UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

STUDIUL GRUPURILOR DE IZOMETRII

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător ştiinţific:
Prof. univ. dr. DORIN ANDRICA

Doctorand:
VASILE GHEORGHE BULGĂREAN

CLUJ-NAPOCA
2014

Cuprins

Introducere

Conceptul de distanţă este fundamental pentru întreaga experienţă umană. În viaţa cotidiană suntem nevoiţi să înţelegem gradul de apropiere între două obiecte fizice în contexte foarte diverse. Înţelegerea matematică a conceptului de distanţă este concentrată în noţiunile de metrică şi spaţiu metric. Aceste noţiuni au fost introduse de către M. Fréchet (1906) şi F. Hausdorff (1914) generând cazuri speciale de spaţii topologice. Lucrările lui K. Menger (1928) şi L.M. Blumenthal (1953) au deschis perspectiva unor cercetări profunde a geometriei unui spaţiu metric, reluând la acest nivel noţiunile, relaţiile şi configuraţiile din geometria euclidiană.

Simetriile configuraţiilor geometrice, cristalelor şi a altor obiecte fizice microscopice au fost observate şi studiate de mult timp. Într-o exprimare modernă, simetriile unui obiect formează un grup, noţiune algebrică care apare la începutul secolului al XIX-lea în lucrările lui E. Galois şi N. Abel. Datorită lucrărilor lui S. Lie, G. Frobenius, W. Killing, E. Cartan, I. Schur, H. Weyl şi mulţi alţii, teoria grupurilor a cunoscut o dezvoltare enormă, atât în sine cât şi prin aplicaţiile ei. Aplicaţiile în mecanica cuantică şi fizica particulelor elementare au fost investigate în secolul al XX-lea. H. Weyl a spus că pentru a înţelege o structură matematică, este necesar să cercetăm grupul ei de simetrii. În cazul spaţiilor metrice, această idee ne conduce în mod natural la studiul grupului de izometrii asociat. Studiul izometriilor reprezintă o temă majoră în geometrie în legătură cu transformările care conservă unghiurile, distanţele sau diferite configuraţii simple. Dacă originile teoriei spaţiilor Banach se identifică cu anul apariţiei monografiei lui S. Banach (1932), atunci putem spune că studiul izometriilor unui spaţiu Banach, un spaţiu metric particular, începe cu această dată. Descrierea grupului de izometrii al unui spaţiu metric dat reprezintă o problemă care a atras atenţia multor matematicieni.

Prezenta lucrare se încadrează în această direcţie de cercetare şi este structurată în trei capitole. Acestea asigură unitatea conţinutului şi relevanţa tematicii cercetate. Lucrarea are la bază o bibliografie cu 65 referinţe. În continuare prezentăm pe scurt fiecare capitol, punând accent pe contribuţia personală a autorului.

Capitolul 1, intitulat *Elemente de teoria spaţiilor metrice*, este structurat în cinci paragrafe şi are în principal un caracter monografic. Obiectivul principal al acestui capitol este de a prezenta într-o formă succintă, noţiunile şi rezultatele de bază ce vor fi utilizate în capitolele următoare. În paragraful 1.1 sunt definite noţiunile de spaţiu metric, metrică, distanţă şi sunt date exemple de spaţii metrice. În Definiţia 1.1.1 sunt fixate notaţiile pentru metrica euclidiană notată d_2, metrica taxicab notată d_1, metrica l^∞ notată cu d_∞, metrica sferică notată d_{S^2}, metrica intrinsecă pe $S \subset \mathbb{R}^3$. În paragraful 1.2 este definită noţiunea de subspaţiu al unui spaţiu metric şi sunt prezentate exemple de subspaţii. Se defineşte noţiunea de spaţiu produs şi se dă un exemplu de spaţiu metric folosind funcţia distanţă. În paragraful 1.3 sunt definite noţiunile de şir convergent, şir Cauchy, spaţiu complet (Definiţiile 1.3.1, 1.3.2). Se enunţă două teoreme legate de şiruri convergente (Teoremele 1.3.1, 1.3.2). În paragraful 1.4 sunt introduse noţiunile de funcţie continuă, funcţie uniform continuă, funcţie Lipschitz, funcţie bi-Lipschitz, izometrie, prezentate în Definiţia 1.4.1. Teorema 1.4.1 prezintă faptul că o funcţie f care este Lipschitz este uniform continuă. În paragraful 1.5 sunt definite noţiunile de omeomorfism, spaţii omeomorfe, spaţii bi-Lipschitz echivalente, aplicaţie bi-Lipschitz echivalentă, spaţii izometrice (Definiţia 1.5.1). Teorema 1.5.1 prezintă relaţia între astfel de spaţii. Acest capitol se bazează pe monografia lui D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov [19].

Capitolul 2, intitulat *Grupul de izometrii al unui spaţiu metric*, este structurat în 8 paragrafe şi conţine şi rezultate originale ale autorului. Partea monografică a capitolul se bazează pe lucrările lui D.J. Schattschneider [59], E.F. Krause [35], G. Chen [20], R. Kaya [32], M. Ozcan, R. Kaya [43], S. Mazur, S. Ulam [39], A. Vogt [63], M. Albertson, D. Boutin [1], M.M. Patnaik [46], M. Willar Jr. [64], H. Coxeter [22], D. Asimov [6], A. Papadopoulos [44]. Partea originală a capitolul se bazează pe lucrările lui D. Andrica, V. Bulgărean [3], [4], V. Bulgărean [14], [16], [17], [18], [15]. În partea de introducere a acestui capitol se defineşte mulţimea tuturor izometriilor unui spaţiu metric (X,d), stabilizatorul lui x sau grupul de izotropie a lui x (Definiţia 2.0.1). Teorema 2.0.1 stabileşte faptul că $Iso(X,d)$ este grup în raport cu compunerea, iar $Iso^{(x)}(X,d)$ este subgrup al lui $Iso(X,d)$. În paragraful 2.1 se enunţă Teorema 2.1.1 care afirmă că dacă spaţiile metrice (X,d_X) şi (U,d_Y) sunt izometrice atunci grupurile lor de izometrii $Iso(X,d_X)$ şi $Iso(Y,d_Y)$ sunt izomorfe. Corolarul 2.1.1 afirmă că dacă grupurile $Iso(X,d_X)$ şi $Iso(Y,d_Y)$ nu sunt izomorfe atunci cele 2 spaţii nu sunt izometrice. Corolarul 2.1.3 construieşte un izomorfism între $Iso(X,d_X)$ şi $Iso(\mathbb{R}^n,d_2)$, unde d_X este metrica definită pe V de produsul scalar, iar d_2 este metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^n$. În subparagraful 2.1.1 se definesc noţiunile de deplasare a lui f, deplasare minimală a lui f, mulţime minimală a lui f, funcţie parabolică, funcţie eliptică, funcţie hiperbolică. În paragraful 2.2 se prezintă Teorema 2.2.1 care afirmă că grupul de izometrii ale lui $(\mathbb{R},d_1)$ este izomorf cu produsul semidirect al grupurilor $\mathbb{Z}_2$ şi $(\mathbb{R},+)$. Observaţia 2.2.1 conţine trei exemple de astfel de izomorfisme. Paragraful 2.3 conţine descrierea izometriilor planului euclidian. În subparagraful 2.3.1 se definesc noţiunile de transformare liniară, transformare liniară afină (Definiţia 2.3.1) pentru planul euclidian. Ca exemplu o transformare liniară afină este compunerea unei translaţii cu o transformare liniară. O transformare liniară afină transformă drepte în drepte, plane în plane, etc. Subparagraful 2.3.2 defineşte noţiunile de translaţie, rotaţie, simetrie axială (Definiţia 2.3.2). În subparagraful 2.3.3 se prezintă Teorema 2.3.1 care afirmă că o izometrie $f:(\mathbb{R}^2,d)\to(\mathbb{R}^2,d)$ este o transformare liniară afină, adică există un vector $b\in\mathbb{R}^2$ şi o matrice pătratică, astfel încât $f(x)=Ax+b$, pentru orice $x\in\mathbb{R}^2$. Demonstrarea acestei teoreme se face în două moduri folosind Lemele 2.3.1 şi 2.3.2. Paragraful 2.4 studiază izometriile spaţiului euclidian n-dimensional. În subparagraful 2.4.1 se prezintă definiţiile pentru matrice ortogonală, izometrii proprii, izometrii improprii, partea liniară a unei aplicaţii f (Definiţiile 2.4.1 şi 2.4.2). Se prezintă Teorema 2.4.1 despre grupurile $E(n)$, $SE(n)$, $O(n)$, $SO(n)$, care sunt: grupul izometriilor pe $\mathbb{R}^n$, grupul izometriilor pe $\mathbb{R}^n$ cu $\det(A)=1$, grupul matricelor ortogonale, respectiv grupul matricelor ortogonale cu determinantul 1. În subparagraful 2.4.2 se definesc noţiunile de punct fix, axă de simetrie, simetrie axială de axă, dreaptă invariantă, simetrie de alunecare de axă. Rezultatul principal al acestui paragraf este dat în Teorema 2.4.2. Ca o concluzie izometriile diferite de $1_{\mathbb{R}^2}$ se pot clasifica astfel: cu puncte fixe sunt rotaţiile şi simetriile centrale iar fără puncte fixe sunt translaţiile şi simetriile de alunecare. Simetriile sunt izometriile de bază ale lui $\mathbb{R}^2$, în sensul că toate izometriile pot fi obţinute prin compuneri de simetrii. Corolarul 2.4.1 afirmă că fiecare izometrie a lui $\mathbb{R}^2$ poate fi obţinută prin compunerea a cel mult trei izometrii. În particular grupul $E(2)$ este generat de simetrii. În subparagraful 2.4.3 sunt prezentate simetriile grupului $O(n)$ şi teorema lui Cartan. Teorema 2.4.4 a lui Cartan 2.4.4 afirmă că grupul $O(n)$ este generat de simetriile sale, iar în demonstraţia ei se foloseşte şi Teorema 2.4.3. Corolarul 2.4.2 afirmă că orice izometrie a spaţiului euclidian $\mathbb{R}^n$ este o compunere de cel mult $n+1$ simetrii. O izometrie care fixează cel puţin un punct, este o compunere de cel mult n simetrii. În paragraful 2.5 se studiază grupul de izometrii pentru planul $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu metrica jocului chinezesc de dame d_c. În subparagraful 2.5.1 se demonstrează Propoziţia 2.5.1 care afirmă că orice translaţie a planului euclidian este o izometrie a planului $\mathbb{R}^2_c$. Lema 2.5.1 este utilă pentru determinarea simetriilor axiale care sunt izometrii în $\mathbb{R}^2_c$. Corolarele 2.5.1 şi 2.5.2 prezintă faptul că mijlocul unui segment este acelaşi, relativ la cele două metrici d_E şi d_c, respectiv raportul definit de distanţa d_c coincide cu raportul definit de distanţa d_E. Propoziţia 2.5.2 afirmă că o simetrie axială cu axa dreapta de ecuaţie $y = mx$ este o izometrie în $\mathbb{R}^2_c$ dacă şi numai dacă $m \in \{0, \pm 1, \pm(\sqrt{2}-1), \pm(\sqrt{2}+1), \infty\}$. Propoziţia 2.5.3 arată că există doar 8 rotaţii euclidiene care păstrează d_c-distanţele, cu alte cuvinte, mulţimea rotaţiilor izometrice în $\mathbb{R}^2_c$, este $R_c = \left\{ r_\theta : \theta = k\frac{\pi}{4},\ k = 0, 1, 2, \ldots, 7 \right\}$. Teorema 2.5.1 afirmă că dacă $f : \mathbb{R}^2_c \to \mathbb{R}^2_c$ este o izometrie atunci există $T_A \in T(2)$ şi $g \in O_c(2)$ astfel încât $f = T_A \circ g$ şi aceste transformări sunt unice. Aceasta se demonstrează cu ajutorul Propoziţiilor 2.5.4, 2.5.5 şi respectiv Corolarul 2.5.3. În final se obţine un important rezultat prezentat în Corolarul 2.5.4, care arată că $Iso(\mathbb{R}^2_c)$ este produsul semidirect al grupurilor $\mathbb{R}^2$ şi D_8. În subparagraful 2.5.2 se demonstrează Teorema 2.5.2, de calcul a ariei unui triunghi în planul $\mathbb{R}^2_c$. În paragraful 2.6 se descrie grupul $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ cu $p \neq 2$. În subparagraful 2.6.1 se enunţă şi demonstrează teorema Mazur-Ulam (Teorema 2.6.1) care afirmă că orice izometrie $f : E \to F$, între spaţii normate reale, este afină. În subparagraful 2.6.2 se prezintă rezultatele originale ale autorului în legătură cu determinarea grupului $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$. Se demonstrează că în cazul $p \neq 2$, toate aceste grupuri sunt izomorfe şi în consecinţă ele nu depind de numărul p. Aceste rezultate apar în lucrarea D. Andrica, V. Bulgărean [4] şi V. Bulgărean [15]. Teorema 2.6.2 afirmă că pentru $p \neq 2$, $p \geq 1$ şi pentru $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie liniară definită de matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$, $f_A \in Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ dacă şi numai dacă A este o matrice de permutări, adică fiecare linie şi fiecare coloană a lui A are exact un element nenul şi acest element este egal cu ± 1. Acest rezultat este demonstrat în lucrările D. Andrica, V. Bulgărean [4] şi V. Bulgărean [15]. În subparagraful 2.6.3 se determină grupul $Iso_{d_\infty}(\mathbb{R}^n)$. Deşi rezultatul se formulează la fel, preferăm să-l prezentăm separat pentru $p = \infty$ datorită demonstraţiei complet diferite faţă de cea dată în Teorema 2.6.2. Teorema 2.6.3 arată că pentru o funcţie $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ liniară definită de matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$, $f_A \in Iso_{d_\infty}(\mathbb{R}^n)$ dacă şi numai dacă A este o matrice de permutări, adică fiecare linie şi fiecare coloană a lui A are exact un element nenul şi acest element este egal cu ± 1. În subparagraful 2.6.4 sunt date concluzii comune pentru grupurile $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ şi $Iso_\infty(\mathbb{R}^n)$. Acestea împreună cu rezultatele din subparagrafele 2.6.2 şi 2.6.3 ne conduc la următorul rezultat comun pentru grupurile $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ şi $Iso_{d_\infty}(\mathbb{R}^n)$ (Corolarul 2.6.1): pentru $p \geq 1$, $p \neq 2$, un număr real sau $p = \infty$, grupul $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ este izomorf cu produsul semidirect al grupurilor $(\mathbb{R}^n, +)$ şi $S_p \times \mathbb{Z}_2^n$, unde S_n este grupul permutărilor mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$. Subgrupul de izometrii liniare al lui $Iso_{d_\infty}(\mathbb{R}^n)$ este alcătuit din $2^n \cdot n!$ aplicaţii liniare definite de matricele de permutări în Teorema 2.6.3. Subparagraful 2.6.5 introduce dimensiunea d-izometrică a unui grup finit. Se defineşte noţiunea de dimensiune d-izometrică a unui grup. Teorema 2.6.4 arată că pentru un grup finit G dimensiunea d_2-izometrică $\delta_{d_2}(G)$ este egală cu dimensiunea minimă a reprezentării reale lui G. Ca o consecinţă a acestei teoreme avem Corolarul 2.6.2 care afirmă că pentru $G_1, \ldots, G_s$ grupuri finite are loc inegalitatea $\delta_{d_2}(G_1 \oplus \ldots \oplus G_s) \leq \delta_{d_2}(G_1) + \ldots + \delta_{d_2}(G_s)$. Teorema 2.6.5 arată că pentru orice $p \geq 1$, $p \neq 2$, un număr real sau $p = \infty$ are loc inegalitatea $\delta_{d_p}(S_n \times \mathbb{Z}_2^n) \leq n$. Teorema 2.6.6 prezintă faptul că are loc relaţia $\delta_c(D_8) = 2$, unde δ_c este dimensiunea izometrică relativă la metrica d_c a planului $\mathbb{R}_c^2$, iar D_8 este grupul diedral. Se prezintă două probleme deschise: să se determine $\delta_{d_p}(\mathbb{Z}_2^n)$; este adevărat că are loc relaţia $\delta_{d_p}(S_n \times \mathbb{Z}_2^n) = n$. În paragraful 2.7 se studiază problema realizării geometrice a grupurilor finite. Teorema 2.7.1 arată că există o metrică Riemann pe sfera S^{k-1} astfel încât grupul de izometrii asociat este izomorf cu G. Această teorema este datorată lui D. Asimov şi se demonstrează folosind următoarele rezultate: Propoziţia 2.7.1 care afirmă că, cu metrica indusă din $\mathbb{R}^k$ pe sfera S^{k-1}, spaţiul metric X are grupul de izometrii izomorf cu G, respectiv Propoziţia 2.7.2 care prezintă relaţia $Iso(M) \simeq G$. Corolarul 2.7.1 prezintă faptul că orice grup finit G este izomorf cu grupul de izometrii al unei submulţimi finite X_G dintr-un spaţiu euclidian. Dacă $\operatorname{card}(G) = k$, atunci X_G poate fi aleasă cu $\operatorname{card}(X_G) = k^2 - k$, într-un spaţiu euclidian de dimensiune $k-1$. În continuare se prezintă câteva exemple care ilustrează realizarea geometrică prin izometrii pentru unele grupuri finite. Toate aceste exemple sunt contribuţii originale şi sunt prezentate în lucrarea V. Bulgărean [16]. În paragraful 2.8 se prezintă rezultatele originale legate de grupul de izometrii al metricii căilor ferate franceze. Aceste rezultate sunt prezentate în lucrarea V. Bulgărean [14]. În subparagraful 2.8.1 sunt prezentate două teoreme: Teorema 2.8.1 care prezintă faptul că $Iso^{(p)}(X, d)$ este subgrup al lui $Iso(X, d_{F,p})$. În particular are loc incluziunea $Iso^{(p)}(X, d) \subseteq Iso(X, d_{F,p})$, respectiv Teorema 2.8.2 care afirmă că pentru orice izometrie $f \in Iso(X, d_{F,p})$, punctul p este fix, adică are loc relaţia $f(p) = p$. Corolarul 2.8.1 prezintă faptul că pentru orice spaţiu metric (X, d) şi pentru orice punct $p \in X$, spaţiul metric $(X, d_{F,p})$ este de tip eliptic, adică toate izometriile sale sunt eliptice. În subparagraful 2.8.2 sunt prezentate comentarii la Teorema 2.8.2 în cazul $X = \mathbb{R}^n$ şi $d = d_2$.

