Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca

Facultatea de Matematică şi Informatică

Livia-Mihaela Miholca(căs. Bercheşan)

Contribuţii la Teoria Problemelor de Echilibru şi a Inegalităţilor Variaţionale

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat:

Prof. Univ. Dr. Kassay Gábor

Cluj-Napoca
2014

Cuprins

Introducere

Unul dintre cele mai importante subiecte din analiza neliniară şi aplicaţii este aşa numita *problemă de echilibru.* Teoria echilibrului, parte a analizei neliniare, ne oferă un cadru unitar pentru studiul unei varietăţi de probleme, de exemplu: *probleme de optimizare, inegalităţi variaţionale, probleme de punct şa, probleme complementare, probleme de echilibru Nash şi probleme de punct fix.* Aceste tipuri de probleme apar adesea în economie, mecanică, fizică, etc.
În raport cu bifuncţia implicată, putem distinge două forme de probleme de echilibru: *problema de echilibru scalară* şi *problema de echilibru vectorială.* În această teză vom obţine rezultate de existenţă pentru ambele forme.

Prima problemă de echilibru care a fost studiată în literatură a fost problema scalară care constă în:

$$(SEP) \qquad \text{să se afle } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } f(\bar{a}, b) \geq 0 \text{ pentru orice } b \in B,$$

unde A şi B sunt două mulţimi nevide şi $f : A \times B \to \mathbb{R}$ este o bifuncţie dată.

Prima dată noţiunea de *problemă de echilibru* a apărut în articolul lui E. Blum şi W. Oettli [21] dar problema propriu-zisă a fost investigată cu mai mult de douăzeci de ani în urmă în articolul lui Ky Fan [43] în legatură cu aşa-numitele *teoreme de intersecţie* (adică rezultate care demonstrează că intersecţia anumitor mulţimi e nevidă). Ky Fan a considerat (SEP) în cazul special când $A = B$ este o submulţime compactă şi convexă a unui spaţiu topologic Hausdorff şi a numit-o " inegalitate minimax". În acelaşi an, H. Brézis, G. Nirenberg şi G. Stampacchia [22] au imbunătăţit rezultatul lui Ky Fan, extinzându-l la o mulţime necompactă dar presupunând în schimb o "condiţie de coercivitate", care este automat satisfacută dacă mulţimea este compactă.

(SEP) a fost studiată foarte mult în ultimii ani, de exemplu, în lucrările M. Bianchi şi R. Pini [17], [18], M. Bianchi şi S. Schaible [15], G. Bigi, M. Castellani şi G. Kassay [20], W. Oettli [103], A.N. Iusem, G. Kassay şi W. Sosa [66], A.N. Iusem şi W. Sosa [63].

Condiţii necesare (şi în unele cazuri şi suficiente) pentru existenţa soluţiilor în cazul infinit dimensional au fost propuse, printre alţii, de A.N. Iusem şi W. Sosa [63], A.N. Iusem, G. Kassay şi W. Sosa [66] şi de G. Kassay şi M. Miholca [77]. Este de precizat că A.N. Iusem, G. Kassay şi W. Sosa [65] au obţinut rezultate de existenţă în ceea ce priveşte (SEP) în cazul spaţiilor finit dimensionale unde ipotezele sunt mai slabe.

Extinderea problemei scalare la cazul vectorial poate fi facută în diverse moduri. Dacă Y este un spaţiu topologic vectorial, $K \subseteq Y$ un con convex cu interiorul nevid, două mulţimi nevide A şi B şi o bifuncţie $f : A \times B \to Y$, problema echilibrului în caz vectorial poate fi formulată astfel, cunoscută în literatură sub denumirea de *problema vectorială slabă de echilibru*:

$$(VEP) \qquad \text{să se afle } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } f(\bar{a}, b) \notin -\operatorname{int} K \text{ pentru orice } b \in B.$$

(VEP) a fost de asemenea studiată în ultimii ani, printre lucrări, numărându-se Q.H. Ansari, S. Schaible şi J.C. Yao [8], M. Bianchi, N. Hadjisavvas şi S. Schaible [16], A. Capătă şi G. Kassay [29], D.T. Luc [92].

Problema vectorială de echilibru conţine ca şi cazuri particulare *probleme de optimizare vectorială, probleme vectoriale de punct-şa, inegalităţi variaţionale vectoriale* care apar din economie, fizică, mecanică, etc. În continuare vom descrie inegalităţile variaţionale vectoriale.

Presupunem că X este un spaţiu real topologic şi notăm cu $L(X, Y)$ mulţimea tuturor funcţionalelor din X în Y. Fie $T : X \to L(X, Y)$ şi fie $A = B := \operatorname{dom} T$.

(i) Inegalitatea variaţională vectorială de tip Stampacchia este formulată în felul următor:

$$(SVVI) \qquad \text{să se afle } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \langle T(\bar{a}), b - \bar{a} \rangle \notin -\operatorname{int} K \text{ pentru orice } b \in A.$$

Dacă considerăm $f : A \times A \to Y$ dată de

$$f(a, b) = \langle T(a), b - a \rangle,$$

atunci (VEP) este echivalentă cu $(SVVI)$.

(ii) Inegalitatea variaţională vectorială de tip Minty este formulată în felul următor:

$$(MVVI) \qquad \text{să se afle } \bar{a} \in A \text{ astfel încât } \langle T(b), b - \bar{a} \rangle \notin -\operatorname{int} K \text{ pentru orice } b \in A.$$

Dacă considerăm $g : A \times A \to Y$ definită prin

$$g(a, b) = f(b, a) = \langle T(b), a - b \rangle,$$

cu f dată la itemul (i), se observă că (VEP) în raport cu g este echivalentă cu $(MVVI)$.

Inegalităţile variaţionale vectoriale s-au dovedit un instrument matematic foarte important în modelarea multor probleme practice.

Cu setările presupuse pentru problema de echilibru vectorial, dacă luăm $Y := \mathbb{R}^n$, $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un con convex punctat, $A = B$ o mulţime nevidă şi $f(a, b) = F(b) - F(a)$, unde $F : A \to \mathbb{R}^n$, atunci (VEP) devine problema de optimizare vectorială în cazul finit, notată (VOP).

În anul 1998, Giannessi [53] a utilizat pentru prima dată aşa-numita inegalitate variaţională vectorială de tip Minty pentru a obţine condiţii necesare şi suficiente pentru ca o un punct şa fie soluţie eficientă a unei probleme de optimizare vectorială pentru funcţii diferenţiabile şi convexe.

De atunci, numeroşi cercetători au studiat (VOP) folosind diferite tipuri de inegalităţi variaţionale vectoriale de tip Minty şi cu diferite ipoteze, de exemplu S. Al-Homidan şi Q.H. Ansari [1], Q.H. Ansari şi G.M. Lee [3], Q.H. Ansari, M. Rezaie şi J. Zafarani [5], Q.H. Ansari şi J.-K. Yao [6], G.R. Garzon, R.O. Gomez şi A.R. Lizana [52], S.K. Mishra şi S.Y. Wang [100]. De asemenea, inegalităţile variaţionale vectoriale au fost generalizate în diferite direcţii, de exemplu în S. Al-Homidan şi Q.H. Ansari [1], F. Giannessi, A. Maugeri şi P.M. Pardalos [55], T. Jabarootian şi J. Zafarani [68], S.K. Mishra şi S.Y. Wang [100], M. Rezaie şi J. Zafarani [109], X.M. Yang şi X.Q. Yang [121].
Scopul acestei teze este de a extinde anumite rezultate existente pentru (SEP) şi (VEP) şi de a prezenta noi rezultate pentru (SEP) şi (VEP) şi pentru diferite tipuri de inegalităţi variaţionale (generalizate).

Prezenta teză constă în 3 capitole.

Noţiunile matematice şi anumite rezultate necesare pentru studiul problemei de optimizare scalare sau vectoriale sunt prezentate în Capitolul 1. Secţiunea 1.1 conţine proprietăţi referitoare la conuri, mulţimi convexe, teoreme de separare şi de intersecţie în spaţii infinit dimensionale, diferite generalizări ale noţiunii de continuitate pentru funcţii scalare şi vectoriale şi de asemenea, monotonii clasice pentru operatori. Apoi, în Secţiunea 1.2, sunt prezentate noţiuni slăbite de convexitate pentru funcţii vectoriale şi caracterizări ale lor.

Capitolul 2 este dedicat prezentării unor rezultate de existenţă pentru (SEP) şi (VEP). Mai exact, Secţiunea 2.1 prezintă rezultate pentru (SEP) în cazurile în care avem o mulţime compactă sau nu. În subsecţiunea 2.1.1, folosind noţiunea de pseudo-superior semicontinuitate, extindem un rezultat de existenţă obţinut de G. Kassay şi J. Kolumban [76]. Subsecţiunea 2.1.2, în cazul în care mulţimea nu este compactă, prezintă rezultate de existenţă pentru (SEP) în cazul infinit dimensional fără să folosim monotonicitatea dar folosind o ipoteză de continuitate asupra lui f în raport cu prima variabilă. Absenţa ipotezei de compactitate asupra mulţimii A poate fi evitată folosind diferite tipuri de condiţii de coercivitate.
În Secţiunea 2.2, extindem rezultatul obţinut de A. Capătă şi G. Kassay [29] pentru (VEP) folosind noţiunea de K-pseudo superior continuitate.
În ultima secţiune a acestui capitol, Secţiunea 2.3, prezentăm rezultate pentru cazul special de problemă vectorială (VEP) şi anume când $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$. Această problemă, cu $g,h : A \times A \to \mathbb{R}$, a captat mai puţin atenţia, deşi a fost studiată în E. Blum şi W. Oettli [21], unde autorii obţin rezultate de existenţă pentru (VEP) impunând condiţii separate asupra lui f şi g. Aşa cum reiese din [21], dacă $g = 0$, rezultatul devine o variantă a teoremei lui Ky Fan [45], pe de altă parte, pentru $h = 0$, rezultatul este o variantă a teoremei lui Browder-Minty pentru

inegalităţi variaţionale (a se vedea Browder [24], [25], G.J. Minty [99]). De asemenea, în această secţiune, tratăm cazul special al spaţiilor Banach reflexive înzestrate cu topologia slabă; prezentăm aici condiţii suficiente pentru a garanta anumite condiţii de coercivitate.

În Capitolul 3 studiem diferite tipuri de inegalităţi variaţionale. Secţiunea 3.1 prezintă studiul *operatorilor monotoni generalizaţi.* Conceptul iniţial de operator monoton a fost extins în diferite direcţii. Pe lângă interesul teoretic pe care il prezintă, operatorii monotoni generalizaţi sunt mai potriviţi pentru a descrie probleme practice decât operatorii monotoni, în discipline precum economia, stiinţa managementului, teoria probabilităţii şi alte stiinţe aplicative. Rezultatele de surjectivitate sunt de asemenea foarte importante şi garantează, în particular, existenţa zerourilor unor astfel de operatori.
În Secţiunea 3.2, sunt prezentate condiţii suficiente pentru existenţa soluţiilor inegalităţilor variaţionale în spaţii infinit dimensionale, folosind ipoteze de monotonie şi quasicoercivitate. În cazul special când domeniul operatorului este întreg spaţiul, se demonstrează existenţa zerourilor pentru astfel de operatori. Rezultatele de surjectivitate din Secţiunea 3.3 sunt obţinute fără monotonie dar cu o condiţie de coercivitate mai tare. În Secţiunea 3.4 folosim operatori $\mathcal{C}$-pseudomonotoni si stabilim un rezultat pentru inegalităţi variaţionale definite cu astfel de operatori, rezultat care, prin prisma spaţiilor Banach reflexive, poate fi privit ca o generalizare a rezultatului lui D. Inoan şi J. Kolumbán [62].

Secţiunea 3.5 este dedicată studiului inegalităţilor variaţionale generalizate de tip Minty şi Stampacchia definite cu ajutorul funcţiilor multivoce în spaţii topologice şi include, ca şi caz special, inegalităţile variaţionale generalizate tari. Punctul de pornire a unui astfel de studiu a fost generat, printre altele, de lucrările T.Q. Bao şi B.S. Mordukhovich [12], Y.P. Fang şi N.J. Huang [46], Y.P. Fang şi N.J. Huang [47], A.P. Farajzadeh, A.A. Harandi şi K.R. Kazmi [48], J. Zeng şi S.J. Li [128]. Tot în această secţiune s-au introdus câteva tipuri de invexităţi generalizate pentru o problemă multivocă de optimizare şi se studiază relaţiile între ele. De asemenea, se stabilesc legături între câteva tipuri de inegalităţi variaţionale şi această problemă de optimizare, folosind subdiferenţiala contingentă slabă, definită pentru funcţii multivoce.

În Secţiunea 3.6 studiem inegalităţi variaţionale vectoriale de tip Minty şi de tip (slab) Stampacchia (inegalităţi variaţionale care sunt strict legate de conceptul de invexitate şi preinvexitate pentru funcţii, concept care generalizează noţiunea de convexitate pentru funcţii), definite cu ajutorul diferenţialei Mordukhovich în spaţii Asplund. Pentru prima dată, conceptul de invexitate a fost introdus de M.A. Hanson [59]. Recent, caracterizarea şi aplicaţiile în ceea ce priveste invexitatea generalizată, au fost studiate de mulţi autori, printre care Q.H. Ansari şi J.-K. Yao [6], A. Cambini şi L. Martein [28], A. Chinchuluun şi P.M. Pardalos [36], T. Jabarootian şi J. Zafarani [68], G.R. Garzon, R.O. Gomez şi A.R. Lizana [51], M. Soleimani-damaneh [115], M. Soleimani-damaneh [116], X.M. Yang, X.Q. Yang şi K.L. Teo [122], X.M. Yang, X.Q. Yang şi K.L. Teo [125].

În această secţiune, obţinem legături între soluţiile problemei (VOP) şi aceste inegalităţi variaţionale vectoriale, folosind conceptul de invexitate generalizată pentru funcţii vectoriale. Principalele rezultate în lucrările S. Al-Homidan şi Q.H. Ansari [1], Q.H. Ansari, M. Rezaie şi J. Zafarani [5], M. Rezaie şi J. Zafarani [109] au fost obţinute folosind subdiferenţiala Clarke. Deoarece clasa subdiferenţialei Clarke este mai numeroasă decât clasa subdiferenţialei Mordukhovich (vezi B. Mordukhovich [101]), câţiva autori au studiat inegalităţile variaţionale vectoriale şi problemele de optimizare vectorială, definite cu ajutorul celei din urmă, cu scopul de a obţine rezultate mai bune. Cu ajutorul câtorva exemple vom demonstra că rezultatele noastre sunt mai bune decât cele obţinute în literatura de specialitate.

Contribuţiile originale ale autorului tezei sunt:

Capitolul 2: Definiţia 2.1.1, Lema 2.1.2, Remarca 2.1.3, Exemplul 2.1.4, Teorema 2.1.5, Teorema 2.1.11, Teorema 2.1.17, Teorema 2.1.18, Lema 2.2.3, Definiţia 2.2.4, Definiţia 2.2.5, Definiţia 2.2.6, Teorema 2.2.7, Teorema 2.2.10, Teorema 2.2.11, Teorema 2.2.14, Lema 2.3.1, Definiţia 2.3.5, Propoziţia 2.3.6, Exemplul 2.3.7, Lema 2.3.8, Lema 2.3.9, Lema 2.3.10, Exemplul 3.6.19, Teorema 2.3.13, Exemplul 2.3.16, Teorema 2.3.18, Propoziţia 2.3.19, Remarca 2.3.20, Lema 2.3.21, Lema 2.3.22, Propoziţia 2.3.23, Lema 2.3.24, Teorema 2.3.25 şi Corolarul 2.3.26.

Capitolul 3: Definiţia 3.1.3, Definiţia 3.1.5, Lema 3.1.13, Teorema 3.2.1, Exemplul 3.2.4, Definiţia 3.3.1, Remarca 3.3.2, Exemplul 3.3.3, Teorema 3.3.4, Corolarul 3.3.5, Exemplul 3.3.6, Teorema 3.4.1, Teorema 3.4.2, Definiţia 3.5.7, Definiţia 3.5.13, Propoziţia 3.5.14, Exemplul 3.5.15, Exemplul 3.5.16, Definiţia 3.5.19, Definiţia 3.5.20, Teorema 3.5.21, Exemplul 3.5.22, Teorema 3.5.30, Teorema 3.5.31, Corolarul 3.5.32, Corolarul 3.5.33, Corolarul 3.5.34, Teorema 3.5.35, Corolarul 3.5.36, Teorema 3.5.37, Corolarul 3.5.38, Corolarul 3.5.39, Corolarul 3.5.40, Teorema 3.5.41, Corolarul 3.5.42, Corolarul 3.5.43, Corolarul 3.5.44, Teorema 3.5.45, Corolarul 3.5.46, Teorema 3.5.47, Corolarul 3.5.48, Corolarul 3.5.49, Corolarul 3.5.50, Teorema 3.5.51, Corolarul 3.5.52, Exemplul 3.6.9, Definiţia 3.6.10, Definiţia 3.6.13, Teorema 3.6.16, Teorema 3.6.17, Exemplul 3.6.19, Remarca 3.6.20, Teorema 3.6.21, Corolarul 3.6.22, Exemplul 3.6.24, Teorema 3.6.25, Corolarul 3.6.26, Teorema 3.6.27 şi Exemplul 3.6.29.

Rezultatele autorului incluse în această teză sunt parţial publicate:

1. **M. Miholca**, *Vector variational-like inequalities and set-valued optimization problems*, Ann. of Tiberiu Popoviciu Seminar **10** (2012), 75-85.

2. G. Kassay, **M. Miholca**, *Existence results for variational inequalities with surjectivity consequences related to generalized monotone operators*, J. Optim. Theory Appl. **159** (2013), 721-740.

3. **M. Miholca**, *On set-valued optimization problems and vector variational-inequalities*, Optim. Lett. **8**(**2**) (2014), 463-476.

4. **M. Miholca**, *Vector variational-like inequalities and vector optimization problems*, Carpathian J. Math. **30**(**1**) (2014), 101-108

sau aflate in procesul de publicare:

5. G. Kassay, **M. Miholca**, *On vector equilibrium problems given by a sum of two functions*, trimisă spre publicare.

6. **M. Miholca**, *Lipschitz B-preinvex functions in Asplund spaces*, trimisă spre publicare.

7. **M. Miholca**, *On vector variational-like inequalities and vector optimization problems in Asplund spaces*, acceptată spre publicare in Studia Mathematica Universitatis Babeş-Bolyai, dar

unele sunt noi şi apar pentru prima dată aici.

O parte importantă a rezultatelor originale din această teză au fost de asemenea prezentate în cadrul următoarelor conferinţe:

• 10^{th} International Symposium on Generalized Convexity and Monotonicity (GCM10), August 22-27, 2011, Cluj-Napoca, Romania.

• 11^{th} EUROPT Workshop on Advances in Continuous Optimization, June 26-28, 2013, Firenze, Italy.

• The Fourth International Conference on Continuous Optimization (ICCOPT), July 27-August 1, 2013, Lisbon, Portugal.

• Conference on Numerical Analysis and Optimization (NAOiii), January 5-9, 2014, Muscat, Oman.

Cuvinte cheie: problema scalară de echilibru, problema vectorială de echilibru, inegalităţi variaţionale, inegalităţi variaţionale vectoriale generalizate, ecuaţii generalizate, probleme de optimizare multivoce, probleme de optimizare vectoriale, inegalităţi minimax, spaţiu Banach, spaţiu Asplund, condiţii de coercivitate, operatori monotoni generalizaţi, operator $F-$hemicontinuu, operator propriu quasimonoton, operatori $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{B}-$pseudomonotoni, operator KKM, funcţie propriu quasimonotonă, funcţie esenţial quasimonotonă, funcţie quasiconvexă, funcţie prequasi-invexă, funcţie de tip $K-$convex, funcţie slab quasi-invexă, funcţie $K-$concavă, funcţie $K-$pseudo-superior semicontinuă, funcţie $(K, L)-$slab-quasi-invexă.

