UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI , CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

ACŢIUNI ALE GRUPURILOR ŞI TEORIA REPREZENTĂRILOR MODULARE

Teză de doctorat

Îndrumător
Prof.Dr. Andrei Marcus

Doctorand
Tiberiu Coconeţ

Cluj-Napoca
2012

ACŢIUNI ALE GRUPURILOR ŞI TEORIA REPREZENTĂRILOR MODULARE

TIBERIU COCONEŢ

Cuprins

Cuvinte cheie: Algebre grupale, algebre grupale strâmbe, algebre grupale răsucite, alegebre de permutare, blocuri, G-algebre, algebre G-interioare, construcţia Brauer, algebre graduate, defect grup, puncte, grup punctat, defect grup punctat, inducţie, extensii Clifford, fuziuni.

Introducere

După cum este evidenţiat în [29] şi în [15] teoria reprezentărilor grupurilor finite datează încă din finalul secolului nouăsprezece. În acea perioadă F. G. Frobenius a introdus noţiunile elementare ale reprezentărilor de grupuri finite. Printre altii, Burnside a fost unul dintre rivalii lui Frobenius, contribuind la rândul său în dezvoltarea teoriei caracterelor grupurilor finite. În mod uzual, conceptul unei representări este de a utiliza morfismele unul grup finit G în grupul numerelor complexe. Această noţiune a dat naştere aşa-numitelor caractere complexe. Schur a adus la rândul său contrinuţia dând o nouă introducere a reprezentărilor de grupuri bazată pe noţiuni din algebra liniară.

Suntem nevoiţi să detaliem unele noţiuni meţionate înainte. Conform [26, 8.5] observăm ca pentru un modul M finit general peste corpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ o reprezentare a unui grup finit G este similară cu structura lui M de $\mathbb{C}G$-modul. Reprezentarea in cauză se numeşte ireductibilă dacă modulu asociat este simplu. Din moment ce reprezentările poti fi adunate, o reprezentare este complet reductibilă dacă $\mathbb{C}G$-modulul corespunzător este semisimplu. Teorema lui Maschke ne asigură semisimplicitatea algebrei grupale $\mathbb{C}G$. Reformulând această teoremă in limbaj de module, ea afirmă ca orice modul semisimplu poate fi recuperat din subreprezentările sale ireductibile, adică sumazii directi simplii. Defapt acestă proprietate este valabilă pentru orice corp, nu neapărat de caracteristică zero, ci de caracteristică pozitivă care nu divide ordinul lui G. Leonard Eugene Dickson a explicitat detaliile echivalenţei teoriei reprezentărilor de grupuri finite între situaţiile în care corpul de bază are characteristică zero sau pozitivă ce nu divide ordinul grupului.

Richard Brauer a iniţiat începând cu anul 1940 studiul reprezentărilor liniare de grupuri finite peste corpuri având caracteristică pozitivă. Rezultatele obţinute de acesta sunt semnificative în clasificarea grupurilor finite. Mai exact, (vezi [40]), Brauer a sugerat o metodă de clasificarea grupurilor necomutative. În teoria dezvoltată iniţial de Brauer legătura dintre teoria reprezentărilor ordinare de grupuri finite şi cea modulare este evidenţiată considerănd algebra grupală a unui grup finit G peste un inel de valuare discretă $\mathcal{O}$ unde corpul rezidual k este de caracteristică pozitivă p avănd corpul fracţiilor $\mathcal{K}$ de caracteristică zero. Structura algebrei grupale $\mathcal{O}G$

este strâns legată de ambele structuri ale algebrelor grupale kG şi $\mathcal{K}G$. Menţionăm doar că în cazul în care ipotezele teoremei lui Maschke nu sunt verificate algebra grupală poate fi descompusă ca sumă directă de bloc-algebre. Fiecare bloc-algebra corespunde în mod unic unui idempotent primitiv central. Pentru fiecare $\mathcal{O}G$-modul indecompozabil există un unic astfel de idempotent primitiv a cărui bloc-algebră nu anihileazză modulu respectiv, iar modulul în cauză aparţine acelui bloc. Această relaţie între blocurile algebrelor grupale şi reprezentările ireductibile ale unui grup finit sunt exemplificate în cele trei teoreme ale lui Brauer. Prima dintre ele este des utilizată în această teža.

Acţiunea de conjungare a grupului G pe el însuşi determină o bază a algebrei grupale $\mathcal{O}G$. Totodată această acţiune determină şi o structură de G-algebră, structură care poate fi extinsă la o clasă mai largă de $\mathcal{O}$-algebre pentru care pot fi obţinute rezultate care generalizează prima teormă a lui Brauer.

Lucrarea este structurată în şase capitole, fiecare dintre ele prezentate pe scurt în continuare:

Primul capitol este dedicat unor rezultate generale care sunt utile pentru această teză. Lucrăm doar în ipoteza modulelor finit generate peste un inel de valuare discretă $\mathcal{O}$ având corpul rezidual k de caracteristică pozitivă. Sunt doar câteva situaţii în care presupunem k algebric închis. Fie G un grup finit. În primul capitol dăm definiţia unei G-algebre şi a altor obiecte matematice precum urma relativă, câtul Brauer, grup punctat, defect grup punctat. Toate acestea sunt utile în enunţarea unui rezultat important, anume teorema de ridicare a idempotenţilor. În al doilea paragraf al celui de-al doilea capitol introducem noţiunile de algebră graduată şi a cazului particular de produs încrucişat. De asemenea, lucrând cu G-algebre şi G-algebre interioare introducem inducţia de tip Puig şi de tip Turull. Paragraful 5 este dedicat correspondenţelor precum Correspondenţele Green, Brauer, Harris-Knörr. Pentru ultima dintre corespondenţe detaliem o altă demonstraţie faţă de cele găsite în literatură. În final de capitol introducem fuziunile pe G-algebre interioare.

Capitolul doi consideră cazul algebrei grupale. Teorema 2.2.1 evidenţiază faptul că pentru un grup finit G, un subgrup L şi o L-algerbră B, inducţia la G în sensul Puig a algebrei grupale răsucite $S = B * L$ este izomorfă cu algebra grupală răsucită a inducţiei la G în sensul Turull a lui B. Mai mult, izomorfismul este de G-algebre interioare.

La începutul capitolului trei considerăm cazul unei G-algebre A, unde G este un grup finit. În Definiţia 3.1.1 enunţăm condiţia ca un punct al lui A^G să acopere un punct al lui A^N, unde N este normal în G. Fixăm β, un punct în A^N având defect group Q, şi δ, un punct al lui $A^{N_N(Q)}$ reprezentând corespondentul Green al lui β. Teorema 3.1.2 arată că orice punct al lui A^G care acoperă β are ca şi corespondent Green un punct al lui $A^{N_G(Q)}$ care acoperă δ. Altfel spus, corespondenţa Green induce o bijecţie între punctele algebrei A^G care acoperă β şi punctele algebrei $A^{N_G(Q)}$ care acoperă δ. Aplicând aceste rezultat pentru $A = \mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$, unde M este un $\mathcal{O}G$-module, obţinem rezultatul principal din [2]. Lucrând cu divizori pe o G-algebră inductiv completă, Teorema 3.1.4 ne conferă o completare a corespondenţei Green.