Capitolul 3, intitulat *Probleme speciale referitoare la izometrii*, este format din patru paragrafe. În paragraful 3.1 este prezentată noţiunea de friză ca fiind dată de benzi situate în plan, în care anumite figuri geometrice simple se repetă la infinit. În subparagraful 3.1.1 sunt prezentate noţiunile de generatori, cuvinte, lungimea unui cuvânt, cuvânt redus, relaţii, prezentare a grupului. Lema 3.1.1 arată că pentru TG un subgrup al lui G, t un generator pentru T şi $r \in G$, există $r^{-1}tr$ generator pentru grupul $r^{-1}Tr = \{r^{-1}xr : x \in T\}$. În subparagraful 3.1.3 se realizează clasificarea grupurilor de frize. Se definesc noţiunile de subgrup discret a lui $E(2)$ (Definiţiile 3.1.1, 3.1.2). Se prezintă două leme care ilustrează unele proprietăţi ale translaţiilor (Lema 3.1.2, 3.1.3). Există exact 7 grupuri de frize acestea fiind date în Teorema 3.1.1. Se prezintă şi câteva realizări ale celor 7 grupuri de frize, înţelegând că dreapta orizontală reprezintă axa translaţiei şi imaginea se repetă la infinit. Paragraful 3.2 studiază aplicaţii care conservă anumite proprietăţi geometrice. În subparagraful 3.2.1 este prezentată problema generală Aleksandrov-Rassias care afirmă că, dacă (X, d_X) şi (Y, d_Y) sunt spaţii metrice şi $f : X \to Y$ este aplicaţie continuă, surjectivă care conservă distanţa 1, rezultă că f este o izometrie. Chiar dacă impunem condiţii suplimentare asupra lui f răspunsul la această problemă generală poate fi negativ. În continuare se prezintă un exemplu sugestiv în acest sens (Exemplul 3.2.1). Se mai prezintă un exemplu în care răspunsul la problemă poate fi negativ în cazul infinit dimensional, chiar pentru spaţii Hilbert. În subparagraful 3.2.2 sunt studiate aplicaţii care transformă cuburi în cuburi. Se prezintă Lema 3.2.1 care afirmă că pentru o aplicaţie injectivă $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care transformă orice cub într-un cub, pentru orice cuburi de muchie 1, A şi B, dacă $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \emptyset$, atunci $\mathrm{Int}\{f(A)\} \cap \mathrm{Int}\{f(B)\} = \emptyset$. Teorema 3.2.1 afirmă faptul că, dacă aplicaţia injectivă $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformă orice cub într-un cub, atunci f este izometrie liniară până la o translaţie. Paragraful 3.3 prezintă rezultate referitoare la grupul de izometrii al sferei. Se enunţă Teorema 3.3.1 care afirmă că orice izometrie $f : S^1 \to S^1$ este o rotaţie sau o simetrie axială. Teorema 3.3.2 arată că orice izometrie $f : S^2 \to S^2$ este o simetrie planară, o rotaţie sau o rotosimetrie (compunere dintre o rotaţie şi o simetrie). Teorema 3.3.3 afirmă că orice izometrie $f : S^n \to S^n$ este o compunere de rotaţii şi eventual o simetrie. În Teorema 3.3.4 se arată că $Iso(S^n) \simeq O(n+1)$. Teorema 3.3.5 afirmă că orice izometrie $f \in Iso(S^n)$ este o compunere de cel mult $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ rotaţii proprii ale lui S^n şi eventual o simetrie în raport cu un hiperplan care trece prin origine. Observaţia 3.3.1 arată că grupul $Iso(S^n)$ este generat de rotaţii şi simetrii. Teorema 3.3.6 afirmă că pentru $f : S^n \to S^2$, $n \geq 2$, o funcţie care conservă unghiurile θ, $m\theta$, unde $m\theta < \pi$ şi m este un număr întreg pozitiv mai mare decât 1, atunci f este o izometrie, adică f păstrează toate unghiurile. Teorema 3.3.7 arată că dacă $f : S^n \to S^p$, $p \geq n > 1$, este o aplicaţie continuă care conservă unghiurile θ, $m\theta$, unde $m > 1$ şi $m\theta < \pi$, atunci f este o izometrie. Teorema 3.3.8 afirmă că pentru $f : S^n \to S^n$ o aplicaţie care conservă unghiul θ, fie $\arccos\left(\dfrac{1}{m + \sec\theta}\right)$ iraţional pentru $0 \leq m \leq n-1$, atunci f este o izometrie. În paragraful 3.4 se studiază grupul de izometrii al unui spaţiu metric local compact. Teorema 3.4.1 prezintă proprietăţi generale ale grupului de izometrii al unui spaţiu metric local compact (X, d). Exemplul 3.4.1 prezintă un astfel de spaţiu care nu este spaţiu local compact. Exemplul 3.4.2 prezintă un spaţiu local compact. În subparagraful 3.4.1 sunt date proprietăţi legate de local compactitatea grupului $Iso(X, d)$. Lema 3.4.1 afirmă că dacă (X, d) este un spaţiu local compact, $F \subseteq Iso(X, d)$ şi $K(F) = \{x \in X : F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ este relativ compact$\}$, atunci $K(F)$ este o submulţime deschisă şi închisă a lui X. Lema 3.4.2 afirmă că pentru (X, d) spaţiu metric local compact cu spaţiul componentelor conexe $\Sigma(X)$ cvazi-compact, atunci condiţia (a) din Teorema 3.4.1 este satisfăcută. Exemplul 3.4.3 prezintă un exemplu de limită a unui şir de izometrii care nu este surjectivă. Lema 3.4.3 afirmă că, dacă $\Sigma(X)$ este cvazi-compact şi (f_n), $f_n \in Iso(X, d)$, este un şir astfel încât $f_n \to f$ în raport cu topologia convergenţei punctuale, atunci $f(X)$ este deschisă şi închisă în X. Propoziţia 3.4.1 prezintă următorul rezultat: dacă (X, d) este un spaţiu metric local compact şi $\Sigma(X)$ este cvazi-compact, atunci $Iso(X, d)$ este închis în $C(X, X)$. Propoziţia 3.4.2 afirmă că există un subşir $\{S_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ al lui $\{S_n\}$ astfel încât există $x_k \in S_k$ cu $x_k \to x_0$, unde $x_0 \in X$. Teorema 3.4.2 afirmă, că dacă $\Sigma(X)$ este cvazi-compact, atunci $Iso(X, d)$ este local compact. În subparagraful 3.4.2 se studiază acţiunea proprie a grupului $Iso(X, d)$ pe spaţiul X. Propoziţia 3.4.3 afirmă că, dacă (X, d) este local compact şi conex, atunci grupul $Iso(X, d)$ este local compact şi acţiunea sa pe X este proprie. Deci cvazi-compactitatea lui $\Sigma(X)$ nu este necesară pentru compactitatea locală a lui $Iso(X, d)$. Capitolul se bazează pe lucrările lui A.D. Aleksandrov [2], F.S. Beckman, D.A. Quarles [9], Th. M. Rassias [50], [51], [53], [54], B. Mielnik, Th. M. Rassias [40], [55], S.M. Jung [26], [27], S.M. Jung, Ki-Sik Lee [30], Th. M. Rassias, P. Semrl [56], D. van Dantzig, B.L. van der Waerden [23].

Nu aş vrea să închei această introducere fără a mulţumi domnului prof. univ. dr. Dorin Andrica, conducătorul meu ştiinţific, pentru observaţiile, sugestiile, sprijinul substanţial şi amabilitatea cu care a răspuns întotdeauna solicitărilor mele pe parcursul stagiului de elaborare a prezentei lucrări. Doresc de asemenea să adresez sincere mulţumiri membrilor Catedrei de Geometrie de la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca şi membrilor comisiei de îndrumare pentru sugestiile acordate, încredere şi pentru sprijinul acordat în realizarea acestei teze.

Capitolul 1

Elemente de teoria spaţiilor metrice

În acest capitol introducem noţiunile de bază legate de spaţii metrice. Prezentăm exemple şi construcţii specifice care sunt utile în dezvoltările din capitolele următoare.

