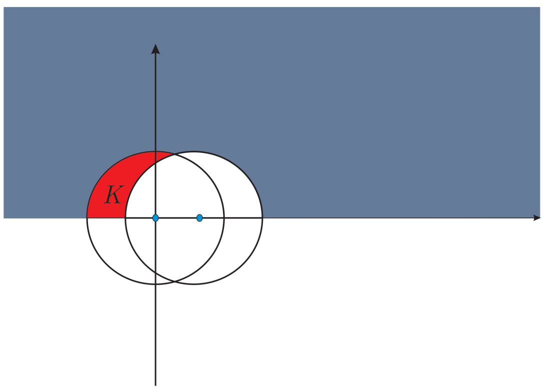

Figura 3.1: Mulţimea $K \subset \mathbb{R}^2$.

Exemplul 3.3.3 (*Matricele simetrice pozitiv definite*) La fel ca în Exemplul 2.3.2, fie $M_n(\mathbb{R})$ mulţimea matricelor simetrice de tip $n \times n$ cu valori reale, iar cu $\mathrm{P}(n, \mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ notăm conul matricelor simetrice, pozitiv definite, care are dimensiunea $\frac{n(n+1)}{2}$. Produsul scalar pe $\mathrm{P}(n, \mathbb{R})$ este

$$\langle\langle U, V \rangle\rangle_X = \operatorname{tr}(X^{-1}VX^{-1}U)$$

oricare ar fi $X \in \mathrm{P}(n, \mathbb{R})$, $U, V \in T_X(\mathrm{P}(n, \mathbb{R})) \simeq M_n(\mathbb{R})$.

Perechea $(\mathrm{P}(n,\mathbb{R}),\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$ este o varietate Hadamard, a se vedea Lang [40, Chapter XII]. Segmentul geodezic unic determinat de $X,Y\in \mathrm{P}(n,\mathbb{R})$ este definit prin

$$\gamma^H_{X,Y}(s)=X^{1/2}(X^{-1/2}YX^{-1/2})^sX^{1/2},\quad s\in[0,1]. \tag{3.3.2}$$

În particular, $\frac{d}{ds}\gamma^H_{X,Y}(s)|_{s=0}=X^{1/2}\ln(X^{-1/2}YX^{-1/2})X^{1/2}$; de aici rezultă că pentru orice $X,Y\in \mathrm{P}(n,\mathbb{R})$ avem

$$\exp_X^{-1}Y=X^{1/2}\ln(X^{-1/2}YX^{-1/2})X^{1/2}.$$

Funcţia metrică indusă pe $\mathrm{P}(n,\mathbb{R})$ este dată de

$$d_H^2(X,Y)=\langle\langle\exp_X^{-1}Y,\exp_X^{-1}Y\rangle\rangle_X=\mathrm{tr}(\ln^2(X^{-1/2}YX^{-1/2})). \tag{3.3.3}$$

Fie $a\in(1,e]$ şi

$$K=\{X\in \mathrm{P}(n,\mathbb{R}):\mathrm{tr}(\ln^2X)\le 1\le\det X\le a\}.$$

Remarcăm faptul că mulţimea K nu este geodezic convexă în raport cu metrica $\langle\cdot,\cdot\rangle$ din Exemplul 2.3.2. Într-adevăr, fie elementele $X=\mathrm{diag}(a,1,...,1)\in K$, $Y=\mathrm{diag}(1,a,...,1)\in K$ şi fie $\gamma_{X,Y}$ segmentul geodezic euclidian între X şi Y, a se vedea (2.3.1); deşi $\gamma_{X,Y}(s)\in \mathrm{P}(n,\mathbb{R})$ şi

$$\mathrm{tr}(\ln^2(\gamma_{X,Y}(s)))=\ln^2(1+(a-1)s)+\ln^2(a+(1-a)s)\le\ln^2a\le 1$$

pentru orice $s\in[0,1]$, avem

$$\det(\gamma_{X,Y}(s))=a+(a-1)^2s(1-s)>a,\ \forall s\in(0,1).$$

Pe de altă parte, afirmăm că mulţimea K este geodezic convexă în $(\mathrm{P}(n,\mathbb{R}),\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$. Pentru a verifica acest lucru, fie $I_n\in \mathrm{P}(n,\mathbb{R})$ matricea identică şi $\tilde{B}_H(I_n,1)$ bila geodezică închisă în $\mathrm{P}(n,\mathbb{R})$ cu centrul în punctul I_n şi de rază 1. Se poate observa că