Partea a doua din capitolul trei are ca rezultat principal Theorem 3.2.7. Bazat pe Definiţia 3.2.4 acest rezultat este o generalizare în cazul algebrelor de p-permutare a [24, Theorem]. În finalul capitolului deducem unele legături între corespondenţa Green şi corespondenţa Brauer.

Următoarele două capitole au ca obiect principal extensiile Clifford asociate blocurilor şi punctelor. Rezultatul principal al capitolului 4 este o adaptare a rezultatului principal din [17], adaptare în care s-a renunţat la ipoteza k algebric închis. Mai exact considerăm un subgrup normal K în grupul finit H. Notăm $G = H/K$ şi alegem un bloc b al unu-componentei din următorul centralizator G-graduat

$$C_{\mathcal{O}H}(\mathcal{O}K) = (\mathcal{O}H)^K.$$

Alegem P un defect grup al lui b în K şi considerăm $\bar{b}$, corespondentul Brauer al lui b, fiind de asemenea un bloc cu defect grup P. Se ştie că $\bar{b}$ este un bloc al unu-componentei următorului centralizator $C_H(P)/C_K(P)$-graduat

$$C_{kC_H(P)}(kC_K(P))^{N_K(P)} = kC_H(P)^{N_K(P)}.$$

Datorită proprietăţiilor câtului Brauer în cazul algebrei grupale construim două extensii Clifford, una asociată lui b şi una asociată unui bloc e din $kC_H(P)$ asociat cu $\bar{b}$. Teorema 4.3.1 demonstrează ca aceste două extensii sunt izomorfe şi în acelaşi timp calculează elementele ce caracterizează prima extensie.

Să observăm că algebra grupală $\mathcal{O}K$ este o H-algebra K-interioară. Ideea principală a capitolului cinci este să înlocuim această algebră cu o H-algebră K-interioară arbitrară A. În această situaţie $\mathcal{O}H$ este înlocuită cu $\hat{A} = \bigoplus_{g\in G} \hat{A}_g$, unde pentru fiecare $g \in G$ avem $\hat{A}_g = A \otimes x$, pentru un un reprezentant $x \in g$.

Această situaţie ne conferă doar incluziunea

$$C_{\hat{A}}(A) \subseteq \hat{A}^K,$$

şi din acest motiv suntem nevoiţi să alegem algebra mai mare $\hat{A}^K$. În acest caz β este un punct în A^K. O serie de complicaţii apar deoarece nu putem lucra co întreg punctul β, fiind necesar să alagem un idempotent $j \in \beta$. Stabilizatorul G_j nu coincide cu normalizatorul $N_H(K_\beta)$ şi atunci suntem nevoiţi să introducem anumite grupuri infinite ce conţin $N_H(K_\beta)$. Aceste grupuri infinite aduca dificultăţi în a lucra cu aceleaşi tehnici precum în capitolul precedent pentru a demonstra că extensiile Clifford ale lui β şi respectiv $\bar{\beta} = \mathrm{Br}_P(\beta)$ sunt izomorfe. In adevăr construcţiile din acest capitol utilizeză fuziuni pe G-algebre interioare. La final de capitol tratăm situaţia în care β este dat de un idempotent primitiv central.

În ultimul capitol ne întoarcem la cazul algebrei grupale şi la extensiile izomorfe ale blocurilor b şi $\bar{b}$. Se observă că acest izomorfism de extensii induce o bijecţie între blocurile ce acoperă b şi respectiv blocurile ce acoperă $\bar{b}$. Mai mult demonstrăm în Teorema 6.4.1 că această bijecţie păstrează defect grupurile şi coincide cu corespondenţa Brauer. Astfel că rezultatul principal din capitolul patru implică rezultatul principal din [24].

Doctorand

Tiberiu Coconeţ

1. Rezultate generale în teoria reprezentătilor modulare a grupurilor finite

Fie p un număr prim, şi fie $\mathcal{O}$ un inel de valuare discretă a cărui corp rezidual k are caracteristica p. Nu facem nicio presupunere asupra marimii lui $\mathcal{O}$ şi a lui k, acceptând şi situaţia în care $\mathcal{O} = k$. Există unele situaţii în care k este presupus algebric închis.

1.1. **Teorie Green şi defect grupuri.** Fie G un grup finit şi fie A o $\mathcal{O}$-algebra.

Definiţie 1.1.1. $\mathcal{O}$-algebra A este o G-algebra atunci când există un morfism de grupuri

$$\varphi : G \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(A),$$

de la G la grupul automorfismelor lui A.

Acţiunea unui element $g \in G$ pe $a \in A$ este notată:

$$\varphi(g)(a) =: a^g.$$

Definiţie 1.1.2. Dacă A_1 şi A_2 sunt două G-algebre, o aplicaţie $f : A_1 \to A_2$ este morfism de G-algebre dacă este morfism de $\mathcal{O}$-algebre şi verificaă

$$f(a^g) = f(a)^g,$$

pentru orice $a \in A_1$ şi orice $g \in G$.

1.1.3. Pe o G-algebră, pentru orice subgrup L în G notăm prin A^L subalgebra lui A conţinând elementele fixate de acţiunea lui of L. Dacă L' este alt subgrup al lui G aşa încât $L \subseteq L'$ iar $[L/L']$ denotă un sistem de reprezentaţi ai claselor lui L' în L, aplicaţia

$$\mathrm{Tr}_{L'}^{L} : A^{L'} \to A^L,$$

$$\mathrm{Tr}_{L'}^{L}(a) = \sum_{g \in [L/L']} a^g$$

pentru orice $a \in A^{L'}$, se numeşte urma relativă. În mod evident este un morfism de module. Mai mult imaginea $A_{L'}^{L} := \mathrm{Tr}_{L'}^{L}(A^{L'})$ este un ideal în A^L.

Putem deci construi câtul

$$A(H) := A^H / \sum_{L<H} A_L^H,$$

pentru orice subgrup H al lui G. Fie P un p-subgrup în G. Introducem morfismul Brauer:

$$\mathrm{Br}_P : A^P \to A(P),$$

care fiecărui $a \in A^P$ îi ataşează

$$\bar{a} = a + \sum_{Q<P} A_Q^P.$$

Morfismul Brauer este un morfism de $N_H(P)$-algebre.

1.1.4. Fie e un idempotent primitiv al lui A^G.

Definiţie 1.1.5. Un p-subgroup P în G se numeşte defect grup al idempotentului e dacă P mimimal (faţă de relaţia de incluziune) cu proprietatea $e \in A_P^G$.

Pentru orice idempotent primitiv defect grupul există. Mai mult defect grupurile unui idempotent primitiv se află într-o clasă de G-conjugare.

Putem considera o generalizare a aceastei definiţii, precum este dată în [41] sau [34]. Un punct al lui A^G este o clasă de A^*-cojugare a unui idempotent primitiv $j \in A^G$. Adoptăm notaţia $\mathcal{P}(A^G)$. Se observă analogia cu orice subgrup în G. Aşadar, dacă K este un subgrup în G şi β din $\mathcal{P}(A^K)$, perechea (K, β) se va nota K_β şi va purta numele de grup punctat. Între grupuri punctate se poate defini o relaţie de echivalenţă, anume cea de incluziune: $K_\alpha \leq L_\beta$ dacă şi numai dacă pentru orice $j \in \beta$ există $i \in \alpha$ ce apare într-o descompunere a lui j în A^K, adică $ji = ij = i$. Se observă uşor că relaţia de incluziune dintre grupurile puncate ale unei G-algebră este compatibilă cu acţiunea grupului. Mai introducem aplicaţia $r_K^L : A^L \to A^K$, ca fiind simpla incluziune.