1.1 Spaţii metrice. Exemple

Un **spaţiu metric** este o pereche (X, d) formată dintr-o mulţime nevidă X şi o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}$ care satisface proprietăţile:

(1) (Pozitivitate şi nedegenerare) Pentru orice $x, y \in X$, $d(x, y) \geq 0$. În plus, avem $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) (Simetrie) Pentru orice $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) Pentru orice $x, y, z \in X$ are loc inegalitatea $d(x, z) \leq d(x, y)+d(y, z)$ (numită inegalitatea triunghiului).

Funcţia d se numeşte **metrică**. Ea mai este numită şi funcţia **distanţă**.

În continuare vom da câteva exemple de spaţii metrice. În cele mai multe exemple condiţiile (1) şi (2) din definiţia de mai sus sunt uşor de verificat. Vom menţiona aceste condiţii doar dacă sunt probleme în stabilirea lor. De obicei este mai dificil de demonstrat inegalitatea triunghiului şi acest lucru se va face în detaliu la unele exemple.

Exemplul 1.1.1 Fie $X = \mathbb{R}$ şi funcţia distanţă $d(x, y) = |x - y|$.

Exemplul 1.1.2 Fie $X = \mathbb{R}^2$ şi funcţia distanţă euclidiană uzuală

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

unde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

Exemplul 1.1.3 Fie $X = \mathbb{R}^n$ şi funcţia distanţă euclidiană uzuală:

$$d_2(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Exemplul 1.1.4 Fie $X = \mathbb{R}^n$ şi $d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|$, metrica taxicab. Pentru $n = 2$, d este distanţa uzuală pe care o folosim când conducem maşina într-un oraş în care reţeaua de străzi este paralelă cu două direcţii perpendiculare.

Dacă avem x şi z, mulţimea punctelor y pentru care $d_1(x, z) = d_1(x, y) + d_1(y, z)$ se numeşte **segmentul metric** în sensul lui Menger.

Exemplul 1.1.5 Fie $X = \mathbb{R}^n$ şi $d_\infty(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}$.

Pentru a demonstra inegalitatea triunghiului $d_\infty(x, z) \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z)$, presupunem că avem $d_\infty(x, z) = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{|x_i - z_i|\} = |x_k - z_k|$, pentru k fixat, $1 \leq k \leq n$. Atunci avem relaţiile:

$$|x_k - z_k| \leq |x_k - y_k| + |y_k - z_k|, \quad |x_k - y_k| \leq d_\infty(x, y), \quad |y_k - z_k| \leq d_\infty(y, z).$$

Rezultă astfel $d_\infty(x, z) \leq d_\infty(x, y) + d_\infty(y, z)$. Nu vom discuta acum cazul de egalitate, urmând să ne ocupăm în detaliu de acesta în Capitolul 2.

Exemplul 1.1.6 Fie $X = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ \|x\| = 1\}$, sfera unitate în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^3$. Fie $d(x, y)$ lungimea arcului mic de cerc mare ce uneşte punctele x şi y. Acesta este modul în care se măsoară distanţa pe suprafaţa pământului. O formulă explicită pentru $d(x, y)$ este uşor de obţinut. Fie θ unghiul dintre vectorii unitate x şi y. Arcul de cerc care uneşte x cu y aparţine intersecţiei lui S^2 cu planul generat de x şi y şi lungimea acestui arc este θ (vezi Figura 1.2). De aceea avem $\cos\theta = x \cdot y$ (produsul scalar euclidian în $\mathbb{R}^3$), deci $d(x, y) = \arccos(x \cdot y)$. Se verifică imediat faptul că d astfel definită este o metrică pe S^2.

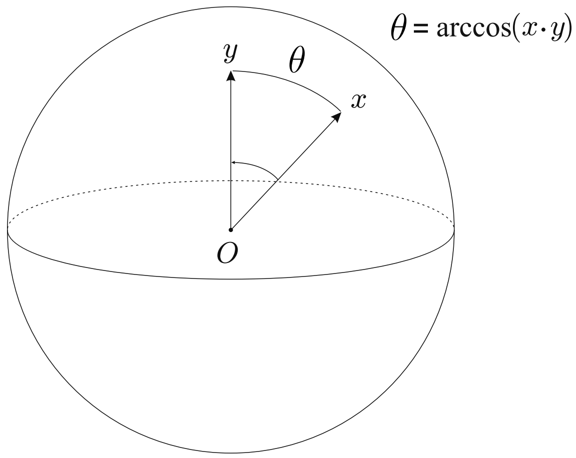

Figura 1.2. Distanţa pe sferă

Fie $x_1, \ldots, x_m$ vectori în $\mathbb{R}^n$, unde $m \leq n$. Matricea **Gram** definită de aceşti vectori $x_1, \ldots, x_m$ este matricea pătratică de ordinul m, A cu elementele $x_i \cdot x_j$. Remarcăm faptul că A este o matrice simetrică deoarece avem $x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i$.

Teorema 1.1.1 *Dacă A este matricea Gram a vectorilor $x_1, \ldots, x_m$, atunci*

$$\det(A) \geq 0.$$

În plus, avem $\det(A) = 0$ *dacă şi numai dacă mulţimea* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *este liniar dependentă.*

Observaţia 1.1.1 Observăm că în cazul $m = 2$, adică avem doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^m$, atunci Teorema 1.1.1 se reduce la

$$\det(A) = (x \cdot x)(y \cdot y) - (x \cdot y)^2 \geq 0,$$

care este inegalitatea Cauchy-Schwarz. În Exemplele 1.1.2 şi 1.1.3 am utilizat această inegalitate pentru a demonstra inegalitatea triunghiului pentru metrica euclidiană. Vom vedea că în cazul $m = 3$ Teorema 1.1.1 este utilă pentru a demonstra inegalitatea triunghiului pentru metrica pe sferă din Exemplul 1.1.6.

Exemplul 1.1.7 Fie X o mulţime nevidă şi d definită astfel:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad x = y \\ 1, & \text{dacă} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Această distanţă se numeşte metrica **discretă** şi (X, d) se numeşte spaţiul metric **discret**.

Exemplul 1.1.8 Fie (X, d) un spaţiu metric şi $p \in X$ un punct fixat. Definim o metrică pe X, numită **metrica căilor ferate franceze**, notată cu $d_{F,p}$, unde

$$d_{F,p}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ dacă şi numai dacă } x = y \\ d(x,p) + d(p,y) \text{ dacă } x \neq y \end{cases}$$

Obţinem astfel un nou spaţiu metric $(X, d_{F,p})$. Această metrică este studiată în lucrarea V. Bulgărean [14] şi în paragraful 2.8.

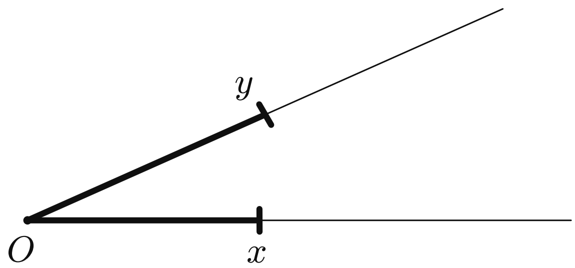

Figura 1.3. Metrica căilor ferate franceze în planul euclidian $\mathbb{R}^2$

Denumirea acestei metrici provine de la următoarea situaţie ipotetică. Suntem într-o ţară (numită Franţa) în care sunt linii de cale ferată care trec prin fiecare oraş. Putem să călătorim direct între orice două oraşe numai dacă trecem prin Paris.

Definiţia 1.1.1 În continuare vom fixa notaţiile pe care le-am folosit până acum în spaţiile metrice introduse. Acestea vor fi utilizate intensiv în capitolele următoare.

(1) Metrica din Exemplul 1.1.3 o vom numi metrica euclidiană şi o vom nota cu d_2. Atunci avem relaţia:

$$d_2(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

(2) Metrica din Exemplul 1.1.4 o vom numi metrica taxicab sau metrica l^1 şi o vom nota cu d_1. Formula pentru d_1 este:

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n|.$$

(3) Metrica din Exemplul 1.1.5 o vom numi metrica l^∞ şi o vom nota cu d_∞. Formula de calcul este

$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\}.$$

(4) Metrica din Exemplul 1.1.6 o vom numi metrica sferică şi o vom nota cu d_{S^2}.

1.2 Construcţii de spaţii metrice

Există câteva construcţii standard pentru noi spaţii metrice din cele date până acum. Cele mai conune construcţii de spaţii sunt subspaţiile.

1.2.1 Subspaţii

Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $Y \subset X$. Considerăm $d' = d|_{Y\times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$, restricţia lui d la $Y \times Y$. Atunci (Y, d') este spaţiu metric, numit **subspaţiu** al lui (X, d). De obicei vom scrie simplu d pentru restricţia d'.

Exemple de subspaţii

(1) $\mathbb{Q}$ este un subspaţiu al lui $\mathbb{R}$.

(2) Orice submulţime a lui $\mathbb{R}$ este subspaţiu a lui $\mathbb{R}$. De exemplu $(0, +\infty)$ este subspaţiu al lui $\mathbb{R}$.

(3) S^2 este subspaţiu al lui $\mathbb{R}^3$. Dar metrica subspaţiului nu este aceeaşi cu metrica sferică din Exemplul 1.1.6. Dacă d' este restricţia la $S^2 \times S^2$ a metricii euclidiene d_2 pe $\mathbb{R}^3$ şi d_{S^2} este metrica sferică pe S^2, atunci avem inegalitatea $d'(x, y) \leq d_{S^2}(x, y)$, pentru toţi $x, y \in S^2$, cu egalitate dacă şi numai dacă $x = y$.

1.2.2 Spaţii produs

Dacă (X_1, d_1) şi (X_2, d_2) sunt spaţii metrice, **produsul** lor este spaţiul $(X_1 \times X_2, d)$, unde:

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\},$$

pentru toţi $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Să observăm analogia cu metrica d_∞ din Definiţia 1.1.1. Sunt posibile şi alte metrici pe spaţiul produs, dar aceasta este o alegere convenabilă.

1.2.3 Funcţii distanţă

Presupunem că (X, d) este un spaţiu metric, şi că funcţia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare cu proprietatea $f(0) = 0$ şi subaditivă, adică satisface relaţia

$$f(a + b) \leq f(a) + f(b), \text{ pentru orice } a, b \in [0, +\infty).$$

Nu este greu să observăm că $f \circ d : X \times X \to \mathbb{R}$ este o metrică pe X, deci $(X, f \circ d)$ este un spaţiu metric.

1.3 Limite

Noţiunea de spaţiu metric permite reformularea în acest context a multor concepte şi rezultate din analiza reală. Vom da câteva exemple utile în dezvoltările din capitolele următoare. Prin şir într-un spaţiu metric (X, d) vom înţelege, ca de obicei, o funcţie $\mathbb{N} \to X$ şi folosim notaţia $\{x_n\}$.

Definiţia 1.3.1 Fie $\{x_n\}$ un şir în spaţiul metric (X, d).

(1) Fie $x \in X$. Spunem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât avem $d(x, x_n) < \varepsilon$, pentru orice $n \geq N$.

(2) Spunem că $\{x_n\}$ **converge** dacă şi numai dacă există $x \in X$ astfel încât avem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

(3) Spunem că $\{x_n\}$ este **şir Cauchy** dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, pentru orice $m, n \geq N$.

Teorema 1.3.1 *Orice şir convergent este un şir Cauchy.*

Teorema 1.3.2 *Dacă şirul $\{x_n\}$ este convergent, atunci limita sa este unică.*

Definiţia 1.3.2 Un spaţiu metric (X, d) se numeşte **complet** dacă orice şir Cauchy este convergent.

Spaţiul $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, este complet, în timp ce $\mathbb{Q}$ nu este complet, cu metrica euclidiană uzuală.

1.4 Aplicaţii între spaţii metrice

Fie (X, d) şi (Y, d') spaţii metrice şi fie funcţia $f : X \to Y$.

Definiţia 1.4.1 (1) Fie $x \in X$. Aplicaţia f este **continuă** în x dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$, astfel încât pentru orice $y \in X$, dacă avem $d(x, y) < \delta$, atunci $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

(2) Aplicaţia f este **continuă** pe X dacă şi numai dacă ea este continuă în orice punct $x \in X$. Explicit, f este continuă dacă şi numai dacă pentru orice $x \in X$ şi $\varepsilon > 0$, există $\delta = \delta(x, \varepsilon)$ astfel încât $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pentru orice $y \in X$ cu $d(x, y) < \delta$.

(3) Aplicaţia f este **uniform continuă** dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta = \delta(\varepsilon)$ astfel încât $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pentru orice $x, y \in X$ cu $d(x, y) < \delta$.

(4) Aplicaţia f este **Lipschitz** dacă şi numai dacă există o constantă $C > 0$ astfel încât $d'(f(x), f(y)) \leq Cd(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$. Constanta C se numeşte constantă Lipschitz pentru f.

(5) Aplicaţia f este **bi-Lipschitz** dacă şi numai dacă există constantele $C_1, C_2 > 0$ astfel încât

$$C_1 d(x, y) \leq d'(f(x), f(y)) \leq C_2 d(x, y)$$

pentru orice $x, y \in X$.

(6) Aplicaţia f este **izometrie** dacă şi numai dacă $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$, pentru orice $x, y \in X$.

În capitolele următoare vom face un studiu aprofundat al acestor aplicaţii.

Teorema 1.4.1 *Dacă $f : (X, d) \to (Y, d')$ este Lipschitz, atunci f este uniform continuă.*

1.5 Echivalenţe între spaţii metrice

Vom defini câteva tipuri de echivalenţe între spaţii metrice în ipoteza suplimentară că aplicaţiile definite în secţiunea anterioară sunt bijective, cu eventuale ipoteze potrivite când va fi nevoie.

