# Metoda simetrizării în studiul problemelor eliptice subliniare

Rezumatul tezei de doctorat

Csaba Farkas

Conducător de doctorat

Prof. dr. Csaba Varga

Departamentul de Matematică
Facultea de Matematică şi Informatică
Universitatea Babeş-Bolyai
Cluj-Napoca, România

## Preşedintele comisiei

**Prof. Dr. Radu Precup**
Departamentul de Matematică
Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, România

## Referenţi

**Prof. Dr. Petru Jebelean**
Departamentul de Matematică,
Universitatea de Vest, Timişoara, România

**Prof. Dr. Cătălin Lefter**
Departamentul de Matematică Aplicată,
Universitatea Al. I. Cuza, Iaşi, România

**Prof. Dr. Adrian Petruşel**
Departamentul de Matematică,
Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, România

## Comisia de îndrumare

**Prof. Dr. Alexandru Kristály**
Departamentul de Economie,
Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, România

**Prof. Dr. Adrian Petruşel**
Departamentul de Matematică,
Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, România

**Prof. Dr. Radu Precup**
Departamentul de Matematică,
Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, România

# Cuprins

# Introducere

În ultimii ani, numeroşi matematicieni s-au ocupat de metode de simetrizare care au aplicaţii în teoria ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale şi inegalităţi izoperimetrice. Menţionăm lucrările lui J. V. Schaftingen [61], S. Kesenvan [35] şi F. Faraci et al. [20]. Aceste lucrări confirmă legătura dintre calculul variaţional şi metodele de simetrizare.

Scopul tezei de doctorat este de a prezenta noi rezultate de existenţă şi de multiplicitate în studiul problemelor eliptice subliniare, combinând tehnici din calculul variaţional şi din teoria simetrizărilor. Teza de doctorat a fost redactată pe baza articolelor [21–24] şi [25].

Calculul variaţional este în continuă dezvoltare. Metodele variaţionale sunt indispensabile ca instrument de lucru în fizica matematică şi în geometrie. De asemenea, calculul variaţional are aplicaţii şi în alte domenii ale matematicii, precum şi în numeroase domenii ale fizicii (determinarea traiectoriilor şi geodezicelor în mecanica clasică şi teoria relativităţii generale), în aeronautică (maximizarea înălţării unei aripi de avion), designul echipamentelor sportive (minimizarea rezistenţei aeriene asupra unei căşti de bicicletă, optimizarea formei schiurilor), inginerie mecanică (maximizarea puterii unei coloane, a unui baraj sau a unei arcade), designul unor ambarcaţiuni (optimizarea formei unei bărci cu cocă). Din domeniul calculului variaţional amintim câteva monografii de referinţă, semnate de A. Kristály, V. D. Rădulescu, Cs. Varga [40], H. Brézis [9] şi M. Struwe [68].

În ciuda faptului că simetrizările nu apar în modelarea situaţiilor reale din viaţa cotidiană, acestea se dovedesc a fi foarte utile şi reprezintă o metodă importantă folosită în studiul ecuaţiilor diferenţiale cu derivate parţiale. Numeroşi matematicieni au lucrat şi continuă să lucreze în domeniul simetrizărilor, încercând să descrie fenomene noi. Menţionăm lucrările lui S. Kesevan [35], Brock şi Solynin [10], J. Van Schaftingen [61], M. Squassina [67], care au demonstrat în ultimii ani numeroase rezultate în cadrul simetrizărilor; de exemplu, versiunea simetrică a principiului minimax şi principiul variaţional al lui Ekeland, care au deschis căi noi de cercetare şi de aplicare ale acestui domeniu.

În continuare prezentăm structura tezei.

În prima parte a tezei vom introduce noţiunile de bază şi rezultate preliminarii din teoria spaţiilor Lebesgue şi a spaţiilor Sobolev (Capitolul 1), din calculul variaţional (Capitolul 2), prezentăm elemente din teoria funţiilor local lipschitziene (Capitolul 3), noţiuni şi rezultate din teoria simetrizării (Capitolul 4) şi din geometria Finsler (Capitolul 5).

În partea a doua prezentăm câteva rezultate de existenţă şi de multiplicitate. Mai exact, în prima parte a Capitolului 6, vom studia următoarea ecuaţie cvasiliniară de tip Neumann:

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = \lambda\alpha(x,y)f(u) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{N}_\lambda$}$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este mărginită şi deschisă cu frontiera netedă, $p > N$, $N - m \geq 2$, $\Delta_p$ este operatorul $p$-Laplacian, $\lambda$ este un parametru pozitiv, $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ este un potenţial nenul cu suport compact, $n$ este vectorul normal la $\partial\Omega$, iar $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă cu $f(0) = 0$. Mai întâi prezentăm un rezultat de scufundare compactă (vezi Teorema 6.3), după aceea vom demonstra un rezultat de multiplicitate pentru problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ pe domenii de tip bandă (strip-like). Folosind metode variaţionale, demonstrăm că pentru valori mari ale lui $\lambda$, problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ are cel puţin două soluţii slabe nenule, precum şi faptul că există cel puţin un $\tilde{\lambda} > 0$, astfel încât problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ are cel puţin trei soluţii slabe nenule. Aceste soluţii au proprietăţi de simetrie (vezi Teorema 6.1).

În continuare aplicăm aceeaşi metodă, care a fost prezentată anterior, pentru următoarea ecuaţie cvasiliniară (vezi Capitolul 6, Secţiunea 6.2):

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2} \cdot u = \beta(x) g(u) & \text{în} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda \alpha(x) f(u) & \text{pe} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{N}_\lambda$}$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $p > N$, $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega) \cap L^1(\partial\Omega), \beta \in L^1(\Omega)$ sunt potenţiale pozitive, nenule, iar $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue cu $f(0) = g(0) = 0$. Demonstrăm că, pentru valori mari ale lui $\lambda$, problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ are cel puţin două soluţii slabe nenule, cu anumite proprietăţi de simetrie.

În ultima parte a Capitolului 6 vom considera următoarea incluziune diferenţială subliniară de tip Dirichlet (vezi Capitolul 6, Secţiunea 6.3):

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2} u \in \lambda \alpha(x, y) \partial F(u(x, y)) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\lambda$}$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit cu frontiera netedă, $p > N$, $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega) \cap L^1(\partial\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ este o funcţie axial simetrică, nenulă, nenegativă şi $\partial F$ reprezintă gradientul generalizat al funcţiei local lipschitziene $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. În rezultatul principal al acestei secţiuni demonstrăm că pentru valori mari ale parametrului $\lambda$, problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ are cel puţin două soluţii slabe, care au anumite proprietăţi de simetrie.

În Capitolul 7 considerăm următorul sistem diferenţial:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda F_u(x, u(x), v(x)) & \text{în } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda F_v(x, u(x), v(x)) & \text{în } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{S}_\lambda$}$$

unde $\lambda$ este un parametru pozitiv, $N > p, q > 1$ şi $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^N$ este bila unitate, $F \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ şi cu $F_z$ notăm derivata parţială a funcţiei $F$ în raport cu variabila $z$. Utilizând tehnici de simetrizare şi forma simetrică a princiului varaţional al lui Ekeland şi a teoremei trecătorii montane, demonstrăm că pentru valori mari ale lui $\lambda$, problema $(\mathcal{S}_\lambda)$

are cel puţin două soluţii slabe, invariante faţă de simetrizarea de tip "cap" (spherical cap symmetry).

În ultimul capitol demonstrăm teoreme de unicitate, localizare şi de rigiditate pentru ecuaţia (singulară) a lui Poisson ce conţine operatorul Finsler-Laplace pe varietăţi Finsler-Hadamard cu reversibilitate finită. Studiem următoarea problemă:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta}(-u) - \mu \frac{u}{d_F^2(x_0,x)} = 1 & \text{în} \quad \Omega; \\ u = 0 & \text{pe} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\Omega^\mu$}$$

În continuare enumerăm rezultatele originale din această teză:

**Capitolul 6:** Teorema 6.1, Observaţia 6.2, Teorema 6.3, Propoziţia 6.4, Corolarul 6.5, Exemplul 6.6, Teorema 6.7, Exemplul 6.8, Teorema 6.10, Obervaţia 6.11, Propoziţia 6.12, Propoziţia 6.13.

**Capitolul 7:** Teorema 7.1, Observaţia 7.2, Observaţia 7.3, Observaţia 7.4,

**Capitolul 8:** Teorema 8.1, Teorema 8.2, Propoziţia 8.3, Teorema 8.4, Propoziţia 8.5, Teorema 8.6, Propoziţia 8.7, Teorema 8.8, Propoziţia 8.9, Propoziţia 8.10.

În încheiere, amintim alte cinci lucrări care au fost publicate sau trimise spre publicare de autor, dar care nu fac parte din subiectul tezei de doctorat.