Propoziţie 1.1.6. *Fie A o G-algebră. Următoarele afirmaţii sunt adevărate.*

i) Pentru orice subgrup L al lui G există o bijecţie între punctele lui A^L şi idealele maximale ale lui A^L. Dacă $\beta \in \mathcal{P}(A^L)$ atunci idealul corespunzător m_β verifică $\beta \nsubseteq m_\beta$. Mai mult câtul A^L/m_β este o $N_G(L_\beta)$-algebră simplă peste k.

ii) *Dacă K_α şi L_β sunt grupuri punctate pe A, următoarele afirmaţii sunt echivalente.*

(1) $K_\alpha \leq L_\beta$;

(2) $(r_K^L)^{-1}(m_\alpha) \subseteq m_\beta$;

(3) $m_\alpha \cap A^L \subseteq m_\beta$.

Definiţie 1.1.7. Un grup punctat local P_γ (local înseamnă $\mathrm{Br}_P(\gamma) \neq 0$) este defect grup punctat pentru G_β dacă P este minimal cu proprietatea $\beta \in A_P^G$.

1.1.8. În unele situaţii vom apela [41, Proposition 18.5] pentru o definiţii echivalente cu cea de mai sus.

Următoarea teoremă este un mix dintre [41, Theorem 3.2] şi [34, Proposition 3.23].

.

Teorema 1.1.9. *Fie $f : A \to B$ un morfism surjectiv de $\mathcal{O}$-algebre. Următoarele afirmaţii sunt devărate:*

i) *Aplicaţia $A^* \to B^*$ este surjectivă.*

ii) *Dacă α este un punct al lui A aşa încât $\alpha \nsubseteq \mathrm{Ker}(f)$, atunci $f(\alpha)$ este un punct al lui B.*

iii) *Există o bijecţie între următoarele mulţimi $\mathcal{P}(A \setminus \mathrm{Ker}(f))$ şi $\mathcal{P}(B)$.*

iv) *Fie $\mathcal{I}$ un ideal în A. Punctul α aparţine lui $\mathcal{I}$ dacă şi numai dacă $f(\alpha)$ aparţine lui $f(\mathcal{I})$.*

Remark 1.1.10. Fomula de descompunere a lui Mackey este des utilizată. Dacă $[L \setminus G/K]$ reprezintă un sistem de reprezentaţi ai claselor duble LgK pentru orice două subgrupuri L şi K în G. Atunci avem

$$\mathrm{Tr}_K^G(a) = \sum_{g \in [L\setminus G/K]} \mathrm{Tr}_{L\cap K^g}^L(a^g).$$

1.2. **Algebre graduate şi produse încrucişate.** Fie G un grup finit. O algebră G-graduată peste $\mathcal{O}$ este o sumă directă de $\mathcal{O}$-module

$$\hat{A} = \bigoplus_{g\in G} \hat{A}_g,$$

unde pentru toţi $g, h \in G$ avem

$$\hat{A}_g \cdot \hat{A}_h \subseteq \hat{A}_{gh}.$$

Să observăm că de obicei avem $1_{\hat{A}} \in \hat{A}_1$ şi totodată, fiind o algebra actionată de G, vom renunţa la indice şi la căciulă în cazul lui $\hat{A}_1$. Atunci când egalitatea

$$\hat{A}_{gh} = \hat{A}_g \cdot \hat{A}_h$$

este verificată pentru orice $g, h \in G$, spunem că $\hat{A}$ este o algebră tare G-graduată. În plus, dacă avem

$$\hat{A}^* \cap \hat{A}_g \neq \emptyset,$$

pentru orice $g \in G$, atunci $\hat{A}$ se numeşte produs încrucişat.

Ca exemplu de produs încrucişat putem da algebra grupală strâmbă. Dacă $A := \hat{A}_1$ este o G-algebră notăm algebra grupală strâmbă după cum urmează $\hat{A} = A * G$. Produsul de efectuează ca şi în egalitatea de mai jos:

$$(a \cdot g)(c \cdot h) = ac^g \cdot gh,$$

unde $a, c \in A$ şi $g, h \in G$.

Alt exemplu de produs încrucişat este algebra grupală răsucită. Această algebră apare considerând extensia centrală a grupului G cu k^*

$$1 \to k^* \to \hat{G} \to G \to 1.$$

Acestei extensii îi putem asocia o algebră grupală notată $k\hat{G}$, care este în mod uzual algebra grupală peste grupul infinit $\hat{G}$ având o bază indexată de elementele lui G. Multiplicarea este dată de $\hat{x}\hat{y} = \alpha(x, y)\widehat{xy}$, unde $\alpha(x, y) \in k^*$ este imaginea unui 2-cociclu asociat cu extensia centrală dată iniţial.

1.3. **G-algebre şi G-algebre interioare.** Fie L un subgrup al grupului finit G. Considerăm o L-algebră A. Precum în [43, Section 8] inducţia de tip Turull a lui A de la L la G este

$$\mathrm{Ind}_L^G(A) = \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}L} A,$$

unde orice element de forma $g \otimes a \in \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}L} A$ este notat ${}^{g}a$, iar pentru $b \in \mathrm{Ind}_L^G(A)$ şi $g \in G$ elementul ${}^{g}b$ reprezintă rezultatul lui g acţionând pe b. Dacă $a, b \in A$ şi $g_1, g_2 \in G$, multiplicarea în această algebră este dată de:

$$({}^{g_1}a)({}^{g_2}b) = \begin{cases} {}^{g}(ab) \text{ dacă } g = g_1 = g_2; \\ 0 \qquad \text{dacă } g_1 L \neq g_2 L. \end{cases}$$

Definiţie 1.3.1. $\mathcal{O}$-algebra A se numeşte G-interioară dacă există un morfism de grupuri

$$\phi : G \to A^*,$$

între grupul G şi grupul unităţilor lui A.

În acest caz notăm $a \cdot g = a\phi(g)$ şi $g \cdot a = \phi(g)a$. Să observăm că orice G-structură interioară pe A induce o structură de G-algebra dată de automorfismul $a \mapsto g^{-1} \cdot a \cdot g$, pentru orice $a \in A$.

Definiţie 1.3.2. Fie A şi B două algebre G-interioare. Aplicaţia $f : A \to B$ se numeşte morfism de algebre G-interioare dacă este morfism de $\mathcal{O}$-algebre şi satisface

$$f(g \cdot a \cdot h) = g \cdot f(a) \cdot h,$$

pentru orice $a \in A$ şi $g, h \in G$.

Considerăm o algebră L-interioară A. Există un al tip de inducţie datorat lui Puig care poate fi aplicat acestei algebre interioare. În mod explicit putem construi

$$\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}L} A \otimes_{\mathcal{O}L} \mathcal{O}G.$$

Structura de algebră este dată de

$$(g \otimes a \otimes g^{'})(g_1 \otimes a_1 \otimes g_1^{'}) = \begin{cases} g \otimes a \cdot g^{'} g_1 \cdot a_1 \otimes g_1^{'} \text{ dacă } g^{'} g_1 \in G \\ 0 \qquad\qquad \text{dacă } g^{'} g_1 \notin G, \end{cases}$$

unde $g, g^{'}, g_1, g_1^{'} \in G$ şi $a, a_1 \in A$. Structura de algebră G-interioară este dată de $g \cdot (x \otimes a \otimes y) = gx \otimes a \otimes y$ şi $(x \otimes a \otimes y) \cdot g = x \otimes a \otimes yg$ pentru toţi $g, x, y \in G$ şi $a, a_1 \in A$.