$$K=\tilde{B}_H(I_n,1)\cap\{X\in \mathrm{P}(n,\mathbb{R}):1\le\det X\le a\}.$$

Într-adevăr, pentru orice $X\in \mathrm{P}(n,\mathbb{R})$, avem $d_H^2(I_n,X)=\mathrm{tr}(\ln^2X)$. Deoarece K este mărginită şi închisă în $(\mathrm{P}(n,\mathbb{R}),\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$, din Teorema lui Hopf-Rinow rezultă că K este compactă. Mai mult, $\tilde{B}_H(I_n,1)$ fiind bila geodezică în varietatea Hadamard $(\mathrm{P}(n,\mathbb{R}),\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$, rezultă că este şi geodezic convexă. Păstrând notaţiile din (3.3.2), dacă $X,Y\in K$, pentru orice $s\in[0,1]$ avem

$$\det(\gamma^H_{X,Y}(s))=(\det X)^{1-s}(\det Y)^s\in[1,a],$$

adică K este geodezic convexă în $(\mathrm{P}(n,\mathbb{R}),\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle)$.

Observaţia 3.3.1 Deoarece elementele din mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg sunt puncte fixe ale aplicaţiei $\mathcal{A}_\alpha^{x_1}$ pentru $\alpha > 0$ şi $x_1 \in K_1$ fixat, pe lângă argumentele menţionate mai sus pot fi aplicate şi alte tipuri de rezultate de punct fix, a se vedea monografia D. O'Regan şi R. Precup [54] şi lucrările A. Petruşel [56], A. Petruşel, I.A. Rus şi M. Şerban [57].

Capitolul 4

Multiplicitatea răspunsurilor variaţionale Stackelberg

Contrar literaturii clasice de specialitate (unde răspunsul Stackelberg este o funcţie univocă), descriem condiţii suficiente pentru o clasă de funcţii în vederea garantării existenţei a cel puţin trei elemente distincte în mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg.

4.1 Formularea problemei

În această secţiune ne concentrăm asupra funcţiei de plată pentru jucătorul însoţitor. Mai precis, presupunem că $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ este de forma

$$f_\lambda(x_1, x_2) := f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\|x_2\|^2 - \lambda \tilde{f}(x_1, x_2) + \delta_{K_2}(x_2), \qquad (4.1.1)$$

unde $K_2 \subset \mathbb{R}^m$ este o mulţime nevidă, închisă şi necompactă, $\lambda > 0$ este un parametru şi $\tilde{f}(x_1, \cdot)$ este local Lipschitz pentru orice $x_1 \in \mathbb{R}^m$, şi δ_{K_2} reprezintă funcţia indicator asociată mulţimii K_2.

Fie $x_1 \in \mathbb{R}^m$ oarecare fixat. Presupunem că funcţia local Lipschitz $\tilde{f}(x_1, \cdot)$ satisface următoarele condiţii:

$(H^1_{x_1})$ $\max\{\|z\| : z \in \partial_{x_2}\tilde{f}(x_1, x_2)\} = o(\|x_2\|)$ când $\|x_2\| \to 0$;

$(H^2_{x_1})$ $\max\{\|z\| : z \in \partial_{x_2}\tilde{f}(x_1, x_2)\} = o(\|x_2\|)$ când $\|x_2\| \to +\infty$;

$(H^3_{x_1})$ $\tilde{f}(x_1, 0) = 0$ şi există $\tilde{x}_2 \in K_2$ astfel încât $\tilde{f}(x_1, \tilde{x}_2) > 0$.

Observaţia 4.1.1 (a) Ipotezele $(H^1_{x_1})$ şi $(H^2_{x_1})$ înseamnă că $\partial_{x_2}\tilde{f}(x_1,\cdot)$ este *superliniară* în origine şi *subliniară* la infinit. Ipoteza $(H^3_{x_1})$ implică faptul că $\tilde{f}(x_1,\cdot)$ nu este identic nulă.