1. CS. FARKAS, *A generalized form of Ekeland's variational principle*, Analele Ştiinţifice ale Universităţii Ovidius Constanţa, Vol. 20 (1), pages 101-112, 2012.
2. CS. FARKAS, A. É. MOLNÁR, *A Generalized Variational Principle and its Application to Equilibrium Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 156, pages 213-231, 2013.
3. CS. FARKAS, A. É. MOLNÁR, SZ. NAGY, *A generalized variational principle in b-metric spaces*, acceptată, Le Matematiche, 2014.
4. F. FARACI, CS. FARKAS, *New conditions for the existence of infinitely many solutions for a quasilinear problem*, trimisă spre publicare, 2014.
5. F. FARACI, CS. FARKAS, *A quasilinear elliptic problem involving critical Sobolev exponents*, trimisă spre publicare, 2014.

# Mulţumiri

Îmi face deosebită plăcere să îmi exprim recunoştinţa faţă de numeroşi oameni care m-au susţinut sau care au jucat un rol important în ultimii trei ani din viaţa mea.

În primul rând sunt recunoscător domnului Prof. dr. Csaba Varga, pentru sprijinul acordat până la finalizarea tezei de doctorat. A fost un privilegiu să studiez sub îndrumarea dumnealui. Să lucrez alături de dumnealui a fost una dintre cele mai bogate experienţe din viaţa mea.

Sunt la fel de recunoscător domnului Prof. dr. Alexandru Kristály, nu numai pentru sfaturile sale matematice inestimabile, ci şi pentru ajutorul său extraordinar, pentru timpul pe care mi l-a acordat pe parcursul scrierii tezei. De asemenea, doresc să îi mulţumesc pentru că am prilejul de a fi membru al Proiectului CNCS, PN-II-ID-PCE-2011-3-0241.

Gânduri calde de recunoştină se îndreaptă spre toate persoanele amabile pe care le-am întâlnit în cadrul Universităţii Babeş-Bolyai.

Aş dori, de asemenea, să îmi exprim recunoştinţa faţă de prietenii mei, care m-au încurajat în tot acest timp. Îi sunt deosebit de recunoscător lui Emil Horobeţ pentru discuţiile noastre despre matematică. Îi sunt, de asemenea, recunoscător lui Andrea Éva Molnár pentru colaborarea cu ea şi prietenia ei. Mulţumiri speciale se îndreaptă celui mai bun prieten al meu, Zsombor Kisfaludi-Bak, care m-a sprijinit pe tot parcursul scrierii tezei.

Aş dori să mulţumesc membrilor familiei mele pentru dragostea, înţelegerea şi răbdarea lor nesfârşită. Părinţilor mei, care m-au învăţat să iubesc ştiinţa şi care m-au sprijinit în toate preocupările şi aspiraţiile mele.

Nu în ultimul rând, voi rămâne veşnic recunoscător logodnicei mele, Evelin, pentru toată dragostea şi sprijinul ei. Fără ajutorul ei nu aş fi terminat această teză de doctorat şi nu mi-aş fi găsit nicicând curajul de a depăşi toate dificultăţile care s-au ivit pe parcursul acestei lucrări. Îi mulţumesc!

*Csaba Farkas*
*Cluj-Napoca, România*

1

## Spaţii $L^p$ şi spaţii Sobolev

2

## Elemente de calcul variaţional

3

## Elemente din teoria funcţiilor local lipschitziene

4

## Simetrizări

5

## Elemente de geometrie Finsler

# 6

# Soluţii multiple invariante faţă de grupuri pe domenii de tip bandă (strip-like)

În acest capitol vom prezenta anumite rezultate de multiplicitate pe domenii de tip bandă (strip-like). Acest capitol se bazează pe articolele [21, 22, 25].

## 6.1 Soluţii multiple invariante faţă de grupuri

Considerăm următoarea ecuaţie cvasilineară cu condiţie la frontieră de tip Neumann, omogenă

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = \lambda\alpha(x,y)f(u) & \text{în } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{N}_\lambda$}$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, iar $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este mărginită şi deschisă cu frontieră netedă, $p > N$, $N - m \geq 2$, $\Delta_p$ este operatorul $p$-Laplace, $\lambda$ este un parametru pozitiv, $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ este un potenţial nenul cu suport compact, $n$ este vectorul normal exterior la $\partial\Omega$, şi $f : [0, \infty[ \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă astfel încât $f(0) = 0$.

Scopul acestui capitol este studiul existenţei soluţiilor multiple pentru problema ($\mathcal{N}_\lambda$), în care spaţiul funcţional este $W^{1,p}(\Omega)$. În ceea ce priveşte lucrarea [19], dificultatea principală în studiul problemei constă în nemărginirea domeniului $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$. Într-adevăr, nu avem o scufundare compactă pentru $W^{1,p}(\Omega)$ în spaţii Lebesgue. Pentru $p > N$, conform teoremei lui Morrey (vezi [9]), scufundarea $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ este continuă, dar nu este compactă. Acest fapt se datorează lipsei concentraţiei de compacticitate după anumite direcţii în domeniul de tip bandă $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$. Pe de altă parte, Faraci, Iannizzotto şi Kristály [20] au demonstrat un rezultat de scufundare compactă pentru funcţii cilindric simetrice pe domenii de tip bandă în spaţii cu dimensiuni mici; şi anume, dacă $p > N$, atunci subspaţiul funcţiilor cilindric simetrice ale lui $W^{1,p}(\Omega)$, notate cu $W^{1,p}_c(\Omega)$ este scufundat compact în $L^\infty(\Omega)$. Subspaţiul (închis) al lui $W^{1,p}(\Omega)$, constând din funcţii *cilindric simetrice*, este definită prin

$$W_c^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : u(x, \cdot) \text{ este radial simetrică pentru orice } x \in \omega\}.$$

Un astfel de rezultat de compacticitate, combinată cu o metodă variaţională potrivită, este un argument promiţător în ceea ce priveşte studiul problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$. În lucrarea [20], autorii au combinat principiul simetriei critice cu rezultatul de scufundare compactă menţionat mai sus şi un principiu variaţional al lui Ricceri pentru a studia existenţa şi multiplicitatea soluţiilor problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$.

Pentru a prezenta rezultatul nostru reamintim că $u \in W^{1,p}(\Omega)$ este soluţia slabă a problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$, dacă pentru orice $v \in W^{1,p}(\Omega)$ are loc

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv)dxdy = \lambda \int_\Omega \alpha(x,y)f(u)vdxdy. \tag{6.1.1}$$

Presupunem că $N - m \geq 2$ şi fie

$$\mathcal{G}_{N,m} = \{G = id_{\mathbb{R}^m} \times O(k_1) \times ... \times O(k_l) : k_1, ..., k_l \geq 2, k_1 + ... + k_l = N - m\}.$$

Fie $G \in \mathcal{G}_{N,m}$ un element fixat. Spunem că o funcţie $h : \Omega \to \mathbb{R}$ este $G-$*invariantă*, dacă $h(\tilde{g}(x,y)) = h(x,y)$, pentru orice $\tilde{g} = id_{\mathbb{R}^m} \times g \in G$ şi $(x,y) \in \Omega$. Funcţia $h$ este numită *cilindric simetrică*, dacă este $id_{\mathbb{R}^m} \times O(N-m)-$invariantă.

Rezultatul principal al acestui capitol este:

**Teorema 6.1** *Fie $p > N \geq m+2$, $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ o funcţie cilindric simetrică, nenegativă, nenulă cu suportul compact $K$. Fie $\mu = \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$. Considerăm funcţia continuă $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ astfel încât are loc egalitatea $f(0) = 0$ şi presupunem că:*

***i)*** $M_F = \sup\limits_{[0,\infty[} F < \infty$, *unde* $F(s) = \int_0^s f(t)dt$*;*

***ii)*** $\lim\limits_{s \to 0^+} \dfrac{f(s)}{s^{p-1}} = 0.$

*Mai mult, presupunem că există $r > 0$ astfel încât*

***iii)*** $F(r) = \max\limits_{[0, c_\infty (pM_F \|\alpha\|_{L^1})^{\frac{1}{p}}]} F < M_F$*;*

***iv)*** $\dfrac{F(r)}{r^p} > \dfrac{1}{p\|\alpha\|_1}\left[\dfrac{|K_\mu \setminus K|}{\mu^p} + |K_\mu|\right].$

*Atunci, următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

***(a)*** *Pentru orice $G \in \mathcal{G}_{N,m}$ şi $\lambda > 1$, problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ admite cel puţin două soluţii slabe nenule, nenegative şi $G-$invariante.*

***(b)*** *Pentru orice $G \in \mathcal{G}_{N,m}$, există $\lambda_G > 1$ astfel încât problema $(\mathcal{N}_{\lambda_G})$ admite cel puţin trei soluţii slabe nenule, nenegative şi $G-$invariante.*