1.4. **Corespondenţe clasice.**

Teorema 1.4.1 (The Green correspondence)**.** *Fie A o G-algebră, P_γ un grup punctat local pe A şi H un subgrup al lui G ce conţine*

$$N_G(P_\gamma) = \{g \in G \mid g \in N_G(P) \text{ şi } \gamma^g = \gamma\}.$$

Există o bijecţie între mulţimile

$$\{\alpha \mid \alpha \in \mathcal{P}(A^G) \text{ aşa încât } P_\gamma \text{ este defect pentru } G_\alpha\}$$

şi

$$\{\beta \mid \beta \in \mathcal{P}(A^H) \text{ aşa încât } P_\gamma \text{ este un defect pentru } H_\beta\}.$$

În plus, dacă m_α şi m_β sunt idealele maximale corespunzătoare respectiv punctelor α şi β, atunci

$$m_\alpha = (r_H^G)^{-1}(m_\beta) = A^G \cap m_\beta.$$

Mai mult avem $P_\gamma \leq H_\beta \leq G_\alpha$.

Stâns legată de corespondenţa Green este următorul rezultat cunoscut sub numele de Teorema Burry-Carlson-Puig.

Teorema 1.4.2. *Fie A o G-algebră, P_γ un grup punctat local pe A şi H un subgrup al lui G ce conţine $N_G(P_\gamma)$. Alegem $\alpha \in \mathcal{P}(A^G)$ şi $\beta \in \mathcal{P}(A^H)$ astfel ca $P_\gamma \leq H_\beta \leq G_\alpha$. Atunci P_γ este un defect grup punctat al lui H_β dacă şi numai dacă P_γ este un defect grup punctat al lui G_α. În aceste condiţii β şi α sunt în corespondenţa Brauer.*

Teorema 1.4.3 (The Brauer correspondence)**.** *Există o bijecţie între blocurile lui $\mathcal{O}G$ având defect grup P şi blocurile lui $\mathcal{O}H$ având acelaşi defect grup P.*

Considerăm N, un subgrup normal al grupului finit G. Fie b un bloc al lui N cu defect grup D. Blocurile algebrei $\mathcal{O}G$ care acoperă b sunt acei idempotenti primitivi în $Z(s\mathcal{O}G)$, unde

$$s = \sum_{g \in [G/N]} b^g.$$

Dacă b_1 este corespondentul Brauer al lui b aparţinând $\mathcal{O}N_N(D)$ atunci avem:

Teorema 1.4.4 (Harris-Knörr)**.** *Morfismul Brauer determină o corespondenţă bijectivă ce păstrează defect grupurile între blocurile din $\mathcal{O}G$ care acoperă b şi blocurile din $\mathcal{O}N_G(D)$ care acoperă b_1. Mai mult această corespondenţă coincide cu corespondenţa Brauer.*

1.5. **Perechi Brauer pe algebre de p-permutare.** Fie G un grup finit. O pereche Brauer (P, e) este constituită dintr-un p-subgrup P şi un bloc e din $kC_G(P)$. Fie P_γ un grup punctat local pe $\mathcal{O}G$. Atunci pentru orice $i \in \gamma$, utilizând morfismul Brauer

$$\mathrm{Br}_P : \mathcal{O}G^P \to kC_G(P),$$

idempotentul primitiv $\mathrm{Br}_P(i)$ este diferit de zero în $kC_G(P)$. Blocul e se descompune în $kC_G(P)$ ca o sumă de idempotenţi primitivi. Dacă $\mathrm{Br}_P(i)e = \mathrm{Br}_P(i)$ atunci spunem că P_γ este asociat cu e.

Următorul rezultat este un mis dintre [41, Lemma 40.12] şi [41, Proposition 40.13].

Propoziţie 1.5.1. *Fie b un bloc din $\mathcal{O}G$ şi (P, e) o pereche Brauer. Atunci P este un defect grup pentru b care satisface $\mathrm{Br}_P(b)e = e$ dacă şi numai dacă există un unic defect grup punctat P_γ al lui b care este asociat cu (P, e). În plus, această relaţie induce o bijecţie între mulţimea defect grupurilor punctate ale lui b şi mulţimea perechilor Brauer (P, e) ce satisfac $\mathrm{Br}_P(b)e = e$ iar P este un defect grup pentru b.*

1.6. **Algebre graduate şi extensii Clifford.** În această secţiune k este algebric închis. Cosiderăm $\hat{A}$ o algebră G-graduată, unde G este grup finit. Această $\mathcal{O}$-algebră satisface

$$\hat{A} = \bigoplus_{g \in G} \hat{A}_g.$$

Fie b un bloc al lui $\hat{A}_1$. Atunci b aparţine centrului lui

$$C_{\hat{A}}(\hat{A}_1) = \{a \in \hat{A} \mid aa_1 = a_1 a \text{ for all } a_1 \in \hat{A}_1\}.$$

Conform [18, Paragraph 2] centralizatorul

$$C_{\hat{A}}(\hat{A}_1) = \bigoplus_{g \in G} C_{\hat{A}}(\hat{A}_1)_g$$

admite o structură naturală de G-algebră. Notăm cu G_b stabilizatorul lui b în G şi atunci $bC := C_{b\hat{A}b}(b\hat{A}_1) = bC_{\hat{A}}(\hat{A}_1)$ are următoarea structură

$$bC = \bigoplus_{g \in G_b} bC_g,$$

unde $bC_g = bC \cap \hat{A}_g$ pentru orice $g \in G_b$. Mulţimea

$$G[b] = \{g \in G_b \mid bC_g \cdot bC_{g^{-1}} = bC_1\}$$

este un subgrup normal al lui G_b (vezi [17, Proposition 2.17]). Atunci

$$C[b] := \bigoplus_{g \in G[b]} bC_g$$

devine o algebră tare $G[b]$-graduată şi G_b-invariantă. Componenta $bC_1 = bZ(\hat{A}_1) = Z(b\hat{A}_1)$ este un inel local iar $C[b]$ este un produs încrucişat al lui $\hat{A}_1$ cu $G[b]$. Considerând câtul

$$C[b]/J_{gr}(C[b]) = \bigoplus_{g \in G[b]} bC_g/bC_gJ(C[b]_1)$$

obţinem o algebră grupală răsucită care este un produs încrucişat dintre

$$k \simeq C[b]_1/J(C[b]_1)$$

cu $G[b]$, fiind in acelaşi timp şi o G_b-algebră. Această algebră corespunde în mod unic extensiei Clifford

$$1 \to k^* \to \mathrm{hU}(C[b]/J_{gr}(C[b])) \to G[b] \to 1.$$

Aici $\mathrm{hU}(C[b]/J_{gr}(C[b]))$ denotă unităţile omogene al lui $C[b]/J_{gr}(C[b])$.

1.7. **Fuziuni pe algebre interioare.** Fie N un subgrup normal al grupului finit G. Fuziunile pe algebre G-interioare au fost introduse de Puig în [35]. Urmând ca pentru G-algebre N-interioare conceptul să fie generalizat aşa cum reiese din [34].