Mulţumiri

Încep prin a adresa sincere mulţumiri conducătorului meu de doctorat Prof. Univ. Dr. Gábor Kassay de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca. Dânsul mi-a oferit privilegiul de a urma studiile de doctorat sub atenta sa supraveghere, propunâdu-mi un subiect de cercetare atractiv si actual. De asemenea, îi mulţumesc pentru atenta verificare a tuturor rezultatelor ştiinţifice obţinute şi pentru privilegiul de a face parte din echipa de cercetare a grantului său CNCS-UEFISCDI, cod PN-II-ID-PCE-2011-3-0024.

Vreau să mulţumesc, de asemenea, domnilor profesori Conf. Univ. Dr. Nicolae Popovici, Conf. Univ. Dr. Cornel Pintea şi Conf. Univ. Dr. Csaba Varga din Comisia de îndrumare pentru continua supraveghere pe parcursul acestei perioade.

Adresez mulţumiri tuturor membrilor Seminarului de Analiză şi Optimizare de la Facultatea de Matematică şi Informatică a Universităţii Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca.

La final, cel mai special loc de mulţumire este rezervat familiei mele, părinţilor mei, soţului meu şi în special băieţelului meu Darius. Dragostea şi sprijinul lor necondiţionat mi-au asigurat forţa necesară concentrării asupra cercetărilor prezentate in această teză.

Capitolul 1

Noţiuni şi rezultate preliminare

În această teză, folosim noţiunile binecunoscute de spaţiu vectorial, spaţiu topologic şi spaţiu topologic vectorial. Toate spaţiile sunt reale. Noţiunile de bază şi proprietăţi privind aceste spaţii, precum şi alte spaţii, pot fi găsite în cărţi precum I. Muntean [102], H.L. Royden [111], W. Rudin [113], J. Schauder [114], J. Von Neumann [118], K. Yosida [126].

Dacă X şi Y sunt spaţii topologice vectoriale, notăm

$$L(X,Y) := \{\xi : X \to Y \mid \xi \ \text{ liniară şi continuă}\},$$

şi prin $\langle \cdot, \cdot \rangle : L(X,Y) \times X \to Y$ inţelegem

$$\langle \xi, x \rangle = \xi(x), \quad \forall \xi \in L(X,Y), \quad \forall x \in X.$$

În cazul particular când $Y := \mathbb{R}$, avem $L(X,Y) := X^*$ (dualul lui X) şi $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^* \times X \to \mathbb{R}$ este *perechea duală* definită prin

$$\langle x^*, x \rangle = x^*(x), \quad \forall x^* \in X^*, \quad \forall x \in X.$$

Fie $\{x_\alpha\}_\alpha \subseteq X$ un şir şi $x \in X$. Reamintim că x_α *converge slab* la x (notăm $x_\alpha \rightharpoonup x$) dacă pentru orice $x^* \in X^*$ avem că $\langle x^*, x_\alpha \rangle$ converge (in $\mathbb{R}$) la $\langle x^*, x \rangle$. Reamintim de asemenea că într-un spaţiu Banach reflexiv orice submulţime închisă, convexă şi mărginită este slab compactă.

1.1 Mulţimi convexe, conuri convexe şi teoreme de intersecţie

Definiţia 1.1.1. O submulţime A a unui spaţiu vectorial X se numeşte *convexă* dacă

$$\lambda A + (1-\lambda)A \subseteq A \ \text{ pentru orice } \ \lambda \in [0,1].$$

Pentru o submulţime A a unui spaţiu vectorial topologic X, notăm cu intA, clA, coA, riA, *interiorul*, *închiderea*, *învelitoarea convexă* şi *interiorul relativ* al lui A, respectiv. Cu A' notăm mulţimea tuturor *punctelor de acumulare* ale lui A.

Definiţia 1.1.2. Fie X un spaţiu vectorial. O submulţime $K \subseteq X$ se numeşte *con* dacă este nevidă şi $\lambda K \subseteq K$ pentru orice $\lambda \geq 0$. Un con $K \subseteq X$ se numeşte *convex* dacă este o mulţime convexă.

Un con K al unui spaţiu vectorial este convex dacă şi numai dacă $K + K \subseteq K$. Pentru mai multe detalii, vezi R. Hartley [60].

Definiţia 1.1.3. Un con al unui spaţiu vectorial se numeşte:

(i) *netrivial* dacă $K \neq \{0\}$;

(ii) *propriu* dacă $K \neq X$;

(iii) *punctat* dacă $K \cap (-K) = \{0\}$;

(iv) *solid* dacă $\mathrm{int}K \neq \emptyset$.

Dacă avem un con convex K al unui spaţiu topologic vectorial X, *conul dual* of K se defineşte

$$K^* := \{x^* \in X^* \mid \quad x^*(k) \geq 0 \ \text{ pentru orice } \ k \in K\}.$$

De asemenea, ca şi în cazul numerelor reale, avem nevoie ca spaţiile vectoriale să fie ordonate. Această relaţie de ordine o vom prezenta în continuare. Fiind dat un con convex punctat K al unui spaţiu vectorial X, relaţia $\leq_K$ este definită în felul următor:

$$y \leq_K x \ \text{ dacă şi numai dacă } \ x - y \in K.$$

Pentru orice x, y, z, t, alese arbitrar, următoarele proprietăţi au loc:

(i) $x \leq_K x$;

(ii) $x \leq_K y$ şi $z \leq_K t$ implică $x + z \leq_K y + t$;

(iii) $x \leq_K y$ şi $y \leq_K x$ implică $x = y$;

(iv) $x \leq_K y$ şi $\lambda \in \mathbb{R}_+$ implică $\lambda x \leq_K \lambda y$.

Relaţia de dinainte este, în particular, o relaţie de *ordine parţială*.

Lema 1.1.4. (vezi, A. Capătă şi G. Kassay [29]) *Fie K un con convex solid şi netrivial al unui spaţiu topologic vectorial X. Dacă $k^* \in K^*$ este o funcţională nenulă, atunci $k^*(k) > 0$ pentru orice $k \in \operatorname{int} K$.*

Următorul rezultat este o variantă a binecunoscutei teoreme Hahn-Banach. Cunoscută ca şi teorema de separare prin hiperplane închise a două mulţimi convexe, este un rezultat important în analiza convexă neliniară.

Teorema 1.1.5. [40] *Fie X un spaţiu topologic vectorial şi fie A şi B două submulţimi nevide convexe ale lui X care satisfac următoarele condiţii:*

(i) *B are interior nevid;*

(ii) $A \cap (\operatorname{int} B) = \emptyset$.

Atunci există $x^* \in X^*$, $x^* \neq 0$, şi $r \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^*(a) \leq r \leq x^*(b)$ pentru orice $a \in A$ şi $b \in B$.

Remarca 1.1.6. Ipoteza (i) este esenţială în Teorema 1.1.5, aşa cum ne-o arată exemplul următor.

Exemplul 1.1.7. Fie X un spaţiu vectorial topologic infinit dimensional şi fie $x^* : X \to \mathbb{R}$ o funcţională discontinuă. Notăm cu

$$C = \{x \in X \mid x^*(x) = 0\} \quad \text{şi} \quad D = \{x \in X \mid x^*(x) = 1\}.$$

Se observă că mulţimile sunt convexe, dense şi $\operatorname{int} C = \operatorname{int} D = \emptyset$, $C \cap D = \emptyset$ iar cele două mulţimi totuşi nu pot fi separate prin hiperplane închise.

Remarca 1.1.8. În spaţii finit dimensionale, orice submulţime convexă nevidă are interior relativ nevid (vezi [110]) şi Teorema 1.1.5 se poate aplica fără condiţia (i) şi cu o condiţie (ii) mai slabă.

Teorema 1.1.9. [110] *Fie A şi B două mulţimi convexe nevide în $\mathbb{R}^n$ astfel încât* $\mathrm{riA} \cap \mathrm{riB} = \emptyset$. *Atunci există un hiperplan care să separe strict cele două mulţimi A şi B.*

Fie X un spaţiu vectorial şi $F : X \to [-\infty, +\infty]$ o funcţie. Domeniul, mulţimea de nivel şi epigraful lui F sunt definite în felul următor:

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} F &:= \{x \in X \mid F(x) < \infty\}, \\ L(F, r) &:= \{x \in X \mid F(x) \leq r\}, r \in \mathbb{R}, \\ \operatorname{epi} F &:= \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid F(x) \leq r\}, \end{aligned}$$

respectiv.

Definiţia 1.1.10. (vezi, de exemplu, [14], [110]) Fie X un spaţiu topologic şi $F : X \to [-\infty, +\infty]$ o funcţie.

(i) F se numeşte *inferior semicontinuă* in punctul $x_0 \in X$ dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există o vecinătate U a lui x_0 astfel incât $f(x_0) < f(x) + \epsilon$ pentru orice $x \in U$.

(ii) F se numeşte *superior semicontinuă* în punctul $x_0 \in X$ dacă dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există o vecinătate U a lui x_0 astfel incât $f(x_0) - \epsilon < f(x)$ pentru orice $x \in U$.

Dacă X este un spaţiu normat, F se numeşte *inferior semicontinuă* in punctul $x_0 \in X$ dacă pentru orice $\{x_n\}_n \subseteq X$,

$$x_n \to x_0 \Rightarrow F(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} F(x_n);$$

F se numeşte *superior semicontinuă* în punctul $x_0 \in X$ dacă pentru orice subşir $\{x_n\}_n \subseteq X$,

$$x_n \to x_0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} F(x_n) \leq F(x_0).$$

Teorema 1.1.11. (vezi, de exemplu, [14], [110]) *Fie X un spaţiu topologic vectorial Hausdorff şi $F : X \to [-\infty, +\infty]$ o funcţie. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) F este inferior semicontinuă, adică, F este inferior semicontinuă în fiecare punct a lui X;

(ii) epi$F$ *este închis în $X \times \mathbb{R}$;*

(iii) pentru orice $r \in \mathbb{R}$, mulţimea $L(F, r)$ este închisă în X.

Definiţia 1.1.12. Fie X un spaţiu normat şi $F : X \to [-\infty, +\infty]$ o funcţie. F se numeşte *superior hemicontinuă* dacă este superior semicontinuă pe orice segment inclus în X.

Fie $T : X \to 2^Y$ o funcţie multivocă şi $K \subseteq Y$ un con convex punctat. Domeniul, graficul şi epigraful lui T se definesc în felul următor

$$\begin{aligned} \operatorname{dom} T &:= \{x \in X \mid T(x) \neq \emptyset\}, \\ \operatorname{gph} T &:= \{(x, y) \in \times Y \mid x \in \operatorname{dom} T,\ y \in T(x)\}, \\ \operatorname{epi} T &:= \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in \operatorname{dom} T,\ y \in T(x) + K\}, \end{aligned}$$

respectiv.

Următorul concept pentru operatori s-a dovedit a fi foarte important în ultimii 50 de ani.

Definiţia 1.1.13. (vezi, de exemplu, [24]) Fie $T : X \to 2^{X^*}$ o funcţie multivocă. Spunem că T este *monotonă* dacă pentru orice $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} T$, $y_1 \in T(x_1), y_2 \in T(x_2)$ avem

$$\langle y_2 - y_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0.$$

Clasica noţiune de operator monoton a fost extinsă în mai multe moduri. Dintre acestea, menţionăm următoarele două.

Definiţia 1.1.14. (vezi, de exemplu, [57]) Fie $T : X \to 2^{X^*}$ o funcţie multivocă. Spunem că T este *pseudomonotonă* dacă pentru orice $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} T$, $y_1 \in T(x_1), y_2 \in T(x_2)$ avem

$$\langle y_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle y_2, x_2 - x_1 \rangle \geq 0.$$

Definiţia 1.1.15. (vezi, de exemplu, [57]) Fie $T : X \to 2^{X^*}$ o funcţie multivocă. Spunem că T este *quasimonotonă* dacă pentru orice $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} T$, $y_1 \in T(x_1), y_2 \in T(x_2)$ avem

$$\langle y_1, x_2 - x_1 \rangle > 0 \Rightarrow \langle y_2, x_2 - x_1 \rangle \geq 0.$$

În cele ce urmează, în această secţiune, vom presupune că A este o submulţime a unui spaţiu topologic vectorial X şi că $T : X \to 2^X$ este o funcţie multivocă cu $\operatorname{dom} T = A$.

Definiţia 1.1.16. T se numeşte *operator de tip KKM* dacă, pentru orice submulţime finită $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ a lui A, următoarea incluziune are loc:

$$\operatorname{co}\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T(a_i).$$

Următoarea lemă, foarte cunoscută, a fost dată de by B. Knaster, C. Kuratowski şi S. Mazurkiewicz [82] în spaţii finit dimensionale, în timp ce în spaţii infinit dimensionale acest rezultat a fost stabilit de Ky Fan [43].

Lema 1.1.17. [43] *Fie $T : A \to 2^X$ un operator de tip KKM care satisface următoarele condiţii:*

(i) mulţimea $T(a)$ este închisă pentru orice $a \in A$;

(ii) există $\bar{a} \in A$ astfel încât $T(\bar{a})$ este o mulţime compactă.

Atunci $\bigcap_{a \in A} T(a) \neq \emptyset$.

Pentru a stabili rezultatele din Secţiunea 3.4 avem nevoie de următoarea teoremă importantă de intersecţie stabilită de H. Brézis, G. Nirenberg şi G. Stampacchia [22] care extinde teorema anterioară obţinută în [43].

Teorema 1.1.18. [22]. *Fie $T : A \to 2^X$ un operator de tip KKM astfel încât:*

(i) mulţimea $\operatorname{cl} T(y_0)$ este compactă pentru un $y_0 \in A$;

(ii) pentru orice $y \in A$ şi pentru orice subspaţiu finit dimensional Z al lui X, mulţimea $T(y) \cap Z$ este închisă;

(iii) pentru orice segment D al lui X :

$$\mathrm{cl}(\bigcap_{y\in A\cap D} T(y)) \cap D = (\bigcap_{y\in A\cap D} T(y)) \cap D.$$

Atunci $\bigcap_{y\in A} T(y) \neq \emptyset$.

Remarca 1.1.19. *Dacă A este convexă, închisă şi $T(y) \subseteq A$ pentru orice $y \in A$, atunci ipoteza (iii) poate fi înlocuită de*

$(iii\prime)$ pentru orice segment D al lui X

$$\mathrm{cl}(\bigcap_{y\in D} T(y)) \cap D = (\bigcap_{y\in D} T(y)) \cap D.$$

1.2 Funcţii care satisfac condiţii slabe de convexitate

Fie X un spaţiu vectorial şi A o submulţime nevidă a lui.

Definiţia 1.2.1. (vezi, de exemplu, [57]) Dacă $A \subseteq X$ este convexă, o funcţie $F : A \to \mathbb{R}$ se numeşte *quasiconvexă* dacă, pentru orice $x, y \in A$ şi pentru orice $\lambda \in [0,1]$, următoarea inegalitate are loc:

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{F(x), F(y)\}.$$

Definiţia 1.2.2. (vezi, de exemplu, [57]) Dacă $A \subseteq X$ este convexă, o funcţie $F : A \to \mathbb{R}$ se numeşte *semistrict quasiconvexă* dacă, pentru orice $x, y \in A$, următoarea inegalitate are loc:

$$F(x) < F(y) \Rightarrow \ \forall \lambda \in (0,1),\ F(\lambda x + (1-\lambda)y) < F(y).$$

Dacă F este semistrict quasiconvexă şi inferior semicontinuă, atunci este quasiconvexă. Pentru mai multe detalii, vezi N. Hadjisavvas [57], I. Konnov [86] şi I. Konnov şi T.L. Dinh [88].

Definiţia 1.2.3. (vezi, de exemplu, [57]) Dacă $A \subseteq X$ este convexă, o funcţie $F : A \to \mathbb{R}$ se numeşte *pseudoconvexă* dacă, pentru orice $x, y \in A$ şi pentru orice $\lambda \in (0,1)$, următoarea implicaţie are loc:

$$F(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq F(x) \Rightarrow F(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq F(y).$$

Următoarea noţiune a fost introdusă de Ky Fan [42] pentru a extinde anumite rezultate de minimax.

Definiţia 1.2.4. [42] Fie B o mulţime nevidă. O bifuncţie $f : A \times B \to \mathbb{R}$ se numeşte *Ky Fan concav-convexă* dacă pentru orice $a_1, a_2 \in A$ şi orice $\lambda \in [0,1]$, există $a \in A$ astfel încât

$$f(a,b) \geq \lambda f(a_1,b) + (1-\lambda) f(a_2,b) \quad \text{pentru orice} \quad b \in B,$$

şi pentru orice $b_1, b_2 \in B$ şi orice $\mu \in [0,1]$ există $b \in B$ astfel încât

$$f(a,b) \leq \mu f(a,b_1) + (1-\mu)f(a,b_2) \quad \text{pentru orice} \quad a \in A.$$

Câţiva ani mai târziu, H. König [85] a extins noţiunea anterioară a lui Ky Fan pentru a generaliza rezultatul său de minimax.

Definiţia 1.2.5. [85] Fie B o mulţime nevidă. O bifuncţie $f : A \times B \to \mathbb{R}$ se numeşte *König concav-convexă* dacă pentru orice $a_1, a_2 \in A$ există $a \in A$ astfel încât

$$f(a,b) \geq \frac{1}{2}[f(a_1,b) + f(a_2,b)] \quad \text{pentru orice} \quad b \in B,$$

şi pentru orice $b_1, b_2 \in B$ există $b \in B$ astfel încât

$$f(a,b) \leq \frac{1}{2}[f(a,b_1) + f(a,b_2)] \quad \text{pentru orice} \quad a \in A.$$

Noţiunea de convexitate pentru funcţii scalare a fost extinsă în mod natural pentru funcţii vectoriale, în raport cu ordinea indusă de un con K.

Definiţia 1.2.6. Fie X şi Y două spaţii vectoriale, fie A o submulţime nevidă a lui X şi fie $K \subseteq Y$ un con convex. O funcţie $F : A \to Y$ se numeşte:

(i) *K-convexă* dacă A este convexă şi, pentru orice $a_1, a_2 \in A$ şi orice $\lambda \in [0,1]$, următoarea inegalitate are loc:

$$F(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2) \leq_K \lambda F(a_1) + (1-\lambda)F(a_2);$$

F se numeşte *K-concavă* dacă $-F$ este K-convexă.

(ii) *K-convexlike* dacă, pentru orice $a_1, a_2 \in A$ şi pentru orice $\lambda \in [0,1]$, există $a \in A$ astfel încât

$$F(a) \leq_K \lambda F(a_1) + (1-\lambda)F(a_2);$$

(iii) *K-subconvexlike* dacă există $k \in \operatorname{int} K$ astfel încât pentru orice $a_1, a_2 \in A$, orice $\lambda \in [0,1]$ şi orice $\epsilon > 0$, există $a \in A$ care satisface următoarea inegalitate:

$$F(a) \leq_K \lambda F(a_1) + (1-\lambda)F(a_2) + \epsilon k.$$

Definiţia 1.2.6 (i) poate fi găsită în B. D. Craven [37], (ii) se datorează lui Ky Fan [42], iar (iii) apare în V. Jeyakumar [70]. Evident, când $\operatorname{int} K \neq \emptyset$, dacă F este K-convexlike atunci F este şi K-subconvexlike.

În continuare, prezentăm câteva monotonii pentru bifuncţii scalare folosite în literatura din ultimii ani. Cele mai multe dintre aceste noţiuni au fost inspirate de concepte similare de monotonie (generalizată) definite pentru operatori definiţi de la un spaţiu topologic vectorial la dualul său.

Fie $A \subseteq X$ o mulţime convexă.

Definiţia 1.2.7. (vezi, de exemplu, [17]) Bifuncţia $f : A \times A \to \mathbb{R}$ se numeşte

(i) *monotonă* dacă $f(x, y) + f(y, x) \leq 0$ pentru orice $x, y \in A$;

(ii) *quasimonotonă* dacă următoarea implicaţie are loc:

$$f(x, y) > 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0;$$

(iii) *propriu quasimonotonă* dacă pentru orice $x_1, \cdots, x_n \in A$ şi orice $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0$ astfel încât $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, are loc

$$\min_{1 \leq i \leq n} f(x_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) \leq 0.$$

Propriu quasimonotonicitatea a fost introdusă de Zhou şi Chen în [129] sub numele de $0-$*diagonal quasiconcavity* (vezi de asemenea [17]).