Definiţia 1.5.1 Fie (X,d) şi (Y,d') spaţii metrice şi fie $f : X \to Y$ o aplicaţie. Spunem că:

(1) Aplicaţia f este **omeomorfism** dacă f este continuă, bijectivă şi f^{-1} este continuă. Dacă există f omeomorfism spunem că spaţiile (X,d) şi (Y,d') sunt **omeomorfe**.

(2) Aplicaţia f este bi-Lipschitz echivalenţă dacă şi numai dacă f este surjectivă şi bi-Lipschitz. Dacă există o echivalenţă bi-Lipschitz spunem că spaţiile (X,d) şi (Y,d') sunt **bi-Lipschitz echivalente**.

(3) Spaţiile (X,d) şi (Y,d') sunt **izometrice** dacă şi numai dacă există o izometrie surjectivă $f : (X,d) \to (Y,d')$.

Teorema 1.5.1 *Fie (X,d) şi (Y,d') spaţii metrice.*

(1) Dacă (X,d) şi (Y,d') sunt izometrice, atunci ele sunt bi-Lipschitz echivalente.

(2) Dacă (X,d) şi (Y,d') sunt bi-Lipschitz echivalente, atunci ele sunt omeomorfe.

Capitolul 2

Grupul de izometrii al unui spaţiu metric

Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie f, g două izometrii ale lui (X, d). Atunci compunerea $f \circ g$ conservă distanţele, deoarece avem pentru orice $x, y \in X$

$$d(f \circ g(x), f \circ g(y)) = d(f(g(x)), f(g(y))) = d(g(x), g(y)) = d(x, y).$$

Avem şi proprietatea că inversa f^{-1} conservă distanţele, deoarece

$$d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) = d(x, y).$$

Aceasta înseamnă că mulţimea tuturor izometriilor este un grup în raport cu operaţia uzuală de compunere a funcţiilor.

Definiţia 2.0.1. Fie

$$Iso(X, d) = \{f : X \to X : \ f \text{ este izometrie a spaţiului } (X, d)\}$$

mulţimea tuturor izometriilor ale lui (X, d). Dacă $x \in X$, notăm

$$Iso^{(x)}(X, d) = \{f \in Iso(X, d) : \ f(x) = x\},$$

mulţimea izometriilor lui X care fixează punctul x. $Iso^{(x)}(X, d)$ este un subgrup al lui $Iso(X, d)$ numit **stabilizatorul lui** x, sau **grupul de izotropie a lui** x.

Teorema 2.0.1. *Mulţimea $Iso(X, d)$ este grup în raport cu operaţia uzuală de compunere. Submulţimea $Iso^{(x)}(X, d)$ este subgrup al lui $Iso(X, d)$.*

2.1 Proprietăţi generale ale grupului $Iso(X, d)$

Fie (X, d_X), (Y, d_Y) două spaţii metrice. Aplicaţia $\alpha : X \to Y$ **conservă distanţele** dacă pentru orice $x, x' \in X$ are loc relaţia $d_Y(\alpha(x), \alpha(x')) = d_X(x, x')$. Este evident faptul că orice aplicaţie care conservă distanţele, este injectivă.

Aplicaţia $\alpha : X \to Y$ se numeşte **izometrie** dacă satisface următoarele două proprietăţi:

1) α este surjectivă;

2) α conservă distanţele.

Evident, o izometrie $\alpha : X \to Y$ este bijecţie.

Următorul rezultat arată faptul că grupul de izometrii al unui spaţiu metric este invariant la transformări izometrice.

Teorema 2.1.1 *Dacă spaţiile metrice (X, d_X) şi (Y, d_Y) sunt izometrice, atunci grupurile lor de izometrii $Iso(X, d_X)$ şi $Iso(Y, d_Y)$ sunt izomorfe.*

Corolarul 2.1.1 *Fie spaţiile metrice (X, d_X) şi (Y, d_Y). Dacă grupurile $Iso(X, d_X)$ şi $Iso(Y, d_Y)$ nu sunt izomorfe, atunci cele două spaţii nu sunt izometrice.*

Fie $u : X \to X$ o aplicaţie bijectivă.

Definim pe mulţimea X metrica $d_u : X \times X \to \mathbb{R}$, prin $d_u(x, y) = d(u(x), u(y))$.

Corolarul 2.1.2 *Are loc relaţia $Iso(X, d_u) \simeq Iso(X, d)$.*

Corolarul 2.1.3 *Fie V un spaţiu liniar real n-dimensional înzestrat cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Atunci $Iso(V, d_V) \simeq Iso(\mathbb{R}^n, d_2)$, unde d_V este metrica definită pe V de produsul scalar iar d_2 este metrica euclidiană pe $\mathbb{R}^n$.*

2.1.1 Clasificarea generală a elementelor lui $Iso(X, d)$

Fie (X, d) un spaţiu metric şi $f : X \to X$. Funcţia $x \mapsto d(x, f(x))$ poartă numele de **deplasarea** lui f. Numărul $\lambda(f)$, definit prin

$$\lambda(f) = \inf_{x \in X} d(x, f(x))$$

se numeşte **deplasarea minimală** a lui f. **Mulţimea minimală** a lui f, notată cu $\mathrm{Min}(f)$, este submulţimea lui X definită prin

$$\mathrm{Min}(f) = \{x \in X : \ d(x, f(x)) = \lambda(f)\}.$$

În monografia lui A. Papadopoulos [44], este dată următoarea clasificare generală a izometriilor unui spaţiu metric (X, d), în raport cu invarianţii $\lambda(f)$ şi $\mathrm{Min}(f)$. Fie $f \in Iso(X, d)$. Atunci

1. f este **parabolică** dacă $\mathrm{Min}(f) = \emptyset$;

2. f este **eliptică** dacă $\mathrm{Min}(f) \neq \emptyset$ şi $\lambda(f) = 0$. Prin urmare, f este eliptică dacă şi numai dacă $\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset$, unde $\mathrm{Fix}(f)$ notează mulţimea punctelor fixe ale lui f.

3. f este **hiperbolică** dacă $\mathrm{Min}(f) \neq \emptyset$ şi $\lambda(f) > 0$.

2.2 Grupul de izometrii al dreptei

Pentru început să considerăm dreapta euclidiană $\mathbb{R}$, înzestrată cu metrica uzuală d_1, unde $d_1(x, y) = |x - y|$. Are loc următorul rezultat.

Teorema 2.2.1 *Grupul de izometrii ale lui* $(\mathbb{R}, d_1)$ *este izomorf cu produsul semi-direct al grupurilor* $\mathbb{Z}_2$ *şi* $(\mathbb{R}, +)$*, adică avem*

$$Iso(\mathbb{R}, d_1) \simeq \mathbb{R} \rtimes \mathbb{Z}_2.$$

Observaţia 2.2.1 1) Mulţimea matricelor de forma

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ k \in \mathbb{R}$$

formează un grup necomutativ în raport cu operaţia de înmulţire. Se arată imediat că $Iso(\mathbb{R}, d_1)$ este izomorf cu acest grup.

2) Din Teorema 2.2.1 rezultă că $Iso(\mathbb{R}, d_1)$ este un grup Lie neconex, cu două componente conexe. Componenta conexă a unităţii este subgrupul normal $N = \{f_k : \ k \in \mathbb{R}\}$, unde $f_k(x) = x + k$. Acesta este subgrupul translaţiilor din grupul $Iso(\mathbb{R}, d_1)$.

3) Considerând spaţiul metric $X = (0, \infty)$ cu metrica euclidiană d_1, atunci grupul de izometrii $Iso(X, d_1)$ se reduce la grupul trivial $\{1_X\}$. Este evident faptul că toate

izometriile determinate în Teorema 2.2.1 conservă distanţele, dar numai aplicaţia $1_X : (0, \infty) \to (0, \infty)$ este surjectivă.

2.3 Izometriile planului euclidian

Grupul de izometrii al unui spaţiu metric poate fi foarte mic, de fapt el poate să conţină doar aplicaţia identică, deci să fie trivial. În continuare vom studia cazul când grupul este mare.

Vom studia pentru început grupul de izometrii ale lui $\mathbb{R}^2$ cu metrica euclidiană d_2. În acest paragraf vom scrie simplu d în loc de $d_{(2)}$, deoarece este singura metrică considerată. Scopul este să determinăm toate izometriile spaţiului $(\mathbb{R}^2, d)$ şi să descriem grupul $Iso(\mathbb{R}^2, d)$.

2.3.1 Transformări afine ale planului euclidian

Mai întâi amintim câteva noţiuni şi rezultate din algebra liniară.

O transformare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se numeşte **transformare liniară** dacă şi numai dacă pentru orice $r \in \mathbb{R}$, şi pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^2$ avem relaţiile:

$$L(rx) = xL(x) \text{ şi } L(x + y) = L(x) + L(y).$$

Definiţia precedentă este echivalentă cu faptul că pentru orice $r, s \in \mathbb{R}$ şi pentru orice $x, y \in \mathbb{R}^2$ avem relaţia:

$$L(rx + sy) = rL(x) + sL(y).$$

Definiţia 2.3.1 O aplicaţie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se numeşte **transformare liniară afină** dacă există matricea A de dimensiune $n \times n$ şi vectorul $b \in \mathbb{R}^n$ astfel încât

$$f(x) = Ax + b, \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

O transformare liniară afină este compunerea unei translaţii cu o transformare liniară. O transformare liniară afină transformă drepte în drepte, plane în plane, etc.

2.3.2 Clase de izometrii ale planului euclidian

Izometrii uzuale ale lui $\mathbb{R}^2$ sunt translaţiile, rotaţiile şi simetriile. Acestea sunt transformări liniare afine pe $\mathbb{R}^2$ de forma $f(x) = Ax + b$, unde b este vector şi A este matrice 2×2. Vom folosi următoarea terminologie:

Definiţia 2.3.2 O transformare liniară afină $f(x) = Ax + b$ pe $\mathbb{R}^2$ este numită:

(1) **translaţie cu** b, notată t_b dacă $A = I_2$, unde I_2 este matricea unitate. Atunci avem

$$f(x) = t_b(x) = x + b.$$

(2) **rotaţie** în sens direct trigonometric de centru O şi unghi θ, notată cu R_θ, dacă $b = 0$ şi

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

(3) **simetrie axială** în raport cu dreapta definită parametric prin

$$\left\{ t\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}\right) : \ t \in \mathbb{R} \right\},$$

notată cu S_θ, dacă $b = 0$ şi

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{2.3.2}$$

2.3.3 Determinarea grupului de izometrii ale planului euclidian

Dorim să demonstrăm faptul că exemplele de forma $f(x) = Ax + b$, discutate anterior dau toate izometriile planului $\mathbb{R}^2$. Singura dificultate este în a demonstra faptul că o izometrie a planului $\mathbb{R}^2$ este o transformare liniară afină.

Teorema 2.3.1 *Fie $f : (\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, d)$ o izometrie. Atunci f este transformare liniară afină, adică există un vector $b \in \mathbb{R}^2$ şi o matrice pătratică, astfel încât $f(x) = Ax + b$, pentru orice $x \in \mathbb{R}^2$.*

Lema 2.3.1 *Fie a, b numere reale pozitive. Definim mulţimea $E(a,b)$ de triplete de puncte din $\mathbb{R}^2$*

$$E(a,b) = \{(x,y,z) : \ x,y,z \in \mathbb{R}^2, \ d(x,y) = a, \ d(y,z) = b \text{ şi } d(x,z) = a+b\}.$$

Presupunem că $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in E(a,b)$ şi presupunem că două din următoarele trei egalităţi $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ sunt adevărate. Atunci şi a treia egalitate are loc.

Lema 2.3.2 *Presupunem $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ este izometrie cu $f((0,0)) = (0,0)$, $f((1,0)) = (1,0)$ şi $f((0,1)) = (0,1)$. Atunci $f = 1_{\mathbb{R}^2}$.*

2.4 Izometriile spaţiului euclidian n-dimensional

2.4.1 Grupurile $E(n)$, $SE(n)$, $O(n)$, $SO(n)$

Definiţia 2.4.1 Notăm cu $O(n)$ mulţimea matricelor ortogonale, cu $SO(n)$ mulţimea matricelor ortogonale cu determinantul 1, cu $E(n)$ mulţimea izometriilor pe $\mathbb{R}^n$ şi cu $SE(n)$ mulţimea izometriilor lui $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$ cu $\det(A) = 1$. Elementele lui $SE(n)$ se numesc **izometrii proprii** (sau izometrii care păstrează orientarea) ale lui $\mathbb{R}^n$. Elementele din $E(n)$ care nu sunt în $SE(n)$ se numesc **izometrii improprii** (sau izometrii care nu păstrează orientarea) ale lui $\mathbb{R}^n$.

Notaţiile $O(n)$, $SO(n)$ sunt standard.

Vom folosi notaţia $f_{A,b}$ pentru izometria $f_{A,b}(x) = Ax + b$ pe $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 2.4.2 Definim aplicaţia $l : E(n) \to O(n)$ prin $l(f_{A,b}) = A$. Matricea $l(f)$ defineşte **partea liniară** a lui f.

Teorema 2.4.1 *(1) Mulţimile $E(n)$, $SE(n)$, $O(n)$, $SO(n)$ sunt grupuri (în raport cu compunerea sau înmulţirea matriceală, depinde de caz).*

(2) Aplicaţia $l : E(n) \to O(n)$ este morfism de grupuri iar $\operatorname{Ker} l$ este grupul de translaţii ale lui $\mathbb{R}^n$, care este grup izomorf cu grupul $(\mathbb{R}^n, +)$.