**Observaţia 6.2** ***(a)*** *Deoarece $f(0) = 0$, fără a pierde din generalitatea problemei, putem presupune că $f$ este definită pe toată axa reală, punând $f(s) = 0$ pentru orice $s \leq 0$. Pentru $s \in \mathbb{R}$ considerăm $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ şi astfel are loc $F(s) = 0$ pentru orice $s \leq 0$.*

***(b)*** *Dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$ este o soluţie slabă a problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$, atunci $u \geq 0$. Într-adevăr, dacă alegem $v = u_- = \min\{0, u\}$ ca funcţie de test în (6.3.1), atunci din relaţia*

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla u_- + |u|^{p-2}uu_-)dxdy = \lambda \int_\Omega \alpha(x,y)f(u)u_- dxdy = 0$$

*rezultă că $u_- = 0$.*

***(c)*** *Dacă, pe lângă condiţiile de mai sus, presupunem că are loc*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = 0,$$

*atunci pentru valori mici ale parametrului $\lambda > 0$, problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ admite numai soluţia trivială. Într-adevăr, dacă $u \in W^{1,p}(\Omega)$ este soluţia slabă a problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$, şi punem ca funcţie de test $v = u$ în relaţia (6.3.1), obţinem*

$$\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)dxdy = \lambda \int_\Omega \alpha(x,y)f(u)udxdy \leq \lambda c_f \|\alpha\|_{L^\infty} \int_\Omega |u|^p dxdy,$$

*unde $c_f = \max\limits_{s>0} \dfrac{|f(s)|}{s^{p-1}} > 0$. Aşadar, dacă $\lambda < (c_f\|\alpha\|_{L^\infty})^{-1}$, atunci $u = 0$.*

Demonstraţia Teoremei 6.1 se bazează pe argumente variaţionale. Considerăm funcţionala $\mathcal{L} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\mathcal{L}(u) = \int_\Omega \alpha(x,y)F(x,y)dxdy.$$

Funcţionala de energie asociată problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$ este

$$\mathcal{E}_\lambda(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \lambda\mathcal{L}(u).$$

Fie $m \geq 1$ şi $n = N - m \geq 2$ numere întregi, fie $\omega \subset \mathbb{R}^m$ un domeniu mărginit cu frontiera Lipschitz $\partial\omega$, şi fie $p > N$ un număr real. Considerăm $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$. Putem demonstra într-un mod standard că $\mathcal{E}_\lambda$ este de clasă $C^1$, iar punctele critice ale lui $\mathcal{E}_\lambda$ sunt exact soluţiile slabe ale problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$. Acţiunea grupului $G$ pe spaţiul Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ este dată de

$$\tilde{g}u(x,y) = u(x, g^{-1}y) \text{ pentru orice } \tilde{g} = \mathrm{id} \times g \in G,\ (x,y) \in \Omega,\ u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Avem că $G$ acţionează liniar, continuu şi izometric pe $W^{1,p}(\Omega)$, adică $\|\tilde{g}u\| = \|u\|$ pentru orice $\tilde{g} \in G$ şi $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Fie

$$W_G^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \tilde{g}u = u \text{ pentru orice } \tilde{g} \in G\}$$

subspaţiul funcţiilor $G-$invariante în $W^{1,p}(\Omega)$. În caz particular, avem

$$W^{1,p}_{id_{\mathbb{R}^m}\times O(N-m)}(\Omega) = W^{1,p}_c(\Omega).$$

Un pas esenţial al investigaţiei noastre este următorul rezultat.

**Teorema 6.3** *Presupunem că $m$, $N$, $\Omega$, $\omega$ şi $p$ satisfac condiţiile menţionate mai sus, şi fie $G \in \mathcal{G}_{N,m}$. Atunci scufundarea $W^{1,p}_G(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ este compactă.*

Se ştie că o funcţie cilindric simetrică este şi $G-$invariantă pentru orice $G \in \mathcal{G}_{N,m}$. Datorită principiului simetriei critice, punctele critice ale lui $\mathcal{E}^G_\lambda = \mathcal{E}_\lambda|_{W^{1,p}_G(\Omega)}$ devin puncte critice şi pentru $\mathcal{E}_\lambda$, astfel, aceste puncte sunt şi soluţii slabe, $G-$invariante ale problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$. Prin urmare este suficient să garantăm existenţa punctelor critice pentru $\mathcal{E}^G_\lambda = \mathcal{E}_\lambda|_{W^{1,p}_G(\Omega)}$.

În demonstraţia teoremei de mai sus utilizăm următorul rezultat.

**Propoziţia 6.4**

***(a)*** *Funcţionala $\mathcal{L}^G_\lambda$ este slab inferior semicontinuă.*

***(b)*** *Pentru orice $\lambda \geq 0$, $\mathcal{E}^G_\lambda$ satisface condiţia Palais-Smale.*

O consecinţă imediată a Teoremei 6.1 este următorul rezultat.

**Corolar 6.5** *Fie $p > N \geq m+2$, $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$. Fie $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ o funcţie cilindric simetrică, nenegativă, nenulă cu suportul compact $K$. Fie $\mu = \mathrm{dist}(K, \partial\Omega)$, $f : [0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă astfel încât $f(0) = 0$. Presupunem că*

***j)*** $M_F = \sup F_{[0,+\infty[} < +\infty$*;*

***jj)*** $0$ *este maxim local al lui* $F$*;*

***jjj)*** *există constantele $r, \delta$ astfel încât*

$$0 < r < \min\left\{\mu, \lim_{p\to+\infty}\left[\frac{|K_\mu \setminus K|}{\mu^p} + |K_\mu|\right]^{-\frac{1}{p}}\right\},$$

*precum şi $\delta > 2$ astfel încât*

$$0 < F(r) = \max_{[0,\delta]} F < M_F.$$

*Atunci, există $p_0 > N$ astfel încât pentru orice $p \geq p_0$ concluziile Teoremei 6.1 rămân adevărate.*

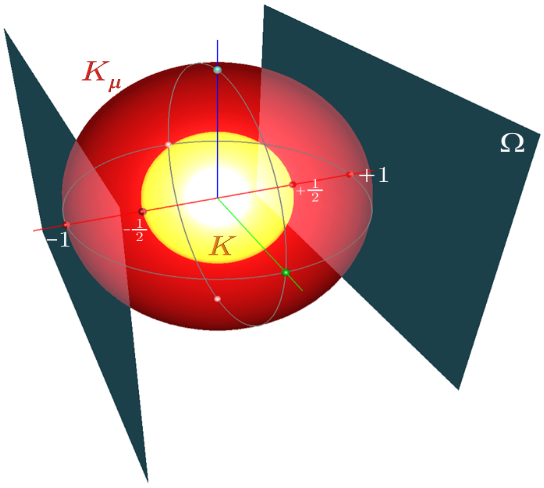


**Figura 6.1:** $\Omega$, $K$, $K_\mu$

**Exemplu 6.6** *Alegem* $\Omega = [-1, 1] \times \mathbb{R}^2$ *şi*

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{1}{4} \right\}.$$

*Observăm că* $\mu = dist(K, \partial\Omega) = \frac{1}{2}$, $|K| = \frac{\pi}{6}$ *şi* $|K_\mu| = \frac{4}{3}\pi$.

*Presupunem că*

$$||\alpha||_{L^1} > \frac{75\pi^2}{2^7}. \tag{6.1.2}$$

*Considerăm funcţia* $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *definită prin* $g(x) = \sin^5(2\pi x)$ *şi numărul natural* $k_0 \in \mathbb{N}$, *astfel încât* $k_0 \geq c_\infty \sqrt[4]{4\|\alpha\|_{L^1}}$. *Fie de asemenea funcţia* $h : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *definită prin* $h(x) = \frac{3}{2} - 6\left(x - k_0 + \frac{1}{2}\right)^2$.