În cazul inegalităţilor variaţionale, propriu quasimonotonicitatea este o noţiune mai tare decât quasimonotonicitatea, aşa cum a definit-o S. Karamardian şi S. Schaible [73]. În cazul general al operatorilor, niciuna nu o implică pe cealaltă, vezi M. Bianchi şi R. Pini [17].

Rezultatul următor, cunoscut ca fiind ”teorema de minimax a lui Ky Fan”, joacă un rol important în analiza convexă şi este o consecinţă a Lemei 1.1.17.

Teorema 1.2.8. [45]. *Fie A o mulţime compactă şi convexă a unui spaţiu topologic vectorial Hausdorff. Dacă $f : A \times A \to \mathbb{R}$ este astfel încât pentru orice $x \in A$, $f(x, \cdot)$ este quasiconvexă şi pentru orice $y \in A$, $f(\cdot, y)$ este superior semicontinuă, atunci există $\overline{x} \in A$ astfel încât*

$$f(\overline{x}, y) \geq \inf_{x \in A} f(x, x) \quad \textit{pentru orice} \quad y \in A.$$

Capitolul 2

Probleme de echilibru

Unul dintre cele mai importante subiecte din analiza neliniară (vezi, de exemplu, P.M. Pardalos, T.M. Rassias şi A.A. Khan [106]) şi din câteva domenii aplicative, este aşa numită problemă de echilibru. În raport cu bifuncţia implicată, putem distinge două forme ale problemei: problema scalară şi problema vectorială de echilibru. În acest capitol vom obţine rezultate pentru ambele. Problema de echilibru a fost foarte studiată în ultimii ani (vezi, de exemplu, M. Bianchi, G. Kassay şi R. Pini [19], O. Chadli, Y. Chiang şi S. Huang [30], X.H. Gong [56], A.N. Iussem şi W. Sossa [64], P. Kas, G. Kassay şi Z. Boratas-Sensoy [74], G. Kassay [75], I.V. Konnov şi J.C. Yao [87]). Unul dintre motivele studierii ei este faptul că ea conţine, ca şi cazuri particulare, probleme de optimizare, probleme de punct şa (probleme minimax) (vezi, de exemplu, [41], F. Ferro [49], S. Paeck [105]), inegalităţi variaţionale (monotone sau nu)(vezi, de exemplu, L.B. Batista Dos Santos, G. Ruiz-Garzón şi M.A. Rojas-Medar [13], S.S. Chang şi Y. Zhang [31], G.-Y. Chen şi Q.M. Cheng [32], B. Chen şi N.J. Huang [33], C. Finet, L. Quarta şi C. Troestler [50], F. Giannessi [53], K.L. Lin, D.P. Yang şi J.C. Yao [90]), probleme de echilibru Nash şi alte tipuri de probleme cu caracter aplicativ (vezi, J.P. Aubin [9], T. Basar şi G. J. Olsder [11], A.J. Jones [71], H.W. Kuhn [89], N.N. Vorob'ev [119] sau E. Blum si W. Oettli [21] pentru o descriere mai completă).

2.1 Rezultate de existenţă pentru problema scalară

În această secţiune vom presupune că A este o submulţime nevidă a unui spaţiu topologic X şi B este o mulţime nevidă.

Fie $f : A \times B \to \mathbb{R}$ o bifuncţie dată. Problema scalară de echilibru constă în aflarea unui element $a \in A$ astfel încât

$$(SEP) \qquad f(a, b) \geq 0 \;\; \text{pentru orice} \;\; b \in B.$$

(SEP) a fost studiată mult în ultimii ani, vezi, de exemplu, M. Bianchi şi R. Pini [17], [18], M. Bianchi şi S. Schaible [15], G. Bigi, M. Castellani şi G. Kassay [20], E. Blum şi W. Oettli [21], A.N. Iusem, G. Kassay şi W. Sosa [66], A.N. Iusem şi W. Sosa [63]. Aşa cum se ştie, termenul de "problemă de echilibru" a fost atribuit lui E. Blum şi W. Oettli [21], dar problema a fost studiată cu mai mult de 20 de ani în urmă în lucrarea lui Ky Fan [43] legată de aşa-numitele "teoreme de intersecţie" (adică, rezultate care demonstrează faptul că intersecţia anumitor multimi este nevidă). Ky Fan a considerat (SEP) în cazul special când $A = B$ este o submulţime compactă convexă a unui spaţiu topologic vectorial Hausdorff şi a numit-o "inegalitate de minimax". În acelaşi an, H. Brézis, G. Nirenberg şi G. Stampacchia [22] au imbunatăţit rezultatul lui Ky Fan, extinzându-l la mulţimi care nu sunt compacte dar folosind în schimb o "condiţie de coercivitate" care este automat satisfacută atunci când mulţimea este compactă.

Rezultate recente pentru (SEP), care demonstrează existenţa soluţiilor, pot fi găsite în lucrările M. Bianchi şi R. Pini [17], [18], M. Bianchi şi S. Schaible [15], [69], W. Oettli [103], şi în multe alte lucrări. Condiţii necesare (şi în unele cazuri şi suficiente) de existenţă a soluţiilor în spaţii infinit dimensionale au fost propuse, printre alţii, de A.N. Iusem şi W. Sosa [63], A.N. Iusem, G. Kassay şi W. Sosa [66] şi de G. Kassay şi M. Miholca [77].

Din punct de vedere al modului de lucru, observăm două metode fundamentale de demonstraţie, şi anume: metoda punctului fix (teoreme de intersecţie care se bazează pe teorema punctului fix, a lui Brouwer), şi metode de separare (care utilizează teoreme de tip Hahn-Banach).

În continuare, studiul nostru în ceea ce priveşte (SEP), se împarte în două cazuri, în raport cu mulţimea A, şi anume, când aceasta este compactă sau nu.

2.1.1 Rezultate de existenţă pentru problema de echilibru definită pe mulţimi compacte

În această subsecţiune vom introduce o definiţie pentru funcţii scalare, mai slabă decât cea de superior semicontinuitate.

Definiţia 2.1.1. O funcţie $F : A \to \mathbb{R}$ se numeşte *pseudo-superior semicontinuă* in a dacă $F(a) < 0$ implică faptul că există $c > 0$ şi o vecinătate U a lui a astfel încât $F(x) + c < 0$ pentru orice $x \in A \cap A' \cap U$.

F se numeşte *pseudo-superior semicontinuă* pe A dacă este pseudo-superior semicontinuă in $a \in A$, pentru orice $a \in A \cap A'$.

Pseudo-superior semicontinuitatea unei funcţii poate fi caracterizată în felul următor. Notăm cu $\mathcal{V}(a)$ mulţimea tuturor vecinătăţilor lui a.

Lema 2.1.2. *F este pseudo-superior semicontinuă în $a \in A \cap A'$ dacă şi numai dacă*

$$F(a) < 0 \implies \limsup_{x \to a} F(x) < 0.$$

Remarca 2.1.3. Se observă uşor că dacă funcţia F este superior semicontinuă pe A atunci este pseudo-superior semicontinuă pe A.

În continuare, prezentăm un exemplu de funcţie F pseudo-superior semicontinuă în $a \in A$ şi care nu este superior semicontinuă în $a \in A$.

Exemplul 2.1.4. Fie $F : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ definită astfel

$$F(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-2, 1), \\ -2, & x = 1, \\ x - 2, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Se verifică uşor că funcţia de mai sus este pseudo-superior semicontinuă în $a = 1$. Pe de altă parte, nu este superior semicontinuă în $a = 1$.

Acum prezentăm un rezultat mai general pentru (SEP) decât cel stabilit de G. Kassay şi J. Kolumbán în [76]. În această teoremă, folosim ipoteza de pseudo-superior semicontinuitate a bifuncţiei f, în loc de superior semicontinuitatea.

Teorema 2.1.5. *Fie A mulţime compactă, fie B o mulţime nevidă şi fie $f : A \times B \to \mathbb{R}$ o bifuncţie care satisface următoarele condiţii:*

(i) pentru orice $b \in B$, funcţia $f(\cdot, b) : A \to \mathbb{R}$ este pseudo-superior semicontinuă pe A;

(ii) pentru orice $a_1, ..., a_m \in A$, $b_1, ..., b_n \in B$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, inegalitatea

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(a_i, b_j) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} f(a, b_j)$$

are loc;

(iii) pentru orice $b_1, ..., b_n \in B$, $\mu_1, ..., \mu_n \geq 0$ cu $\sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1$, avem

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} \mu_j f(a, b_j) \geq 0.$$

Atunci problema scalară de echilibru (SEP) are o soluţie.

În lucrarea G. Kassay şi J. Kolumban [76], autorii au obţinut condiţii suficiente pentru existenţa soluţiilor (SEP) folosind superior semicontinuitatea. Deoarece pseudo-superior semicontinuitatea este o noţiune mai slabă decât superior semicontinuitatea, rezultatul lor devine un corolar al Teoremei 2.1.5.

Corolar 2.1.6. [76] *Fie A o mulţime compactă, fie B o mulţime nevidă şi fie $f : A \times B \to \mathbb{R}$ o bifuncţie care satisface următoarele condiţii:*

(i) *pentru orice $b \in B$, $f(\cdot, b) : A \to \mathbb{R}$ este superior semicontinuă pe A;*

(ii) *pentru orice $a_1, ..., a_m \in A$, $b_1, ..., b_n \in B$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ with $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, inegalitatea*

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(a_i, b_j) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} f(a, b_j)$$

are loc;

(iii) *pentru orice $b_1, ..., b_n \in B$, $\mu_1, ..., \mu_n \geq 0$ cu $\sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1$, avem*

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} \mu_j f(a, b_j) \geq 0.$$

Atunci problema scalară de echilibru (SEP) are soluţie.

Dacă ipoteza (i) a Teoremei 2.1.5 este de natură topologică, ipotezele (ii) şi (iii) sunt condiţii de concavitate/convexitate generalizată.

A. Căpătă şi G. Kassay [29] au introdus un nou concept de convexitate pentru bifuncţii scalare.

Definiţia 2.1.7. O bifuncţie $f : A \times B \to \mathbb{R}$ se numeşte:

(i) *de tip subconcav* în prima variabilă dacă, pentru orice $k > 0$, $a_1, a_2 \in A$, şi $\lambda \in [0, 1]$ există $a \in A$ astfel încât

$$f(a, b) \geq \lambda f(a_1, b) + (1 - \lambda) f(a_2, b) - k,$$

pentru orice $b \in B$;

(ii) *de tip subconvex* în a doua variabilă dacă, pentru orice $k > 0$, $b_1, b_2 \in A$, şi $\lambda \in [0, 1]$ există $b \in A$ astfel încât

$$f(a, b) \leq \lambda f(a, b_1) + (1 - \lambda) f(a, b_2) + k,$$

pentru orice $a \in A$;

(iii) *de tip subconcav-subconvex* dacă este de tip subconcav în prima variabilă şi de tip subconvex în cea de-a doua.

O bifuncţie de tip subconcav poate fi caracterizată dupa cum urmează, vezi [29], [76].

Propoziţia 2.1.8. *O bifuncţie $f : A \times B \to \mathbb{R}$ este de tip subconcav în prima variabilă dacă şi numai dacă pentru orice $k > 0$, $a_1, a_2, ..., a_m \in A$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ există $a \in A$ astfel încât*

$$f(a, b) \geq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(a_i, b) - k \quad \textit{pentru orice} \quad b \in B.$$

O proprietate similară are loc pentru bifuncţiile de tip subconvex.

Propoziţia 2.1.9. [29] *O bifuncţie $f : A \times B \to \mathbb{R}$ este de tip subconvex în a doua variabilă dacă şi numai dacă pentru orice $k > 0$, $b_1, b_2, ..., b_m \in B$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ există $b \in B$ astfel încât*

$$f(a, b) \leq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(a, b_i) + k \quad \textit{pentru orice} \quad a \in A.$$

Remarca 2.1.10. Ipoteza (iii) a Teoremei 2.1.5 este satisfăcută dacă bifuncţia f este de tip subconvex în a doua variabilă şi condiţia

$$\sup_{a \in A} f(a, b) \geq 0 \quad \text{pentru orice} \quad b \in B, \tag{2.1}$$

este satisfăcută. În cazul în care $A = B$, această condiţie în plus este satisfăcută în particular dacă $f(a, a) = 0$ pentru orice $a \in A$.

Folosind aceste convexităţi generalizate şi Propoziţia 2.1.8, obţinem rezultatul următor.

Teorema 2.1.11. *Fie A o mulţime compactă şi fie bifuncţia $f : A \times B \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele condiţii:*

(i) pentru orice $b \in B$, funcţia $f(\cdot, b) : A \to \mathbb{R}$ este pseudo-superior semicontinuă pe A;

(ii) f este de tip subconcav-subconvex;

(iii) $\sup_{a \in A} f(a, b) \geq 0$ pentru orice $b \in B$.

Atunci problema scalară de echilibru (SEP) are soluţie.

Corolarul următor este un rezultat obţinut de A. Capătă şi G. Kassay [29] folosind superior semicontinuitatea, ipoteză mai tare decât pseudo-superior semicontinuitatea.

Corolar 2.1.12. [29] *Fie A o mulţime compactă şi fie bifuncţia $f : A \times B \to \mathbb{R}$ care satisface următoarele condiţii:*

(i) *pentru orice $b \in B$, funcţia $f(\cdot, b) : A \to \mathbb{R}$ este superior semicontinuă pe A;*

(ii) *f este de tip subconcav-subconvex;*

(iii) $\sup_{a \in A} f(a, b) \geq 0$ *pentru orice $b \in B$.*

Atunci problema scalară de echilibru (SEP) are soluţie.

2.1.2 Problema echilibrului în cazul mulţimilor necompacte

În această secţiune, X este un spaţiu Banach reflexiv iar X^* este dualul său.

A.N. Iusem, G. Kassay şi W. Sosa [65], [66] au obţinut rezultate de existenţă privind problema (SEP) în spaţii finit şi infinit dimensionale. Aşa cum reiese din teorema următoare, în spaţii finite, rezultatele de existenţă pot fi obţinute fără ipoteze de monotonie asupra bifuncţiei. În ceea ce priveşte spaţiile infinite, acest lucru se pare că este imposibil. Rezultatul în spaţii finit dimensionale este următorul.

Teorema 2.1.13. [65] *Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime convexă şi închisă şi $f : A \times A \to \mathbb{R}$ o bifuncţie dată. Presupunem că următoarele ipoteze sunt satisfăcute:*

(i) *$f(x, x) = 0$ pentru orice $x \in A$;*

(ii) *$f(x, \cdot)$ este pseudo-convexă şi inferior semicontinuă pentru orice $x \in A$;*

(iii) *$f(\cdot, y)$ este superior semicontinuă pentru orice $y \in A$;*

(iv) *pentru orice şir $\{x_n\} \subseteq A$ care satisface* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$, *există $u \in A$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(x_n, u) \leq 0$ pentru orice $n \geq n_0$.*

Atunci (SEP) admite soluţie.

Următorul rezultat obţinut în infinit dimensional este un caz particular al Teoremei 4.2 în [66] şi joacă un rol important în ceea ce priveşte scopul nostru.

Teorema 2.1.14. [66]. *Fie $A \subseteq X$ o mulţime convexă şi închisă şi $f : A \times A \to \mathbb{R}$ o bifuncţie dată. Presupunem că următoarele ipoteze sunt satisfăcute:*

(i) *$f(x, x) = 0$ pentru orice $x \in A$;*

(ii) *$f(x, \cdot)$ este convexă şi inferior semicontinuă pentru orice $x \in A$;*

(iii) $f(\cdot, y)$ *este superior hemicontinuă pentru orice* $y \in A$*;*

(iv) f *este propriu quasimonotonă;*

(v) pentru orice şir $\{x_n\} \subseteq A$ *care satisface* $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$*, există* $u \in A$ *şi* $n_0 \in \mathbb{N}$ *astfel încât* $f(x_n, u) \leq 0$ *pentru orice* $n \geq n_0$*.*

Atunci (SEP) *admite soluţie.*

În cazul spaţiilor infinit dimensionale, cea mai mare dificultate în obţinerea rezultatelor de existenţă pentru (SEP), fără monotonie, provine din faptul că bilele închise nu sunt compacte în raport cu topologia tare. În cazul spaţiilor Banach reflexive, acestea sunt slab compacte şi acest lucru ne permite obţinerea următorului rezultat pentru (SEP) fără a folosi monotonie dar cu o condiţie de continuitate mai tare pentru f în raport cu prima variabilă. Fiind dată $A \subseteq X$ şi $r > 0$, notăm $B_r = \{x \in A : \|x\| \leq r\}$.

Remarca 2.1.15. Pentru a stabili rezultatele noastre următoare, avem nevoie de o *condiţie de coercivitate* ceva mai slabă pentru f decât condiţia (v) anterioară. Aceasta este

(v') Pentru orice şir $\{x_n\} \subseteq A$ care satisface condiţia $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$, există un subşir $\{u_n\} \subseteq A$ cu $\|u_n\| < \|x_n\|$ şi $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $f(x_n, u_n) \leq 0$ pentru orice $n \geq n_0$.

Se verifică uşor, cu aceeaşi demonstraţie ca şi în [66], că Teorema 2.1.14 ramâne validă atunci când ipoteza (v) se înlocuieşte cu (v').

Remarca 2.1.16. Rezultate similare de existenţă în ceea ce priveşte (SEP) au mai fost stabilite de M. Bianchi şi R. Pini [18] (vezi, de exemplu, Theorem 4.2), dar acestea nu se compară cu Teorema 2.1.14 (nici una nu se deduce din cealaltă).

Absenţa compactităţii mulţimii A poate fi depăşită folosind diferite tipuri de aşa numite *condiţii de coercivitate*. În această subsecţiune vom folosi astfel de condiţii.

Teorema 2.1.17. [77] *Presupunem că mulţimea* $A \subseteq X$ *este închisă şi convexă.*
Fie $f : A \times A \to \mathbb{R}$ *o bifuncţie care satisface condiţiile:*

(i) $f(x, x) = 0$ *pentru orice* $x \in A$;

(ii) $f(x, \cdot)$ *este semistrict quasiconvexă şi inferior semicontinuă pentru orice* $x \in A$;

(iii) $f(\cdot, y)$ *este slab superior semicontinuă pentru orice* $y \in A$;

(iv) Există $r > 0$ *astfel încât pentru fiecare* $x \in A \backslash B_r$*, există* $y \in A$ *cu* $\|y\| < \|x\|$ *şi* $f(x, y) \leq 0$*.*

Atunci problema de echilibru scalară (SEP) *are soluţii.*

Următoarea teoremă prezintă condiţii suficiente pentru existenţa soluţiilor problemei (SEP).

Teorema 2.1.18. [77] *Fie A o submulţime închisă şi convexă a lui X şi fie $f : A \times A \to \mathbb{R}$ o bifuncţie care satisface:*
(i) $f(x,x) = 0$ pentru orice $x \in A$;
(ii) $f(x,\cdot)$ este semistrict quasiconvexă şi inferior semicontinuă pentru orice $x \in A$;
(iii) $f(\cdot,y)$ este superior semicontinuă pe intersecţia lui A cu orice subspaţiu finit dimensional al lui X, pentru orice $y \in A$;
(iv) Pentru fiecare $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq A$, $x_\alpha \rightharpoonup \overline{x}$ şi pentru orice segment $D \subseteq A$ astfel încât $\overline{x} \in D$,

$$f(x_\alpha, y) \geq 0,\ \forall\ \alpha \in I,\ \forall\ y \in D \Rightarrow f(\overline{x}, y) \geq 0,\ \forall\ y \in D;$$

(v) Există $r > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A \backslash B_r$, există $y \in A$ with $\|y\| < \|x\|$ şi $f(x,y) \leq 0$.
Atunci problema de echilibru scalară (SEP) are soluţii.