1.7.1. Cu toate că în [34, §8] şi în [35] autorul lucrează cu aşa numitele exomorfisme, în prezenta lucrare încercăm să evităm introducerea acestui concept şi să definim fuziunile aşa cum au fost introduse în [38, 2.2].

Fie A o algebră G-interioară şi fie K_β, H_α două grupuri punctate pe A. Dacă $i \in \alpha$ atunci iAi este H-interioară iar dacă $j \in \beta$ atunci algebra jAj este K-interioară.

Definiţie 1.7.2. Un izomorfism de grupuri $\varphi : K \simeq H$ este A-fuziune de la K_β la H_α dacă există $a \in A^*$ aşa încât

$$(y \cdot j)^a = \varphi(y) \cdot i,$$

pentru orice $y \in K$.

Notăm $\mathrm{F}_A(K_\beta, H_\alpha)$ mulţimea A-fuziunilor de la K_β la H_α. Să observăm că A-fuziunile pot fi compuse, mai exact dacă L_γ este un alt grup punctat pe A atunci pentru $\varphi \in \mathrm{F}_A(K_\beta, H_\alpha)$ şi $\psi \in \mathrm{F}_A(H_\alpha, L_\gamma)$ obţinem $\psi \circ \varphi \in \mathrm{F}_A(K_\beta, L_\gamma)$. Dacă $K_\beta = H_\alpha$ atunci notăm $\mathrm{F}(K_\beta) := \mathrm{F}(K_\beta, K_\beta)$. Următoarele rezultate sunt o consecinţă directă a Definiţiei 1.7.2.

Propoziţie 1.7.3. *Mulţimea $\mathrm{F}_A(K_\beta)$ împreună cu operaţia de compunere a morfismelor formează un grup.*

Propoziţie 1.7.4. *Dacă K_β şi H_α sunt legate via Definiţia 1.7.2 atunci, pentru orice $j \in \beta$ şi $i \in \alpha$ există $a \in A^*$ astfel încât $(K \cdot j)^a = H \cdot i$, deci $(jAj)^a = iAi$.*

1.7.5. În continuare A denotă o G-algebră N-interioară. Fie K şi H două subgrupuri ale lui G şi β, α două puncte, repectiv al lui K şi al lui H pe A.

Definiţie 1.7.6. Alegem $j \in \beta$ şi $i \in \alpha$. Un izomorfism de grupuri $\varphi : K \to H$ care verifică $\varphi(y) \in yN$ pentru orice $y \in K$ este A-fuziune de la K_β la H_α dacă există $a \in A^*$ astfel ca pentru orice $y \in K$ să avem

$$j^a = i, \qquad (ja)^y \cdot y^{-1}\varphi(y) = ja.$$

Notăm în acelaşi mod $\mathrm{F}_A(K_\beta, H_\alpha)$ mulţimea A-fuziunilor de la K_β la H_α.

Propoziţie 1.7.7. *Dacă K_β şi H_α legate via Definiţia 1.7.6 atunci pentru orice $j \in \beta$ şi $i \in \alpha$ există $a \in A^*$ ca sa avem $(jAj)^a = iAi$.*

1.7.8. Grupul $\mathrm{F}(K_\beta)$ are următoarea proprietate.

Propoziţie 1.7.9. *Fir $j \in \beta$. Automorfismul $\varphi : K \to K$ ce satisface $\varphi(y) \in yN$ pentru orice $y \in K$ este A-fuziune a lui K_β dacă şi numai dacă există $a \in (jAj)^*$ astfel ca $a^y \cdot y^{-1}\varphi(y) = a$ pentru orice $y \in K$.*

2. Induction and Skew Group Algebras

Secţiunea 1.3 prezintă structura de algebră grupală strâmbă şi inducţiile de tip Puig şi de tip Turull. În acest capitol dăm o conexiune între ele.

2.1. **Inducţia Puig şi Turull pentru G-algebre algebre G-interioare.** Deoarece lucrăm cu două tipuri de inducţie, modificăm notaţia din [30] înlocuind ”Ind” cu ”IndP” şi cea din [43] înlocuind ”Ind” cu ”IndT”.

Fie un grup finit G şi un subgrup L al său. Dacă C este o algebră L-interioară atunci avem:

Teorema 2.1.1. *Există un morfism surjectiv de algebre G-interioare de la* $\mathrm{IndT}(C) * G$ *la* $\mathrm{IndP}(C * L)$.

2.2. **Un izomorfism între cele două tipuri de inducţie.** Fie B o L-algebră peste $\mathcal{O}$, cosiderăm $S := B * L$. Fie $A = \mathrm{IndT}_L^G(B)$ inducţia de tip Turull, şi notăm $R := A * G$.

Avem următorul rezultat:

Teorema 2.2.1. *Aplicaţia*

$$\varphi : \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}L} S \otimes_{\mathcal{O}L} \mathcal{O}G \to R, \quad g \otimes s \otimes f \mapsto g \cdot s \cdot f,$$

unde $g, f \in G$ şi $s \in S$, este un izomorfism de algebre G-graduate G-interioare, iar diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}L} S \otimes_{\mathcal{O}L} \mathcal{O}G \arrow[r] & R \\
\mathcal{O}G \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

este comutativă.

3. Corespondeţe în G-algebre

Harris şi Knörr au demostrat în [24] că există o bijecţie ce păstrează defect grupurile între blocurile ce acoperă doi corespondenţi Brauer fixaţi. O versiune modul-teoretică a acestui rezultat există şi ii se datorează lui Alperin, mai exact [2]. În acest capitol arătăm că aceste două rezultate sunt valide într-u context mai general, anume a unor G-algebre peste un inel de valuare discretă.

3.1. **Corespondenţa Green pentru puncte pe G-algebre.** Fie N un subgrup normal al unui grup finit G, fie $\alpha \in \mathcal{P}(A^G)$ şi $\beta \in \mathcal{P}(A^N)$. Presupunem că P_γ este un defect grup punctat al lui G_α.

Definiţie 3.1.1. Dacă $N \cap {}^gP$ minimal având proprietatea $\beta \in A^N_{N\cap {}^gP}$, atunci spunem că α acoperă β. În acest caz există un punct $\gamma' \in \mathcal{P}(A^Q)$, $Q = N \cap {}^gP$, astfel ca $Q_{\gamma'}$ să fie un defect grup punctat al lui N_β.

Fie $\delta \in \mathcal{P}(A^{N_N(Q)}$ corespondentul Green al lui β. Se ştie că δ are defect grup Q.

Teorema 3.1.2. *Există o bijecţie între punctele din A^G ce acoperă β şi punctele din $A^{N_G(Q)}$ ce acoperă δ. În plus, dacă $Q_{\gamma'}$ defect grup punctat al lui $N_N(Q)_\delta$, deci defect grup punctat pentru N_β, şi P_γ este un defect grup punctat al lui $N_G(Q)_\epsilon$, deci al lui G_α atunci ${}^g(Q_{\gamma'}) \leq P_\gamma$ pentru un $g \in N_G(Q)$.*

Remark 3.1.3. Fie M un kG-module. Aplicând terema precedentă G-algebrei $A := \mathrm{End}_k(M)$ obţinem rezultatul principal din [2].

În cazul unei G-algebre inductiv complete se poate demostra o versiune mai precisă a corespondenţei Green.