(b) Din ipotezele $(H^1_{x_1})$ şi $(H^2_{x_1})$ rezultă că numărul

$$\tilde{c} = \max_{x_2\in\mathbb{R}^m\setminus\{0\}} \frac{\max\{\|z\| : z\in\partial_{x_2}\tilde{f}(x_1,x_2)\}}{\|x_2\|} \tag{4.1.2}$$

este bine definit, iar din superior semicontinuitatea aplicaţiei multivoce $\partial_{x_2}\tilde{f}(x_1,\cdot)$ şi ipoteza $(H^3_{x_1})$, avem $0<\tilde{c}<\infty$.

(c) Definim numărul

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{2}\inf_{\substack{\tilde{f}(x_1,x_2)>0\\ x_2\in K_2}} \frac{\|x_2\|^2}{\tilde{f}(x_1,x_2)}, \tag{4.1.3}$$

care este bine definit şi $0<\tilde{\lambda}<\infty$.

Conform Capitolului 2 mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg pentru funcţia f_λ, definită în (4.1.1), este dată de
$R^\lambda_{SV}(x_1) =$

$$= \left\{x_2\in K_2 : \langle x_2, y-x_2\rangle + \lambda\tilde{f}^0_{x_2}((x_1,x_2);-y+x_2)\geq 0,\ \forall y\in K_2\right\}.$$

Rezultatul principal al acestui capitol este următorul:

Teorema 4.1.1 (Sz. Nagy [50]) *Fie $K_i\subset\mathbb{R}^m$ mulţimi convexe ($i=1,2$) şi fie $f_\lambda:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ funcţia de plată pentru jucătorul însoţitor sub forma* (4.1.1) *astfel încât $\tilde{f}(x_1,\cdot)$ este local Lipschitz pentru orice $x_1\in K_1$. Presupunem că mulţimea K_2 este închisă şi necompactă astfel încât $0\in K_2$. Fie $x_1\in K_1$ oarecare fixat şi presupunem că ipotezele $(H^i_{x_1})$ sunt adevărate, $i\in\{1,2,3\}$. Atunci, au loc următoarele afirmaţii:*

(a) $0\in R^\lambda_{SV}(x_1)$ *pentru orice* $\lambda>0$;

(b) $R^\lambda_{SV}(x_1)=\{0\}$ *pentru orice* $\lambda\in(0,\tilde{c}^{-1})$, *unde* $\tilde{c}$ *este dat în* (4.1.2);

(c) $\mathrm{card}(R^\lambda_{SV}(x_1))\geq 3$ *pentru orice* $\lambda>\tilde{\lambda}>0$, *unde* $\tilde{\lambda}$ *este dat în* (4.1.3).

Observaţia 4.1.2 (a) De fapt, folosind teorema celor trei puncte critice a lui B. Ricceri [60] (sau o variantă a acesteia, de exemplu G. Bonanno [10], S. Marano şi D. Motreanu [45]), putem demonstra că numărul elementelor din mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg este *stabil*, adică este invariant faţă de perturbaţii mici ale funcţiei $\tilde{f}$.

(b) Mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg poate avea mai multe elemente, dacă funcţia neliniară $\tilde{f}$ are un comportament *oscilatoriu*. Fenomene similare au fost tratate în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale, a se vedea de exemplu F. Faraci şi A. Kristály [25], P. Omari şi F. Zanolin [44], J. Saint Raymond [61], etc. Remarcăm faptul că aceste soluţii apar ca puncte de minim local pentru funcţionala de energie asociată problemei studiate. Astfel, în studiul echilibrului Stackelberg este de aşteptat să obţinem răspunsuri variaţionale *locale*.

Observaţia 4.1.3 Din Teorema 4.1.1 (b) şi (c) avem $\tilde{c}^{-1} \leq \tilde{\lambda}$. În Secţiunea 4.4 revenim la studiul optimalităţii intervalului de decalaj $[\tilde{c}^{-1}, \tilde{\lambda}]$.

Exemplul 4.1.1 Fie $K_2 = [0, \infty)$ şi $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = (1 + |x_1|) \left(\min \left(8x_2^3, (|x_2| + 3)^{\frac{3}{2}} \right) \right)_+ .$$

Un calcul simplu ne arată că

$$\partial_{x_2} \tilde{f}(x_1, x_2) = \begin{cases} \{0\}, & \text{dacă} \quad x_2 < 0; \\ \{24(1 + |x_1|)x_2^2\}, & \text{dacă} \quad x_2 \in [0, 1); \\ [3(1 + |x_1|), 24(1 + |x_1|)], & \text{dacă} \quad x_2 = 1; \\ \left\{ \frac{3}{2}(1 + |x_1|)(x_2 + 3)^{\frac{1}{2}} \right\}, & \text{dacă} \quad x_2 > 1. \end{cases}$$

Observăm că ipotezele $(H^1_{x_1})$, $(H^2_{x_1})$ şi $(H^3_{x_1})$ sunt verificate.