*Construim următoarea funcţie*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(1 - \delta_{k,k_0}) \cdot \chi_{[k-1,k]}(x) \cdot g(x) + \delta_{k,k_0} \cdot \chi_{[k_0-1,k_0]}(x) \cdot h(x), \ (\forall) \ x \geq 0,$$

*unde* $\chi_{[k-1,k]}$ *este funcţia caracteristică a intervalului* $[k-1, k]$, *şi* $\delta_{k,k_0}$ *reprezintă simbolul lui Kronecker, adică* $\delta_{k,k_0} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k \neq k_0 \\ 1, & \text{dacă } k = k_0 \end{cases}$. *Funcţia* $f$ *explicitată are următoarea formă*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}\sin^5(2\pi x), & \text{dacă } x \in [k-1, k], k \neq k_0 \\ \frac{3}{2} - 6\left(x - k_0 + \frac{1}{2}\right)^2, & \text{dacă } x \in [k_0 - 1, k_0]. \end{cases}$$

*Vom arăta că funcţia* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ *este mărginită superior. Într-adevăr, din construcţie*

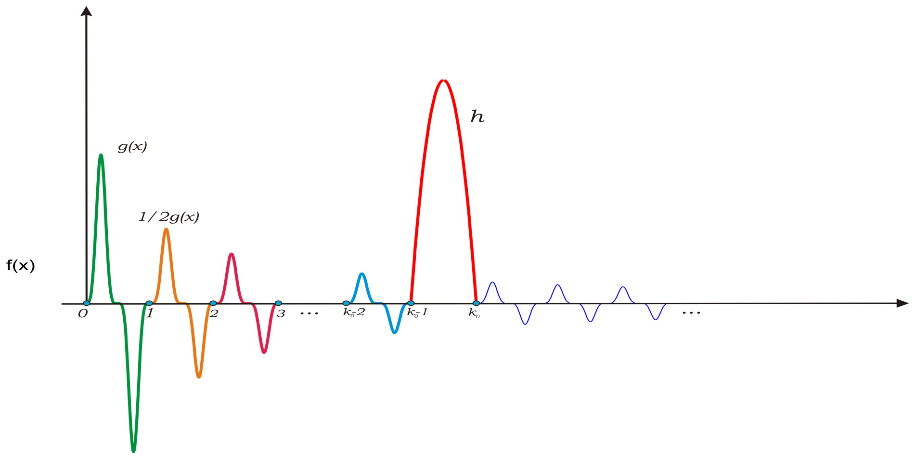


**Figura 6.2:** Graficul lui $f$

*rezultă că*

$$\max_{x\in\mathbb{R}_+\setminus[k_0-1,k_0]} F(x) = \max_{x\in[0,1]} F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin^5(2\pi x)dx = \frac{8}{15\pi}.$$

*Pe de altă parte, are loc*

$$\max_{x\in[k_0-1,k_0]} F(x) = \int_{k_0-1}^{k_0} \left[\frac{3}{2} - 6\left(x - k_0 + \frac{1}{2}\right)^2\right] dx = 1,$$

*ceea ce înseamnă că $F$ este mărginită superior şi avem $M_F = 1$.*

*Observăm că*

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(s)}{s^3} = \lim_{s\to 0^+} \frac{\sin^5(2\pi s)}{s^3} = 0. \tag{6.1.3}$$

*Dacă alegem $p = 4$, $N = 3$, utilizând relaţia (6.1.3) şi $M_F = 1$, rezultă că $F$ satisface ipotezele i) şi ii) din Teorema 6.1. Inegalităţile 6.1.2 şi $k_0 \geq c_\infty \sqrt[4]{4\|\alpha\|_{L^1}}$ asigură faptul că ipotezele iii) şi iv) din Teorema 6.1 sunt satisfăcute. În concluzie, putem aplica Teorema 6.1.*

## 6.2 Un rezultat de multiplicitate

În acest paragraf aplicăm metodă prezentată în paragraful precedent pentru următoarea ecuaţie cvasiliniară, cu condiţia la frontieră de tip Neumann neomogenă

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}\cdot u = \beta(x,y)g(u(x,y)) & \text{în} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda\alpha(x,y)f(u(x,y)) & \text{pe} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{N}_\lambda$}$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, iar $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\omega$ netedă. Fie $p > N$, $\Delta_p$ reprezintă operatorul $p$-Laplace şi $\lambda$ este un parametru real pozitiv. Fie $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega) \cap L^1(\partial\Omega), \beta \in L^1(\Omega)$ doi potenţiali nenuli şi pozitivi, iar $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ două funcţii continue astfel încât $f(0) = g(0) = 0$.

În cele ce urmează vom stabili rezultatul principal al acestui paragraf. Fără a pierde din generalitatea problemei, putem presupune că $f, g$ sunt definite pe toată axa reală, dacă alegem $f(s) = g(s) = 0$, pentru orice $s \leq 0$. Notăm cu $F$ şi $G$ primitivele funcţiilor $f$ respectiv $g$, adică

$$F(s) = \int_0^s f(t)dt \text{ şi } G(s) = \int_0^s g(t)dt.$$

Fie $q, r$ astfel încât $q < p < r$. Presupunem că următoarele ipoteze sunt îndeplinite:

**(A)** $\limsup_{|s|\to 0} \dfrac{F(s)}{|s|^r} < \infty$ şi $|f(s)| \leq C(1 + |s|^{q-1})$;

**(B)** Există $\delta_1 > 0$ astfel încât

$$g(t) \leq 0, \forall\ 0 \leq t < \delta_1,$$
$$f(t) \leq 0, \forall\ 0 \leq t < \delta_1;$$

**(C)** Există $q, r$ astfel încât $q < p < r$ şi

$$\lim_{t\to 0} \frac{G(t)}{|t|^q} = 0$$

şi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{|t|^r} = 0;$$

**(D)** Fie $K_\tau = \{(x, y) \in \omega \times \mathbb{R}^{N-m} : ||y|| < \tau\}$. Presupunem că

$$\inf_{(x,y)\in K_\tau} \alpha(x, y) > 0;$$

**(E)** Presupunem că $p \cdot \tilde{c}\|\beta\|_1 c_\infty^p < 1$, unde $c_\infty$ reprezintă cea mai bună constantă de scufundare a lui $W^{1,p}(\Omega)$ în $L^\infty(\Omega)$, şi $\tilde{c} = \max_{t\in\mathbb{R}} \frac{G(t)}{|t|^p} < +\infty$;

**(F)** Există $s_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(s_0) > 0$.

Rezultatul principal al acestui paragraf este următorul.

**Teorema 6.7** *Presupunem că $p > N \geq 2$, şi fie $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, unde $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu deschis, mărginit cu frontiera $\partial\omega$ netedă. Fie $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega) \cap L^1(\partial\Omega)$ şi $\beta \in L^1(\Omega)$ două funcţii pozitive, cilindric simetrice şi $f, g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ două funcţii continue astfel încât $f(0) = g(0) = 0$ şi care satisfac condiţiile* $(\mathbf{A}) - (\mathbf{F})$. *Atunci, există $\lambda_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\lambda > \lambda_0$, problema $(\mathcal{N}_\lambda)$ are cel puţin două soluţii slabe nenule şi cilindric simetrice.*

Întroducem funcţionalele $I, J, \Phi : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definite prin

$$I(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p, \;\; J(u) = \int_\Omega \beta(x,y)G(u(x,y))dxdy,$$

şi

$$\Phi(u) = \int_{\partial\Omega} \alpha(x,y)F(u(x,y))dxdy,$$

unde $\|\cdot\|$ este norma spaţiului $W^{1,p}(\Omega)$. Funcţionala de energie $\mathcal{E}_\lambda : W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ asociată problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$ este definită prin

$$\mathcal{E}_\lambda(u) = I(u) - J(u) - \lambda\Phi(u).$$

Punctele critice ale funcţionalei de energie $\mathcal{E}_\lambda$ sunt soluţiile slabe a problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$.

Deoarece $p > N$, subspaţiul funcţiilor cilindric simetrice ale lui $W^{1,p}(\Omega)$, notată cu $W_c^{1,p}(\Omega)$, este scufundat compact în $L^\infty(\Omega)$ (vezi Teorema 6.3). Utilizând principiul simetriei critice al lui Palais [73], punctele critice ale funcţionalei $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda|_{W_c^{1,p}(\Omega)}$ devin puncte critice ale funcţionalei $\mathcal{E}_\lambda$, deci sunt soluţii slabe, cilindric simetrice ale problemei $(\mathcal{N}_\lambda)$.

Prin urmare este suficient să studiem existenţa punctelor critice ale funcţionalei $\mathcal{F}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda|_{W_c^{1,p}(\Omega)}$.

**Observaţia 6.8** Datorită ipotezelor din Teorema 6.7, putem alege

$$\lambda_0 = \inf\left\{\frac{\frac{1}{p}||u||^p - J(u)}{\Phi(u)} : u \in W_c^{1,p}(\Omega), \Phi(u) > 0\right\}.$$

În continuare prezentăm un exemplu pentru funcţiile $f$ şi $g$ care satisfac condiţiile din Teorema 6.7.

**Exemplu 6.9** Dacă alegem

$$f(s) = \ln(1 + (s-1)_+^r),$$

şi

$$g(s) = rs^{r-1}(1-s)_+,$$

atunci ipotezele **(A)**,**(B)**,**(C)**,**(E)** şi **(F)** sunt satisfăcute cu $t_+ = \max\{0, t\}$.

În acest caz avem

$$\widetilde{c} = \frac{1}{r+1-p} \cdot \left(\frac{(r-p)(r+1)}{r(r+1-p)}\right)^{r-p}.$$

Deci putem aplica Teorema 6.7.