(3) Aplicaţia $\det : O(n) \to \{1, -1\}$ este morfism de grupuri având nucleul $SO(n)$.

(4) Compunerea $E(n) \xrightarrow{l} O(n) \xrightarrow{det} \{-1, 1\}$ este un morfism de grupuri cu nucleul $SE(n)$.

2.4.2 Clasificarea izometriilor planului euclidian

În cele ce urmează vom clasifica izometriile planului $\mathbb{R}^2$ împărţindu-le în patru clase în raport cu punctele lor fixe.

Fie $f \in SE(2)$ o izometrie proprie a lui $\mathbb{R}^2$, şi presupunem $f \neq 1_{\mathbb{R}^2}$. Un punct $x \in \mathbb{R}^2$ se numeşte **punct fix** pentru f dacă are loc relaţia $f(x) = x$. Pentru a găsi punctele fixe este mai convenabil să folosim identificarea lui $\mathbb{R}^2$ cu planul complex $\mathbb{C}$, şi forma generală a izometriilor în acest context dată de ecuaţia

$$R_\theta(z) = e^{i\theta} z.$$

Teorema 2.4.2 *Compunerea a două simetrii axiale ale lui $\mathbb{R}^2$ este:*

(1) O translaţie dacă axele celor două simetrii sunt paralele. Mai precis, dacă b este un vector perpendicular pe ambele axe şi de lungime distanţa dintre ele, atunci compunerea lor este translaţia $t_{\pm b}$ (semnul depinzând de ordinea compunerii).

(2) O rotaţie de unghi $\pm 2\alpha$ şi centru în intersecţia celor două axe, dacă ele se intersectează şi formează unghiul α (semnul depinzând de ordinea compunerii).

Compunerea a trei simetrii axiale este fie o simetrie, fie o simetrie de alunecare. Fiecare simetrie de alunecare poate fi obţinută compunând trei simetrii, două axe fiind paralele, iar a treia perpendiculară pe celelalte două.

Corolarul 2.4.1 *Fiecare izometrie a lui $\mathbb{R}^2$ poate fi obţinută prin compunerea a cel mult trei simetrii. În particular, grupul euclidian $E(2)$ este generat de simetrii.*

2.4.3 Simetriile grupului $O(n)$. Teorema lui Cartan

Simetriile în raport cu hiperplane ale spaţiului euclidian $\mathbb{R}^n$ joacă un rol esenţial în generarea grupului ortogonal $O(n)$. Să considerăm pentru început un hiperplan H care trece prin originea lui $\mathbb{R}^n$, în raport cu care vom defini simetria. Fie $L = H^\perp$ subspaţiul 1-dimensional complementar lui H. Avem descompunerea $\mathbb{R}^n = H \oplus L$, deci orice vector $v \in \mathbb{R}^n$ se scrie în mod unic sub forma $v = w + u$, unde $w \in H$ şi

$u \in L$. Definim **simetria** în raport cu H a spaţiului $\mathbb{R}^n$ ca fiind aplicaţia

$$s_H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ s_H(v) = s_H(w + u) = w - u.$$

Este clar că s_H fixează punctele hiperplanului H, iar punctul $u \in L$ se transformă în $-u$, simetricul lui în raport cu originea. De asemenea, s_H este o aplicaţie liniară şi deoarece $w \perp u$, avem $\|s_H(v)\|^2 = \|w\|^2 + \|u\|^2 = \|v\|^2$, adică $\|s_H(v)\| = \|v\|$, $v \in \mathbb{R}^n$. Prin urmare $\|s_H(v) - s_H(v')\| = \|s_H(v - v')\| = \|v - v'\|$, pentru orice $v, v' \in \mathbb{R}^n$, deci $s_H \in Iso(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 2.4.3 *Fie w şi w' două puncte distincte din $\mathbb{R}^n$. Există o unică simetrie s'_H a lui $\mathbb{R}^n$ astfel încât $s'_H(w) = w'$. În plus, avem $s'_H \in O(n)$ dacă şi numai dacă $\|w\| = \|w'\|$.*

Teorema 2.4.4 (Cartan) *Grupul $O(n)$ este generat de simetriile sale.*

Corolarul 2.4.2 *Orice izometrie a spaţiului euclidian $\mathbb{R}^n$ este o compunere de cel mult $n + 1$ simetrii. O izometrie care fixează cel puţin un punct, este o compunere de cel mult n simetrii.*

Grupul S_n se regăseşte ca subgrup al lui $O(n)$, prin identificarea $\sigma \mapsto X_\sigma$, unde X_σ este matricea care are pe fiecare linie şi coloană un element 1 şi celelalte egale cu 0. Mai mult, considerând acest morfism de grupuri ca fiind $u : S_n \to O(n)$, avem

$$\begin{aligned} detu(\sigma) = \det X_\sigma &= \sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\operatorname{sgn}(\tau)} a_{1\tau(1)} \dots a_{n\tau(n)} \\ &= (-1)^{\operatorname{sgn}(\tau)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = (-1)^{\operatorname{sgn}(\sigma)}, \end{aligned}$$

unde $X_\sigma = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Acest calcul arată că următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{tikzcd} S_n \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "\operatorname{sgn}"'] & & O(n) \arrow[dl, "\det"] \\ & \{-1, 1\} & \end{tikzcd}$$

Prin urmare, dacă $\sigma \in A_n$, atunci $\det u(\sigma) = 1$, deci avem $u|_{A_n} \to SO(n)$, ceea ce arată că grupul altern A_n se identifică cu un subgrup al lui $SO(n)$.

2.5 Izometriile planului CC

2.5.1 Grupul de izometrii al planului CC

Una din principalele probleme în investigaţiile geometrice pentru un spaţiu metric X înzestrat cu metrica d, este aceea de a descrie grupul $Iso(X, d)$ al izometriilor. Dacă X este planul euclidian cu metrica euclidiană obişnuită, atunci am văzut că $Iso(X, d)$ constă în toate translaţiile, rotaţiile, simetriile centrale şi simetriile axiale. Mai mult, o consecinţă a Teoremei 2.4.1 este faptul că pentru planul euclidian, grupul izometriilor $E(2)$ este produsul semidirect dintre cele două subgrupuri ale sale $O(2)$ (grupul ortogonal) şi $T(2)$ (grupul translaţiilor). Grupul izometriilor în planul taxicab a fost determinat de către D.J. Schattschneider în lucrarea [59], rezultat pe care îl vom reobţine într-un contex general. Metrica taxicab furnizează un prim exemplu important de metrică care nu provine dintr-un produs scalar, fapt ce afectează decisiv structura grupului de izometrii.

În acest paragraf studiem problema generală referitoare la grupul de izometrii enunţată anterior, pentru planul $\mathbb{R}^2$ înzestrat cu metrica jocului chinezesc de dame d_c definită prin:

$$d_c(X, Y) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} + (\sqrt{2} - 1) \min\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\},$$

unde $X = (x_1, y_1)$ şi $Y = (x_2, y_2)$.

Propoziţia 2.5.1 *Orice translaţie a planului euclidian este o izometrie a planului* $\mathbb{R}^2_c$.

Definiţia 2.5.1 Fie P un punct şi l o dreaptă euclidiană în $\mathbb{R}^2_c$. Fie Q un punct pe l astfel încât $PQ \perp l$. Dacă P' este un punct în semiplanul opus lui P definit de dreapta l astfel încât avem $d_c(P, Q) = d_c(P', Q)$, atunci P' se numeşte *simetricul* lui P in raport cu l. Dreapta l poarta numele de *axa de simetrie*.

Lema 2.5.1 *Fie l dreapta determinată de punctele $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ în planul euclidian şi d_E metrica euclidiană uzuală. Dacă notăm cu m panta lui l, atunci are loc relaţia:*

$$d_c(A, B) = \frac{M}{\sqrt{m^2 + 1}} d_E(A, B),$$

unde

$$M = \begin{cases} 1 + (\sqrt{2} - 1)|m| & \textit{dacă} \quad |m| \leq 1 \\ |m| + \sqrt{2} - 1 & \textit{dacă} \quad |m| \geq 1. \end{cases}$$

Corolarul 2.5.1 *Dacă A, B şi X sunt trei puncte coliniare în $\mathbb{R}^2$, atunci*

$$d_E(X, A) = d_E(X, B)$$

dacă şi numai dacă $d_c(X, A) = d_c(X, B)$, adică mijlocul unui segment este acelaşi, relativ la cele două metrici considerate.

Corolarul 2.5.2 *Dacă A, B şi X sunt trei puncte coliniare distincte în planul euclidian, atunci avem $d_c(X, A)/d_c(X, B) = d_E(X, A)/d_E(X, B)$, adică raportul definit de distanţa d_c coincide cu raportul definit de distanta d_E.*

Observaţia 2.5.1 Ultimul corolar arată validitatea binecunostelor teoreme ale lui lui Menelaus şi Ceva în planul $\mathbb{R}^2_c$.

Următorul rezultat determină simetriile axiale care sunt izometrii ale planului $\mathbb{R}^2_c$.

Propoziţia 2.5.2 *O simetrie axială cu axa dreapta de ecuaţie $y = mx$ este o izometrie în $\mathbb{R}^2_c$ dacă şi numai dacă*

$$m \in \{0, \pm 1, \pm(\sqrt{2} - 1), \pm(\sqrt{2} + 1), \infty\}.$$

Propoziţia 2.5.3 *Există doar 8 rotaţii euclidiene care păstrează d_c-distanţele. Cu alte cuvinte, mulţimea rotaţiilor izometrice in $\mathbb{R}^2_c$, este*

$$R_c = \left\{ r_\theta : \ \theta = k\frac{\pi}{4}, \ k = 0, 1, \ldots, 7 \right\}.$$

Astfel am determinat "grupul ortogonal" al planului $\mathbb{R}^2_c$, acesta constând în 8 simetrii axiale şi 8 rotaţii, adică avem $O_c(2) = R_c \cup S_c$. Acesta reprezintă grupul diedral D_8, grupul euclidian de simetrie al octogonului regulat. Acum, vom arăta că grupul $Iso(\mathbb{R}^2_c)$ este izomorf cu $T(2) \rtimes O_c(2)$, produsul semidirect al acestor grupuri.

Definiţia 2.5.2 Fie $A = (a_1, a_2)$ şi $B = (b_1, b_2)$ două puncte fixate în $\mathbb{R}^2_c$. **d_c-segmentul** determinat de punctele A şi B este mulţimea

$$\widehat{AB} = \{X : d_c(A, X) + d_c(B, X) = d_c(A, B)\}.$$

Propoziţia 2.5.4 *Fie $\phi : \mathbb{R}_c^2 \to \mathbb{R}_c^2$ o izometrie şi fie $\widehat{AB}$ paralelogramul standard al punctelor A si B. Are loc relaţia*

$$\phi(\widehat{AB}) = \widehat{\phi(A)\phi(B)}.$$

Corolarul 2.5.3 *Fie $\phi : \mathbb{R}_c^2 \to \mathbb{R}_c^2$ o izometrie şi fie $\widehat{AB}$ paralelogramul standard al punctelor A si B. Aplicaţia ϕ transformă vârfurile acestuia în vârfuri şi invariază lungimile laturilor lui $\widehat{AB}$.*

Propoziţia 2.5.5 *Fie $f : \mathbb{R}_c^2 \to \mathbb{R}_c^2$ o izometrie care fixează originea, adică satisface $f(O) = O$. Atunci $f \in R_c$ sau $f \in S_c$.*

Teorema 2.5.1 *Fie $f : \mathbb{R}_c^2 \to \mathbb{R}_c^2$ o izometrie. Atunci există $T_A \in T(2)$ şi $g \in O_c(2)$ astfel încât $f = T_A \circ g$, si aceste transformari sunt unice.*

Corolarul 2.5.4 *Are loc relaţia*

$$Iso(\mathbb{R}_c^2) \simeq \mathbb{R}^2 \rtimes D_8.$$

2.5.2 Formula de arie pentru triunghiuri CC

Aria unui triunghi în planul euclidian poate fi calculată după formula binecunoscută

$$A = \frac{b \cdot h}{2},$$

care în general nu este valabila şi în planul $\mathbb{R}_c^2$. Formule de calcul pentru aria unui triunghi în metrica taxicab sunt date de către R. Kaya în [32] şi M. Ozcan, R. Kaya în [43]. Dacă ştim d_c-lungimile b_c şi h_c ale bazei, respectiv înălţimii corespunzătoare, ale unui triunghi din planul $\mathbb{R}_c^2$, ne interesează cum putem calcula aria acestuia. Următoarea teoremă răspunde la această întrebare şi oferă formula pentru aria suprafeţei euclidiene a unui triunghi în termeni de d_c-distanţe.