Teorema 3.1.4 (Corespondenţa Green)**.** *Fie A o G-algebră inductiv completă şi fie P_γ un grup punctat local pe A, de asemenea fie H un subgrup în G conţinând $N_G(P_\gamma)$. Atunci, dacă α este un punct al lui G pe A cu defect grup punctat P_γ există un unic punc β al lui H pe A cu acelaşi defect grup punctat astfel ca $\beta \subset \mathrm{res}^G_H(\alpha)$ dacă şi numai dacă $\alpha \subset \mathrm{ind}^G_H(\beta)$.*

3.2. **Corespondenţa Harris-Knörr pentru puncte pe algebre de permutare.**

3.2.1. Precum în pragraful precendent, fie N un subgrup normal al grupului finit G. Fie A o G-algebră de permutare, D un p-subgrup în N. Considerăm mulţimea

$$\mathcal{Q} = \{Q \leq G \mid Q \text{ este un } p\text{-subgrup şi } Q \cap N = D\}.$$

Von folosi notaţia " bar " pentru imaginea elementelor prin morfismul Brauer determinat de D. Cu aceste notaţii avem:

Propoziţie 3.2.2. *Morfismul Brauer*

$$\mathrm{Br}_D : A^D \to A(D)$$

induce o bijecţie ce păstrează defect grupurile între puntele lui G pe A având defect grup în $\mathcal{Q}$ şi punctele lui $N_G(D)$ pe $A(D)$ avâbd defect grup in $\mathcal{Q}$. Mai mult, dacă α şi $\bar{\alpha}$ corespunde în această bijecţie, Q_ϵ este un defect grup punctat al lui α dacă şi numai dacă $Q_{\bar{\epsilon}}$ este defect grup punctat al lui $\bar{\alpha}$.

3.2.3. Considerăm C o subalgebră G-invariantă a lui A astfel ca C să fie sumand direct ca şi $\mathcal{O}$-modul şi contţine 1_A. Fie β un punct al lui C^N cu defect grup D în N şi fie $\bar{\beta} := \mathrm{Br}_D(\beta)$ corespondentul lui β ca punct în $C(D)^{N_N(D)}$, de asemenea cu defect grup D.

Definiţie 3.2.4. Spunem ca punctul α al lui G pe A acoperă β dacă α are defect grup în $\mathcal{Q}$, şi pentru orice $i \in \alpha$ există un idempotent $j_1 \in A^N$ dintr-o clasă de conjugare a lui β şi există un idempotent primitiv $f \in A^N$ aparţinând unui punct cu defect grup D astfel ca $j_1 f = f j_1 = f$ şi $if = fi = f$.

3.2.5. O definiţie analoagă are loc pentru punctele lui $N_G(D)$ pe $A(D)$ ce acoperă $\bar{\beta}$.

Lema 3.2.6. *Fie $B \in \mathcal{O}G^G$ şi $b \in \mathcal{O}N^N$ doi idempotenţi primitivi. Atunci B acoperă b ca şi în Definiţia 3.2.4 dacă şi numai dacă B acoperă b ca blocuri ale algebrei grupale.*

Următoarea teoremă este rezultatul principal al acestui paragraf:

Teorema 3.2.7. *Morfismul Brauer relativ la D induce o corespondenţă bijectivă ce păstrează defect grupurile punctate din $\mathcal{Q}$ între punctele lui G pe A ce acoperă β şi punctele lui $N_G(D)$ pe $A(D)$ ce acoperă $\bar{\beta}$.*

Se observă ca [24, Theorem] se poate obţine imediat ca si corolar al acestei teoreme.

4. Extensii Clifford ale blocurilor algebrei grupale

4.1. **Extensia Clifford asociată unui bloc.** În această secţiune k nu este algberic închis. Fie K un subgrup normal al grupui finit H, notăm $G = H/K$. Algebra grupală $\mathcal{O}H$ este tare G-graduată.

Fie b un bloc în $\mathcal{O}K$; acesta este un idempotent central în următorul centralizator G-graduat:

$$C_{\mathcal{O}H}(\mathcal{O}K) = (\mathcal{O}H)^K = \bigoplus_{g\in G}(\mathcal{O}H)^K_g,$$

unde $(\mathcal{O}H)^K_g = (\mathcal{O}g)^K$ pentru toţi $g \in G$. Atunci

$$b\mathcal{O}Hb = \bigoplus_{g\in G_b} b\mathcal{O}g = b\mathcal{O}H_b$$

este tare G_b-graduată.

Definim muţimea

$$G[b] = \{g \in G \mid b(\mathcal{O}H)^K_g \cdot b(\mathcal{O}H)^K_{g^{-1}} = b(\mathcal{O}H)^K_1\},$$

care este un subgrup normal în G_b, şi obţinem

$$\hat{A} := \bigoplus_{g\in G[b]} b(\mathcal{O}H)^K_g$$

o G_b-algebră tare $G[b]$-graduată. Să observăm ca unu-componenta lui $\hat{A}$ este H-algebra $A := b(\mathcal{O}K)^K$. Totodată A este un inel local, astfel

$$\hat{k}_1 := A/J(A)$$

este o extindere finită a lui k. Câtul

$$\bar{\hat{A}} := \hat{A}/\hat{A}J(A)$$

este o G_b-algebră tare $G[b]$-graduată ce corespunde extensie Clifford

$$1 \to \hat{k}_1^* \to hU(\bar{\hat{A}}) \to G[b] \to 1 \tag{1}$$

4.2. **A doua extensie Clifford asociată unui bloc.** Fie P un defect grup în K pentru b. Folosim morfismul Brauer

$$\mathrm{Br}_P : (\mathcal{O}H)^P \to kC_H(P)$$

să obţinem $\bar{b} := \mathrm{Br}_P(b)$ un bloc în $kC_K(P)^{N_K(P)}$ care are asociată o pereche Brauer maximală (P, e).

Facând construcţiile analoage ca şi în paragraful precedent utilizând

$$kC_H(P)^{N_K(P)} = C_{kC_H(P)}(kC_K(P))^{N_K(P)}$$

şi e în locul lui $C_{\mathcal{O}H}(\mathcal{O}K)$ şi b respectiv obţinem o altă extensie Clifford

$$1 \to \hat{k}_2^* \to \mathrm{hU}(\bar{\bar{B}}) \to C_H(P)_0/C_K(P) \to 1. \tag{2}$$

Unde B este subalgebra în $ekC_H(P)_b^{N_K(P)}$ tare graduată după un subgrup notat $C_H(P)_0/C_K(P)$ corespunzătoare extensiei de mai sus.

4.3. **Izomorfismul dintre cele două extensii.** Dăm rezultatul ce caracterizează extensiile de mai sus:

Teorema 4.3.1. *Utilizând notaţiile precedente, următoarele afirmaţii sunt adevărate.*

1) *G_b este egal cu $N_H(P)_eK/K$.*
2) *Grupul $G[b]$ este egal cu $C_H(P)_0K/K$.*
3) *Extensiile* (1) *şi* (2) *sunt izomorfe.*
4) *Izomorfismul dintre extensiile* (1) *şi* (2) *este compatibil cu izomorfismul natural*

$$G[b] \to C_H(P)_0/C_K(P), \qquad g \mapsto g \cap C_H(P)_0,$$

şi păstrează acţiunea de conjugare a lui $G_b \simeq N_H(P)_e/N_K(P)_e$ pe aceste două extensii.