2.2 Rezultate de existenţă pentru problema de echilibru vectorială

În cadrul acestei secţiuni, vom presupune că A este o submulţime nevidă a unui spaţiu topologic X, B este o mulţime nevidă, Y este un spaţiu topologic vectorial şi $K \subseteq Y$ este un con convex care este şi solid, dacă nu se specifică altfel.

Fie $f : A \times B \to Y$ o bifuncţie dată. Problema vectorială de echilibru constă în aflarea unui element $a \in A$ astfel încât

$$(VEP) \qquad f(a,b) \notin -\mathrm{int}K \ \text{ pentru orice } \ b \in B.$$

(VEP) a fost studiată intens în ultimii ani, vezi, de exemplu, Q.H. Ansari, S. Schaible şi J.C. Yao [8], M. Bianchi, N. Hadjisavvas şi S. Schaible [16], A. Capătă şi G. Kassay [29], D.T. Luc [92].

În literatură, există diferite noţiuni care extind noţiunile clasice de *infimum* şi *supremum* pentru o mulţime a unui spaţiu topologic vectorial ordonat după un con. În cele ce urmează vom folosi două dintre astfel de concepte. Primul tip de infimum şi supremum a fost introdus de Q.H. Ansari, X.C. Yang şi J.C. Yao [7].

Pentru o submulţime C a lui Y, infimumul lui C în raport cu conul K este definit astfel

$$\mathrm{Inf}(C,K) = \{y \in \mathrm{cl}\, C : (y - \mathrm{int}K) \cap C = \emptyset\}$$

şi supremumul lui C în raport cu K este definit astfel

$$\operatorname{Sup}(C, K) = \{y \in \operatorname{cl} C : (y + \operatorname{int} K) \cap C = \emptyset\}.$$

Din definiţiile anterioare se observă că $\operatorname{Inf}(C, K)$ şi $\operatorname{Sup}(C, K)$ sunt vide atunci când $C = \emptyset$. Invers, afirmaţia nu are loc. Condiţii suficiente pentru ca $\operatorname{Inf}(C, K)$ şi $\operatorname{Sup}(C, K)$ să fie nevide, pot fi găsite, de exemplu, în Y. Chiang [35].

În continuare, vom considera infimumul şi supremumul unei submulţimi ale lui Y în raport cu un con fixat. De asemenea, vom scrie simplu $\operatorname{Inf} C$ şi $\operatorname{Sup} C$; pentru mai multe detalii, vezi Y. Chiang [35].

Alte tipuri de infimum şi supremum sunt următoarele (vezi A. Löhne [91]). Pentru o submulţime C a lui Y, $\inf C$ este un element $u \in Y$ cu proprietatea că $u \leq_K y$ pentru orice $y \in C$ şi pentru orice $v \in C$ cu proprietatea $v \leq_K y$ pentru orice $y \in C$, avem $u \leq_K v$. De asemenea, $\sup C$ este un element $u \in Y$ cu proprietatea că $y \leq_K u$ pentru orice $y \in C$ şi pentru orice $v \in C$ cu proprietatea că $y \leq_K v$ pentru orice $y \in C$, avem $u \leq_K v$.
Din definiţiile anterioare se observă că $\sup C$ şi $\inf C$ nu au mai mult de un element dacă, în plus, conul K este punctat.

Următoarele proprietăţi au fost stabilite în [35].

Propoziţia 2.2.1. *Dacă* $y \in \operatorname{Inf} C$ *şi* $k \in K$, *atunci* $(y + k - \operatorname{int} K) \cap C \neq \emptyset$.

Propoziţia 2.2.2. *Dacă* $y \in C$, *atunci* $\operatorname{Inf}(\operatorname{cl} C \cap (y - K)) \subset \operatorname{Inf} C$.

Pentru a obţine următoarele rezultate, avem nevoie de următoarea lema.

Lema 2.2.3. *Presupunem că există* $c \in C \cap (-\operatorname{int} K)$ *astfel încât*

$$\operatorname{Inf}(\operatorname{cl} C \cap (c - K)) \neq \emptyset.$$

Atunci

$$(\operatorname{Inf} C) \cap (-\operatorname{int} K) \neq \emptyset.$$

În definiţia următoare vom introduce două noi concepte $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{Sup} F(x)$ şi $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{Inf} F(x)$.

Definiţia 2.2.4. Pentru un $a \in A'$ şi o funcţie $F : A \to Y$ definim

(i) $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{Sup} F(x) =$
$\operatorname{Inf}\{\sup\{F(x) : x \in A \cap U \setminus \{a\}\} : U \in \mathcal{V}(a), A \cap U \setminus \{a\} \neq \emptyset\}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to a} \operatorname{Inf} F(x) =$
$\operatorname{Sup}\{\inf\{F(x) : x \in A \cap U \setminus \{a\}\} : U \in \mathcal{V}(a), A \cap U \setminus \{a\} \neq \emptyset\}$.

La fel ca şi în cazul scalar, introducem noţiunea de K-pseudo-superior semicontinuitate pentru funcţii vectoriale.

Definiţia 2.2.5. O funcţie $F : A \to Y$ se numeşte *K-pseudo-superior semicontinuă* in $a \in A$ dacă $F(a) \in -\text{int}K$ implică că există un $k \in \text{int}K$ şi o vecinătate U a lui a astfel încât $F(x)+k \in -\text{int}K$ pentru orice $x \in A \cap U$.

F se numeşte *K-pseudo-superior semicontinuă pe A* dacă este K-pseudo-superior semicontinuă in $a \in A$ pentru orice $a \in A$.

Definiţia 2.2.6. Spunem că o funcţie $F : A \to Y$ satisface *proprietatea* (LS) in $a \in A \cap A^{'}$ dacă

$$F(a) \in -\operatorname{int} K \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x \to a} \operatorname{Sup} F(x) \cap (-\operatorname{int} K) \neq \emptyset.$$

În cele ce urmează, vom da o condiţie suficientă pentru K-pseudo-superior semicontinuitate în termenii $\lim \operatorname{Sup}$.

Teorema 2.2.7. *Dacă o funcţie $F : A \to Y$ satisface proprietatea (LS) în $a \in A \cap A^{'}$ atunci F este K-pseudo-superior semicontinuă în $a \in A$.*

Definiţia 2.2.8. [92] Fie X un spaţiu topologic, fie $A \subseteq X$ o mulţime nevidă, fie Y un spaţiu vectorial topologic şi fie $K \subseteq Y$ un con convex, nu neapărat solid. O funcţie $F : A \to Y$ se numeşte:

(i) K-superior semicontinuă în punctul $a \in A$ dacă, pentru orice vecinătate V a lui $F(a)$, există o vecinătate U a lui a astfel încât $F(x) \in V - K$ pentru orice $x \in U \cap A$.

(ii) K-superior semicontinuă pe A dacă este K-superior semicontinuă în fiecare $a \in A$.

(iii) K-inferior semicontinuă în punctul $a \in A$ (respectiv K-inferior semicontinuă pe A) dacă $-F$ este K-superior semicontinuă în a (respectiv K-superior semicontinuă pe A).

Remarca 2.2.9. În ipoteza că K este un con convex solid, T. Tanaka [117] a demonstrat că itemul (i) al definiţiei anterioare este echivalent cu: pentru orice $k \in \text{int}K$, există o vecinătate U a lui a astfel încât $F(x) \in F(a) + k - \text{int}K$ pentru orice $x \in A \cap U$.

Teorema 2.2.10. *Dacă $F : A \to Y$ este K-superior semicontinuă în $a \in A$ atunci F este K-pseudo-superior semicontinuă în $a \in A$.*

Următoarea teoremă demonstrează existenţa soluţiilor pentru problema de echilibru vectorială folosind ipoteza de K-pseudo-superior semicontinuitate.

Teorema 2.2.11. *Fie A o mulţime compactă, fie B o mulţime nevidă şi fie $f : A \times B \to Y$ o bifuncţie dată care satisface următoarele condiţii:*

(i) pentru orice $b \in B$, funcţia $f(\cdot, b) : A \to Y$ este K-pseudo-superior semicontinuă pe A;

(ii) pentru orice $a_1, ..., a_m \in A$, $b_1, ..., b_n \in B$, $\lambda_1, ..., \lambda_m \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, există $k^* \in K^* \setminus \{0\}$ astfel încât

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i k^*(f(a_i, b_j)) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} k^*(f(a, b_j));$$

(iii) pentru orice $b_1, ..., b_n \in B$ şi $k_1^*, ..., k_n^* \in K^*$ nu toate zero, avem

$$\sup_{a \in A} \sum_{j=1}^{n} k_j^* f(a, b_j) \geq 0.$$

Atunci problema vectorială de echilibru (VEP) admite soluţii.

Ipoteza (ii) a Teoremei 2.2.11 este o concavitate generalizată pentru bifuncţia f în prima variabilă în raport cu conul K. Asemănător cu cazul scalar (Definiţia 2.1.7), A. Capătă şi G. Kassay au introdus un nou concept pentru bifuncţii vectoriale. O noţiune asemănătoare a fost introdusă de Jeyakumar [70] pentru funcţii vectoriale, vezi Definiţia 1.2.6.

Definiţia 2.2.12. [29] O bifuncţie $f : A \times B \to Y$ se numeşte:

(i) *de tip K-subconcav* în prima variabilă dacă pentru orice $k \in \text{int}K$, $a_1, a_2 \in A$ şi $\lambda \in [0, 1]$ există $a \in A$ astfel încât

$$f(a, b) \geq_K \lambda f(a_1, b) + (1 - \lambda) f(a_2, b) - k,$$

pentru orice $b \in B$;

(ii) *de tip K-subconvex* în a doua variabilă dacă pentru orice $k \in \text{int}K$, $b_1, b_2 \in A$ şi $\lambda \in [0, 1]$ există $b \in A$ astfel încât

$$f(a, b) \leq_K \lambda f(a, b_1) + (1 - \lambda) f(a, b_2) + k,$$

pentru orice $a \in A$;

(iii) *de tip K-subconcav-subconvex* dacă este de tip K-subconcav in prima variabilă şi de tip K-subconvex in a doua variabilă.

O bifuncţie vectorială de tip K-subconcav se poate caracteriza astfel:

Propoziţia 2.2.13. [29] *O bifuncţie* $f : A \times B \to Y$ *este de tip* K*-subconcav în prima variabilă dacă şi numai dacă pentru orice* $k \in \operatorname{int} K$, $a_1, a_2, ..., a_m \in A$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m \geq 0$ *cu* $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ *există* $a \in A$ *astfel încât*

$$f(a,b) \geq_K \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(a_i, b) - k \quad \textit{pentru orice} \quad b \in B. \tag{2.2}$$

Din Propoziţia 2.2.13 este uşor de observat că (2.2) este o condiţie suficientă pentru a obţine condiţia (iii) din Teorema 2.2.11.

Teorema 2.2.14. *Fie* A *o mulţime compactă şi o bifuncţie* $f : A \times B \to Y$ *care satisface următoarele condiţii:*

(i) pentru orice $b \in B$*, funcţia* $f(\cdot, b) : A \to Y$ *este* K*-pseudo-superior semicontinuă pe* A*;*

(ii) f *este de tip* K*-subconcav în prima variabilă;*

(iii) pentru orice $b_1, b_2, ..., b_n \in B$, $k_1^*, k_2^*, ..., k_n^* \in K^*$*, nu toate zero, avem*

$$\sup_{a \in A} \sum_{i=1}^{m} k_j^*(f(a,b)) \geq 0 \quad \textit{pentru orice} \quad b \in B.$$

Atunci problema vectorială de echilibru (VEP) *admite soluţii.*

Următorul rezultat a fost obţinut de A. Capătă şi G. Kassay [29] pentru bifuncţii vectoriale folosind ipoteza de superior semicontinuitate, ipoteză mai tare decât cea K-pseudo-superior semicontinuitate.

Corolar 2.2.15. *Fie* A *o mulţime compactă şi fie bifuncţia* $f : A \times B \to Y$ *care satisface următoarele condiţii:*

(i) pentru orice $b \in B$*, funcţia* $f(\cdot, b) : A \to Y$ *este superior semicontinuă pe* A*;*

(ii) f *este de tip* K*-subconcav în prima variabilă;*

(iii) pentru orice $b_1, b_2, ..., b_n \in B$, $k_1^*, k_2^*, ..., k_n^* \in K^*$*, nu toate zero, avem*

$$\sup_{a \in A} \sum_{i=1}^{m} k_j^*(f(a,b)) \geq 0 \quad \textit{for each} \quad b \in B.$$

Atunci problema vectorială de echilibru (VEP) *admite soluţii.*

2.3 Probleme vectoriale de echilibru definite ca sumă de două funcţii

Aşa cum am vazut pană acum, (SEP) a fost studiată intensiv în ultimii ani. Totuşi, cazul special când $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$ cu $g,h : A \times A \to \mathbb{R}$ a fost studiat mai putin, deşi a fost studiat în E. Blum şi W. Oettli [21], unde autorii au obţinut rezultate de existenţă a soluţiilor impunând ipoteze separate asupra lui g şi h. Aşa cum apare în [21], dacă $g = 0$, rezultatul devine o variantă a teoremei lui Ky Fan [45], în timp ce pentru $h = 0$, devine o variantă a teoremei Browder-Minty pentru inegalităţi variaţionale (vezi F.E. Browder [24], [25], G.J. Minty [99]).

În cadrul aceste secţiuni, dacă nu se specifică altfel, X şi Y sunt spaţii (reale) topologice vectoriale, $A, B \subseteq X$ sunt mulţimi convexe nevide (B este de obicei o submulţime compactă a lui A, dar nu întotdeauna) şi $K \subseteq Y$ un con convex propriu cu interior nevid astfel încât $0 \in K \cap (-K)$.

Dacă $\mathbb{R}$ este înlocuit de Y, adică, dacă f devine o funcţie vectorială $f : A \times A \to Y$, putem considera *problema vectorială de echilibru* în felul următor:

(VEP) să se afle $\overline{x} \in A$ astfel încât $f(\overline{x}, y) \notin -\text{intK}$ pentru orice $y \in A$.

Această problemă a atras atenţia în ultimii ani în special datorită aplicaţiilor din domeniul optimizării vectoriale şi a inegalităţilor variaţionale (vezi, de exemplu A. Capătă şi G. Kassay [29], Y.P. Fang şi N.J. Huang [46], N. Hadjisavvas şi S. Schaible [58]).
Urmând ideea şi paşii folositi în demonstraţii de Blum şi Oettli, K.R. Kazmi [79] a obţinut rezultate de existenţă pentru (VEP) în cazul în care $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$, cu $g,h : A \times A \to Y$. Vom demonstra în cele ce urmează că ipotezele lui K. Kazmi sunt prea tari şi nu se obţin rezultatele lui Blum şi Oettli atunci când $Y := \mathbb{R}$ şi $K := [0, \infty)$.

Rezultatele din această secţiune apar în lucrarea G. Kassay şi M. Miholca [78] unde se doreşte slăbirea ipotezelor lui K.Kazmi în aşa fel încât să se obţină rezultatele lui Blum-Oettli pe de o parte şi obţinerea de noi teoreme , pe de altă parte. Cazul special al spaţiului Banach reflexiv înzestrat cu topologia slabă este tratat separat şi obţinem condiţii suficiente pentru garantarea condiţiei de coercivitate.

Reamintim pentru început următorul concept. Dacă $B \subseteq A$, atunci $\text{core}_A B$, interiorul lui B relativ la A, este definit astfel

$$a \in \text{core}_A B \iff (a \in B \ \text{ şi } \ B \cap (a, y] \neq \emptyset \ \text{ pentru orice } \ y \in A \backslash B),$$

unde $(a, y] = \{\lambda a + (1 - \lambda) y : \lambda \in [0, 1)\}$. Să observăm că $\text{core}_A A = A$.

Proprietatea următoare ne va folosi în cele ce urmează.

Lema 2.3.1. *Pentru orice $x, y \in Y$ avem:*

$$x \in K,\ y \notin -\mathrm{int}K \Rightarrow x + y \notin -\mathrm{int}K.$$

În optimizarea vectorială, relaxări sau modificări ale noţiunilor clasice de *inferior/superior semicontinuitate* pentru funcţii scalare au fost studiate şi pentru funcţii vectoriale cu scopul de a investiga existenţa soluţiilor eficiente şi de a obţine caracterizări ale lor.
În ceea ce priveşte cercetările noastre, folosim semicontinuitatea K-superioară (inferioară), prezentată deja în Definiţia 2.2.8.

Următoarea caracterizare a K-superior semicontinuităţii a fost dată de T. Tanaka [117] (vezi de asemenea Remarca 2.2.9).

Lema 2.3.2. *Următoarele trei afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *F este K-superior semicontinuă pe X;*

(ii) *pentru orice $x \in X$, pentru orice $k \in \mathrm{intK}$, există o vecinătate $U \subseteq X$ of x astfel încât $F(u) \in F(x) + k - \mathrm{intK}$ pentru orice $u \in U$;*

(iii) *pentru orice $a \in Y$, mulţimea $\{x \in X : F(x) - a \in -\mathrm{intK}\}$ este deschisă.*

Cu scopul de a obţine rezultate de existenţă pentru (SEP), A. N. Iusem, G. Kassay şi W. Sosa [66] au introdus următoarea (uşor mai tare) variantă de propriu quasimonotonie (denumită de autori *proprietatea P4"*):

Definiţia 2.3.3. O bifuncţie $f : A \times A \to \mathbb{R}$ se numeşte *esenţial monotonă* dacă pentru orice $x_1, \cdots, x_n \in A$ şi $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \geq 0$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, avem că

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) \leq 0.$$

În cele ce urmează, vom defini noţiunile corespunzătoare de monotonie, propriu monotonie (vezi Definiţia 1.2.7) şi esenţial quasimonotonie pentru bifuncţii vectoriale.

Definiţia 2.3.4. (vezi, de exemplu, [79]) O bifuncţie $f : A \times A \to Y$ se numeşte *K-monotonă* dacă

$$f(x, y) + f(y, x) \in -K \quad \text{pentru orice} \quad x, y \in A.$$

Definiţia 2.3.5. [78] O bifuncţie $f : A \times A \to Y$ se numeşte

(i) K-*propriu quasimonotonă* dacă pentru oricare $x_1, ...x_n \in A$ şi oricare $\lambda_1, ...\lambda_n \geq 0$ astfel încât $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ există un i_0 astfel încât

$$f(x_{i_0}, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) \notin \text{int}K;$$

(ii) K-*esenţial quasimonotonă* dacă pentru oricare $x_1, ...x_n \in A$ şi oricare $\lambda_1, ...\lambda_n \geq 0$ astfel încât $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ avem că

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i, \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j) \notin \text{int}K.$$

Se observă uşor că dacă f este K-esenţial quasimonotonă atunci f este K-propriu quasimonotonă. Relaţia dintre K-monotonie şi K-esenţial quasimonotonie reiese din următorul rezultat.

Propoziţia 2.3.6. [78] *Presupunem că $f : A \times A \to Y$ este K-monotonă şi K-convexă în al doilea argument. Atunci f este K-esenţial quasimonotonă.*

Exemplul următor arată că o bifuncţie K-esenţial quasimonotonă nu este în mod necesar K-monotonă, chiar dacă este K-convexă în a doua variabilă.

Exemplul 2.3.7. [78] Fie $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dată de $f = (f_1, f_2)$, unde $f_1(x,y) = |x-y|$, $f_2(x,y) = 0$ pentru orice $x, y \in [0,1]$. Se observă că f este $\mathbb{R}^2_+$-esenţial quasimonotonă, $\mathbb{R}^2_+$-convexă în a doua variabilă şi nu este $\mathbb{R}^2_+$-monotonă, deoarece $f(1,0) + f(0,1) = (2,0) \notin -\mathbb{R}^2_+$.