Teorema 2.5.2 *Fie b_c şi h_c, d_c-lungimile ale unei baze, respectiv înălţimii corespunzatoare, ale unui triunghi în planul $\mathbb{R}_c^2$. Dacă notăm cu m panta bazei, atunci aria triunghiului este dată de formula*

$$A = \frac{1 + m^2}{2M^2} b_c h_c,$$

unde

$$M = \begin{cases} 1 + (\sqrt{2} - 1)|m| & \text{dacă} \quad |m| \leq 1 \\ |m| + \sqrt{2} - 1 & \text{dacă} \quad |m| \geq 1. \end{cases}$$

2.6 Grupul $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ cu $p \neq 2$

2.6.1 Teorema Mazur-Ulam: un instrument puternic de investigaţie a grupului de izometrii

În acest subparagraf notăm cu E şi F două spaţii normate reale. Vom considera metricile d_E şi d_F induse pe E şi F de normele care definesc cele două spaţii. Avem $d_E(x, y) = \|x-y\|_E$, dar deoarece nu este pericol de confuzie, vom simplifica scrierea utilizând aceeaşi notaţie pentru cele două norme. O funcţie $f : E \to F$ este o *izometrie* dacă este surjectivă şi conservă distanţele, adică avem

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|, \ \forall\, x, y \in E.$$

Functia f este *afină* dacă satisface relaţia

$$f((1-t)a + tb) = (1-t)f(a) + tf(b), \tag{2.6.1}$$

pentru orice $a, b \in E$ şi $0 \leq t \leq 1$. Evident, f este afină dacă si numai dacă funcţia $T : E \to F$, $T(x) = f(x) - f(0)$ este liniară.

Teorema 2.6.1 (Mazur-Ulam) *Orice izometrie $f : E \to F$, între spaţii normate reale, este afină.*

2.6.2 Determinarea grupului $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$

În acest subparagraf considerăm $X = \mathbb{R}^n$ şi pentru orice număr real $p \geq 1$ definim metrica d_p prin:

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i - y^i|^p \right)^{1/p}, \tag{2.6.4}$$

unde $x = (x^1, \ldots, x^n), y = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n$. Dacă $p = \infty$, atunci metrica d_∞ este definită prin

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x^1 - y^1|, \ldots, |x^n - y^n|\}. \tag{2.6.5}$$

În cazul $p = 2$, obţinem binecunoscuta metrică euclidiană pe $\mathbb{R}^n$. În acest caz avem teorema lui Ulam care spune că $Iso_{d_2}(\mathbb{R}^n)$ este izomorf cu produsul semidirect al grupului ortogonal $O(n)$ şi $T(n)$, unde $T(n)$ este grupul translaţiilor lui $\mathbb{R}^n$. Cazul $p \neq 2$ este foarte interesant. Principalul scop al acestui capitol este de a descrie grupurile $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ pentru $p \geq 1$ şi $p = \infty$. Vom demonstra că, în cazul $p \neq 2$, toate aceste grupuri sunt izomorfe şi în consecinţă ele nu depind de numărul p. Aceste rezultate apar în lucrarea D. Andrica, V. Bulgărean [4].

Teorema 2.6.2 *Fie $p \neq 2$ un număr real, $p \geq 1$, şi fie $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie liniară definită de matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Atunci $f_A \in Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ dacă şi numai dacă A este o matrice de permutari, adică fiecare linie şi fiecare coloană a lui A are exact un element nenul şi acest element este egal cu ± 1.*

2.6.3 Determinarea grupului $Iso_{d_\infty}(\mathbb{R}^n)$

Pentru $p = \infty$ sfera unitate este

$$S^{n-1}_{d_\infty} = \{x \in \mathbb{R}^n : \max\{|x^1|, \ldots, |x^n|\} = 1\}. \tag{2.6.10}$$

Teorema 2.6.3 *Fie $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie liniară definită de matricea $A \in M_n(\mathbb{R})$. Atunci $f_A \in Iso_{d_\infty}(\mathbb{R}^n)$ dacă şi numai dacă A este o matrice de permutari, adică fiecare linie şi fiecare coloană a lui A are exact un element nenul şi acest element este egal cu ± 1.*

2.6.4 Concluzii comune pentru grupurile $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ şi $Iso_{d_\infty}(\mathbb{R}^n)$

Punând împreună rezultatele din subparagrafele 2.6.2 şi 2.6.3 obţinem următorul rezultat comun pentru grupurile $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ şi $Iso_{d_\infty}(\mathbb{R}^n)$.

Corolarul 2.6.1 *Fie $p \geq 1$, $p \neq 2$, un număr real, sau $p = \infty$. Atunci grupul $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ este izomorf cu produsul semidirect al grupurilor $(\mathbb{R}^n, +)$ şi $S_n \times \mathbb{Z}_2^n$, unde S_n este grupul permutărilor mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.*

Observaţia 2.6.1 Se poate arăta direct că grupurile $Iso(\mathbb{R}^2, d_1)$ şi $Iso(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ sunt izomorfe, considerând izometria $\alpha : (\mathbb{R}^2, d_1) \to (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, definită prin $\alpha(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$ şi apoi aplicând Teorema 2.1.1.

Subgrupul de izometrii liniare al lui $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^3)$ este alcătuit din 48 de aplicaţii liniare definite de matricele corespunzătoare descrise în Teorema 2.6.3. De asemenea, aceste funcţii liniare definesc toate simetriile sferei $S^2_{d_p}$. Pentru $p = 1$, sfera $S^2_{d_1}$ este frontiera octaedrului cu vârfurile în punctele $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$.

Subgrupul de izometrii liniare al $Iso_{d_\infty}(\mathbb{R}^n)$ este alcătuit din $2^n n!$ aplicaţii liniare definite de matricele de permutări în Teorema 2.6.3. Aceste aplicaţii liniare definesc toate simetriile sferei $S^{n-1}_{d_\infty}$ care este frontiera n-cubului cu vârfurile in punctele $(\pm 1, \ldots, \pm 1)$, pentru toate alegerile de semne $+$ şi $-$.

2.6.5 Dimensiunea d-izometrică a unui grup finit

Pentru un grup finit G definim **dimensiunea d-izometrică** a lui G ca fiind cel mai mic număr natural n cu proprietatea că grupul poate fi realizat ca şi grup de izometrii ale unei submulţimi din $\mathbb{R}^n$, unde d este o metrică dată pe $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.6.4 *Fie G un grup finit. Atunci dimensiunea d_2-izometrică $\delta_{d_2}(G)$ este egală cu dimensiunea minimă a reprezentării reale a lui G.*

Ca o consecinţă a Teoremei 2.6.4, în [46] este demonstrat următorul rezultat:

Corolarul 2.6.2 *Dacă $G_1, \ldots, G_s$ sunt grupuri finite, atunci are loc inegalitatea*

$$\delta_{d_2}(G_1 \oplus \ldots \oplus G_s) \leq \delta_{d_2}(G_1) + \ldots + \delta_{d_2}(G_s).$$

Teorema 2.6.5 *Fie $p \geq 1$, $p \neq 2$, un număr real, sau $p = \infty$. Are loc inegalitatea*

$$\delta_{d_p}(S_n \times \mathbb{Z}_2^n) \leq n,$$

unde S_n este grupul permutărilor mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorema 2.6.6 *Are loc relaţia*

$$\delta_C(D_8) = 2,$$

unde δ_C este dimensiunea izometrică relativă la metrica d_c a planului $\mathbb{R}^2_c$, iar D_8 este grupul diedral.

2.7 Realizarea geometrică a grupurilor finite. Teorema lui Asimov

Problema realizării unui grup ca şi grup de izometrii al unui spaţiu metric este importantă. În acest paragraf vom prezenta rezultatul lui D. Asimov [6] care conţine rezolvarea afirmativă a acestei probleme în cazul grupurilor finite.

Fie G un grup finit cu $k+1$ elemente $\{1, g_1, \ldots, g_k\}$.

Teorema 2.7.1 *Există o metrică Riemann pe sfera S^{k-1} astfel încât grupul de izometrii asociat este izomorf cu G.*

Propoziţia 2.7.1 *Cu metrica indusă din $\mathbb{R}^k$ pe sfera S^{k-1}, spaţiul metric X are grupul de izometrii izomorf cu G.*

Propoziţia 2.7.2 *Are loc relaţia $Iso(M) \simeq G$.*

Corolarul 2.7.1 *Orice grup finit G este izomorf cu grupul de izometrii al unei submulţimi finite X_G dintr-un spaţiu euclidian. Dacă $\operatorname{card}(G) = k$, atunci X_G poate fi aleasă cu $\operatorname{card}(X_G) = k^2 - k$, într-un spaţiu euclidian de dimensiune $k-1$.*

Exemplul 2.7.1 Considerăm în planul euclidian triunghiul ABC având laturile neegale şi fie $X = \{A, B, C\}$ cu metrica euclidiană indusă. Este clar că singura izometrie $f : X \to X$ este $f = 1_X$, deci avem $Iso(X) \simeq 0$.

Exemplul 2.7.2 Dacă triunghiul ABC este isoscel, $AB = AC \neq BC$, atunci spaţiul $X = \{A, B, C\}$ are două izometrii, anume 1_X şi $g : X \to X$ definită prin $g(A) = A$, $g(B) = C$, $g(C) = B$. În acest caz, obţinem

$$Iso(X) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Exemplul 2.7.3 Dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci spaţiul $X = \{A, B, C\}$ are 6 izometrii, anume 1_X, trei simetrii axiale de axe înălţimile triunghiului, 2 rotaţii de unghi $\dfrac{2\pi}{3}$ şi centru în centrul triunghiului. În acest caz avem

$$Iso(X) \simeq D_3,$$

grupul diedral de ordinul 6. În acest caz realizarea geometrică a grupului D_3 este optimală. Într-adevăr, din Corolarul 2.7.1 avem $k = 6$, deci mulţimea X_{D_3} poate conţine $36 - 6 = 30$ puncte şi poate fi considerată în spaţiul $\mathbb{R}^5$, ceea ce este departe de situaţia din exemplul de mai sus.

2.8 Observaţii asupra grupului de izometrii al metricii căilor ferate franceze

Franţa este o ţară centralizată din punctul de vedere al transportului feroviar, adică aproape orice tren care circulă între două oraşe trebuie să treacă prin Paris. Aceasta motivează numele de metrică a căilor ferate franceze pentru următoarea construcţie. Fie (X, d) un spaţiu metric şi $p \in X$, un punct fixat. Definim o nouă metrică pe X, notată cu $d_{F,p}$, prin

$$d_{F,p}(x,y) = \begin{cases} 0 \text{ dacă şi numai dacă } x = y \\ d(x,p) + d(p,y) \text{ dacă } x \neq y \end{cases}$$

şi numită metrică a căilor ferate franceze.

În acest paragraf studiem, urmărind lucrarea V. Bulgărean [14], proprietăţile izometriilor în raport cu metrica $d_{F,p}$. Să începem prin a remarca faptul că geometria generată de metrica $d_{F,p}$ este foarte săracă, toate proprietăţile geometrice fiind concentrate în punctul p.

2.8.1 Grupul izometriilor metricii $d_{F,p}$

Fie (X, d) un spaţiu metric şi $p \in X$, un punct fixat. Considerăm $Iso^{(p)}(X, d)$ subgrupul lui $Iso(X, d)$, definit de toate izometriile spaţiului (X, d) care fixează punctul p, adică

$$Iso^{(p)}(X,d) = \{f \in Iso(X,d) : \ f(p) = p\}.$$

Teorema 2.8.1 *$Iso^{(p)}(X, d)$ este subgrup al lui $Iso(X, d_{F,p})$. În particular, are loc incluziunea $Iso^{(p)}(X, d) \subseteq Iso(X, d_{F,p})$.*

Teorema 2.8.2 *Pentru orice izometrie $f \in Iso(X, d_{F,p})$, punctul p este fix, adică are loc relaţia $f(p) = p$.*

Ţinând seama de clasificarea izometriilor prezentată în subparagraful 2.1.1, obţinem următorul rezultat.

Corolarul 2.8.1 *Pentru orice spaţiu metric (X, d) şi orice punct $p \in X$, spaţiul metric $(X, d_{F,p})$ este de tip eliptic, adică toate izometriile sale sunt eliptice.*

Capitolul 3

Probleme speciale referitoare la izometrii

3.1 Grupuri de frize în planul euclidian

Noţiunea de friză este definită în DEX ca fiind "un ornament în formă de bandă orizontală cu picturi sau reliefuri în jurul unui vas, al unei săli, al unui sarcofag, etc.". Noi vom considera astfel de benzi, situate în plan, în care anumite figuri geometrice simple se repetă la infinit. În acest paragraf vom descrie în limbajul teoriei grupurilor configuraţiile posibile, un rol central jucându-l simetriile şi translaţiile planului euclidian.

3.1.1 Generatori şi relaţii într-un grup

Lăsăm deocamdată deoparte izometriile planului euclidian pentru a discuta noţiunile care vor fi folosite pentru a descrie şi clasifica grupurile de frize.

Vom scrie $G = \langle X|R\rangle$, unde simbolurile X, R, G au următoarele semnificaţii:

Mulţimea X de **generatori** este formată din simboluri, de obicei un număr finit, $x_1, \ldots, x_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ne gândim la simbolurile $x_i^{\pm 1}$, $1 \leq i \leq n$, ca fiind litere într-un alfabet $X^{\pm}$, din care se formează **cuvinte**. **Lungimea** unui cuvânt este numărul de litere folosite. Acest număr este finit, el este zero dacă cuvântul este "gol", notat e. Un cuvânt este **redus** dacă nu conţine literele $x_i^{\pm 1}$ pe locuri învecinate, pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$. Notăm cu $F(X)$ mulţimea cuvintelor reduse.