5. Clifford extension for points of K-interior H-algebras

5.1. **Introducere.** Scopul este de a generliza construcţiile şi rezultatul principale din capitolul anterior. Lucrăm cu aceleaşi notaţii, anume K normal în H, şi considerăm o H-algebră K-interioară A. Alegem β un punct în A^K, P un defect grup al său, şi $\bar{\beta} := \mathrm{Br}_P(\beta)$ punctul corespunzător din $A(P)^{N_K(P)}$. Asociem acestor două puncte câte o extensie Clifford şi demonstrăm ca extensiile sunt izomorfe.

5.2. **Extensia Clifford asociată unui punct.**

5.2.1. Cu H-algebra K-interioară A, similar ca şi în [20, 2.1], formăm algebra H-interioară G-graduată

$$\hat{A} := A \otimes_{\mathcal{O}K} \mathcal{O}H = \bigoplus_{x\in[H/K]} A \otimes x,$$

având produsul

$$(a \otimes x)(b \otimes y) = ab^{x^{-1}} \otimes xy,$$

pentru $a, b \in A$ şi $x, y \in H$.

5.2.2. Pentru grupul punctat K_β introducem normalizatorul:

$$N_H(K_\beta) = \{x \in H \mid \beta^x = \beta\}.$$

5.2.3. Avem o accţiune a lui $(A^K)^* \otimes H$ pe $\hat{A}$. Dacă $a \otimes x \in (A^K)^* \otimes H$ pnetru orice element $b \otimes h \in \hat{A}$ avem

$$(b \otimes h)^{a\otimes x} = (a \otimes x)^{-1}(b \otimes h)(a \otimes x) = (a^{-1}b)^x a^{h^{-1}x} \otimes x^{-1}hx.$$

5.2.4. Fie $j \in \beta$. Introducem grupurile

$$(A^K)^*_j = \{a \in (A^K)^* \mid ja = aj\}$$

şi

$$((A^K)^* \otimes N_H(K_\beta))_j = \{a \otimes x \in (A^K)^* \otimes N_H(K_\beta) \mid (j \otimes 1)^{a\otimes x} = j \otimes 1\}.$$

Notând

$$\widehat{K} = (A^K)^*_j \otimes K, \widehat{N_H(K_\beta)} = ((A^K)^* \otimes N_H(K_\beta))_j \text{ and } \bar{N}_H(K_\beta) = N_H(K_\beta)/K$$

obţinem

Lema 5.2.5. *Următorul şir*

$$1 \to \widehat{K} \to \widehat{N_H(K_\beta)} \to \bar{N}_H(K_\beta) \to 1$$

este exact.

5.2.6. $\widehat{N_H(K_\beta)}$-algebra $A_\beta := jAj$ este $\widehat{K}$-interioară, în timp ce

$$\hat{A}_\beta := A_\beta \otimes_{\widehat{K}} \widehat{N_H(K_\beta)}$$

este o algebră $\widehat{N_H(K_\beta)}$-interioară, tare $\bar{N}_H(K_\beta)$-graduată.

Muţimea

$$G[\beta] = \{\bar{x} \in \bar{N}_H(K_\beta) \mid (A_\beta \otimes \hat{x})^K \cdot (A_\beta \otimes \hat{x}^{-1})^K = (A_\beta \otimes 1)^K\}$$

unde $\hat{x} \in \widehat{N_H(K_\beta)}$ este o ridicare a lui $\bar{x}$, verifică

Propoziţie 5.2.7. *$G[\beta]$ este subgrup normal în $\bar{N}_H(K_\beta)$.*

Notăm cu $N_H^A(K_\beta)$ subgrupul lui $N_H(K_\beta)$ ce conţine elemente x care determină o A-fuziune.

Propoziţie 5.2.8. *Subgrupurile $G[\beta]$ şi $N_H^A(K_\beta)/K$ coincid.*

Algebra tare $G[\beta]$-graduată

$$\hat{A}_\beta^K := (A_\beta \otimes_{\widehat{K}} \widehat{N_H^A(K_\beta)})^K.$$

determină câtul $\hat{\bar{A}}_\beta = \hat{A}_\beta^K / J_{gr}(\hat{A}_\beta^K)$, corespunzător în mod unic extensiei Clifford

$$1 \to A_\beta(K_\beta)^* \to \hat{\bar{N}}_H^A(K_\beta) \to \bar{N}_H^A(K_\beta) \to 1. \qquad (1")$$

5.3. **Încercarea de a ajunge la o a doua extensie Clifford.** Prin încercarea de a construi în mod similar o extensie Clifford pentru $\bar{\beta}$, ca şi clasă de conjugare a $N_H(P)$-algebrei $C_K(P)$-interioare $A(P)$ se observă ca proprietatea de a fi doar $C_K(P)$-interioară nu este suficientă.

5.4. **A doua extensie Clifford asociată unui punct.**

5.4.1. Lucrăm similar cu $\bar{\beta}$ în locul lui β şi considerăm şirul scurt exact

$$1 \to \widehat{N_K(P)} \to N_{N_H(P)}\widehat{(N_K}(P)_{\bar{\beta}}) \to \bar{N}_{N_H(P)}(N_K(P)_{\bar{\beta}}) \to 1,$$

unde

$$\widehat{N_K(P)} = (A(P)^{N_K(P)})^*_{\bar{j}} \otimes N_K(P) \text{ and}$$

$$\bar{N}_{N_H(P)}(N_K(P)_{\bar{\beta}}) = N_{N_H(P)}(N_K(P)_{\bar{\beta}})/N_K(P).$$

Algebra

$$\hat{A}(P)^{N_K(P)}_{\bar{\beta}} := (\bigoplus_{\hat{x}} \bar{j}(A \otimes \hat{x})(P)\bar{j})^{N_K(P)}$$

unde $\hat{x} \in \widehat{N_H(K_\beta})$ ridică un sistem de reprezentaţi pentru $\bar{N}_H(K_\beta)$, este tare graduată după un subgrup notat $G[\bar{\beta}]$.

Obţinem în mod unic extensia CLifford

$$(2\text{"}) \qquad 1 \to A(P)_{\bar{\beta}}(N_K(P)_{\bar{\beta}})^* \to \hat{\bar{N}}^{A(P)}_{N_H(P)}(N_K(P)_{\bar{\beta}}) \to G[\bar{\beta}] \to 1.$$

5.5. **Izomorfismul dintre cele două extensii.** Păstrăm notaţiile anterioare.

Teorema 5.5.1. *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(*i*) *Extensiile* (1") *şi* (2") *sunt izomorfe.*

(*ii*) *Produsele încrucişate corespunzătoare sunt izomorfe ca* $\widehat{N_H(K_\beta})/K$*-algebre.*

5.6. **Cazul algebrei grupale.** Această secţiune prezintă situaţia paragrafelor precedente aplicată pe algebra grupală.

5.7. **Extensii pentru blocurile H-algebrelor K-interioare.** În mod analog, această secţiune trateaza un caz diferit de blocuri, nu ale algebrei grupale ci ale unei H-algebre K-interioară.