2.3.1 Rezultate de existenţă pentru (VEP)

În cele ce urmează, suntem interesaţi în a obţine rezultate de existenţă pentru (VEP) atunci când bifuncţia $f : A \times A \to Y$ este dată astfel $f(x,y) = g(x,y) + h(x,y)$, unde $g, h : A \times A \to Y$. O astfel de situaţie, a fost deja studiată de Blum şi Oettli [21] în cazul particular când $Y := \mathbb{R}$ şi $K := [0, \infty)$, adică, problema de echilibru scalară (SEP). Aceste rezultate au fost obţinute în ipoteza că g este monotonă şi satisface un fel de condiţie de superior continuitate în prima variabilă, în timp ce h nu este monotonă, în schimb satisface o condiţie mai tare de semicontinuitate în prima variabilă. Ceva mai tarziu, K. Kazmi [79], a încercat a obţine aceste rezultate în cazul (VEP) urmând ideile din [21] dar ipotezele sale sunt prea tari, prin urmare nu se obţin rezultatele din Blum si Oettli. Menţionăm că în timp ce în [21] ipotezele sunt de semicontinuitate pentru funcţii scalare, K. Kazmi cere ipoteze de continuitate pentru funcţii vectoriale. Scopul acestei secţiuni este de a imbunătăţi rezultatele lui Kazmi slăbind ambele ipoteze (topologice şi algebrice) în aşa fel încât să putem reobţine rezultatele lui Blum şi Oettli (următoarele trei Leme şi Teorema 2.3.13); de asemenea vom obţine în această secţiune rezultate de existenţă fără a impune ipoteze de monotonie asupra lui g. Acest lucru este posibil presupunând ipoteza de K-concavitate a lui g în raport cu prima variabilă (Teorema 3.6.21 următoare).

Pentru început, prezentăm trei leme. Prima lema poate fi văzută, de asemenea, ca un rezultat de existenţă pentru o problemă vectorială specială de echilibru.

Lema 2.3.8. [78] *Fie B o submulţime compactă a lui X, fie $g : B \times B \to Y$ şi $h : B \times B \to Y$ două bifuncţii care satisfac condiţiile:*

(i) g este K-esenţial quasimonotonă şi K-inferior semicontinuă în a doua variabilă;

(ii) h este K-superior semicontinuă în prima variabilă şi K-convexă în a doua variabilă; $h(x,x) \in K$ pentru orice $x \in B$.

În aceste condiţii, există $\overline{x} \in B$ astfel încât

$$h(\overline{x}, y) - g(y, \overline{x}) \notin -\mathrm{int}K,$$

pentru orice $y \in B$.

Lema 2.3.9. [78] *Fie $g : B \times B \to Y$ şi $h : B \times B \to Y$ două bifuncţii care satisfac condiţiile:*

(i) g este K-convexă în a doua variabilă, $g(x,x) \in K$ pentru orice $x \in B$, şi pentru orice $x, y \in B$ funcţia $t \in [0,1] \to g(ty + (1-t)x, y)$ este K-superior semicontinuă in 0;

(ii) h este K-convexă în a doua variabilă; $h(x,x) = 0$ pentru orice $x \in B$.

Dacă există $\overline{x} \in B$ astfel încât $h(\overline{x}, y) - g(y, \overline{x}) \notin -\mathrm{int}K$ pentru orice $y \in B$ atunci $h(\overline{x}, y) + g(\overline{x}, y) \notin -\mathrm{int}K$ pentru orice $y \in B$.

Lema 2.3.10. [78] *Fie $B \subseteq A$. Presupunem că $F : A \to Y$ este K-convexă, $x_0 \in \mathrm{core}_A B$, $F(x_0) \in -K$ şi $F(y) \notin -\mathrm{int}K$ pentru orice $y \in B$. Atunci $F(y) \notin -\mathrm{int}K$ pentru orice $y \in A$.*

Remarca 2.3.11. Aşa cum arată exemplul următor, ipoteza $F(x_0) \in -K$ din cadrul Lemei 2.3.10 nu poate fi slăbită cu condiţia $F(x_0) \notin \mathrm{int}K$ şi în acest caz, Lema 10 în Kazmi [79] este falsă.

Exemplul 2.3.12. [78] Fie $X = A := \mathbb{R}$, $B := [-1, 1]$, $Y := \mathbb{R}^2$, $K := \mathbb{R}^2_+$, $F(x) = (x+1, x-1)$ şi $x_0 = 0$. Observăm că F este $\mathbb{R}^2_+$-convexă (se observă că ambele componente sunt afine), $x_0 \in \mathrm{core}_A B$, $F(x_0) = (1, -1) \notin \mathrm{int}K$ şi $F(y) \notin -\mathrm{int}K$ pentru orice $y \in B$. Luând, de exemplu, $y = -2$ obţinem $F(-2) = (-1, -3) \in -\mathrm{int}K$.

În continuare, putem să enunţăm rezultatul principal din această secţiune.

Teorema 2.3.13. [78] *Presupunem că $g : A \times A \to Y$ şi $h : A \times A \to Y$ satisfac:*

(i) g este K-esenţial quasimonotonă, K-convexă şi K-inferior semicontinuă în a doua variabilă; $g(x,x) \in K \cap (-K)$ pentru orice $x \in A$ şi pentru orice $x, y \in A$, funcţia $t \in [0,1] \to g(ty + (1-t)x, y)$ este K-superior semicontinuă în 0;

(ii) h este K-superior semicontinuă în prima variabilă şi K-convexă în a doua variabilă; $h(x,x) = 0$ pentru orice $x \in A$;

(iii) Există o submulţime compactă, convexă şi nevidă C of A astfel încât pentru orice $x \in C \setminus \mathrm{core}_A C$ există un $a \in \mathrm{core}_A C$ astfel încât

$$g(x,a) + h(x,a) \in -K.$$

În aceste ipoteze, există $\overline{x} \in C$ astfel încât

$$g(\overline{x}, y) + h(\overline{x}, y) \notin -\mathrm{int}K,$$

pentru orice $y \in A$.

Rezultatul următor, obţinut de K.R. Kazmi [79], devine un caz particular al Teoremei 2.3.13. Spaţiile X şi Y rămân la fel, $A \subseteq X$ este o submulţime nevidă închisă şi convexă şi $K \subseteq Y$ este un con propriu închis şi convex cu interior nevid.

Corolar 2.3.14. *Presupunem că $g : A \times A \to Y$ şi $h : A \times A \to Y$ satisfac:*

(i) g este K-monotonă, K-convexă şi continuă în raport cu a doua variabilă; $g(x,x) = 0$ pentru orice $x \in A$ şi pentru orice $x, y \in A$ funcţia $t \in [0,1] \to g(ty+(1-t)x, y)$ este continuă în 0;

(ii) h este continuă în primul argument şi K-convexă în al doilea argument; $h(x,x) = 0$ pentru orice $x \in A$;

(iii) Există o submulţime nevidă compactă şi convexă C a lui A astfel încât pentru orice $x \in C \setminus \mathrm{core}_A C$ există un $a \in \mathrm{core}_A C$ astfel încât

$$g(x,a) + h(x,a) \in -K.$$

În aceste condiţii, există $\overline{x} \in C$ astfel încât

$$g(\overline{x}, y) + h(\overline{x}, y) \notin -\mathrm{int}K,$$

pentru orice $y \in A$.

Remarca 2.3.15. Teorema 2.3.13 imbunătăţeste din câteva puncte de vedere rezultatul anterior al lui Kazmi. Se observă că bifuncţia f definită in Exemplul 2.3.7 satisface toate cerinţele cerute asupra lui g în itemul (i) al Teoremei 2.3.13, în schimb nu este $\mathbb{R}^2_+$-monotonă, prin urmare nu satisface itemul (i) al Corolarului 2.3.14. O altă imbunătăţire în ceea ce priveşte ipotezele de continuitate poate fi remarcată în exemplul următor, obţinut modificând uşor Exemplul 9.27 din H.H. Bauschke şi P.L. Combettes [14].

Exemplul 2.3.16. [78] Fie $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \cup \{(0, 0)\}$ şi considerăm funcţia $f : A \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Este evident că f este convexă şi inferior semicontinuă dar nu este continuă în $(0, 0)$. Fie un şir $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cu $x_n > 0$ şi $x_n \to 0$ atunci când $n \to \infty$. Atunci $f(x_n^2, x_n) = 1$ pentru orice n dar $f(0, 0) = 0$, adică f nu este continuă in $(0, 0)$. Fie $Y := \mathbb{R}$ şi $K := [0, \infty)$; considerăm bifuncţia $g : A \times A \to \mathbb{R}$ definită astfel $g(a, b) := f(b) - f(a)$, unde $a = (x, y), b = (u, v) \in A$. Atunci g satisface ipotezele Teoremei 2.3.13 (i) dar nu satisface itemul (i) al Corolarului 2.3.14 deoarece nu este continuă.

Datorită îmbunătăţirilor aduse Teoremei 7 a lui K.R. Kazmi [79], următorul rezultat al lui E. Blum şi W. Oettli [21] devine un caz particular al Teoremei 2.3.13.

Corolar 2.3.17. *Fie X un spaţiu topologic vectorial, $A \subseteq X$ o mulţime nevidă închisă şi convexă, $g : A \times A \to \mathbb{R}$ şi $h : A \times A \to \mathbb{R}$ care satisfac:*

(i) g este monotonă, convexă şi inferior semicontinuă în al doilea argument; $g(x, x) = 0$ pentru orice $x \in A$ şi pentru orice $x, y \in A$, funcţia $t \in [0, 1] \to g(ty + (1 - t)x, y)$ este superior semicontinuă în 0;

(ii) h este superior semicontinuă în primul primul argument şi convexă în cel de-al doilea; $h(x, x) = 0$ pentru orice $x \in A$;

(iii) Există o submulţime nevidă compactă şi convexă C a lui A astfel încât pentru orice $x \in C \setminus \mathrm{core}_A C$ există un $a \in \mathrm{core}_A C$ astfel încât

$$g(x, a) + h(x, a) \leq 0.$$

În aceste ipoteze, există $\overline{x} \in C$ astfel încât

$$g(\overline{x}, y) + h(\overline{x}, y) \geq 0,$$

pentru orice $y \in A$.

Vom incheia această secţiune cu o variantă a Teoremei 2.3.13 în care nu cerem condiţii de monotonie asupra lui g, în schimb cerem ca g să fie K-concavă în primul argument. În acest fel, condiţiile algebrice impuse asupra lui g şi h devin simetrice. Se pare că acest rezultat conţine o noutate chiar şi pentru cazul scalar (adică, dacă $Y := \mathbb{R}$ şi $K := [0, \infty)$.)

Teorema 2.3.18. [78] *Presupunem că $g : A \times A \to Y$ şi $h : A \times A \to Y$ satisfac:*

(i) g este K-concavă în prima variabilă, K-convexă şi K-inferior semicontinuă în cea de-a doua variabilă; $g(x, x) \in K \cap (-K)$ pentru orice $x \in A$ şi oricare $x, y \in A$ funcţia $t \in [0, 1] \to g(ty + (1 - t)x, y)$ este K-superior semicontinuă în 0;

(ii) h este K-superior semicontinuă în prima variabilă şi K-convexă în cea de-a doua variabilă; $h(x, x) = 0$ pentru orice $x \in A$;

(iii) Există o submulţime nevidă compactă şi convexă C a lui A astfel încât pentru orice $x \in C \setminus \mathrm{core}_A C$ există un $a \in \mathrm{core}_A C$ astfel încât

$$g(x, a) + h(x, a) \in -K.$$

În aceste ipoteze, există $\overline{x} \in C$ astfel încât

$$g(\overline{x}, y) + h(\overline{x}, y) \notin -\mathrm{int}K,$$

pentru orice $y \in A$.

2.3.2 Cazul spaţiilor Banach reflexive

Scopul acestei subsecţiuni este acela de a obţine condiţii suficiente pentru condiţia de coercivitate cerută în ipoteza (iii) a Teoremei 2.3.13 (ori a Teoremei 2.3.18) unde X este un spaţiu Banach reflexiv înzestrat cu topologia slabă. Ştim că orice mulţime mărginită, convexă şi închisă (în particular bilele închise) sunt (slab) compacte. Prin urmare, toate ipotezele cerute anterior sunt satisfăcute dacă o mulţime (închisă şi convexă) A este mărginită. Prin urmare, în continuare, vom presupune că mulţimea A este nemărginită. Fie $a \in A$ un element fixat. Începem cu următoarele:

(C) există $\rho > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$: $\|x - a\| = \rho$ avem $g(x, a) + h(x, a) \in -K$.

Propoziţia 2.3.19. [78] *În ipotezele condiţiei (C), condiţia (iii) din Teorema 2.3.13 este satisfăcută.*

În cele ce urmează, vom da condiţii suficiente pentru coercivitate impunând condiţii separate asupra lui g şi h. Considerăm următoarele ipoteze.

(G) (mărginirea superioară a lui $g(\cdot, a)$ pe o bila închisă): există $M \in Y$ şi $r > 0$ astfel încât

$$M - g(x, a) \in K, \text{ dacă } x \in A, \ \|x - a\| \leq r,$$

şi

(H) există un element $u \in -\mathrm{int}K$ astfel încât pentru orice $t > 0$ există $R > 0$ care satisface condiţia

$$\forall x \in A : \ \|x - a\| \geq R : \ tu\|x - a\| - h(x, a) \in K.$$

Remarca 2.3.20. (H) este evident îndeplinită dacă $Y := \mathbb{R}$, $K := [0, \infty)$ şi

$$\frac{h(x, a)}{\|x - a\|} \to \ -\infty \text{ atunci când } \|x - a\| \to \infty, \quad x \in A.$$

(Condiţia (c) din [21].) Într-adevăr, luând $u = -1$ şi $t > 0$ arbitrar, deoarece

$$\frac{h(x, a)}{\|x - a\|} \to \ -\infty \ \text{ atunci când } \ \|x - a\| \to \infty,$$

putem găsi un $R > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$:

$$\|x - a\| \geq R, \quad \frac{h(x, a)}{\|x - a\|} \leq -t,$$

ceea ce demonstrează concluzia.

În continuare, avem nevoie de următoarea proprietate. Notăm cu $B(u, r)$ bila deschisă cu centrul în $u \in X$ şi de rază $r > 0$.

Lema 2.3.21. [78] *Fie $v \in Y$ şi $u \in -\mathrm{int}K$ arbitrare. Atunci există un număr $t > 0$ astfel încât $v + tu \in -\mathrm{int}K$.*

Acum vom prezenta o lemă tehnică privind funcţia g.

Lema 2.3.22. [78] *Presupunem că g satisface (G) şi $g(\cdot, a)$ este K-concavă cu $g(a, a) \in K$. Atunci*

$$\frac{M}{r} - \frac{g(x, a)}{\|x - a\|} \in K, \quad \forall x \in A, \ \|x - a\| \geq r,$$

unde vectorul M şi numărul r sunt definite in (G).

În acest moment, putem prezenta condiţii suficiente, impuse separat asupra lui g şi h, pentru a obţine condiţia de coercivitate (iii) din Teorema 2.3.13.

Propoziţia 2.3.23. [78] *Presupunem că*

(i) g satisface (G) şi $g(\cdot, a)$ este K-concavă cu $g(a, a) \in K$;

(ii) h satisface (H).

Atunci condiţia (iii) a Teoremei 2.3.13 este îndeplinită.

Următorul rezultat prezintă un interes în sine deoarece propune condiţii suficiente pentru inferior (superior) mărginirea unei funcţii K-inferior (K-superior) semicontinue în sensul Definiţiei 2.2.8.

Lema 2.3.24. [78] *Fie C o submulţime compactă a lui X şi $F : C \to Y$.*

(i) dacă F este K-inferior semicontinuă pe C, atunci este inferior mărginită, adică există un vector $m \in Y$ astfel încât $F(x) - m \in \mathrm{int}K$ pentru orice $x \in C$;

(ii) dacă F este K-superior semicontinuă pe C, atunci ea este superior mărginită, adică există un vector $M \in Y$ astfel încât $M - F(x) \in \mathrm{int}K$ pentru orice $x \in C$.

Putem concluziona cu următorul rezultat în spaţii Banach reflexive. Ipotezele asupra mulţimii A, asupra spaţiului Y şi asupra conului K rămân aceleaşi.

Teorema 2.3.25. [78] *Presupunem că X este un spaţiu Banach reflexiv. Fie $g : A \times A \to Y$ şi $h : A \times A \to Y$ bifuncţii care satisfac următoarele proprietăţi:*

(i) g este K-concavă şi slab K-superior semicontinuă în primul argument; K-convexă şi slab K-inferior semicontinuă în al doilea argument; $g(x, x) \in K \cap (-K)$ pentru orice $x \in A$;

(ii) h este slab K-superior semicontinuă în primul argument; K-convexă în al doilea argument; $h(x, x) = 0$ pentru orice $x \in A$ şi (H) are loc.

Atunci există $\overline{x} \in A$ astfel încât

$$g(\overline{x}, y) + h(\overline{x}, y) \notin -\mathrm{int}K, \quad \forall y \in A.$$

În cazul scalar, adică atunci când $Y := \mathbb{R}$ şi $K := [0, \infty]$, obţinem o formă mai simplă a Teoremei 2.3.25.

Corolar 2.3.26. [78] *Fie $g : A \times A \to \mathbb{R}$ şi $h : A \times A \to \mathbb{R}$ bifuncţii care satisfac proprietăţile următoare:*

(i) g este concavă şi superior semicontinuă în primul argument, convexă şi inferior semicontinuă în al doilea argument şi $g(x, x) = 0$ pentru orice $x \in A$;

(ii) h *este slab superior semicontinuă în primul argument, convexă în al doilea argument;* $h(x,x)=0$ *pentru orice* $x\in A$ *şi*

$$\frac{h(x,a)}{\|x-a\|}\to\infty \text{ atunci când } \|x-a\|\to\infty,\quad x\in A.$$

În aceste ipoteze, există $\overline{x}\in A$ *astfel încât*

$$g(\overline{x},y)+h(\overline{x},y)\geq 0,\quad \forall y\in A.$$

Capitolul 3

Rezultate de existenţă pentru inegalităţi variaţionale

Fie X un spaţiu topologic vectorial şi X^* dualul său. Fiind dat un operator multivoc $T : X \to 2^{X^*}$, cu $D(T)$ notăm domeniul sau, adică mulţimea

$$D(T) = \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}.$$

Inegalitatea variaţională poate fi privită ca un caz particular de problemă de echilibru scalară (SEP). Fiind dată o submulţime nevidă, închisă şi convexă A a lui X, inegalitatea variaţională pe care o vom studia în acest capitol poate fi formulată astfel:

Să se afle un element $\overline{x} \in K$ astfel încât

$$(VI) \qquad \sup_{x^* \in T(\bar{x})} \langle x^*, y - \overline{x} \rangle \geq 0 \quad \text{pentru orice} \quad y \in A.$$

Această problemă are o serie de aplicaţii în domeniul ecuaţiilor diferenţiale, de exemplu, problema Signorini, problema obstacolului şi problema elasto-plastică.
În această secţiune, vom stabili rezultate în spaţii Banach reflexive infinit dimensionale.

3.1 Operatori monotoni generalizaţi şi hemicontinui

Secţiunea 3.1 este dedicată studiului *operatorilor monotoni generalizaţi*.

Conceptul de *operator monoton,* vezi Definiţia 1.1.13, introdus în urmă cu 50 de ani de F.E. Browder şi G.J. Minty (vezi, de exemplu, F.E. Browder [24], F.E. Browder [25] şi G.J. Minty [99]), este considerat un punct de referinţă în analiza funcţională neliniară, în special datorită utilizării acestuia în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale şi de asemenea în modelarea diferitelor probleme care apar din mecanică, inginerie sau economie.