Mulţimea R este formată din **relaţii**, aceasta înseamnă ecuaţii între cuvinte, de obicei în număr finit, de forma $u_i = v_i$, unde $u_i, v_i \in F(X)$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Spunem că $\langle X|R \rangle$ este o **prezentare** a grupului G, sau echivalent, $G = \langle X|R \rangle$, dacă sunt satisfăcute următoarele trei condiţii:

(i) fiecare element din G poate fi scris ca un cuvânt în $X^{\pm}$;

(ii) ecuaţiile din R au loc între elementele lui G;

(iii) orice ecuaţie între cuvintele în $X^{\pm}$ din G se obţine din relaţiile conţinute în R.

Lema 3.1.1 *Fie T un subgrup ciclic al lui G, t un generator pentru T şi $r \in G$. Atunci $r^{-1}Tr = \{r^{-1}xr : \ x \in T\}$ este subgrup ciclic al lui G şi $r^{-1}tr$ este generator al său.*

3.1.2 Compunerea simetriilor de axe diferite

Revenim la izometriile planului euclidian. Vom analiza în detaliu compunerea simetriilor de axe diferite.

3.1.3 Clasificarea grupurilor de frize

Definiţia 3.1.1 Un subgrup G al lui $E(2)$ este **discret** dacă pentru orice punct $O \in \mathbb{R}^2$, orice disc de centru O conţine un număr finit de puncte din mulţimea $\{gO : \ g \in G\}$.

Definiţia 3.1.2 Un grup de frize este un subgrup discret al lui $E(2)$ care are subgrupuri de translaţii ciclic infinite. Aceasta înseamnă un subgrup al lui $E(2)$ care are subgrupurile de translaţii generate de o singură translaţie.

Există exact 7 grupuri de frize. Înainte de a le clasifica, vom da două leme care ilustrează unele proprietăţi ale translaţiilor.

Lema 3.1.2 *Fie r o simetrie de alunecare şi t o translaţie astfel încât axele lui r şi t sunt paralele. Atunci r şi t comută.*

Lema 3.1.3 *Fie $T \leq G \leq E(2)$, unde T este un subgrup de translaţii al lui G. Atunci T este subgrup normal al lui G.*

Teorema 3.1.1 *Dacă F este un grup de frize, atunci F este unul dintre următoarele 7 grupuri posibile:*

$F_1 = \langle t | \rangle$
$F_1^2 = \langle t, r | r^2 = 1, r^{-1}tr = t \rangle$
$F_1^2 = \langle t, r | r^2 = 1, r^{-1}tr = t^{-1} \rangle$
$F_1^3 = \langle t, r | r^2 = 1, r^{-1}tr = t \rangle$
$F_2 = \langle t, s | t^s = t^{-1}, s^2 = 1 \rangle$
$F_2^1 = \langle t, s, r | s^2 = 1, t^s = t^{-1}, r^2 = 1, t^r = t, (sr)^2 = 1 \rangle$
$F_2^2 = \langle t, s, t | s^2 = 1, t^s = t^{-1}, r^2 = t, t^r = t, (sr)^2 = 1 \rangle$.

3.2 Aplicaţii care conservă anumite proprietăţi geometrice

3.2.1 Problema Aleksandrov-Rassias

Fie (X, d_X), (Y, d_Y) două spaţii metrice şi funcţia $f : X \to Y$. Spunem că f **conservă distanţa** $r > 0$, dacă avem $d_Y(f(x), f(y)) = r$, pentru orice $x, y \in X$ cu $d_X(x, y) = r$. Evident, f este o izometrie dacă şi numai dacă f este surjectivă şi conservă orice distanţă.

În 1970, A.D. Aleksandrov [2] a pus problema că dacă funcţia f conservă o singură distanţă, rezultă că este o izometrie?

Răspunsul fusese dat, în cazul spaţiilor euclidiene, de către F.S. Beckman şi D.A. Quarles [9]. Ei au considerat funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{Z} \\ x & \text{dacă} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Problema Aleksandrov-Rassias. *Dacă (X, d_X) şi (Y, d_Y) sunt spaţii metrice şi $f : X \to Y$ este o aplicaţie continuă, surjectivă care conservă distanţa 1, rezultă că f este o izometrie?*

Exemplul 3.2.1 Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(x) = x + \frac{1}{7}\sin 2\pi x.$$

Aceasta este un difeomorfism, conservă distanţa 1, dar nu este o izometrie.

B. Mielnik şi Th. M. Rassias [40] au demonstrat următorul rezultat: *Orice omeomorfism* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ *care conservă o distanţă* r*, este o izometrie a lui* $\mathbb{R}^n$.

Referitor la izometrii între spaţii diferite, Th. M. Rassias [50] a demonstrat că are loc următoarea proprietate: *Pentru orice număr natural* $n \geq 1$*, există un număr natural* m_n *astfel încât pentru* $N \geq m_n$ *există aplicaţii* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$ *care nu sunt izometrii dar conservă distanţa* 1.

3.2.2 Aplicaţii ale lui $\mathbb{R}^3$ care transformă cuburi în cuburi

Este foarte interesant să investigăm dacă proprietatea de conservare a distanţei $r > 0$ poate fi înlocuită cu proprietăţi de conservare a unor configuraţii geometrice simple, astfel încât să avem un răspuns afirmativ la problema de tip Aleksandrov-Rassias corespunzătoare.
S.M. Jung a demonstrat că dacă avem o aplicaţie injectivă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, care transformă orice triunghi echilateral (patrulater sau hexagon) cu lungimea laturii $a > 0$ într-o figură de acelaşi tip dar cu lungimea laturii $b > 0$, atunci până la o translaţie, există o izometrie liniară $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ astfel încât avem

$$f(x) = \left(\frac{b}{a}\right) g(x).$$

Mai mult, autorii din lucrarea [29] au demonstrat că dacă o aplicaţie injectivă $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ transformă orice cerc de rază 1 într-un cerc de rază 1, atunci f este o izometrie liniară până la o translaţie. Vom extinde rezultatele din [28] la cazul 3-dimensional şi vom demonstra următorul rezultat: dacă avem o aplicaţie injectivă $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ care transformă orice cub într-un cub, atunci f este izometrie liniară până la o translaţie.

Lema 3.2.1 *Fie aplicaţia injectivă* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *care transformă orice cub într-un cub. Pentru orice cuburi de muchie 1, A şi B, dacă* $\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B) = \emptyset$*, atunci* $\mathrm{Int}\{f(A)\} \cap \mathrm{Int}\{f(B)\} = \emptyset$*.*

În continuare vom demonstra că dacă o funcţie injectivă transformă cuburi în cuburi, atunci ea este izometrie. Mai exact avem teorema:

Teorema 3.2.1 *Dacă aplicaţia injectivă* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *transformă orice cub într-un cub, atunci* f *este izometrie liniară până la o translaţie.*

3.3 Grupul de izometrii al sferei. Rezultate asupra izometriilor între sfere

Fiind date două spaţii metrice X şi Y, o problemă importantă este de a găsi condiţii minimale pentru ca o aplicaţie $f : X \to Y$ să fie izometrie. Există o bibliografie bogată în această direcţie, în cazul în care domeniul şi mulţimea de valori a aplicaţiei are aceeaşi dimensiune şi aplicaţia păstrează numai o distanţă.

Fie S^n sfera unitate n-dimensională în $\mathbb{R}^{n+1}$. Vom determina grupul de izometrii $Iso(S^n)$, cu metrica indusă din $\mathbb{R}^{n+1}$. Pentru cazurile $n = 1$ şi $n = 2$, vom da demonstraţii geometrice pentru clasificarea izometriilor. De asemenea, vom arăta că o aplicaţie $f : S^n \to S^p$, $p \geq n > 1$, care păstrează două distanţe şi invariază un unghi, este izometrie. Această problemă a fost propusă de Th. M. Rassias. Demonstraţia generală pentru $\mathbb{R}^n$ nu funcţionează în aceast context pentru că utilizează proprietăţile triunghiului echilateral şi ale rombului, proprietati geometrice proprii planului euclidian. În acest paragraf vom prezenta o demonstraţie pentru problema menţionată mai sus. Presupunând continuitatea lui f, vom demonstra că în ipoteza în care păstrează o distanţă unghiulară iraţională, atunci f este o izometrie. Pentru simplitate vom utiliza notaţiile $A, B, C, \ldots$ pentru puncte din domeniul de definitie şi $A', B', C', \ldots$ pentru imaginile corespunzătoare prin f.

Teorema 3.3.1 *Orice izometrie* $f : S^1 \to S^1$ *este o rotaţie sau o simetrie axială.*

Teorema 3.3.2 *Orice izometrie* $f : S^2 \to S^2$ *este o simetrie planara, o rotatie sau o rotosimetrie (compunere de o rotatie si o simetrie).*

Teorema 3.3.3 *Orice izometrie $f : S^n \to S^n$ este o compunere de rotaţii şi eventual o simetrie.*

Teorema 3.3.4 *Are loc relaţia $Iso(S^n) \simeq O(n+1)$.*

Teorema 3.3.5 *Orice izometrie $f \in Iso(S^n)$ este o compunere de cel mult $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ rotaţii proprii ale lui S^n şi eventual o simetrie în raport cu un hiperplan care trece prin origine.*

Observaţia 3.3.1 1. Rezultatele de mai sus arată că grupul $Iso(S^n)$ este generat de rotaţii şi simetrii.

2. Teorema 3.3.2 implică faptul că grupul de izometrii ale unui poliedru regulat poate conţine numai rotaţii proprii ale sferei S^2, simetrii planare şi rotosimetrii (compuneri de rotaţii proprii cu simetrii planare). De fapt, conform teoremei lui Hessel, sunt posibile numai 14 tipuri de astfel de grupuri.

Teorema 3.3.6 *Nu există funcţii $f : S^n \to S^2, n \geq 3$, care conservă unghiurile $\theta, m\theta$, unde $m\theta < \pi$ şi m este un număr natural ≥ 2.*

Observaţia 3.3.2 1) Din demonstraţia de mai sus rezultă că orice aplicaţie $f : S^2 \to S^2$, care conservă unghiurile θ, $m\theta$, unde $m\theta < \pi$ şi m este un număr natural ≥ 2, este o izometrie a sferei S^2.

2) Demonstraţia de mai sus este valabilă, cu modificările corespunzătoare, dacă înlocuim codomeniul S^2 cu S^p, $p \geq 2$. Presupunem că f invariază unghiurile θ şi 2θ. Dacă vom fixa imaginea lui A, B, în planul X_1X_p cu A ca pol nord şi $B = (\sin\theta, 0, \ldots, 0, \cos\theta)$, unde $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \theta$ şi $\widehat{AOC} = 2\theta$ ca mai sus, atunci o posibilă poziţie pentru C' ar fi intersecţia dintre $(p-1)$-sferele de ecuaţii

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{p-1}^2 = \sin^2 2\theta, \quad x_p = \cos 2\theta$$

şi

$$(x_1 - \sin\theta\cos\theta)^2 + x_2^2 + \ldots + (x_p - \cos^2\theta)^2 = \sin^2\theta.$$

Teorema 3.3.7 *Fie $f : S^n \to S^p$, $p \geq n > 1$, o aplicaţie continuă care conservă unghiurile $\theta, m\theta$, unde $m > 1$ şi $m\theta < \pi$. Atunci f este o izometrie.*

Teorema 3.3.8 *Fie $f : S^n \to S^n$ o aplicaţie care conservă unghiul θ. Presupunem că* $\arccos\left(\frac{1}{m+\sec\theta}\right)$ *este iraţional pentru $0 \le m \le n-1$. Atunci f este o izometrie.*

Observaţia 3.3.3 Dacă există un unghi θ astfel încât $\arccos\left(\dfrac{1}{n+\sec\theta}\right)$ este iraţional pentru orice $n \ge 0$, atunci orice aplicatie continuă $f : S^n \to S^n$ care conservă unghiul θ este o izometrie.

3.4 Grupul de izometrii al unui spaţiu metric local compact

Este bine cunoscut din lucrarea clasică a lui D. van Dantzig şi B.L. van de Waerden [23] faptul că dacă (X, d) este un spaţiu metric local compact şi conex, atunci grupul lui de izometrii $Iso(X, d)$, înzestrat cu topologia convergenţei punctuale, este local compact şi acţioneaza propriu pe X. Recent s-a demonstrat că închiderea punctuală a lui $Iso(X, d)$ este local compactă, dacă spaţiul $\Sigma(X)$ a componentelor conexe ale lui X este cvazi-compact (adică este compact dar nu neapărat Hausdorff) în raport cu topologia cât. Problema dacă $Iso(X, d)$ este închis în $C(X, X)$ (spatiul tuturor aplicactiilor continue de la X la X, înzestrat cu topologia convergenţei punctuale) este încă nerezolvată. Scopul acestui paragraf este de a demonstra că dacă $\Sigma(X)$ este cvazi-compact atunci $Iso(X, d)$ coincide cu semigrupul Ellis al lui. Mai precis, vom demonstra următorul rezultat.

Teorema 3.4.1 *Fie (X, d) un spaţiu metric local compact. Notăm cu $Iso(X, d)$ grupul său de izometrii înzestrat cu topologia convergenţei punctuale şi cu $\Sigma(X)$ spaţiul componentelor conexe ale lui X, înzestrat cu topologia cat. Atunci:*

1. Dacă $\Sigma(X)$ nu este cvazi-compact, atunci nu este necesar ca $Iso(X, d)$ să fie local compact, sau să se acţioneze propriu pe X.

2. Dacă $\Sigma(X)$ este cvazi-compact, atunci au loc următoarele proprietăţi:

(a) $Iso(X, d)$ este local compact;

(b) acţiunea lui $Iso(X, d)$ pe X nu este întodeauna proprie;

(c) acţiunea lui $Iso(X, d)$ pe X este proprie în ipoteza că spaţiul X este conex.