## 6.3 O incluziune diferenţială subliniară

În acest paragraf considerăm următoarea problemă de incluziune diferenţială subliniară eliptică , cu condiţia la frontieră de tip Dirichlet omogenă, adică

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u \in \lambda\alpha(x,y)\partial F(u(x,y)) & \text{în } \Omega, \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \qquad (\mathcal{P}_\lambda)$$

unde $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit cu frontiera $\partial\omega$ netedă, $p > N$, $N - m \geq 2$, $\lambda$ este un parametru real pozitiv, $\alpha \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ este o funcţie axial simetrică, nenegativă, nenulă, iar $\partial F$ este gradientul generalizat al funcţiei local Lipschitz $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Pentru a prezenta rezultatul principal, reamintim că $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este *soluţia slabă* a problemei $(\mathcal{P}_\lambda)$, dacă pentru orice $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ există $\xi_F \in \partial F(u(x,y))$ pentru a.p.t. $(x,y) \in \Omega$ astfel încât

$$\int_\Omega (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv)dxdy = \lambda \int_\Omega \alpha(x,y)\xi_F v(x,y)dxdy. \qquad (6.3.1)$$

Presupunem că următoarele ipoteze sunt satisfăcute:

$(A)$ $\inf\limits_{\omega \times B(0,R)} \alpha(x,y) > 0$, unde $B(0,R) = \{x \in \mathbb{R}^{N-m} : \|x\|_{\mathbb{R}^{N-m}} < R\} \subset \mathbb{R}^{N-m}$;

$(\mathcal{F}_1)$ $\lim\limits_{|s|\to 0} \dfrac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial F(s)\}}{|s|^{p-1}} = 0$;

$(\mathcal{F}_2)$ $\lim\limits_{|s|\to +\infty} \dfrac{F(s)}{|s|^{p-1}} = 0$;

$(\mathcal{F}_3)$ Există $s_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(s_0) > 0$.

Rezultatul principal al acestui paragraf este următorul:

**Teorema 6.10** *Presupunem că $p > N \geq 2$. Fie $\Omega = \omega \times \mathbb{R}^{N-m}$, unde $\omega \subset \mathbb{R}^m$ este un domeniu mărginit cu frontieră netedă. Fie $\alpha \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ o funcţie axial simetrică, pozitivă, satisfăcând condiţia $(A)$, şi fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie local Lipschitz, care satisface $F(0) = 0$ precum şi condiţiile $(\mathcal{F}_1) - (\mathcal{F}_3)$. Atunci există $\lambda_0 > 0$ astfel încât pentru orice $\lambda > \lambda_0$ problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ admite cel puţin două soluţii slabe nenule, axial simetrice în $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demonstraţia teoremei se bazează pe argumente variaţionale. Considerăm funcţionalele $I, \mathcal{L} : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definite prin

$$I(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p, \mathcal{L}(u) = \int_\Omega \alpha(x,y)F(x,y)dxdy,$$

unde $\|\cdot\|$ este norma spaţiului $W_0^{1,p}(\Omega)$. Funcţionala de energie asociată problemei $(\mathcal{P}_\lambda)$ este

$$\mathcal{E}_\lambda(u) = I(u) - \lambda\mathcal{L}(u).$$

Funcţionala $\mathcal{E}_\lambda$ este funcţie local Lipschitz pe $W_0^{1,p}(\Omega)$. Un argument standard arată că punctele critice (în sensul lui Chang) ale funcţionalei $\mathcal{E}_\lambda$ sunt soluţiile slabe ale problemei $(\mathcal{P}_\lambda)$. Utilizând principiul simetriei critice nenetede (vezi [43]), punctele critice ale funcţionalei $\mathscr{A}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda|_{W_c^{1,p}(\Omega)}$ devin puncte critice ale funcţionalei $\mathcal{E}_\lambda$, deci aceste puncte critice sunt soluţiile slabe, axial simetrice ale problemei $(\mathcal{P}_\lambda)$. Astfel, este suficient să studiem existenţa punctelor critice ale funcţionalei $\mathscr{A}_\lambda = \mathcal{E}_\lambda|_{W_c^{1,p}(\Omega)}$.

**Observaţia 6.11** Dacă înlocuim condiţia $(\mathcal{F}_2)$ cu

$(\mathcal{F}_2)'$ $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial F(s)\}}{|s|^{p-1}} = 0,$

atunci pentru valori mici ale lui $\lambda > 0$, problema $(\mathcal{P}_\lambda)$ admite numai soluţia trivială. Întradevăr, dacă $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ este o soluţie slabă a problemei $(\mathcal{P}_\lambda)$, şi alegem ca funçtie de test $v = u$ în relaţia (6.3.1), obţinem

$$\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)dxdy = \lambda \int_\Omega \alpha(x,y)\xi_F u dxdy \leq$$

$$\leq \lambda c_F \|\alpha\|_{L^\infty} \int_\Omega |u|^p dxdy,$$

unde $c_F = \displaystyle\max_{s>0} \frac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial F(s)\}}{s^{p-1}} > 0$. Prin urmare, dacă $\lambda < (c_F\|\alpha\|_{L^\infty})^{-1}$, atunci $u = 0$.

În continuare enunţăm două rezultate auxiliare, care sunt folosite în demonstraţia Teoremei 6.10.

**Propoziţia 6.12** *Pentru orice $\lambda > 0$ funcţionala $\mathscr{A}_\lambda : W_c^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ este coercivă.*

**Propoziţia 6.13** *Pentru orice $\lambda > 0$, $\mathscr{A}_\lambda$ satisface condiţia Palais-Smale nenetedă.*

# 7

# Soluţii multiple invariante faţă de simetrizări

În acest capitol vom studia soluţiile următorului sistem de ecuaţii, soluţii ce rămân invariante faţă de simetrizarea "cap":

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda F_u(x, u(x), v(x)) & \text{în } \Omega, \\ -\Delta_q v = \lambda F_v(x, u(x), v(x)) & \text{în } \Omega, \\ u = v = 0 & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{S}_\lambda$}$$

unde $\lambda$ este un parametru pozitiv şi $N > p, q > 1$, $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^N$ este bila de unitate, $F \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ şi $F_z$ reprezintă derivata parţială a lui $F$ în raport cu variabila $z$. Sistemele de tip $(\mathcal{S}_\lambda)$ au făcut obiectul unor investigaţii în cazul domeniilor mărginite, de exemplu, în lucrările lui Boccardo şi de Figueiredo [27], de Nápoli, Mariani [48] şi monografia lui A. Kristály, V. Rădulescu şi Cs. Varga [40].

Problema menţionată mai sus prezintă interes nu doar din punct de vedere matematic, ci şi din perspectiva aplicabilităţii sale în fizica matematică. Problema $(\mathcal{S}_\lambda)$ este o generalizare a ecuaţiei pendulului de torsiune. Un pendul de torsiune este un sistem fizic în care o bucată de materie este legată de un arc, astfel încât mişcarea rezultată să conţină elemente ale unei simple mişcări de pendul, precum şi ale unei mişcări de torsiune.

Pentru a prezenta rezultatul nostru de bază reamintim că $(u, v) \in W_0^{1,p} \times W_0^{1,q}$ se numeşte soluţie slabă a problemei $(\mathcal{S}_\lambda)$, dacă

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w_1 dx - \lambda \int_\Omega F_u(x, u(x), v(x)) w_1(x) dx = 0 \\ \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^{q-2} \nabla v \nabla w_2 dx - \lambda \int_\Omega F_v(x, u(x), v(x)) w_2(x) dx = 0, \end{cases} \tag{7.0.1}$$

pentru orice $(w_1, w_2) \in W_0^{1,p} \times W_0^{1,q}$.

În acest capitol considerăm spaţiul Sobolev $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ cu norma

$$\|u\|_{1,\alpha} = \left( \int_\Omega |\nabla u|^\alpha \right)^{1/\alpha} \quad \text{cu } \alpha \in \{p, q\}.$$

Pentru $\beta \in [\alpha, \alpha^*]$ avem scufundarea continuă $W_0^{1,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^\beta(\Omega)$, care este şi compactă, dacă $\beta \in (\alpha, \alpha^*)$. Spaţiul funcţiilor în care lucrăm este spaţiul Sobolev produs $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ înzestrat cu norma $\|(u,v)\|_{1,p,q} = \|u\|_{1,p} + \|v\|_{1,q}$. Notăm cu $C_z$ cea mai bună constantă de scufundare a lui $W_0^{1,z}(\Omega) \hookrightarrow L^z(\Omega)$. Presupunem că următoarele ipoteze sunt îndeplinite:

($\mathcal{F}_1$) $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este continuă, $(s,t) \mapsto F(x,s,t)$ este de clasă $\mathcal{C}^1$, $F(x,0,0) = F(x,s,0) = F(x,0,t) = 0$ şi $F_s(x,s,t) \cdot s_- + F_t(x,s,t) \cdot t_- \leq 0$ pentru orice $x \in \Omega, s, t \in \mathbb{R}$, unde $\tau_- = \min\{0, \tau\}$;

($\mathcal{F}_2$) $\lim\limits_{(s,t)\to(0,0)} \dfrac{F(x,s,t)}{|s|^p + |t|^q} = 0$, uniform pentru orice $x \in \Omega$;