Conceptul original de operator monoton a fost extins în diferite direcţii. Pe lângă interesul teoretic, *operatorii monotoni generalizaţi* sunt mai potriviţi pentru a descrie o serie de probleme decât conceptul original de monotonie în discipline precum economia, ştiinţa managementului, teoria probabilităţilor şi în alte ştiinţe aplicate. Rezultatele privind surjectivitatea sunt de asemenea foarte importante şi garantează, în particular, existenţa zerourilor pentru aceşti operatori. Pe de altă parte, ţinând cont de faptul că operatorul subdiferenţial al unei funcţii convexe (generalizate) este un operator monoton, aflarea zerourilor unui astfel de operator prezintă un interes special. Într-adevăr, zerourile unui operator subdiferenţial al unei funcţii definite pe acelaşi spaţiu, sunt chiar punctele de minim ale acesteia. Prin urmare, există o legătură importantă între teoria operatorilor monotoni (generalizaţi) şi teoria optimizării.

Printre primele rezultate de surjectivitate în ceea ce priveşte operatorii monotoni este cel al lui G.J. Minty [99] şi care demonstrează faptul că operatorul sumă dintre un operator monoton maximal definit pe un spaţiu Hilbert şi operatorul identitate, este surjectiv. Acest rezultat a fost extins pentru spaţii Banach, unde rolul operatorului identitate fost preluat de operatorul de dualitate (vezi, Capitolul 4 din R.S. Burachik şi A.N. Iusem [27]). Un rezultat mai general în care operatorul identitate (sau de dualitate) nu este folosit, este cel al lui F.E. Browder şi G.J. Minty, şi care demostrează că un operator monoton, *hemicontinuu* şi *coerciv* pe un spaţiu Banach reflexiv este surjectiv (vezi, de exemplu, E. Zeidler [127]). În acest caz, absenţa operatorului de dualitate este înlocuită de ipoteza de coercivitate asupra operatorului monoton, ipoteză care, într-o formă mai relaxată, joacă un rol important în prezenta teză.

Cu scopul de a extinde rezultatele de surjectivitate ale lui Minty şi Browder-Minty, autorii A.N. Iusem, G. Kassay şi W. Sosa [65] au introdus aşa numiţii *operatori premonotoni* care includ, ca şi caz particular, operatorii ϵ-monotoni care sunt în strânsă legatură cu ϵ-subdiferenţialele. Rezultatele lor de surjectivitate se limitează la cazul finit dimensional deoarece sunt consecinţe ale teoremelor de existenţă pentru probleme de echilibru finit dimensionale.

Rezultatele de existenţă pentru inegalităţi variaţionale, dacă domeniul operatorului nu este mărginit, în general, cer o condiţie de coercivitate asupra operatorului. O noţiune clasică de coercivitate este următoarea.

Definiţia 3.1.1. (vezi, de exemplu, [2], [65]) Un operator $T : X \to 2^{X^*}$ se numeşte *coerciv* dacă

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\inf\limits_{x^*\in T(x)} \langle x^*, x\rangle}{\|x\|} = \infty.$$

În această teză, folosim o condiţie mai generală de coercivitate, introdusă de M.H. Alizadeh, N. Hadjisavvas şi M. Roohi [2].

Definiţia 3.1.2. Un operator T se numeşte *quasicoerciv* dacă

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \inf_{x^*\in T(x)} \|x^*\| = \infty$$

şi

$$\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{\inf\limits_{x^*\in T(x)} \langle x^*, x\rangle}{\|x\|} > -\infty.$$

E uşor de observat că orice operator coerciv este quasicoerciv. Reciproc nu este adevărat, aşa cum ne-o arată exemplul următor (dat în [2]). Considerăm operatorul $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definit prin $T(x, y) = (-y, x)$. Este uşor de vazut că T este quasicoerciv fără a fi coerciv.

Cu scopul de a studia anumite proprietăţi de continuitate ale operatorilor monotoni, J. Kolomŷ [83] a introdus următorul concept, foarte folositor pentru următoarele investigaţii.

Definiţia 3.1.3. Fie X un spaţiu normat. Operatorul $T : X \to 2^{X^*}$ se numeşte *hemiinchis* în $\overline{x} \in D(T)$ dacă pentru orice $z \in X$, pentru orice şir $\{t_n\}$ de numere pozitive care converge la zero astfel încât $x_n = \overline{x} + t_n z \in D(T)$ pentru n suficient de mare şi pentru orice $x_n^* \in T(x_n)$ astfel încât $\|x_n^*\| \leq R$, pentru o constantă $R > 0$, există un subşir $\{x_{n_k}^*\}$ al lui $\{x_n^*\}$ care tinde slab către $x^* \in T(\overline{x})$.

Dacă considerăm o bifuncţie $f : D(T) \times X \to \mathbb{R}$ dată în felul următor

$$f(x, y) = \sup_{x^*\in T(x)} \langle x^*, y - x\rangle,$$

se observă uşor că ipoteza de continuitate (în raport cu norma) a operatorului T nu garantează slab continuitatea lui f în raport cu prima variabilă: mai mult, nu garantează nici măcar slab superior semicontinuitatea lui $f(\cdot, y)$, în general. Pentru a evita această dificultate, Ky Fan [45], [44], a introdus următorul concept pentru operatori univoci (cu denumirea de F-hemicontinuitate în A. Maugeri şi F. Raciti [93]).

Definiţia 3.1.4. Un operator $T : K \to X^*$ se numeşte *F-hemicontinuu* dacă pentru orice $y \in A$, funcţia $x \mapsto \langle T(x), x - y\rangle$ este slab inferior semicontinuă pe A.

Noţiunea următoare este cea corespunzătoare pentru operatori multivoci.

Definiţia 3.1.5. [77] Un operator $T : X \to 2^{X^*}$ se numeşte *F-hemicontinuu* in $\overline{x} \in D(T)$ dacă pentru orice şir generalizat $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq D(T)$, cu $x_\alpha \neq \overline{x}$, care converge slab la $\overline{x}$, pentru orice $x_\alpha^* \in T(x_\alpha)$ şi pentru orice $y \in D(T)$ există $x_y^* \in T(\overline{x})$ astfel încât

$$\langle x_y^*, \overline{x} - y\rangle \leq \liminf_{\alpha} \langle x_\alpha^*, x_\alpha - y\rangle.$$

T se numeşte F-hemicontinuu dacă este F-hemicontinuu în fiecare punct al domeniului.

Prezentăm în continuare câteva concepte de monotonie generalizate. Operatorii pseudomonotoni joacă un rol important în teoria inegalităţilor variaţionale. Diferite tipuri de pseudomonotonie au apărut în literatură, în câteva cazuri diferite concepte fiind definite la fel. Cu scopul de a extinde conceptele clasice de monotonie, S. Karamardian [72] a introdus în 1976 o clasă de operatori denumită *operatori pseudomonotoni*. Această noţiune a fost de asemenea definită pentru operatori multivoci în diferite moduri (vezi, de exemplu, A.N. Iusem, G. Kassay şi W. Sosa [66], S. Komlosi [84] şi J.C. Yao [120]). Fiind pur algebrică, o vom numi aici $\mathcal{A}$-pseudomonotonie.

Definiţia 3.1.6. [84]. Operatorul $T : X \to 2^{X^*}$ se numeşte $\mathcal{A}$-*pseudomonoton* dacă pentru orice $x, y \in X$ şi $x^* \in T(x), y^* \in T(y)$, următoarea implicaţie are loc:

$$\langle x^*, y - x\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle y^*, y - x\rangle \geq 0.$$

Un alt concept de monotonie generalizată pentru operatori univoci a fost introdus din anul 1968 de H. Brézis [23] şi l-a numit pseudomonotonie, de asemenea. Fiind de natură pur topologică, pentru a evita confuzia, această noţiune a fost numită de câţiva autori pseudomonotonie topologică. Mai târziu, acest concept a fost extins la operatori multivoci de către F.E. Browder şi P. Hess [26].

Definiţia 3.1.7. Operatorul $T : X \to 2^{X^*}$ se numeşte $\mathcal{B}$-*pseudomonoton* dacă pentru orice $\overline{x} \in X$, pentru orice şir generalizat $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ din X, $x_\alpha \rightharpoonup \overline{x}$ şi pentru orice $x^*_\alpha \in T(x_\alpha)$ care satisface $\limsup\limits_{\alpha}\langle x^*_\alpha, x_\alpha - \overline{x}\rangle \leq 0$ avem că există un $y \in X$, există $x^*_y \in T(\overline{x})$ astfel încât

$$\langle x^*_y, \overline{x} - y\rangle \leq \liminf_{\alpha}\langle x^*_\alpha, x_\alpha - y\rangle.$$

Recent D. Inoan şi J. Kolumbán [62] au introdus o nouă noţiune de pseudomonotonie (iniţial definită în A. Domokos şi J. Kolumbán [39] pentru operatori univoci) care poate fi văzută (cu ceva condiţii în plus) ca o generalizare comună a celor două noţiuni de $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$-pseudomonotonie.

Remarca 3.1.8. Se observă uşor că dacă un operator este F-hemicontinuouu, atunci este de asemenea $\mathcal{B}$-pseudomonoton.

Definiţia 3.1.9. [62]. Operatorul $T : X \to 2^{X^*}$ se numeşte $\mathcal{C}$-*pseudomonoton* dacă, pentru orice $x, y \in X$ şi pentru orice şir generalizat $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ din X cu $x_\alpha \rightharpoonup \overline{x}$,

$$\sup_{x^*_\alpha \in T(x_\alpha)} \langle x^*_\alpha, (1-t)x + ty - x_\alpha\rangle \geq 0, \ \forall\, t \in [0,1], \ \forall\, \alpha \in I$$

implică $\sup\limits_{x^* \in T(\overline{x})} \langle x^*, y - \overline{x}\rangle \geq 0.$

Mai târziu, în Secţiunea 3.4, vom demonstra câteva rezultate legate de operatori $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{B}$-pseudomonotoni (cf. Definiţiei 3.1.9). Autorii D. Inoan şi J. Kolumbán [62] au demonstrat că $\mathcal{C}$-pseudomonotonia este într-adevăr mai slabă decât celelalte două noţiuni de pseudomonotonie (algebrică şi topologică). În ceea ce ne priveşte, avem nevoie de următorul rezultat.

Lema 3.1.10. (Caz particular al Teoremei 13 din [62]). *Fie* $T : X \to 2^{X^*}$ *un operator. Dacă condiţiile*

(*i*) T *este* $\mathcal{B}$*-pseudomonoton;*

(*ii*) $T(x)$ *este convexă, mărginită şi închisă pentru orice* $x \in X$;

sunt satisfăcute, atunci T *este* $\mathcal{C}$*-pseudomonoton.*

Fiind dat un operator $T : X \to 2^{X^*}$, definim, pentru fiecare $z \in X$, mulţimea

$$F(z) = \{x \in X \mid \sup_{x^* \in T(x)} \langle x^*, z - x\rangle \geq 0\}.$$

În [62] a fost stabilită următoarea caracterizare a $\mathcal{C}$-pseudomonotoniei.

Lema 3.1.11. [62]. *Operatorul* $T : X \to 2^{X^*}$ *este* $\mathcal{C}$*-pseudomonoton dacă şi numai dacă, pentru orice* $x, y \in X$,

$$\mathrm{cl}(\bigcap_{z \in [x,y]} F(z)) \cap [x, y] = (\bigcap_{z \in [x,y]} F(z)) \cap [x, y],$$

unde cu $[x, y]$ *notăm segmentul cu capetele* x *şi* y.

Următorul concept de monotonie generalizată pentru operatori multivoci a fost dat de A. Daniilidis şi N. Hadjisavvas în [38].

Definiţia 3.1.12. Un operator $T : X \to 2^{X^*}$ se numeşte *propriu quasimonoton* dacă pentru orice x_1, ..., $x_n \in D(T)$, pentru toti λ_1, ..., $\lambda_n \geq 0$ astfel încât $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, există $i \in \{1, 2, ..., n\}$ astfel încât

$$\forall x^* \in T(x_i) : \ \langle x^*, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j - x_i\rangle \leq 0.$$

Se demonstrează uşor următoarea legătură dintre propriu quasimonotonia unui operator şi cea a unei bifuncţii, respectiv. Reamintim faptul că propriu quasimonotonia pentru bifuncţii a fost definită în Definiţia 1.2.7.

Lema 3.1.13. [77] *Fie* $T : X \to 2^{X^*}$ *astfel încât domeniul sau* $D(T)$ *este convex şi considerăm bifuncţia* $f : D(T) \times D(T) \to \mathbb{R}$, *dată de*

$$f(x, y) = \sup_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x\rangle.$$

Dacă T *este propriu quasimonoton, atunci* f *este propriu quasimonotonă.*

3.2 Inegalităţi variaţionale şi ecuaţii generalizate definite cu operatori propriu quasimonotoni

În această secţiune vom obţine rezultate de surjectivitate pentru operatori propriu quasimonotoni utilizând Teorema 2.1.14.

Teorema următoare prezintă condiţii suficiente pentru existenţa soluţiilor inegalităţilor variaţionale definite cu operatori propriu quasimonotoni şi quasicoercivi. În cazul special când domeniul operatorului este întreg spaţiul, demonstrăm existenţa zerourilor.

Teorema 3.2.1. [77] *Fie X un spaţiu Banach reflexiv. Presupunem că $T : X \to 2^{X^*}$ este local mărginit, cu mulţimea valorilor convexă, hemiînchis şi $D(T)$ este închis şi convex. Dacă T este propriu quasimonoton şi quasicoerciv, atunci inegalitatea variaţională* (VI) *definită pe $D(T)$ are soluţie. Dacă, în plus, $D(T) = X$, atunci ecuaţia generalizată $0 \in T(x)$ are soluţie.*

Remarca 3.2.2. Dacă presupunem în Teorema 3.2.1 că T este $\mathcal{A}$-pseudomonoton în loc de propriu quasimonoton, atunci concluzia rămâne aceeaşi. Într-adevăr, orice operator $\mathcal{A}$-pseudomonoton a cărui domeniu este convex, este, de asemenea, propriu quasimonoton (vezi, de exemplu, N. Hadjisavvas [57]).

Remarca 3.2.3. Este cunoscut faptul că monotonia clasică sau chiar anumite monotonii generalizate, implică local mărginirea operatorului în fiecare punct al domeniului său (vezi, de exemplu, A.N. Iusem, G. Kassay şi W. Sosa [65] cazul operatorilor premonotoni). Ne punem întrebarea dacă quasimonotonia implică de asemenea local mărginirea. Dacă ar fi aşa, local mărginirea din Teorema 3.2.1 ar fi redundantă. Aşa cum ne arată exemplul următor, nu este cazul.

Exemplul 3.2.4. [77] Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2+1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Se vede uşor că funcţia de mai sus este $\mathcal{A}$-pseudomonotonă şi prin urmare, aşa cum am văzut, este propriu quasimonotonă. Pe de altă parte, nu este mărginită în origine. Observăm că toate ipotezele Teoremei 3.2.1 sunt satisfăcute cu excepţia local mărginirii. Deoarece $0 = F(x)$ nu are soluţii, se vede că această condiţie este esenţială.

3.3 Un rezultat de surjectivitate fără monotonie

În anumite situaţii, F-hemicontinuitatea se verifică destul de greu. În definiţia următoare, introducem o proprietate mai tare dar mai uşor de verificat şi care este satisfăcută de o clasă largă de operatori.

Definiţia 3.3.1. [77] Fie X un spaţiu Banach şi $T : X \to 2^{X^*}$. Spunem că un operator T satisface *condiţia (P)* dacă pentru orice $\overline{x} \in D(T)$, orice şir generalizat $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq D(T)$, $x_\alpha \rightharpoonup \overline{x}$ şi orice $x_\alpha^* \in T(x_\alpha)$ există $\{x_{\alpha_\beta}^*\} \subseteq \{x_\alpha^*\}$ şi $\overline{x}^* \in T(\overline{x})$ astfel încât $x_{\alpha_\beta}^* \to \overline{x}^*$.

Să notăm faptul că orice operator univoc liniar şi compact satisface condiţia (P), (vezi, de exemplu, W. Rudin [113], Definiţia 4.16, pagina 97 şi Exerciţiul 18, pagina 107). Mulţi operatori care apar din studiul ecuaţiilor integrale sunt compacţi.

Remarca 3.3.2. [77] Dacă un operator satisface condiţia (P), atunci este F-hemicontinuu.

În continuare, prezentăm un exemplu în care operatorul este F-hemicontinuu dar nu satisface condiţia (P).

Exemplul 3.3.3. [77] Fie $X = l^2 = \{x = (x^i)_{i \in \mathbf{N}} : \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mid x^i \mid^2 < \infty\}$ şi fie T: $l^2 \to l^2$ operatorul identitate. Luăm un şir arbitrar $\{x_n\} \subseteq l^2$ care converge slab la $\overline{x}$. Funcţia $x \longmapsto \|x\|^2$ fiind continuă este de asemenea slab inferior semicontinuă. Prin urmare,

$$\|\overline{x}\|^2 \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|^2,$$

ceea ce implică

$$\langle \overline{x}, \overline{x} - y \rangle \leq \liminf_{n \to \infty} \langle x_n, x_n - y \rangle,$$

pentru orice $y \in l^2$, adică, T este F-hemicontinuu.

Pe de altă parte, luăm $x_n = e_n = (0, 0, ..., 0, 1, 0, ...)$ cu 1 pe a n-a poziţie. Este evident că $e_n \rightharpoonup 0$, dar $\{e_n\}$ nu are subşiruri convergente în raport cu topologia tare, deoarece $\| e_n - e_m \| = \sqrt{2}$, pentru $m \neq n$. Prin urmare, T nu satisface condiţia (P).

Putem în acest moment să prezentăm următorul rezultat de surjectivitate.

Teorema 3.3.4. [77] *Presupunem că $T : X \to 2^{X^*}$ este astfel încât pentru orice $x \in X$, mulţimea $T(x)$ este convexă, închisă, mărginită şi $D(T) = X$. Dacă T este F-hemicontinuu şi quasicoerciv, atunci este surjectiv.*

Corolar 3.3.5. [77] *Fie $T : X \to 2^{X^*}$. Presupunem că pentru orice $x \in X$, mulţimea este $T(x)$ convexă, închisă, mărginită şi $D(T) = X$. Dacă T are proprietatea (P) şi este quasicoerciv, atunci T este surjectiv.*

În următorul exemplu, operatorul T este F-hemicontinuu şi quasicoerciv şi există un x pentru care $T(x)$ nu este mărginită.

Exemplul 3.3.6. [77] Fie $X = \mathbb{R}$ şi $T : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}^*}$ definit astfel

$$T(x) = \begin{cases} \{x\}, & x \neq 1, \\ [1, \infty), & x = 1. \end{cases}$$

Se observă uşor că pentru orice şir $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$, $x_n \to 1$, $x_n \neq 1$, pentru $x_n^* \in T(x_n)$ şi pentru $y \in \mathbb{R}$, $x_y^* = 1$ satisface

$$1 - y \leq \liminf_n (x_n - y).$$

Prin urmare, T este F-hemicontinuu şi $T(1) = [1, \infty)$ este o mulţime nemărginită.

3.4 Rezultate pentru inegalităţi variaţionale şi surjectivitate cu operatori $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{B}$-pseudomonotoni

În această secţiune, folosim operatori $\mathcal{C}$-pseudomonotoni introduşi în Definiţia 3.1.9. În primul rând, stabilim un rezultat privind inegalităţile variaţionale (introduse la începutul capitolului) cu ajutorul operatorilor $\mathcal{C}$-pseudomonotoni, rezultat care, prin prisma spaţiilor Banach reflexive, poate fi văzut ca o generalizare a rezultatului dat D. Inoan şi J. Kolumbán [62].

Teorema 3.4.1. [77] *Fie $T : X \to 2^{X^*}$ cu domeniul $D(T) = A$ o mulţime închisă, convexă şi nevidă. Presupunem că mulţimea $T(x)$ este convexă, închisă şi mărginită pentru orice $x \in X$ şi că*

(i) T este $\mathcal{C}$-pseudomonoton;

(ii) Pentru orice subspaţiu finit dimensional Z al lui X, T este inferior semicontinuu pe $A \cap Z$ în raport cu topologia slabă din X^*;

(iii) Există $r > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A \backslash A_r$, există $y \in A$ with $\|y\| < \|x\|$ astfel încât $\sup_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x \rangle \leq 0$.

Atunci (VI) admite soluţii.