Fie $x_1 \in \mathbb{R}$ oarecare fixat. În acest caz $\tilde{c} = 24(1 + |x_1|)$ şi $\tilde{\lambda} = \frac{1}{16(1+|x_1|)}$. Conform Teoremei 4.1.1, pentru $\lambda \in \left(0, \frac{1}{24(1+|x_1|)}\right)$ rezultă că avem numai soluţia nulă, iar pentru $\lambda > \frac{1}{16(1+|x_1|)}$ există trei soluţii distincte pentru incluziunea

$$x_2 \in \lambda \partial_{x_2} \tilde{f}(x_1, x_2), \;\; x_2 \geq 0, \tag{4.1.4}$$

care este echivalentă cu $x_2 \in R^{\lambda}_{SV}(x_1)$. O reprezentare intuitivă a acestei probleme se vede în Figura 4.1.

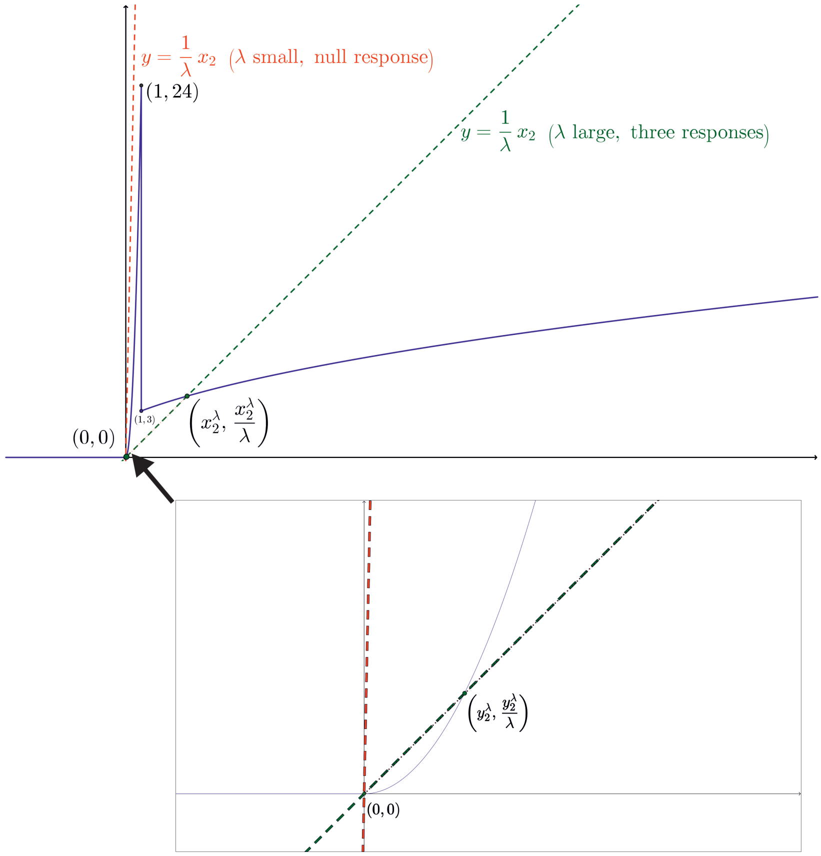

Figura 4.1: Graficele aplicaţiei multivoce $\partial_{x_2}\tilde{f}(x_1,\cdot)$ (albastru) şi dreptelor $y = \frac{1}{\lambda}x_2$ pentru parametrul λ mic (roşu) şi mare (verde). Intersecţia aplicaţiilor $\partial_{x_2}\tilde{f}(x_1,\cdot)$ şi $y = \frac{1}{\lambda}x_2$ ne dă elementele din mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg $R^\lambda_{SV}(x_1)$.