($\mathcal{F}_3$) $\lim\limits_{|s|+|t|\to+\infty} \dfrac{F(x,s,t)}{|s|^p + |t|^q} = 0$, uniform pentru orice $x \in \Omega$;

($\mathcal{F}_4$) Există $(u_0, v_0) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ astfel încât

$$\int\limits_{\Omega} F(x, u_0(x), v_0(x))dx > 0;$$

($\mathcal{F}_5$) Presupunem că $F(x,s,t) = F(y,s,t)$ pentru orice $x, y \in \Omega$ cu $|x| = |y|$ şi $s, t \in \mathbb{R}$ şi de asemenea pentru orice $x \in \Omega$, $a \leq b$ şi $c \leq d$ avem

$$F(x,a,c) + F(x,b,d) \geq F(x,a,d) + F(x,b,c);$$

($\mathcal{F}_6$) Pentru orice $x \in \Omega$ şi $s, t \in \mathbb{R}$ avem

$$F(x,s,t) \leq F(x,|s|,|t|).$$

Rezultatul principal al acestui capitol este următoarea teoremă:

**Teorema 7.1** *Fie $p, q > 1$ două numere reale şi fie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bila de unitate. Considerăm funcţia $F \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ care satisface ipotezele $(\mathcal{F}_1) - (\mathcal{F}_6)$. Atunci există un numă real $\lambda_0$ astfel încât, pentru orice $\lambda > \lambda_0$ problema $(\mathcal{S}_\lambda)$ are cel puţin două soluţii slabe, nenule, invariante faţă de simetrizarea "cap".*

**Observaţia 7.2** *Fie $p = q = 2$, atunci funcţia $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $F(x,s,t) = \|x\| \ln(1 + s_+^2 \cdot t_+^2)$ satisface ipotezele $(\mathcal{F}_1) - (\mathcal{F}_6)$, unde $\tau_+ = \max\{0, \tau\}$.*

**Observaţia 7.3** *Folosind ipotezele $(\mathcal{F}_1)$ şi $(\mathcal{F}_5)$, putem demonstra că*

$$F(x,0,0) + F(x,s,t) \geq F(x,0,t) + F(x,s,0), \text{ pentru orice } t, s \geq 0,$$

*ceea ce înseamnă că*

$$F(x,s,t) \geq 0 \quad \text{oricare ar fi} \quad s, t \geq 0.$$

**Observaţia 7.4** *Dacă*

$$S_F = C_{\max} \sup_{(s,t)\neq(0,0)} \frac{|sF_s(x,s,t) + tF_t(x,s,t)|}{|s|^p + |t|^q} < \infty,$$

*atunci există un număr real* $\lambda_F$ *astfel încât, pentru orice* $0 < \lambda < \lambda_F$ *problema* $(\mathcal{S}_\lambda)$ *are numai soluţia trivială. Într-adevăr, soluţia sistemului* $(\mathcal{S}_\lambda)$ *este o pereche* $(u,v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ *astfel încât au loc:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla w_1 dx - \lambda \int_\Omega F_u(x,u(x),v(x))w_1(x))dx = 0 \\ \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^{q-2}\nabla v \nabla w_2 dx - \lambda \int_\Omega F_v(x,u(x),v(x))w_2(x)dx = 0, \end{cases}$$

*pentru orice* $w_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *şi* $w_2 \in W_0^{1,q}(\Omega)$.

*Alegem* $w_1 = u$ *şi* $w_2 = v$ *atunci, obţinem că*

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^q &= \lambda \int_\Omega (F_u(x,u,v)u + F_v(x,u,v)v)dx \leq \\ &\leq \lambda \frac{S_F}{C_{\max}} \int_\Omega |u|^p + |v|^q \leq \\ &\leq \lambda \frac{S_F}{C_{\max}} (C_p^p \|u\|_{1,p}^p + C_q^q \|v\|_{1,q}^q) \leq \lambda S_F (\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,q}^q), \end{aligned}$$

*unde* $C_{\max} = \max\{C_p^p, C_q^q\}$. *Dacă* $\lambda < \frac{1}{S_F}$ *în mod necesar avem că* $(u,v) = (0,0)$.

Pentru a demonstra teorema principală folosim următoarele rezultate auxiliare.

1. Pentru oirce $\lambda \geq 0$ funcţionala de energie $\mathscr{A}_\lambda : W_0^{1,p,q}(\Omega) \to \mathbb{R}$ este coercivă.
2. Are loc inegalitatea $\mathscr{A}_\lambda(u^H, v^H) \leq \mathscr{A}_\lambda(u,v)$.
3. Fie $\lambda \geq 0$ un număr real fixat şi $\{(u_n, v_n)\} \subset W_0^{1,p,q}(\Omega)$ un şir mărginit astfel încât $\|\mathscr{A}_\lambda'(u_n, v_n)\|_\star \to 0$ când $n \to \infty$. Atunci, şirul $\{(u_n, v_n)\}$ conţine un subşir convergent în $W_0^{1,p,q}(\Omega)$.

# 8

# Ecuaţii de tip Poisson pe spaţii Finsler-Hadamard

Problema lui Yamabe a condus la studiul ecuaţiilor eliptice pe varietăţi Riemann. Contribuţii importante în această direcţie au avut matematicieni de seamă ca Trudinger, Aubin, Hebey, A. Chang şi alţii. Problema lui Yamabe conduce în mod natural la o ecuaţie eliptică cu derivate parţiale în care apare operatorul lui Laplace-Beltrami, vezi T. Aubin [2] şi Hebey [33].

Studiul fenomenelor anizotrope a condus la o generalizare a operatorului Laplace, care în literatura de specialitate are denumirea de *operatorul lui Finsler-Laplace*. Considerăm un spaţiu Minkowski $(\mathbb{R}^n, F)$, unde $F \in C^2(\mathbb{R}^n, [0, \infty))$ este convexă, absolut omogenă (sau pozitiv omogenă) cu $F(0) = 0$. Normei Minkowski $F$ i se poate asocia operatorul lui Finsler-Laplace. În ultimii ani proprietăţile acestui operator au fost studiate de mai mulţi autori, de exemplu, Alvino, Ferone, Lions şi Trombetti [1], Bellettini şi Paolini [5], Belloni, Ferone şi Kawohl [6], [26] şi alţii.

Obiectivul principal al acestui capitol este de a studia pe varietăţi Finsler ecuaţii de tip Poisson, care conţin un termen singular. Operatorul lui Finsler-Laplace pe varietăţi Finsler a fost introdusă şi studiată de către Ge şi Shen [30], Ohta şi Sturm [51].

Fie $(M, F)$ o varietate Finsler. In mod natural, putem să întroducem spaţiile de funcţii $W^{1,2}(M)$ şi $W_0^{1,2}(M)$ asociate varietăţii Finsler $(M, F)$. Mai exact, considerăm mulţimile de funcţii

$$W^{1,2}(M) = \left\{ u \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(M) : \int_M F^{*2}(x, Du(x))\mathrm{d}V_F(x) < +\infty \right\},$$

şi fie $W_0^{1,2}(M)$ închiderea lui $C_0^\infty(M)$ în $W^{1,2}(M)$ relativ la norma

$$\|u\|_F = \left( \int_M F^{*2}(x, Du(x))\mathrm{d}V_F(x) + \int_M u^2(x)\mathrm{d}V_F(x) \right)^{1/2}, \tag{8.0.1}$$

unde $F^*$ este transformata polară a lui $F$.

În continuare, vom prezenta pe scurt principalele rezultate ale acestui capitol.

**Teorema 8.1** *Spaţiile de funcţii $W^{1,2}(M)$ şi $W_0^{1,2}(M)$ nu au în mod necesar o structură de spaţiu vectorial.*

În continuare presupunem că $(M, F)$ este o varietate Finsler-Hadamard, $n \geq 3$ cu constanta de uniformitate $l_F > 0$.

Scopul principal al acestui capitol este studiul ecuaţiei

$$\begin{cases} \mathbf{\Delta}(-u) - \mu \frac{u}{d_F^2(x_0,x)} = 1 & \text{în} \quad \Omega; \\ u = 0 & \text{pe} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\Omega^\mu$}$$

unde $\Omega \subset M$ este un domeniu mărginit, $\mathbf{\Delta}$ reprezintă operatorul Finsler-Laplace pe $(M, F)$, $d_F$ este funcţia distanţă de la punctul fixat $x_0 \in \Omega$ asociată metricii Finsler $F$ şi $\mu \geq 0$ este un parametru real.

Notăm cu $B^+(x_0, \rho) = \{x \in M : d_F(x_0, x) < \rho\}$ bila "forward" cu centru în $x_0$ şi de rază $\rho > 0$. De asemenea considerăm funcţia $\sigma_{\mu,\rho} : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\sigma_{\mu,\rho}(s) = \frac{1}{\mu + 2n} \left( \rho^2 \left( \frac{s}{\rho} \right)^{-\sqrt{\overline{\mu}}+\sqrt{\overline{\mu}-\mu}} - s^2 \right), \tag{8.0.2}$$

unde $\overline{\mu} = \frac{(n-2)^2}{4}$ este constanta optimală a lui Hardy.