Avantajul operatorilor $\mathcal{C}$-pseudomonotoni în comparaţie cu operatorii propriu quasimonotoni este acela că suma a doi operatori $\mathcal{C}$-pseudomonotoni este de asemenea un operator $\mathcal{C}$-pseudomonoton şi, acest lucru ne permite obţinerea unui rezultat de surjectivitate pentru operatori $\mathcal{C}$-pseudomonotoni.

Teorema 3.4.2. [77] *Fie $T : X \to 2^{X^*}$ cu domeniul $D(T) = A$ o mulţime nevidă, închisă şi convexă. Presupunem că mulţimea $T(x)$ este convexă, închisă şi mărginită pentru orice $x \in X$ şi că*

(i) T este $\mathcal{B}$ -pseudomonoton;

(ii) Pentru orice subspaţiu finit dimensional Z al lui X, T este superior semicontinuu pe $A \cap Z$ în raport cu topologia slabă din X^*;

(*iii*) T *este quasicoerciv.*
Atunci T *este surjectiv.*

3.5 Asupra problemelor de optimizare multivoce şi a inegalităţilor variaţionale vectoriale generalizate

În 1998, Giannessi [53] a folosit pentru prima dată aşa numita *inegalitate variaţională de tip Minty* (pe scurt, $MVVI$) pentru a stabili condiţii necesare şi suficiente pentru ca un punct să fie soluţie a problemei vectoriale de optimizare (pe scurt, (VOP)) în cazul unor funcţii diferenţiabile şi convexe. De atunci, mulţi cercetători au studiat (VOP) folosind diferite tipuri $MVVI$ în diferite ipoteze, cum ar fi, de exemplu, S. Al-Homidan şi Q.H. Ansari [1], Q.H. Ansari şi G.M. Lee [3], Q.H. Ansari, M. Rezaie şi J. Zafarani [5], Q.H. Ansari şi J.-K. Yao [6], G.R. Garzon, R.O. Gomez şi A.R. Lizana [52], S.K. Mishra şi S.Y. Wang [100]. Pe de altă parte, inegalităţile variaţionale au fost generalizate în diferite direcţii, în particular, inegalităţile vectoriale variaţionale generalizate, de exemplu în S. Al-Homidan şi Q.H. Ansari [1], F. Giannessi, A. Maugeri şi P.M. Pardalos [55], T. Jabarootian şi J. Zafarani [68], S.K. Mishra şi S.Y. Wang [100], M. Rezaie şi J. Zafarani [109], X.M. Yang şi X.Q. Yang [121]. Inegalităţile vectoriale variaţionale generalizate sunt strâns legate de conceptele de invexitate şi preinvexitate al funcţiilor, concepte care sunt generalizări ale noţiunii de convexitate a funcţiilor. Conceptul de invexitate a fost introdus de M.A. Hanson [59]. R. Pini [107] a introdus noţiunile de prepseudoinvexitate şi prequasiinvexitate pentru funcţii şi a stabilit legături între convexitate şi aceste noţiuni de convexitate generalizată. Recent, caracterizări şi aplicaţii în ceea ce priveşte invexitatea au fost studiate de mulţi autori, printre care Q.H. Ansari şi J.-K. Yao [6], A. Cambini şi L. Martein [28], A. Chinchuluun şi P.M. Pardalos [36], T. Jabarootian şi J. Zafarani [68], G.R. Garzon, R.O. Gomez şi A.R. Lizana [51], M. Soleimani-damaneh [115], M. Soleimani-damaneh [116], X.M. Yang, X.Q. Yang şi K.L. Teo [122], X.M. Yang, X.Q. Yang şi K.L. Teo [125].

Legăturile dintre inegalităţile variaţionale vectoriale şi problemele de optimizare diferenţiabile au fost studiate de mulţi autori (vezi, de exemplu, F. Giannessi [53], X.M. Yang şi X.Q. Yang [121], X.M. Yang, X.Q. Yang şi K.L. Teo [124]). Yang et al. X.M. Yang, X.Q. Yang şi K.L. Teo [124] au extins rezultatul lui F. Giannessi [53] pentru funcţii diferenţiabile pseudoconvexe. X.M. Yang şi X.Q. Yang [121] au obţinut relaţii între inegalităţile variaţionale de tip Minty şi problemele de optimizare vectoriale pentru funcţii vectoriale diferenţiabile şi pseudo-invexe. X.M. Yang, X.Q. Yang şi K.L. Teo [123], [124] şi Garzon et al. [51], [52] au studiat relaţiile dintre invexitatea generalizată a funcţiilor diferenţiable şi monotonia generalizată a subgradientului. Recent, M. Rezaie şi J. Zafarani [109] au obţinut relaţii între inegalităţile vectoriale variaţionale generalizate şi problemele vectoriale de optimizare nediferenţiabile folosind ipoteze de monotonie generalizată. S. Al-Homidan şi Q.H. Ansari [1] au studiat relaţiile dintre inegalităţile variaţionale vectoriale generalizate de tip Minty, inegalităţile variaţionale vectoriale generalizate de tip Stampacchia şi problemele vectoriale de optimizare nediferenţiabile în cazul în care funcţiile nu sunt convexe, folosind derivata direcţională a lui Clarke. Apoi, Q.H. Ansari şi G.M. Lee [3] au obţinut rezultate similare pentru funcţii pseudoconvexe folosind derivata direcţională superioară a lui Dini. Q.H. Ansari, M. Rezaie şi J. Zafarani [5] au considerat inegalităţile variaţionale vectoriale generalizate de tip Minty, inegalităţile variaţionale vectoriale generalizate de tip Stampacchia şi probleme de optimizare nediferenţiabile cu ipoteze de pseudo-invexitate. De asemenea, au considerat formulări slabe ale acestor inegalităţi variaţionale în condiţii mai generale şi au stabilit relaţii între ele.

J. Zeng şi S.J. Li [128] au definit câteva concepte de invexitate pentru funcţii multivoce şi au stabilit legături între probleme de optimizare multivocă şi inegalităţile vectoriale variaţionale generalizate.

Farajzadeh et al. [48] au considerat inegalităţi vectoriale variaţionale generalizate definite cu funcţii multivoce în spaţii topologice.

Sunt câteva lucrări care stabilesc legături între problemele de optimizare multivocă şi inegalităţile vectoriale variaţionale generalizate. În urma studiului lucrărilor T.Q. Bao şi B.S. Mordukhovich [12], Y.P. Fang şi N.J. Huang [46], Y.P. Fang şi N.J. Huang [47], A.P. Farajzadeh, A.A. Harandi şi K.R. Kazmi [48], J. Zeng şi S.J. Li [128], în această secţiune introducem noi concepte de invexitate generalizată pentru funcţii multivoce şi studiem relaţiile dintre ele. Apoi, stabilim legături între existenţa soluţiilor unor inegalităţi vectoriale variaţionale generalizate şi o problemă de optimizare multivocă, utilizând subdiferenţiala contingentă slabă definită pentru funcţii multivoce.

În cadrul acestei secţiuni, dacă nu se specifică altfel, X este un spaţiu Banach, A este o submulţime nevidă a lui X iar Y este un spaţiu Banach ordonat parţial de un con convex punctat $K \subseteq Y$ cu interior nevid $\mathrm{int}K$. Fie $K^0 := K \backslash \{0\}$ şi fie $\eta : A \times A \to X$ o bifuncţie.

Fie $y_1, y_2 \in Y$ şi $C, D \subseteq Y$. Relaţiile de ordine sunt definite astfel:

$$\begin{aligned} y_1 \ \leq_K \ y_2 &\iff y_2 - y_1 \in K, \\ C \ \leq \ D &\iff x \leq_K y \ \text{ pentru orice } \ x \in C, \ y \in D. \end{aligned}$$

Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă. Definim $(T + K)(x) = T(x) + K$ pentru $x \in A$.

Definiţia 3.5.1. (vezi, de exemplu, [67]) Un punct $x_0 \in C$ se numeşte *punct de minim* al lui C în raport cu K dacă

$$(C - \{x_0\}) \cap (-K^0) = \emptyset.$$

Mulţimea tuturor punctelor de minim ale lui C se notează cu $\mathrm{Min}\, C$.

Definiţia 3.5.2. (vezi, de exemplu, [67]) Un punct $x_0 \in C$ se numeşte *punct de minim slab* al lui

C în raport cu K dacă

$$(C - \{x_0\}) \cap (-\mathrm{int} K) = \emptyset.$$

Mulţimea tuturor punctelor de minim slab ale lui C se notează cu $\mathrm{WMin}\, C$.

În continuare, vom prezenta definiţia conului contingent, vezi J.-P. Aubin şi H. Francowska [10].

Definiţia 3.5.3. Fie A o submulţime nevidă a unui spaţiu vectorial normat X şi $\overline{x} \in \mathrm{cl}\, A$. *Conul contingent* al mulţimii A în $\overline{x}$ este definit astfel

$$C_A(\overline{x}) = \left\{ \begin{array}{l} v \mid \exists\ \lambda_n \to 0,\ \exists\ v_n \to v, \\ \ \text{astfel încât} \\ \forall n, \overline{x} + \lambda_n v_n \in A. \end{array} \right\}$$

Conform cu J. Zeng şi S.J. Li, prezentăm următoarele definiţii pentru conul contingent şi pentru derivata contingentă, respectiv.

Definiţia 3.5.4. [128] Fie A o submulţime nevidă a X şi $\overline{x} \in \mathrm{cl}\, A$. *Conul contingent* al mulţimii A in $\overline{x}$ este definit astfel

$$C_A(\overline{x}) = \left\{ \begin{array}{l} v \mid \exists\ (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}} > 0,\ \exists\ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A, \\ \ \text{astfel încât} \\ \overline{x} = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ si } v = \lim_{n\to\infty} \lambda_n (x_n - \overline{x}). \end{array} \right\}$$

Definiţia 3.5.5. [128] Fie $(x_0, y_0) \in \mathrm{gph}\ T$. *Derivata contingentă* $DT(x_0, y_0)$ a lui T in (x_0, y_0) este funcţia multivocă de la X in Y definită astfel

$$\mathrm{gph}\ (DT(x_0, y_0)) := C_{\mathrm{gph}\, T}(x_0, y_0).$$

Fie $\overline{D}T(x_0, y_0)(x) = D(T + K)(x_0, y_0)(x)$, pentru orice $x \in X$, adică

$$y \in \overline{D}T(x_0, y_0)(x) \iff (x, y) \in C_{\mathrm{epi}\, T}(x_0, y_0).$$

Conform Definiţiei 4 din J. Zeng şi S.J. Li [128], reamintim următoarele noţiuni pentru funcţii multivoce.

Definiţia 3.5.6. [128] Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă şi $(x_0, y_0) \in \mathrm{gph}\ T$. Mulţimea $\partial T(x_0, y_0)$ definită prin

$$\partial T(x_0, y_0) = \{H \in L(X, Y) \mid H(x) \leq \overline{D}T(x_0, y_0)(x),\ \forall\ x \in \mathrm{dom}\ \ \overline{D}T(x_0, y_0)\}$$

se numeşte *subdiferenţiala contingentă generalizată slabă* a lui T în (x_0, y_0).

Definiţia 3.5.7. [95] Fie $x_0 \in A$. O bifuncţie $\eta : A \times A \to X$ se numeşte *simetrică* în x_0 dacă pentru orice $x \in A$, $x \neq x_0$,

$$\eta(x, x_0) + \eta(x_0, x) = 0.$$

Remarca 3.5.8. În continuare, reamintim noţiunile de invexitate generalizată pentru funcţii multivoce, definite în J. Zeng şi S.J. Li [128]

Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă.

Definiţia 3.5.9. [128] T se numeşte $(\text{int}K, \text{int}K)$-*pseudoinvexă* în (x_0, y_0) în raport cu η dacă pentru orice $x \in A$, $\ y \in T(x)$, $\ \xi \in \partial T(x_0, y_0)$,

$$y - y_0 \in -\text{intK} \ \Rightarrow \langle \xi, \eta(x, x_0) \rangle \in -\text{intK}.$$

T se numeşte $(\text{int}K, \text{int}K)$-*pseudoinvexă* în (x_0, y_0) în raport cu η dacă pentru orice pereche (x, y), $x \in A$, $y \in T(x)$, T este $(\text{int}K, \text{int}K)$-*pseudoinvexă* in (x, y) in raport cu η pe A.

Definiţia 3.5.10. [128] T se numeşte $(K^0, \text{int}K)$-*pseudoinvexă* în (x_0, y_0) în raport cu η dacă pentru orice $x \in A$, $\ y \in T(x)$, $\ \xi \in \partial T(x_0, y_0)$,

$$y - y_0 \in -K^0 \Rightarrow \langle \xi, \eta(x, x_0) \rangle \in -\text{intK}.$$

T se numeşte $(K^0, \text{int}K)$-*pseudoinvexă* în raport cu η pe A dacă pentru orice pereche (x, y), $x \in A$, $y \in T(x)$, T este $(K^0, \text{int}K)$-*pseudoinvexă* în (x, y) în raport cu η pe A.

Definiţia 3.5.11. [128] T se numeşte (K^0, K^0)-*pseudoinvexă* în (x_0, y_0) în raport cu η dacă pentru orice $x \in A$, $\ y \in T(x)$, $\ \xi \in \partial T(x_0, y_0)$,

$$y - y_0 \in -K^0 \Rightarrow \langle \xi, \eta(x, x_0) \rangle \in -K^0.$$

T se numeşte (K^0, K^0)-*pseudoinvexă* în raport cu η pe A dacă pentru orice pereche (x, y), $x \in A$, $y \in T(x)$, T este (K^0, K^0)-*pseudoinvexă* în (x, y) în raport cu η pe A.

Definiţia 3.5.12. [128] T se numeşte (K, intK)-*pseudoinvexă* în (x_0, y_0) în raport cu η dacă pentru orice $x \in A$, $\ y \in T(x)$, $\ \xi \in \partial T(x_0, y_0)$,

$$y - y_0 \in -K \Rightarrow \langle \xi, \eta(x, x_0) \rangle \in -\text{intK}.$$

T se numeşte (K, intK)-*pseudoinvexă* în raport cu η pe A dacă pentru orice pereche (x, y), $x \in A$, $y \in T(x)$, T este (K, intK)-*pseudoinvexă* în (x, y) în raport cu η pe A.

În continuare, introducem noi concepte de invexitate generalizată pentru funcţii multivoce, într-o formă unificată.

Definiţia 3.5.13. [95] Fie $K_1, K_2 \subseteq Y$ două conuri punctate şi convexe cu interioare nevide. T se numeşte (K_1, K_2)-*weakly-quasi-invexă* în $(x_0, y_0) \in \operatorname{gph} F$ în raport cu η dacă pentru orice $(x, y) \in \operatorname{gph} F$ avem

$$\langle \xi, \eta(x, x_0) \rangle \in K_1 \text{ pentru orice } \xi \in \partial T(x_0, y_0) \Longrightarrow y - y_0 \in K_2.$$

T se numeşte (K_1, K_2)-*weakly-quasi-invexă* în raport cu η pe A dacă pentru orice $(x, y) \in \operatorname{gph} F$, T este (K_1, K_2)-*weakly-quasi-invexă* în (x, y) în raport cu η on A.

În cele ce urmează, folosim Definiţia 3.5.13 în cazul în care $K_i = K^0$ sau intK, $i = 1, 2$. Rezultatul următor prezintă relaţiile dintre invexităţile generalizate prezentate anterior.

Propoziţia 3.5.14. [95] *Fie $K_1, K_2, L_1, L_2 \subseteq Y$ patru conuri convexe cu interioare nevide. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1. *Dacă T este (K_1, L_1)-weakly-quasi-invexă în raport cu η pe A atunci T este (K_2, L_1)-weakly-quasi-invexă în raport cu η pe A, atunci când $K_2 \subseteq K_1$.*
2. *Dacă T este (K_1, L_1)-weakly-quasi-invexă în raport cu η pe A atunci T este (K_1, L_2)-weakly-quasi-invexă în raport cu η pe A, atunci când $L_1 \subseteq L_2$.*

Vom prezenta acum un exemplu pentru a ilustra faptul că există o funcţie multivocă T astfel încât să fie $(K^0, K^0)-$ weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η dar care nu este $(K^0, \operatorname{int}K)$-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η pe A.

Exemplul 3.5.15. [95] Fie $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}^2$, $A = [-1, 1] \subseteq X$,
$K = \mathbf{R}^2_+ = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 |\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\}$. Fie $T : A \to 2^Y$ şi $\eta : A \times A \to A$ definite în felul următor

$$T(x) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \mid\ y_1 = -x,\ y_2 \in [0, 1]\}$$

şi

$$\eta(x, y) = \begin{cases} x, & y = 0, \\ 0, & y \neq 0. \end{cases}$$

Să luăm $x_0 = 0$ şi $y_0 \in T(x_0)$, $y_0 = (0, 0)$. Urmează că,

$$C_{\operatorname{gph}(T+K)}(x_0, y_0) = \{(x, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^3 \mid\ x \in \mathbf{R},\ y_1 \geq -x,\ y_2 \geq 0\}$$

şi

$$\partial T(x_0, y_0) = \{H\},$$

unde

$$H(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Este uşor de văzut că T este (K^0, K^0)-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η dar nu este $(K^0, \mathrm{int}K)$-weakly-quasi-invexă în raport cu η deoarece pentru $x = -1$, $y = (1, 0) \in T(-1)$ obţinem

$$\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x, x_0)\rangle \subseteq K^0, \quad y - y_0 \notin \mathrm{int}K.$$

Exemplul următor demonstrează faptul că există o funcţie multivocă T care este $(K^0, \mathrm{int}K)$-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η dar care nu este $(K^0, \mathrm{int}K)$-pseudoinvexă în (x_0, y_0) în raport cu η on A, vezi [128].

Exemplul 3.5.16. [95] Fie $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}^2$, $A = [-1, 1] \subseteq X$,
$K = \mathbf{R}^2_+ = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 |\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\}$. Fie $T : A \to 2^Y$ şi $\eta : A \times A \to A$ definite astfel

$$T(x) = \begin{cases} \{y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \mid\ y_1 = -x,\ y_2 \in [0, 1]\}, & x \in [0, 1], \\ \{y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \mid\ y_1 = -x,\ y_2 \in (0, 1]\}, & x \in [-1, 0) \end{cases}$$

şi

$$\eta(x, y) = \begin{cases} x, & y = 0,\ x \neq 1, \\ 0, & y \neq 0 \text{ or } x = 1. \end{cases}$$

Considerăm $x_0 = 0$ şi $y_0 \in T(x_0)$, $y_0 = (0, 0)$. Urmează că,

$$C_{\mathrm{gph}(T+K)}(x_0, y_0) =$$

$$= \{(x, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^3 \mid\ x \in \mathbf{R},\ y_1 \geq -x,\ y_2 \geq 0\} \backslash \{(x, -x, 0) \in \mathbf{R}^3 \mid\ x < 0\}$$

şi

$$\partial T(x_0, y_0) = \{H\},$$

unde

$$H(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

T este $(K^0, \mathrm{int}K)$-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η dar nu este $(K^0, \mathrm{int}K)$-pseudoinvexă în (x_0, y_0) în raport cu η deoarece pentru $x = 1$, $y = (-1, 0) \in T(1)$, avem

$$y - y_0 \in -K^0 \text{ si } \langle \xi, \eta(x, 0)\rangle = (0, 0) \notin -\mathrm{int}K \text{ for all } \xi \in \partial T(x_0, y_0).$$

A.P. Farajzadeh, A.A. Harandi şi K.R. Kazmi [48] au introdus următoarele definiţii pentru funcţii multivoce.
Fie $x \in A$. Cu $K(x) \subseteq X$ notăm un con solid, convex, închis şi punctat.