Pentru λ suficient de mare rezolvăm incluziunea (4.1.4), obţinând că mulţimea $R^\lambda_{SV}(x_1)$ conţine exact trei elemente, şi anume, $R^\lambda_{SV}(x_1) = \{0, x_2^\lambda, y_2^\lambda\}$, în care $x_2^\lambda = \frac{9\lambda^2(1+|x_1|)^2+3\lambda(1+|x_1|)\sqrt{9\lambda^2(1+|x_1|)^2+48}}{8}$ şi $y_2^\lambda = \frac{1}{24\lambda(1+|x_1|)}$. Un calcul simplu arată că mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg este $R^\lambda_{SE}(x_1) = \{x_2^\lambda\}$, dacă λ este suficient de mare. $\square$

În continuare, presupunem că ipotezele Teoremei 4.1.1 sunt verificate.

4.2 Răspunsul nul Stackelberg

Demonstraţia Teoremei 4.1.1 (a). Folosind elemente din analiza nenetedă pentru funcţii local Lipschitz, demonstrăm că $0 \in R_{SV}^{\lambda}(x_1)$ pentru orice $\lambda > 0$.

Demonstraţia Teoremei 4.1.1 (b). Din estimări simple rezultă că $R_{SV}^{\lambda}(x_1) = \{0\}, \ \forall \lambda \in (0, \tilde{c}^{-1})$.

Observaţia 4.2.1 Din punctul de vedere al teoriei jocurilor, Teorema 4.1.1 (a) se poate interpreta astfel: însoţitorul are la dispoziţie în fiecare moment strategia nulă $x_2 = 0$ ca răspuns variaţional Stackelberg. De fapt, în acest caz, însoţitorul refuză să participe activ la joc, pierderea lui fiind $f_{\lambda}(x_1, 0) = 0$.

Când parametrul este suficient de mic (a se vedea Teorema 4.1.1 (b)), mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg se reduce la un singur element, ceea ce reprezintă strategia nulă. Conform Propoziţiei 2.2.1 avem $R_{SE}^{\lambda}(x_1) \subseteq R_{SV}^{\lambda}(x_1)$, adică mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg conţine fie strategia nulă, fie este mulţimea vidă.

4.3 Geometria răspunsurilor Stackelberg

În această secţiune prezentăm schiţa demonstraţiei Teoremei 4.1.1.

Fie $x_1 \in K_1$ şi $\lambda > 0$ oarecare fixaţi.

Lema 4.3.1 (Sz. Nagy [50]) *Funcţionala* $f_{\lambda}(x_1, \cdot)$ *definită prin* (4.1.1) *este mărginită inferior şi coercivă, adică* $f_{\lambda}(x_1, x_2) \to +\infty$ *când* $\|x_2\| \to +\infty$. *Mai mult,* $f_{\lambda}(x_1, \cdot)$ *satisface condiţia lui Palais-Smale în sensul lui Motreanu-Panagiotopoulos.*

Propoziţia 4.3.1 *Numărul* $\tilde{\lambda}$ *din* (4.1.3) *este bine definit şi* $0 < \tilde{\lambda} < \infty$.

Demonstraţia Teoremei 4.1.1 (c). Fie $\lambda > \tilde{\lambda}$ fixat.

Pasul 1. (Primul răspuns) Conform proprietăţii (a), avem $0 \in R_{SV}^{\lambda}(x_1)$, care este primul răspuns variaţional Stackelberg.

Pasul 2. (Al doilea răspuns) Combinând Lema 4.3.1 cu un argument de minimizare globală, validitatea condiţiei Palais-Smale implică faptul că funcţionala $f_{\lambda}(x_1, \cdot)$ de tip Motreanu-Panagiotopoulos ia valoarea minumă într-un punct $x_2^{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, care este un punct critic al funcţiei $f_{\lambda}(x_1, \cdot)$ în sensul lui Motreanu-Panagiotopoulos. Mai mult, $x_2^{\lambda} \neq 0$.

Pasul 3. (Al treilea răspuns) Din teorema trecătorii montane nenetede rezultă că numărul

$$c_\lambda = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} f_\lambda(x_1, \gamma(t))$$

este o valoare critică pentru $f_\lambda(x_1, \cdot)$, unde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], \mathbb{R}^m) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = x_2^\lambda\}$. Dacă $y_2^\lambda \in K_2$ este un punct critic de tip mountain pass pentru funcţia $f_\lambda(x_1, \cdot)$ cu $c_\lambda = f_\lambda(x_1, y_2^\lambda) > 0$, avem $y_2^\lambda \neq 0$ şi $y_2^\lambda \neq x_2^\lambda$, care este al treilea răspuns variaţional Stackelberg.