6. Corespondenţe pentru blocuri

6.1. **Introducere.** Evidenţiem faptul că rezultatul principal al capitolului 4 implică rezultatul principal in [24]

6.2. **Preliminarii.**

6.2.1. Plecând de la algebra grupală $\mathcal{O}H$, alegem un bloc b al lui K (subgrupul normal în H) şi construim extensia Clifford corespunzătoare. Astfel dăm peste centralizatorii $bC = b\mathcal{O}H_b^K$ şi $C[b]$, cel din urmă fiind subalgebra lui bC care este tare graduată. Avem:

Lema 6.2.2. *Algebrele $(bC)^{H_b}$ şi $C[b]^{H_b}$ aceeiaşi idempotenţi primitivi.*

6.3. **Observaţii asupra defect grupurilor.**

6.3.1. Are loc izomorfismul

$$(*) \qquad Z(s\mathcal{O}H) \simeq Z(b\mathcal{O}Hb) = Z(b\mathcal{O}H_b) = (bC)^{H_b}.$$

Notăm cu B un bloc ce acoperă b cu B' corespondentul lui B prin izomorfismul (*).

Dacă Q este defect grup în H_b al blocului B', atunci Q este defect grup pentru blocul B, şi poate fi ales ca să verifice $Q \cap K = D$.

6.4. **Corespondenţa Harris-Knörr.** Notăm cu D un defect grup al lui b, şi cu b_1 corespondentul Brauer al lui b. Avem:

Teorema 6.4.1. *Extensiile Clifford ale lui b şi b_1 definesc o bijecţie ce păstrează defect grupurile între blocurile lui H ce acoberă b si blocurile lui $N_H(D)$ ce acoperă b_1. În plus acestă corespondenţă conicide cu corespondenţa Brauer.*

Bibliografie

[1] Alperin, J.L., *Local Representation Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1986.

[2] Alperin, J.L., *The Green correspondence and normal subgroups*, J. Algebra **104**, (1986), 74–77.

[3] Alperin, J. and Burry, D., *Block theory with modules*, J. Algebra, 65, (1980), 225-233 .

[4] Aschbacher, M. Kessar, R. and Oliver, B., *Fusion systems in algebra and topology.* http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/archive/aschbacher-kessar-oliver.html.

[5] Auslander, M. Reiten, I. and Smalø, S. O. *Representation Theory of Artin Algebras,* Cambridge University Press, 1995.

[6] Barker, L., *Blocks of Endomorphism Algebras*, J. Algebra **168**, 728–740 (1994).

[7] Broue, M. and Puig, L., *Characters and Local Structure in G-algebras*, J. Algebra **63** (1980), 306–317.

[8] Coconeţ, T., *Correspondences for covering blocks*, J. Group Theory, submitted.

[9] Coconeţ, T., *Correspondences for covering points*, Mathematica, Tome 53(76), No 1, 2011, pp. 29–34.

[10] Coconeţ, T., *Covering points in permutation algebras*, Arch. Math., submitted.

[11] Coconeţ, T., *G-algebras and Clifford extensions of points*, Algebra Colloquium., to appear.

[12] Coconeţ, T., *Remarks on induction of G-algebras and skew group algebras*, Mathematica, Tome 51(74), No 2, 2009, pp. 135–142.

[13] Coconeţ, T., *On Blocks and Clifford Extensions*, Mathematica, Tome 54 (77), No 1, 2012, pp. 11–15.

[14] Collins, M., *Blocks, normal subgroups, and Brauer' s third main theory*, J. Algebra, 213, (1999), 69-76.

[15] Curtis. C. W, *Pioneers of Representation Theory: Frobenius, Burnside, Schur and Brauer*, History of Mathematics, vol. 15, (1999).

[16] Dade, E.C.,*A Clifford Theory for Blocks*, Representation theory of finite groups and related topics, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXI, Univ. Wisconsin, Madison, Wisconsin 1970, 33–36.

[17] Dade, E.C., *Block extensions*, Illinois J. Math. **17** (1973), 198–272.

[18] Dade, E.C., *Compounding Cliffords theory*, Ann. of Math., vol. 91 (1970), pp. 236–290.

[19] Dade, E.C., *Clifford theory for group-graded rings*, J. Reine Angew. Math. **369** (1986), 40–86.

[20] Dicu, C. and Marcus, A., *Group graded algebras and the relative projectivity of pointed groups*, Quart. J. Math. **57** (2006), 309–318.

[21] Fan, Y., *Local Characterizations of Block Covers and Their Applications*, J. Algebra **152**, (1992), 397–416.

[22] Feit, W. , *The Representation Theory of Finite Groups*, NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY AMSTERDAM, 1982.

[23] Green, J. A., *Some Remarks on Defect Groups*, Math. Zeitschrift, volume: 107 pp. 133 – 150.

[24] Harris, E. and Knörr, R., *Brauer correspondence for covering blocks of finite groups*, Comm. Algebra **13(5)**, (1985), 1213–1218.

[25] Kessar, R., *Introduction to Block Theory*. Group representation theory, 47–77, EPFL Press, Lausanne, 2007.

[26] J. J. Rotman, *Advanced Modern Algebra*, Prentice Hall, (2003).

[27] Klasen, W. and Schmid, P., *Induced crossed products*. Commun. Algebra **18**, (1990), 2573–2586.

[28] Knörr, R., *Blocks, vertices and normal subgroups*, Math. Z. **148**, (1976), 53–60.

[29] Lam, T.Y., *Representations of finite groups: A hundred years, Part I*, Notices of the AMS **45**, (1998), 361–372.

[30] M. Linckelmann, Induction for interior algebras, *Quart. J. Math.* **53** (2002), 195-200.

[31] Marcus, A., *Derived invariance of Clifford classes*, J. Group Theory, to appear.

[32] Marcus, A., *Representation Theory of Finite Groups Graded Algebras*, Nova Science Publishers, Commack, NY, 1999.

[33] Navaro, G., *Characters and Blocks of Finite Groups*, Cambridge University Press , Valencia (1998).

[34] Puig, L., *Blocks of Finite Groups. The Hyperfocal Subalgebra of a Block*, Springer, Berlin, 2002.

[35] Puig, L., *Local Fusions in Block Source Algebras*, Journal of Algebras **104**, (1986), 358–369.

[36] Puig, L., *On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences Between Brauer Blocks*, Progress in Mathematics 178, Birkhäuser, Basel, 1999.

[37] Puig, L., *Pointed Groups and Construction of Modules*, J. Algebra **116**, (1988), 7-129.

[38] Puig, L. Yuanyang, Z., *A local property of basic Morita equivalences*, Math. Z. **256**, (2007) , 551–562.

[39] Schimd, P., *Clifford Theory of Simple Modules*, J. Algebra **119** (1988), 185–212.

[40] Solomon, R. *On Finite Simple Groups and Their Classification*, Notices of the AMS, **42**(2),(1995), 231–239.

[41] Thévenaz, J., *G-Algebras and Modular Representation Theory*, Clarendon Press, Oxford (1995).

[42] Todea, C. C., *Restriction Between Cohomology Algebras of Blocks of Finite Groups*, Algebr. Represent. Theory., (2011)14, 731–749.

[43] Turull, A., *Reduction theorems for Clifford classes*, J. Group Theory **9** (2006), 27–47.

[44] Wenlin, H., *On the cover relationship for local interior G-algebras*, Journal of Mathematical Sciences, Vol. 162, No. 5, (2009), 656–663.

Universitatea "Babeş-Bolyai", Facultatea de Matematică şi Informatică, Str. Mihail Kogălniceanu 1, 400084, Cluj-Napoca, Romania