Utilizând simetrizarea anizotropă şi teorema lui Bishop-Gromov putem stabili următorul rezultat de rigiditate.

**Teorema 8.2** *Fie $(M, F)$ o varietatea Finsler-Hadamard de dimensiune $n \geq 3$, de tip Berwald şi cu constanta de uniformitate $l_F > 0$. Fie $x_0 \in M$ un element fixat. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

**(a)** *pentru orice $\mu \in [0, l_F r_F^{-2} \overline{\mu})$ şi $\rho > 0$ fixat, funcţia $u_{\mu,\rho}(x) = \sigma_{\mu,\rho}(d_F(x_0, x))$ este unica soluţie a problemei $(\mathcal{P}^\mu_{B^+(x_0,\rho)})$;*

**(b)** *spaţiul Finsler-Hadamard $(M, F)$ este izometric cu un spaţiu Minkowski de dimensiune $n$.*

Următorul rezultat conţine proprietăţi ale constantei de uniformitate $l_F$ şi ale constantei de reversibilitate $r_F$ asociate unui spaţiu Finsler $(M, F)$.

**Propoziţia 8.3** *Fie $(M, F)$ o varietate Finsler. Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

**(a)** *dacă $l_F > 0$, atunci $r_F < +\infty$;*

**(b)** *dacă $(M, F)$ este un spaţiu de tip Randers cu $\mathbf{S} = 0$, atunci $l_F > 0$.*

Următorul rezultat clarifică situaţia când spaţiile de funcţii $W^{1,2}(M)$ şi $W_0^{1,2}(M)$ devin spaţii liniare.

**Teorema 8.4** *Dacă $(M,F)$ este un spaţiu Finsler complet, de dimensiune $n$ şi $r_F < +\infty$, atunci $(W_0^{1,2}(M), \|\cdot\|_{F_s})$ este un spaţiu Banach reflexiv, unde $F_s(x,y) = \sqrt{\frac{F^2(x,y)+F^2(x,-y)}{2}}$.*

Următorul rezultat reprezintă o inegalitate de tip Hardy pe spaţii Finsler-Hadamard.

**Propoziţia 8.5** *Fie $(M,F)$ o varietate Finsler-Hadamard de dimensinue $n \geq 3$, cu $\mathbf{S} = 0$. Pentru un element fixat $x_0 \in M$, avem inegalitatea*

$$\int_M F^{*2}(x, -D(|u|)(x))\mathrm{d}V_F(x) \geq \overline{\mu} \int_M \frac{u^2(x)}{d_F(x_0,x)^2}\mathrm{d}V_F(x),\ \forall u \in C_0^\infty(M), \tag{8.0.3}$$

*unde constanta $\overline{\mu} = \frac{(n-2)^2}{4}$ este optimală şi nu este atinsă niciodată.*

Următorul rezultat este interesant în sine.

**Teorema 8.6** *Fie $(M,F)$ o varietate Finsler-Hadamard de dimensinue $n \geq 3$, cu $\mathbf{S} = 0$ şi $l_F > 0$. Fie $\Omega \subseteq M$ un deschis, $x_0 \in \Omega$ un element fixat şi $\mu \in [0, l_F r_F^{-2}\overline{\mu})$. Atunci funcţionala $\mathscr{K}_\mu : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$\mathscr{K}_\mu(u) = \int_\Omega F^{*2}(x, Du(x))\mathrm{d}V_F(x) - \mu \int_\Omega \frac{u^2(x)}{d_F(x_0,x)^2}\mathrm{d}V_F(x)$$

*este pozitivă şi strict convexă.*

Următorul rezultat stabileşte un principiu de comparaţie pentru operatorul $\mathcal{L}_F^\mu u = \boldsymbol{\Delta}(-u) - \mu\frac{u}{d_F^2(x_0,x)}$.

**Propoziţia 8.7 (Principiul de comparaţie)** *Fie $(M,F)$ o varietate Finsler-Hadamard de dimensine $n \geq 3$, cu $\mathbf{S} = 0$ şi $l_F > 0$. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu deschis şi $\mu \in [0, l_F r_F^{-2}\overline{\mu})$. Dacă $\mathcal{L}_F^\mu u \leq \mathcal{L}_F^\mu v$ în $\Omega$ şi $u \leq v$ pe $\partial\Omega$, atunci $u \leq v$ a.p.t. în $\Omega$.*

Următorul rezultat asigură existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei Poisson cu termen singular pe varietăţi Finsler-Hadamard.

**Teorema 8.8** *Fie $(M,F)$ o varietate Finsler-Hadamard de dimensinue $n \geq 3$, cu $\mathbf{S} = 0$ şi $l_F > 0$. Fie $\Omega \subseteq M$ un domeniu deschis şi $\kappa \in L^\infty(\Omega)$ o funcţie nenegativă. Atunci, problema $(\mathcal{P}_\Omega^{\mu,\kappa})$ are soluţie unică, nenegativă.*

**Propoziţia 8.9** *Fie $(M,F) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ un spaţiu Minkowski şi fie $x_0 \in \mathbb{R}^n$ element fixat şi $\mu \in [0, l_F r_F^{-2}\overline{\mu})$ fixat. Pentru orice $\rho > 0$, funcţia $u_{\mu,\rho}(x) = \sigma_{\mu,\rho}(\|x - x_0\|)$ este soluţia unică a problemei $(\mathcal{P}_{B^+(x_0,\rho)}^\mu)$.*

În încheiere enunţăm un rezultat care compară soluţia ecuaţiei Poisson cu funcţia $\sigma_{\mu,\rho}$.

**Propoziţia 8.10** *Fie* $(M,F) = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *un spaţiu Minkowski,* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *un punct fixat,* $\mu \in [0, l_F r_F^{-2}\overline{\mu})$ *şi* $\rho > 0$ *un număr fixat. Dacă* $\tilde{u}_{\mu,\rho}$ *este soluţia unică a problemei* $(\mathcal{P}^{\mu}_{B^-(x_0,\rho)})$*, atunci au loc inegalităţile*

$$\sigma_{\mu,r_F^{-1}\rho}(\|x-x_0\|) \le \tilde{u}_{\mu,\rho}(x) \le \sigma_{\mu,r_F\rho}(\|x-x_0\|),\ x \in B^-(x_0,\rho).$$

# Bibliografie


[1] A. Alvino, V. Ferone, P.-L. Lions, G. Trombetti, *Convex symmetrization and applications,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14** (1997), no. 2, 275-293.

[2] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev,* J. Diff. Geom **11** (1976), no. 4, 573–598.

[3] D. Bao, S. S. Chern, Z. Shen, *Introduction to Riemann–Finsler Geometry,* Graduate Texts in Mathematics 200, Springer Verlag, 2000.

[4] D. Bao, C. Robles, Z. Shen, *Zermelo navigation on Riemannian manifolds,* J. Diff. Geom. **66** (2004) 377–435.

[5] G. Bellettini, M. Paolini, *Anisotropic motion by mean curvature in the context of Finsler geometry,* Hokkaido Math. J. **25** (1996), no. 3, 537-566.

[6] M. Belloni, V. Ferone, B. Kawohl, *Isoperimetric inequalities, Wulff shape and related questions for strongly nonlinear elliptic operators,* Z. Angew. Math. Phys. **54** (2003), no. 5, 771–783.

[7] M. Belloni, B. Kawohl, P. Juutinen, *The $p-$Laplace eigenvalue problem as $p \to \infty$ in a Finsler metric,* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **8** (2006), no. 1, 123–138.

[8] L. Boccardo, D. G. de Figueiredo, *Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations*, Nonlin. Diff. Eqns Applic. **9** (2002), 309–323.

[9] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer-Verlag; 1st Edition. 2010.

[10] F. Brock, A. Yu. Solyin, *An approach to symmetrization via polarization*, Trans. AMS **352**, (2000) no. 4, 1759–1796.

[11] S. S. Chern, Z. Shen, *Riemann-Finsler geometry,* Nankai Tracts in Mathematics, 6. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.

[12] A. Cianchi, P. Salani, *Overdetermined anisotropic elliptic problems,* Math. Ann. **345** (2009), no. 4, 859-881.

[13] F. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley-Sons, New York, 1983.

[14] N. Costea, Cs. Varga, *Multiple critical points for non-differentiable parametrized functionals and applications to differential inclusion*, J. Global Optim., **56** (2013) no 2, 399–416.

[15] G. Duvaut J. L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer, Berlin, 1976.

[16] D. Egloff, *Uniform Finsler Hadamard manifolds,* Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor. **66** (1997), no. 3, 323–357.

[17] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. App. **47** (1974), 324-353.