Din cele de mai sus, avem

$$\{0, x_2^\lambda, y_2^\lambda\} \subset R_{SV}^\lambda(x_1), \ \forall \lambda > \tilde{\lambda}.$$

Observaţia 4.3.1 Din Observatia 4.2.1, mulţimea de răspuns variaţional Stackelberg se reduce la strategia nulă în cazul în care parametrul λ este destul de mic. Pe de altă parte, când parametrul λ este mai mare decât un număr prag (a se vedea Teorema 4.1.1 (c)), există trei posibilităţi de răspunsuri variaţionale Stackelberg. În acest caz, însoţitorul intră activ în joc pentru a minimiza pierderea. Mai precis, pe lângă strategia nulă (Pasul 1), însoţitorul poate alege un răspuns de minimizare globală (Pasul 2); în acest caz, pierderea lui este negativă, adică se află într-o poziţie de câştig. Dacă jucătorul alege răspunsul minimax de tip mountain pass (Pasul 3), valoarea funcţiei de pierdere ia valori pozitive.

4.4 Intervalul de decalaj

Propoziţia 4.4.1 (Sz. Nagy [50]) *Dacă $K_2 = \mathbb{R}^m$, avem $\tilde{c}^{-1} \leq \tilde{\lambda}$.*

Observaţia 4.4.1 În general, avem $\tilde{c}^{-1} < \tilde{\lambda}$. O astfel de situaţie apare în cazul în care $m = 1$, $K_2 = [0, \infty)$ şi funcţia de plată $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este de clasă C^1 în a doua variabilă.

Fie $\eta > 1$ şi $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\tilde{f}(x_1, x_2) = (1 + |x_1|) \int_0^{x_2} \min\{(s-1)_+, \eta - 1\} ds,$$

şi fie $K_2 = \mathbb{R}$. Pentru această alegere, avem

Propoziţia 4.4.2 (Sz. Nagy [50]) *Intervalul de decalaj $[\tilde{c}^{-1}, \tilde{\lambda}]$ poate fi oricât de mic.*

Bibliografie

[1] A. Ambrosetti, P. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. 14 (1973), 349–381.

[2] R. Amir, I. Grilo, Stackelberg versus Cournot Equilibrium. Games and Economic Behavior. 26 (1999), 1–21.

[3] D. Azagra, J. Ferrera, F. López-Mesas, Non-smooth analysis and Hamilton-Jacobi equations on Riemannian manifolds. J. Funct. Anal. 220 (2005), 304–361.

[4] W. Ballmann, Manifolds of nonpositive curvature. Workshop Bonn 1984 (Bonn, 1984), 261268, Lecture Notes in Math., 1111, Springer, Berlin, 1985.

[5] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fund. Math. 3(1922), 133–181.

[6] E. Begle, A fixed point theorem. Ann. of Math. (2)51 (1950), 544–550.

[7] G.C. Bento, J.G. Melo, Subgradient method for convex feasibility on Riemannian manifolds. J. Optim. Theory Appl. 152 (2012), no. 3, 773–785.

[8] C. Bereanu, P. Jebelean, Multiple critical points for a class of periodic lower semicontinuous functionals. Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013), no. 1, 47–66.

[9] V. Berinde, Generalized contractions in quasimetric spaces, Seminar on Fixed Point Theory (Preprint), Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca 3 (1993), 3-9.

[10] G. Bonanno, Some remarks on a three critical points theorem. Nonlinear Anal. 54 (2003), 651–665.

[11] J.M. Borwein, D. Preiss, A smooth variational principle with applications to subdifferentiability and to differentiability of convex functions. Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), 517–527.

[12] J.M. Borwein, Q.J. Zhu, Techniques of variational analysis, Springer, New York, 2005.

[13] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, 1992.

[14] L.E.J. Brouwer, Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 71(1911), 97–115.

[15] E. Cartan, Geometry of Riemannian spaces (Math Sci Press, Brookline, MA, 1983). Translated from French: Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, Paris, 1928.