Abordarea noastră se bazează pe mulţimile $(x, V_x) = \{g \in Iso(X, d) : g(x) \in V_x\}$, unde V_x este o vecinătate a lui $x \in X$. Aceste mulţimi formează o subbază de vecinătăţi a identităţii (unitatea grupului) în raport cu topologia convergenţei punctuale, care este topologia naturală a lui $Iso(X, d)$.

Următoarele două exemple simple stabilesc afirmaţiile 1 şi 2(b) din teorema enunţată mai sus.

Exemplul 3.4.1 Fie $X = \mathbb{Z}$ înzestrat cu metrica discretă. Evident că $\Sigma(X)$ nu este un spaţiu cvazi-compact. Poate fi uşor de văzut că $Iso(X, d)$ este grupul tuturor bijecţiilor lui $\mathbb{Z}$. Acesta nu este local compact în raport cu topologia convergenţei punctuale, aşadar nu poate acţiona propriu pe un spaţiu local compact.

Exemplul 3.4.2 Fie $X = Y \cup \{(1, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ unde $Y = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ şi $d = \min\{1, \delta\}$, unde δ reprezintă metrica euclideană. După cum vom vedea, grupul $Iso(X, d)$ este local compact. Cu toate acestea acţiunea lui $Iso(X, d)$ pe X nu este proprie, deoarece grupul de izotropie a punctului $(1, 0)$ nu este compact, de vreme ce conţine translaţiile lui Y. Deci, acţiunea lui $Iso(X, d)$ pe X nu este proprie, chiar dacă X are două componente conexe.

3.4.1 Local compactitatea grupului $Iso(X, d)$

Următorul rezultat este esential pentru investigarea condiţiilor (a) şi (b) menţionate anterior:

Lema 3.4.1 *Fie (X, d) un spaţiu metric local compact, $F \subseteq Iso(X, d)$ şi*

$$K(F) = \{x \in X : F(x) = \{f(x) : f \in F\} \text{ este relativ compact}\}.$$

Atunci $K(F)$ este o submulţime deschisă şi închisă a lui X.

Lema 3.4.2 *Fie (X, d) un spaţiu metric local compact cu spaţiul componentelor conexe $\Sigma(X)$ cvazi-compact. Atunci condiţia (a) este satisfăcută.*

Exemplul 3.4.3 Fie $X = \mathbb{Z}$ înzestrat cu metrica discretă. Dacă $f_n(z) = z$ pentru $-n < z < 0$, $f_n(-z) = 0$, şi $f_n(z) = z + 1$ în celelalte cazuri, atunci $f_n \to f$, unde $f(z) = z$ pentru $z < 0$, şi $f(z) = z + 1$ pentru $z \geq 0$. Rezultă că f_n este o izometrie pentru orice n, dar f nu este surjectivă întrucât $0 \notin f(\mathbb{Z})$.

Lema 3.4.3 *Dacă* $\Sigma(X)$ *este cvazi-compact şi* (f_n), $f_n \in Iso(X,d)$ *este un şir astfel încât* $f_n \to f$ *în raport cu topologia convergenţei punctuale, atunci* $f(X)$ *este deschisă şi închisă în* X.

Propoziţia 3.4.1 *Dacă* (X,d) *este un spaţiu metric local compact, şi* $\Sigma(X)$ *este cvazi-compact, atunci* $Iso(X,d)$ *este închis în* $C(X,X)$.

Propoziţia 3.4.2 *Există un subşir* $\{S_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ *al lui* $\{S_n\}$ *astfel încât există* $x_k \in S_k$ *cu* $x_k \to x_0$, *unde* $x_0 \in X$.

Teorema 3.4.2 *Dacă* $\Sigma(X)$ *este cvazi-compact, atunci* $Iso(X,d)$ *este local compact.*

3.4.2 Acţiunea proprie a grupului $Iso(X,d)$ pe spaţiul X

În această secţiune, aplicând metodele folosite anterior prezentam o demonstraţie completă pentru următorul rezultat:

Propoziţia 3.4.3 *Dacă* (X,d) *este local compact şi conex, atunci grupul* $Iso(X,d)$ *este local compact şi acţiunea sa pe* X *este proprie.*

Bibliografie

[1] M. Albertson, D. Boutin, *Realizing finite groups in Euclidean spaces*, J. Algebra, **225**(2001), 947-955.

[2] A.D. Aleksandrov, *Mappings of families of sets*, Soviet Math. Dokl., **11**(1970), 116-120.

[3] D. Andrica, V. Bulgarean, *Some remarks on the group of isometries associated to a metric space*, International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics (ICTAMI), Alba Iulia, Romania, 3-6 September, 2009.

[4] D. Andrica, V. Bulgarean, *Remarks on the Group of Isometries of a Metric Space*, in "Nonlinear Analysis: Stability, Approximation, and Inequalities", volume in Honor of Themistocles M.Rassias' 60th Birthday, P.Pardalos, H.M.Srivastava, and P.Georgiev, Eds., Springer Verlag, 2012, pp. 57-64.

[5] D. Andrica, H. Wiesler, *On the isometry groups of a metric space* (Romanian), Seminar "Didactica Matematicii", **5**(1989), 1-4.

[6] D. Asimov, *Finite groups as isometry groups*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. **216**(1976), 389-391.

[7] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warsaw, 1932.

[8] J.A. Baker, *Isometries in normed spaces*, Amer. Math. Monthly, **78**(1971), 655-658.

[9] F.S. Beckman, D.A. Quarles, *On isometries of Euclidean spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **4**(1953), 810-815.

[10] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis I*, AMS Colloquium Publications 48, 2000.

[11] W. Benz, *Classical Geometries in Modern Contexts. Geometry of Real Inner Product Spaces*, Second Edition, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2007.

[12] W. Benz, H. Berens, *A contribution to a theorem of Ulam and Mazur*, Aequation Math., **34**(1987), 61-63.

[13] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric Spaces of Non Positive Curvature*, Springer, 1999.

[14] V. Bulgărean, *The group of isometries of the French rail ways metric*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **58**(2013), no. 4, 471-476.

[15] V. Bulgărean, *The group* $Iso_{d_p}(\mathbb{R}^n)$ *with* $p \neq 2$, Automation Computers Applied Mathematics, **22**(2013), no. 1, 69-74.

[16] V. Bulgărean, *Optimality in geometric realization of finite groups* (în pregătire).

[17] V. Bulgărean, *The group* $Iso(\mathbb{R}^n, d_p)$ *with* $p \neq 2$, Theodor Angheluţă Seminar (2013) - The Fourteenth International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, Cluj-Napoca, August 29-31, 2013.

[18] V. Bulgărean, *The group of isometries of a metric space: the computation for some concrete spaces*, 9^{th} International Conference on Applied Mathematics (ICAM9), Baia Mare, 25-28 September, 2013, Carpathian J. Math. (trimisă spre publicare).

[19] D. Burago, Y. Burago, S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, American Mathematical Society, 2001.

[20] G. Chen, *Lines and Circles in Taxicab Geometry*, Master Thesis, Department of Mathematics and Computer Science, Central Missouri State University, 1992.

[21] W.D. Clayton, *Euclidean Geometry and Transformations*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1972.

[22] H. Coxeter, *Introduction in Geometry*, Wiley, New York, 1969.

[23] D. van Dantzig, B.L. van der Waerden, *Über metrisch homogene Räume*, Abh. Math. Sem. Hamburg, 6(1928), 367-376.

[24] R.J. Fleming, J.E. Jamison, *Isometries on Banach Spaces: Function Spaces*, Chapman Hall/CRC, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics no. 129, Boca Raton, London, New York, Washington D.C., 2003.

[25] O. Gelisgen, R. Kaya, *The taxicab space group*, Acta Mathematica Hungarica, **122**(2009), no. 1-2, 187-200.

[26] S.-M. Jung, *Inequalities for distances between points and distance preserving mappings*, Nonlinear Analysis, 64(2005), 675-681.

[27] S.-M. Jung, *A characterization of isometries on an open convex set*, Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.), 37(3)(2006), 351-359.

[28] S.-M. Jung, *Mappings preserving some geometrical figures*, Acta Math. Hungar., **100**(2003), no. 1-2, 167-175.

[29] S.-M. Jung, B. Kim, *Unit-circle-preserving mappings*, Int. J. Math. Sci., **2004**(2004), no. 66, 3577-3586.

[30] S.-M. Jung, Ki-Suk Lee, *An inequality for distances between* $2n$ *points and the Aleksandrov-Rassias problem*, J. Math. Anal. Appl., 324(2)(2006), 1363-1369.

[31] S.-M. Jung, Th. M. Rassias, *On distance-preserving mappings*, J. Korean Math. Soc., **41**(4)(2004), 667-680.

[32] R. Kaya, *Area Formula for Taxicab Triangles*, Pi Mu Epsilon, **12**(2006), 213-220.

[33] R. Kaya, O. Gelisgen, S. Ekmekci, A. Bayar, *On the group of the isometries of the plane with generalized absolute metric*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, **39**(2009), no. 2.

[34] S. Kobayashi, K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol. I, Interscience, New York, 1963.

[35] E.F. Krause, *Taxicab Geometry*, Addison-Wesley Publishing Company, Menlo Park, CA, 1975.

[36] A. Manoussos, *Contribution to the study of D-stable actions*, Ph.D. Thesis, University of Athens, Greece (1993) (in Greek).

[37] A. Manoussos, *The Ellis semigroup of the full group of isometries of a locally compact metric space*, Preprint.

[38] A. Manoussos, P. Strantzalos *On the Group of Isometries on a Locally Compact Metric Space*, Journal of Lie Theory, **13**(2003), 7-12.

[39] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris, **194**(1932), 946-948.

[40] B. Mielnik, Th. M. Rassias, *On the Aleksandrov problem of conservative distances*, Proc. Am. Math. Soc., **116**(1992), 1115-1118.

[41] R.S. Millman, G.P. Parker, *Geometry. A Metric Approach with Models*, Springer-Verlag, New York, 1981.

[42] S.B. Myers, N.E. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. of Math., (2)**40**(1939), 400-419.

[43] M. Ozcan, R. Kaya, *Area of a Triangle in Terms of the Taxicab Distance*, Missouri J. of Math. Sci., **15**(2003), 178-185.

[44] A. Papadopoulos, *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*, European Mathematical Society, 2005.

[45] C.-G. Park, Th. M. Rassias, *Additive isometries on Banach spaces*, Nonlinear Functional Analysis and Applications, **11**(5)(2006), 793-803.

[46] M.M. Patnaik, *Isometry dimension of finite groups*, J. Algebra, **246**(2001), 641-646.

[47] C.G. Park, Th. M. Rassias, *The N-isometric isomorphisms in linea n-normed C^*-algebras*, Acta Math. Sin. Engl. Ser. **22**(6)(2006), 1863-1890.

[48] C.G. Park, Th. M. Rassias, *Isometries on linear n-normed spaces*, J. Inequal. Pure Appl. Math., **7**(5)(2006), 7 pp.

[49] Th. M. Rassias, *In a distance one preserving mapping between metric spaces always an isometry ?*, Amer. Math. Monthly, **90**(1983), 200.

[50] Th. M. Rassias, *Some remarks on isometries mappings*, Facta Univ. Ser. Math. Inform., **2**(1987), 49-52.

[51] Th. M. Rassias, *Properties of isometric mappings*, J. Math. Anal. Appl., 235(1)(1999), 108-121.

[52] Th. M. Rassias, *Isometries and approximate isometries*, Int. J. Math. Math. Sci., **25**(2)(2001), 73-91.

[53] Th. M. Rassias, *On the Aleksandrov's problem of conservative distances and the Mazur-Ulam theorem*, Nonlinear Analysis, 47(2001), 2579-2608.

[54] Th. M. Rassias, *On the Aleksandrov problem for isometric mappings*, Appl. Anal. Discrete Math., **1**(2007), 18-28.

[55] Th. M. Rassias, B. Mielnik, *On the Aleksandrov problem of conservative distances*, Proc. Amer. Math. Soc., 116(1992), 1115-1118.

[56] Th. M. Rassias, P. Semrl, *On the Mazur-Ulam theorem and the Aleksandrov problem for unit distance preserving mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 118(1993), 919-925.

[57] Th. M. Rassias, S. Xiang, *On Mazur-Ulam theorem and mappings which preserve distances*, Nonlinear Functional Analysis and Applications, 5(2)(2000), 61-66.

[58] Th. M. Rassias, S. Xiang, *On approximate isometries in Banach spaces*, Nonlinear Funct. Anal. Appl., **6**(2)(2001), 291-300.

[59] D.J. Schattschneider, *The Taxicab Group*, Amer. Math. Monthly, **91**(1984), 423-428.

[60] W. Sierpinski, *Sur les espaces métriques localement séparables*, Fund. Math. 21(1933), 107-113.

[61] P. Strantzalos, *Actions by Isometries*, Lecture Notes in Math., 1375(1989), 319-325.

[62] J. Väisäla, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly, **110(7)**(2003), 633-635.

[63] A. Vogt, *Maps which preserve equality of distance*, Studia Math., **45**(1973), 43-48.

[64] M. Willard, Jr., *Symmetry Groups and Their Applications*, Academic Press, New York, 1972.

[65] S. Xiang, *Mappings of Conservative Distances and the Mazur-Ulam Theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **254**(2001), 262-274.