[18] L.C. Evans, *Partial Differential Equations Second Edition (Graduate Studies in Mathematics)*, AIMS, 2010.

[19] F. Faraci, A. Kristály, *Three non-zero solutions for a nonlinear eigenvalue problem,* J. Math. Anal. Appl., **394** (2012), no. 1, 225–230.

[20] F. Faraci, A. Iannizzotto, A. Kristály, *Low-dimensional compact embeddings of symmetric Sobolev spaces with applications*, Proc. of the Royal Society of Edinburgh, Sect. A **141**, (2011), 383–395.

[21] Cs. Farkas, I. I. Mezei, *Group-invariant multiple solutions for quasilinear elliptic problems on strip-like domains*, Nonlinear Anal. TMA, **79** (2013), 238–246.

[22] Cs. Farkas, R. Füllér, A. Kristály, *A sublinear differential inclusion on strip-like domains*, IEEE 8th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics, (2013) 185–189.

[23] Cs. Farkas, Cs. Varga, *Multiple symmetric invariant non trivial solutions for a class of quasilinear elliptic variational systems*, Applied Math. and Comp., **241** (2014), 347–355.

[24] Cs. Farkas, A. Kristály, Cs. Varga, *Poisson-type equations on Finsler-Hadamard manifolds*, trimis spre publicare, 2014.

[25] Cs. Farkas, *Multiplicity results in strip-like domains*, trimis spre publicare, 2014.

[26] V. Ferone, B. Kawohl, *Remarks on a Finsler-Laplace operator*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 1, 247–253.

[27] D. G. de Figueiredo, *Semilinear elliptic systems in Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations*, Trieste, 1997, pp. 122–152 (World Scientific, River Edge, NJ) 1998).

[28] K. H. Fieseler, K. Tintarev, *Concentration Compactness: Functional-Analytic Grounds and Applications*, Imperial College Press, 2007.

[29] L. Gasinski, N. Papageorgiou, *Nonsmooth critical point theory and nonlinear boundary value problems,* Series in Mathematical Analysis and Applications, 8. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.

[30] Y. Ge, Z. Shen, *Eigenvalues and eigenfunctions of metric measure manifolds,* Proc. London Math. Soc. **82** (2001), no. 3, 725–746.

[31] M. R. Grossinho, *Some existence and bifurcation results for nonlinear elliptic problems in strip-like domains*, Ricerche Mat. **36** (1987), 127–138.

[32] D. Habeck, F. Schuricht, *Contact between nonlinearly elastic bodies,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **136** (2006), no. 6, 1239–1266.

[33] E. Hebey, *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities,* Courant Lecture Notes in Mathematics, 5. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[34] C. Y. Jin, C. Z. Cheng, *Some applications of variational inequalities in nonsmooth analysis,* Nonlinear Anal. **66** (2007), no. 8, 1728-1738.

[35] S. Kesevan, *Symmetrization* & *Applications*, World Scientific Publishing: Series in Analysis, Vol. 3, 2006.

[36] A. Kristály, *Multiplicity results for an eigenvalue problem for hemivariational inequalities in strip-like domains,* Set-Valued Anal. **13** (2005), no. 1, 85–103.

[37] A. Kristály, *Infinitely many solutions for a differential inclusion problem in* $\mathbb{R}^N$, J. Differential Equations **220** (2006), no. 2, 511–530.

[38] A. Kristály, W. Marzantowicz, Cs. Varga *A non-smooth three critical points theorem with applications in differential inclusions*, J. Global Optim. **46** (2010), no.1, 49–62.

[39] A. Kristály, I. Mezei, *Multiple solutions for a perturbed system on strip-like domains*, Discrete Cont Dyn S. SER. S **5** (2012), no. 4, 789–796.

[40] A. Kristály, V. Rădulescu, Cs. Varga, *Variational principles in mathematical physisc, geometry and economics*, Cambridge University Press, 2010.

[41] A. Kristály, I. J. Rudas, *Elliptic problems on the ball endowed with Funk-type metrics*, 2014, preprint.

[42] A. Kristály, Cs. Varga, *An introduction to critical point theory for non-smooth functions*, Casa Cărţii de Ştinţă, Cluj-Napoca, 2004.

[43] A. Kristály, Cs. Varga, V. Varga, *A nonsmooth principle of symmetric criticality and variational hemivariational inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **325** (2007) 975–986.

[44] J. Kobayashi, M. Ôtani, *The principle of symmetric criticality for non-differentiable mappings,* J. Funct. Anal. **214** (2004), no. 2, 428–449.

[45] E. H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, AIMS, 2001.

[46] H. Lisei, Cs. Varga, *Multiple solutions for a differential inclusion problem with nonhomogeneous boundary conditions*, Numer. Funct. Anal. Optim. **30** (2009), no. 5-6, 566–581.

[47] D. Motreanu, P.D. Panagiotopoulos, *Minimax Theorems and Qualitative Properties of the Solutions of Hemivariational Inequalities*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999.

[48] P. L. de Napoli, M. C. Mariani, *Quasilinear elliptic systems of resonant type and nonlinear eigenvalue problems*, Abstr. Appl. Analysis **7** (2002) 155–167.

[49] S. Ohta, *Vanishing $S-$curvature of Randers spaces,* Differential Geom. Appl. **29** (2011), no. 2, 174–178.

[50] S. Ohta, *Uniform convexity and smoothness, and their applications in Finsler geometry,* Math. Ann. **343** (2009), no. 3, 669–699.

[51] S. Ohta, K. T. Sturm, *Heat flow on Finsler manifolds,* Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), no. 10, 1386–1433.

[52] R. S. Palais, *The principle of symmetric criticality*, Comm. Math. Phys. **69** (1979), 19–30.

[53] R. Precup, *Lecţii de ecuaţii cu derivate parţiale*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2004.

[54] P. Pucci, V. Rădulescu *The impact of the mountain pass theory in nonlinear analysis: a mathematical survey*, Boll. Unione Mat. Ital. Series IX, No. **3** (2010), 543–584.

[55] H. B. Rademacher, *A sphere theorem for non-reversible Finsler metrics,* Math. Ann. **328** (2004), no. 3, 373-387.

[56] G. Randers, *On an asymmetrical metric in the fourspace of general relativity*, Phys. Rev. (2) **59** (1941), 195–199.

[57] B. Ricceri, *A class of nonlinear eigenvalue problems with four solutions*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010) 503–511.

[58] B. Ricceri, *A further refinement of a three critical points theorem*, Nonlinear Anal. **74** (2011), no. 18, 7446–7454.

[59] B. Ricceri, *A new existence and localization theorem for the Dirichlet problem*, Dynam. Systems Appl., **22** (2013), no. 2-3, 317–324.

[60] J. Van Schaftingen, *Anisotropic symmetrization,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **23** (2006), no. 4, 539-565.

[61] J. Van Schaftingen, *Symmetrization and minimax principles*, Comm. Contemp. Math. **7** (2005), 463–481.

[62] Z. Shen, *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific, 2001.

[63] Z. Shen, *Volume comparison and its applications in Riemann-Finsler geometry,* Adv. Math. **128** (1997), no. 2, 306–328.

[64] Z. Shen, *On Finsler geometry of submanifolds,* Math. Ann. **311** (1998), no. 3, 549–576.

[65] Z. Shen, *The non-linear Laplacian for Finsler manifolds. The theory of Finslerian Laplacians and applications*, 187–198, Mathematics and Its Applications, **459**. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1998.

[66] D. Smets, M. Willem, *Partial symmetry and asymptotic behavior for some elliptic problems*, Calc. Var. Partial Differential Equations **18** (2003), no. 1, 57–75.

[67] M. Squassina, *Symmetry in variational principles and applications*, J. London Math. Soc. **85** (2012), 323–348.

[68] M. Struwe, *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, Fourth Edition, 2007.

[69] S. A. Tersian, *On the solvability of semilinear Schrödinger equations in strip-like domains*, C.R. Acad. Bulgare Sci. **51** (1998), 17–20.

[70] Cs. Varga, *Metode topologice în calculul variaţional*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

[71] G. Wang, C. Xia, *A characterization of the Wulff shape by an overdetermined anisotropic PDE,* Arch. Ration. Mech. Anal. **199** (2011), no. 1, 99-115.

[72] G. Wang, C. Xia, *A sharp lower bound for the first eigenvalue on Finsler manifolds,* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **30** (2013), no. 6, 983–996.

[73] M. Willem, *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications **24**, Birkhäuser, Boston, 1996.

[74] B. Y. Wu, Y. L. Xin, *Comparison theorems in Finsler geometry and their applications,* Math. Ann. **337** (2007), no. 1, 177–196.

[75] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications*, III. Variational methods and optimization, Springer-Verlag, New York, 1985.

[76] W. Zhao, Y. Shen, *A universal volume comparison theorem for Finsler manifolds and related results,* Canad. J. Math. **65** (2013), no. 6, 1401–1435.