[16] E. Cavazzuti, M. Pappalardo, M. Passacantando, Nash equilibria, variational inequalities, and dynamical systems. J. Optim. Theory Appl. 114 (2002), no. 3, 491–506.

[17] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions. Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 241–251.

[18] K.-C. Chang, Variational methods for non-differentiable functionals and their applications to partial differential equations. J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), 102–129.

[19] A. Chinchuluun, P.M. Pardalos, A. Migdalas, L. Pitsoulis (eds.): Pareto Optimality, Game Theory and Equilibria, Springer Optimization and Its Applications, vol. 17. Springer, New York, 2008.

[20] F.H. Clarke, Optimization and Non-smooth Analysis, John Wiley&Sons, New York, 1983.

[21] M. Degiovanni, M. Marzocchi, A critical point theory for nonsmooth functionals. Ann. Mat. Pura Appl. (4) 167 (1994), 73–100.

[22] M.P. do Carmo, Riemannian Geometry, Birkhäuser, Boston, 1992.

[23] I. Ekeland, On the variational principle. J. Math. Anal. App. 47 (1974), 324–353.

[24] I. Ekeland, Nonconvex minimization problems. Bull. Amer. Math. Soc. 1 (3) (1979), 443–474.

[25] F. Faraci, A. Kristály, One-dimensional scalar field equations involving an oscillatory nonlinear term. Discrete Contin. Dyn. Syst. 18 (2007), no. 1, 107–120.

[26] Cs. Farkas, A.É. Molnár, **Sz. Nagy**, A generalized variational principle in $b-$metric spaces. Matematiche (Catania) 69 (2014), no. 2, 205–221.

[27] M. Frigon, On a critical point theory for multivalued functionals and application to partial differential inclusions. Nonlinear Anal. 31 (1998), no. 5-6, 735–753.

[28] L. Gasiński, N.S. Papageorgiou, Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems. Series in Mathematical Analysis and Applications, 8. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.

[29] F. Giannessi, A. Maugeri, P.M. Pardalos, P.M. (eds.), Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Methods, Nonconvex Optimization and its Applications, vol. 58. Kluwer, Dordrecht (2001).

[30] S. Grognet, Théorème de Motzkin en courbure négative. Geom. Dedicata 79 (2000), 219–227.

[31] H. Hopf, W. Rinow, Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. Comm. Math. Helvetici 3 (1)(1931) 209–225.

[32] P. Jebelean, G. Moroşanu, Mountain pass type solutions for discontinuous perturbations of the vector $p-$Laplacian. Nonlinear Funct. Anal. Appl. 10 (2005), no. 4, 591–611.

[33] P. Jebelean, G. Moroşanu, Ordinary $p-$Laplacian systems with nonlinear boundary conditions. J. Math. Anal. Appl. 313 (2006), no. 2, 738–753.

[34] J. Kobayashi, M. Ôtani, The principle of symmetric criticality for non-differentiable mappings. J. Funct. Anal. 214 (2004), no. 2, 428–449.

[35] A. Kristály, Detection of arbitrarily many solutions for perturbed elliptic problems involving oscillatory terms. J. Differential Equations 245 (2008), no. 12, 3849–3868.

[36] A. Kristály, Location of Nash equilibria: a Riemannian geometrical approach. Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 1803–1810.

[37] A. Kristály, Nash-type equilibria on Riemannian manifolds: a variational approach. J. Math. Pures Appl. (9) 101 (2014), no. 5, 660–688.

[38] A. Kristály, **Sz. Nagy**, Followers strategy in Stackelberg equilibrium problems on curved strategy sets. Acta Polytech. Hung. 10 (2013), no. 7, 69–80.

[39] A. Kristály, V. Rădulescu, Cs. Varga, Variational Principles in Mathematical Physics, Geometry, and Economics, Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, No. 136, 2010.

[40] S. Lang, Fundamentals of Differential Geometry, Springer - Verlag, 1998.

[41] Yu. S. Ledyaev, Q.J. Zhu, Nonsmooth analysis on smooth manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), 3687–3732.

[42] X. Li, N. Huang, Generalized vector quasi-equilibrium problems on Hadamard manifolds. Optim. Lett. 9 (2015), no. 1, 155–170.

[43] C. Li, G. López, V. Martín-Márquez, Monotone vector fields and the proximal point algorithm on Hadamard manifolds. J. Lond. Math. Soc. (2) 79 (2009), no. 3, 663–683.

[44] P. Omari, F. Zanolin, Infinitely many solutions of a quasilinear elliptic problem with an oscillatory potential. Comm. Partial Differential Equations 21 (1996) 721–733.

[45] S. Marano, D. Motreanu, On a three critical points theorem for non-differentiable functions and applications to nonlinear boundary value problems. Nonlinear Anal. 48 (2002), no. 1, 37–52.

[46] J.F. McClendon, Minimax and variational inequalities for compact spaces. Proc. Amer. Math. Soc. 89 (4), 1983, 717–721.

[47] D. Moskovitz, L.L. Dines, Convexity in a linear space with an inner product. Duke Math. J. 5 (1939), 520–534.

[48] D. Motreanu, P.D. Panagiotopoulos, Minimax theorems and qualitative properties of the solutions of hemivariational inequalities. Nonconvex Optimization and its Applications, 29. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[49] **Sz. Nagy**, Stackelberg equilibria via variational inequalities and projections. J. Global Optim. 57 (2013), no. 3, 821–828.

[50] **Sz. Nagy**, Multiple Stackelberg variational responses, Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica, accepted (2015).

[51] J.F. Nash, Non-cooperative games. Ann. of Math. 54 (1951), 286–295.

[52] S.Z. Németh, Variational inequalities on Hadamard manifolds. Nonlinear Analysis 52 (2003), 1491–1498.

[53] A.J. Novak, G. Feichtinger, G. Leitmann, A differential game related to terrorism: Nash and Stackelberg strategies. J. Optim. Theory Appl. 144 (2010), no. 3, 533–555.

[54] D. O'Regan, R. Precup, Theorems of Leray-Schauder type and applications. Series in Mathematical Analysis and Applications, 3. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2001.

[55] J.-S. Pang, M. Fukushima, Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multi-leader-follower games. CMS 2, (2005), 21–56.

[56] A. Petruşel, Cirić type fixed point theorems. Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 59 (2014), no. 2, 233–245.

[57] A. Petruşel, I.A. Rus, M. Şerban, Fixed Points, Fixed Sets and Iterated Multifunction Systems for Nonself Multivalued Operators. Set-Valued Var. Anal. 23 (2015), no. 2, 223–237.

[58] R.R. Phelps, Convex sets and nearest points. Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957), 790–797.

[59] T. Rapcsák, Geodesic convexity in nonlinear optimization. J. Optim. Theory Appl. 69 (1991), no. 1, 169–183.

[60] B. Ricceri, A general variational principle and some of its applications, Fixed point theory with applications in nonlinear analysis. J. Comput. Appl. Math. 113 (2000), 401–410.

[61] J. Saint Raymond, On the multiplicity of the solutions of the equations $-\Delta u = \lambda f(u)$. J. Differential Equations 180 (2002) 65–88.

[62] W. Stanford, Pure strategy Nash equilibria and the probabilistic prospects of Stackelberg players. Oper. Res. Lett. 38 (2010), no. 2, 94–96.

[63] A. Szulkin, Minimax principles for lower semicontinuous functions and applications to nonlinear boundary value problems. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 3 (1986), no. 2, 77–109.

[64] M. Turinici, Zhong's variational principle is equivalent with Ekeland's. Fixed Point Theory 6 (1) (2005), 133–138.

[65] C. Udrişte, Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds, Mathematics and its Applications, 297. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1994.

[66] Y.S. Xia, Further results on global convergence and stability of globally projected dynamical systems. J. Optim. Theory Appl. 122 (2004), no. 3, 627–649.

[67] Y.S. Xia, J. Wang, On the stability of globally projected dynamical systems. J. Optim. Theory Appl. 106 (2000), no. 1, 129–150.

[68] L. Yongxing, S. Shuzhong, A generalization of Ekeland's ε-variational principle and its Borwein-Preiss variant. J. Math. Anal. Appl. 246(1) (2000), 308–319.

[69] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications. III. Variational methods and optimization. Springer-Verlag, New York, 1985.

[70] J. Zhang, B. Qu, N. Xiu, Some projection-like methods for the generalized Nash equilibria. Comput. Optim. Appl. 45 (2010), no. 1, 89–109.

[71] C.-K. Zhong, On Ekeland's variational principle and minimax theorem. J. Math. Anal. Appl. 205 (1997), 239–250.