Definiţia 3.5.17. [48] O funcţie multivocă $T : A \to 2^{L(X,Y)}$ se numeşte $K - \eta-$*strong pseu-*

domonotonă dacă pentru orice x, $y \in A$,

$$\langle T(x), \eta(x,y)\rangle \nsubseteq -K(x)\backslash\{0\} \Longrightarrow \langle T(y), \eta(y,x)\rangle \subseteq -K(y).$$

Definiţia 3.5.18. [48] O funcţie multivocă $T : A \to 2^{L(X,Y)}$ se numeşte *K-η-pseudomonotonă* dacă pentru orice x, $y \in A$,

$$\langle T(x), \eta(x,y)\rangle \nsubseteq -\mathrm{int}K(x) \Longrightarrow \langle T(y), \eta(y,x)\rangle \subseteq -\mathrm{int}K(y).$$

Fie C, $K \subseteq Y$ două conuri solide, convexe şi punctate.

Definiţia 3.5.19. [95] O funcţie multivocă $T : A \to 2^{L(X,Y)}$ se numeşte *(C, K)-η-strong pseudomonotonă* dacă pentru orice x, $y \in A$,

$$\langle T(x), \eta(x,y)\rangle \nsubseteq C \Longrightarrow \langle T(y), \eta(y,x)\rangle \subseteq K.$$

Definiţia 3.5.20. [95] O funcţie multivocă $T : A \to 2^{L(X,Y)}$ se numeşte *strict (C, K)-η-strong pseudomonotonă* dacă pentru orice x, $y \in A$, $x \neq y$,

$$\langle T(x), \eta(x,y)\rangle \nsubseteq C \Longrightarrow \langle T(y), \eta(y,x)\rangle \subseteq K.$$

Teorema 3.5.21. [95] *Dacă $T : A \to 2^{X^*}$ este strict $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$-$\eta$-strong pseudomonotonă, atunci T este strict $(-K^0, -K^0)$-η-strong pseudomonotonă.*

În următorul exemplu demonstrăm că reciproca Teoremei 3.5.21 nu are loc: punem în evidenţă o funcţie T care este $(-K^0, -K^0)$-η-strong pseudomonotonă şi nu este strict $(-\mathrm{int}K, -\mathrm{int}K)$-$\eta$-strong pseudomonotonă.

Exemplul 3.5.22. [95] Fie $X = \mathbf{R}$, $Y = \mathbf{R}^2$, $A = [-1, 1] \subseteq X$,
$K = \mathbf{R}^2_+ = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 |\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0\}$. Fie $T : A \to 2^Y$ şi $\eta : A \times A \to A$ definită astfel

$$T(x) = \{y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \ |\ \ y_1 = -x,\ \ y_2 \in [0, 1], x \in [-1, 1]\}$$

şi

$$\eta(x,y) = \begin{cases} x, & x < 0,\ y = 0, \\ -x, & x > 0,\ y = 0, \\ y, & x = 0,\ y > 0, \\ -y, & x = 0,\ y < 0, \\ +1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Fie $x_0 = 0$ şi $y_0 \in T(x_0)$, $y_0 = (0, 0)$. Prin urmare,

$$T_{\mathrm{gph}(T+K)}(x_0, y_0) = \{(x, y_1, y_2) \in \mathbf{R}^3 \mid \ x \in \mathbf{R},\ y_1 \geq -x,\ y_2 \geq 0\}$$

şi

$$\partial T(x_0, y_0) = \{H\},$$

unde

$$H(x) = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \end{pmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se observă că ∂T este strict $(-K^0, -K^0)$-η-strong pseudomonotonă şi nu este strict $(-\mathrm{int}K, -\mathrm{int}K)$-$\eta$-strong pseudomonotonă deoarece pentru $x \in A$, $x < 0$, $y \in T(x)$ avem

$$\langle \partial T(x, y), \eta(x, x_0) \rangle \nsubseteq -\mathrm{int}K \text{ si } \langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x) \rangle \nsubseteq -\mathrm{int}K.$$

Remarca 3.5.23. Remarcăm faptul că în Exemplul 3.5.22 bifuncţia η este simetrică în $x_0 = 0$.

3.5.1 Legături între problemele (SOP) şi $W(SSVI)$

În această subsecţiune, prezentăm legături între inegalităţile vectoriale variaţionale generalizate de tip Stampacchia şi o problemă de optimizare multivocă.

O *inegalitate vectorială variaţională generalizată de tip Stampacchia* $(SSVI)$ este cea în care se cere aflarea unei perechi (x_0,y_0) cu $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$, astfel încât pentru orice $\xi \in \partial T(x_0, y_0)$

(SSVI) $$\langle \xi, \eta(x, x_0) \rangle \notin -K^0.$$

O *inegalitate vectorială variaţională generalizată slabă de tip Stampacchia* $(WSSVI)$ este cea în care se cere aflarea unei perechi (x_0,y_0) cu $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$, astfel încât pentru orice $\xi \in \partial T(x_0, y_0)$

(WSSVI) $$\langle \xi, \eta(x, x_0) \rangle \notin -\mathrm{int}K.$$

Problema de optimizare multivocă (SOP) este

$$\min_{x \in A} T(x).$$

Definiţia 3.5.24. (vezi, de exemplu, [128]) Notăm cu $T(A) := \cup_{x \in A} T(x)$ imaginea funcţiei T. O pereche $(\overline{x}, \overline{y})$ cu $\overline{x} \in A$ şi $\overline{y} \in T(\overline{x})$ se numeşte *minim* al problemei (SOP), dacă $\overline{y} \in \mathrm{Min}\, T(A)$. O pereche $(\overline{x}, \overline{y})$ cu $\overline{x} \in A$ şi $\overline{y} \in T(\overline{x})$ se numeşte minim slab al problemei (SOP) dacă are loc $\overline{y} \in \mathrm{WMin}\, T(A)$.

Remarca 3.5.25. J. Zeng şi S.J. Li au obţinut legături între $((W)SSVI)$ şi (SOP) folosind ipoteze de pseudoinvexitate generalizată.

Următoarea teoremă prezintă condiţii suficiente pentru existenţa punctelor de minim slab pentru (SOP).

Teorema 3.5.26. [128] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este soluţie a $(WSSVI)$ şi T este (K^0, K^0)-pseudoinvexă în (x_0, y_0) în raport cu η, atunci (x_0, y_0) este un minim slab al problemei (SOP).*

Datorită relaţiilor dintre noţiunile de pseudoinvexitate, următoarele corolarii sunt evidente.

Corolar 3.5.27. [128] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie mutivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este soluţie a $(WSSVI)$ şi T este $(K^0, intK)$-pseudoinvexă în (x_0, y_0) în raport cu η, atunci (x_0, y_0) este un minim slab al problemei (SOP).*

Corolar 3.5.28. [128] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este soluţie a $(WSSVI)$ şi T este $(K, intK)$-pseudoinvexă în (x_0, y_0) în raport cu η, atunci (x_0, y_0) este un minim slab al problemei (SOP).*

Teorema următoare prezintă condiţii suficiente pentru existenţa punctelor de minim ale problemei (SOP).

Teorema 3.5.29. [128] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este soluţie a $(SSVI)$ şi T este (K^0, K^0)-pseudoinvexă în (x_0, y_0) în raport cu η, atunci (x_0, y_0) este un minim slab al problemei (SOP).*

În cele ce urmează, prezentăm condiţii suficiente pentru ca o soluţie a problemei (SOP) să fie soluţie a $(SSVI)$, folosind weak-quasi-invexitatea.

Teorema 3.5.30. [94] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este un punct de minim al problemei (SOP), T este (K^0, K^0)-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η, ∂T este strict $(-K^0, -K^0)$-η-strong pseudomonotonă, $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0) \rangle \subseteq K^0$ şi η este simetrică în x_0, atunci (x_0, y_0) este o soluţie a $(SSVI)$.*

Teorema 3.5.31. [94] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este un punct de minim al problemei (SOP), T este $(\operatorname{int} K, K^0)$-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η, ∂T este strict $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$-$\eta$-strong pseudomonotonă, $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0) \rangle \subseteq K^0$ şi η este simetrică în x_0, atunci (x_0, y_0) este o soluţie a $(SSVI)$.*

Următoarele corolarii sunt consecinţe ale Teoremei 3.5.30 şi Teoremei 3.5.31, bazate pe Propoziţia 3.5.14.

Corolar 3.5.32. [94] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este un punct de minim al problemei* (SOP)*,* T *este* $(\operatorname{int} K, \operatorname{int} K)$*-weakly-quasi-invex în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* ∂T *este strict* $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$*-*$\eta$*-strong pseudomonotonă,* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq K^0$ *şi* η *este simetrică în* x_0*, atunci* (x_0, y_0) *este o soluţie a* $(SSVI)$*.*

Corolar 3.5.33. [94] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este un punct de minim al problemei* (SOP)*,* T *este* $(K^0, \operatorname{int} K)$*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* ∂T *este* $(-K^0, -K^0)$*-*η*-strong pseudomonotonă,* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq K^0$ *şi* η *este simetrică în* x_0*, atunci* (x_0, y_0) *este o soluţie a* $(SSVI)$*.*

Corolar 3.5.34. [94] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este un punct de minim al problemei* (SOP)*,* T *este* $(K^0, \operatorname{int} K)$*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* ∂T *este* $(-K^0, -K^0)$*-*η*-strong pseudomonotonă,* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq K^0$ *şi* η *este simetrică în* x_0*, atunci* (x_0, y_0) *este o soluţie a* $(WSSVI)$*.*

3.5.2 Legături între problemele (SOP) şi $W(SMVI)$

În această subsecţiune, vom prezenta relaţia între o inegalitate vectorială variaţională generalizată de tip Minty şi o problemă de optimizare multivocă.

O *inegalitate vectorială variaţională generalizată de tip Minty* $(SMVI)$ este cea în care se cere aflarea unei perechi (x_0, y_0) cu $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$, astfel încât pentru orice $x \in A$, $y \in T(x)$ există $\xi \in \partial T(x, y)$ astfel încât

$$\text{(SMVI)} \qquad \langle \xi, \eta(x, x_0)\rangle \notin -K^0.$$

O *inegalitate vectorială variaţională generalizată slabă de tip Minty* $(WSMVI)$ este cea în care se cere aflarea unei perechi (x_0, y_0) cu $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$, astfel încât pentru orice $x \in A$, $y \in T(x)$ există $\xi \in \partial T(x, y)$ astfel încât

$$\text{(WSMVI)} \qquad \langle \xi, \eta(x, x_0)\rangle \notin -\operatorname{int} K.$$

Rezultatul următor ne prezintă condiţii necesare pentru ca un punct să fie soluţie a problemei (SOP).

Teorema 3.5.35. [95] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este un minim al problemei* (SOP)*,* T *este* (K^0, K^0)*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η *şi* η *este simetrică* x_0*, atunci* (x_0, y_0) *este soluţie a problemei* $(SMVI)$*.*

Corolarul ce urmează presupune condiţii mai tari decât cele ale Teoremei 3.5.35, vezi Propoziţia 3.5.14.

Corolar 3.5.36. [95] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este un punct de minim pentru problema (SOP), T este $(K^0, \operatorname{int} K)$-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η şi η este simetrică în x_0, atunci (x_0, y_0) este soluţie a $(SMVI)$.*

Următorul rezultat prezintă condiţii necesare alternative pentru ca un punct să fie minim slab pentru (SOP).

Teorema 3.5.37. [95] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este punct de minim pentru (SOP), T este $(\operatorname{int} K, K^0)$-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η şi η este simetrică în x_0, atunci (x_0, y_0) este soluţie a $(WSMVI)$.*

Rezultatele următoare sunt consecinţe ale Teoremei 3.5.37, bazate pe Propoziţia 3.5.14.

Corolar 3.5.38. [95] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este punct de minim pentru (SOP), T este $(\operatorname{int} K, \operatorname{int} K)$-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η şi η este simetrică în x_0, atunci (x_0, y_0) este soluţie a $(WSMVI)$.*

Corolar 3.5.39. [95] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este punct de minim pentru (SOP), T este (K^0, K^0)-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η şi η este simetrică în x_0, atunci (x_0, y_0) este soluţie a $(WSMVI)$.*

Corolar 3.5.40. [95] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este punct de minim pentru (SOP), T este $(K^0, \operatorname{int} K)$-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η şi η este simetrică în x_0, atunci (x_0, y_0) este soluţie a $(WSMVI)$.*

Teorema următoare prezintă condiţii suficiente pentru ca o soluţie $(SMVI)$ să fie soluţie a problemei (SOP).

Teorema 3.5.41. [95] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este soluţie a $(SMVI)$, T este $(\operatorname{int} K, K^0)$-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η, η este simetrică în x_0, ∂T este strict $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$-$\eta$-strong pseudomonotonă şi $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0) \rangle \subseteq \operatorname{int} K$, atunci (x_0, y_0) este punct de minim pentru (SOP).*

Următoarele corolarii sunt consecinţe ale Teoremei 3.5.41, bazându-ne pe Propoziţia 3.5.14.

Corolar 3.5.42. [95] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ şi $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este soluţie a $(SMVI)$, T este $(\operatorname{int} K, \operatorname{int} K)$-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η, η este simetrică în x_0, ∂T este strict $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$-$\eta$-strong pseudomonotonă şi $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0) \rangle \subseteq \operatorname{int} K$, atunci (x_0, y_0) este punct de minim pentru (SOP).*

Corolar 3.5.43. [95] *Fie $T : A \to 2^Y$ o funcţie multivocă, $x_0 \in A$ si $y_0 \in T(x_0)$. Dacă perechea (x_0, y_0) este soluţie a $(SMVI)$, T este (K^0, K^0)-weakly-quasi-invexă în (x_0, y_0) în raport cu η, η este simetrică în x_0, ∂T este strict $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$-$\eta$-strong pseudomonotonă şi $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0) \rangle \subseteq K^0$, atunci (x_0, y_0) este punct de minim pentru (SOP).*

Corolar 3.5.44. [95] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este soluţie a* $(SMVI)$*,* T *este* $(K^0, \operatorname{int} K)$*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* η *este simetrică în* x_0*,* ∂T *este strict* $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$*-*$\eta$*-strong pseudomonotonă şi* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq K^0$*, atunci* (x_0, y_0) *este punct de minim pentru* (SOP).

Teorema următoare ne dă condiţii suficiente, în ipoteza de (K^0, K^0)-weakly-quasi-invexitate, ca o soluţie $(SMVI)$ să fie soluţie pentru (SOP).

Teorema 3.5.45. [95] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este soluţie pentru* $(SMVI)$*,* T *este* (K^0, K^0)*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* η *este simetrică în* x_0*,* ∂T *este* $(-K^0, -K^0)$*-*η*-strong pseudomonotonă şi daca avem* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq K^0$*, atunci* (x_0, y_0) *este punct de minim pentru* (SOP).

Corolar 3.5.46. [95] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este soluţie pentru* $(SMVI)$*,* T *este* $(K^0, \operatorname{int} K)$*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* η *este simetrică în* x_0*,* ∂T *este strict* $(-K^0, -K^0)$*-*η*-strong pseudomonotonă şi* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq K^0$*, atunci* (x_0, y_0) *este punct de minim pentru* (SOP).

Teorema următoare ne dă condiţii suficiente, folosind $(\operatorname{int} K, K^0)$-weakly-quasi-invexitatea, pentru ca o soluţie a $(WSMVI)$ să fie soluţie pentru (SOP).

Teorema 3.5.47. [95] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este soluţie pentru* $(WSMVI)$*,* T *este* $(\operatorname{int} K, K^0)$*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* η *este simetrică în* x_0*,* ∂T *este strict* $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$*-*$\eta$*-strong pseudomonotonă şi* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq \operatorname{int} K$*, atunci* (x_0, y_0) *este punct de minim pentru* (SOP).

În continuare prezentăm consecinţe ale Teoremei 3.5.47, bazându-ne Propoziţia 3.5.14.

Corolar 3.5.48. [95] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este soluţie pentru* $(WSMVI)$*,* T *este* $(\operatorname{int} K, \operatorname{int} K)$*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* η *este simetrică în* x_0*,* ∂T *este strict* $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$*-*$\eta$*-strong pseudomonotonă şi* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq \operatorname{int} K$*, atunci* (x_0, y_0) *este punct de minim pentru* (SOP).

Corolar 3.5.49. [95] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este soluţie pentru* $(WSMVI)$*,* T *este* (K^0, K^0)*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* η *este simetrică în* x_0*,* ∂T *este strict* $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$*-*$\eta$*-strong pseudomonotonă şi* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq K^0$*, atunci* (x_0, y_0) *este punct de minim pentru* (SOP).

Corolar 3.5.50. [95] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este soluţie pentru* $(WSMVI)$*,* T *este* $(K^0, \operatorname{int} K)$*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* η *este simetrică în* x_0*,* ∂T *este strict* $(-\operatorname{int} K, -\operatorname{int} K)$*-*$\eta$*-strong pseudomonotonă şi* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq K^0$*, atunci* (x_0, y_0) *este punct de minim pentru* (SOP).

Teorema 3.5.51. [95] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este soluţie pentru* $(WSMVI)$*,* T *este* (K^0, K^0)*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* η *este simetrică în* x_0*,* ∂T *este strict* $(-K^0, -K^0)$*-*η*-strong pseudomonotonă şi* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq K^0$*, atunci* (x_0, y_0) *este punct de minim pentru* (SOP)*.*

Corolar 3.5.52. [95] *Fie* $T : A \to 2^Y$ *o funcţie multivocă,* $x_0 \in A$ *şi* $y_0 \in T(x_0)$*. Dacă perechea* (x_0, y_0) *este soluţie pentru* $(WSMVI)$*,* T *este* $(K^0, \operatorname{int} K)$*-weakly-quasi-invexă în* (x_0, y_0) *în raport cu* η*,* η *este simetrică în* x_0*,* ∂T *este strict* $(-K^0, -K^0)$*-*η*-strong pseudomonotonă şi* $\langle \partial T(x_0, y_0), \eta(x_0, x_0)\rangle \subseteq K^0$*, atunci* (x_0, y_0) *este punct de minim pentru* (SOP)*.*

3.6 Inegalităţi variaţionale vectoriale generalizate

În cadrul acestei secţiuni, fie X un spaţiu Banach înzestrat cu o normă $\|.\|$ şi X^* dualul său cu norma $\|.\|_*$. Notăm cu $[x, y]$, $]x, y[$, segmentul cu capetele $x, y \in X$ şi $[x, y]\backslash\{x, y\}$, respectiv. Reamintim că $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este perechea duală dintre X şi X^*. Fie A o submulţime nevidă şi deschisă a lui X.

Fie $F = (F_1, ..., F_n) : A \to \mathbb{R}^n$ o funcţie vectorială, unde $F_i : A \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$ sunt funcţii local Lipschitz pe A.

Considerăm următoarea problemă vectorială:
(VOP) Minimizăm $F(x) = (F_1(x), ..., F_n(x))$ unde $x \in A$.

Definiţia 3.6.1. (vezi, de exemplu, [67]) Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *soluţie eficientă (sau Pareto)* a lui (VOP) dacă pentru orice $x \in A$,

$$F(x) - F(x_0) \notin -\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\},$$

unde $\mathbb{R}^n_+$ este ortantul pozitiv şi 0 este originea lui $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 3.6.2. (vezi, de exemplu, [67]) Un punct $x_0 \in A$ se numeşte *soluţie slab eficientă (sau Pareto)* a lui (VOP) dacă pentru orice $x \in A$,

$$F(x) - F(x_0) \notin -\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+.$$

De asemenea, în această secţiune folosim subdiferenţiala Mordukhovich în spaţii Asplund şi în acest sens prezentăm aceste definiţii în continuare.

Definiţia 3.6.3. [101] Fie $x \in A$ şi $\varepsilon \geq 0$. Mulţimea $\varepsilon - normalelor$ lui A în x se defineşte astfel

$$\widehat{N}_\varepsilon(x, A) = \{x^* \in X^* \mid \limsup_{u \xrightarrow{A} x} \frac{\langle x^*, u - x\rangle}{\|u - x\|} \leq \varepsilon\}.$$

Fie $\overline{x} \in A$, conul *limiting normal* a lui A în $\overline{x}$ este

$$N(\overline{x}, A) = \limsup_{\substack{x \to \bar{x} \\ \varepsilon \searrow 0}} \widehat{N}_{\varepsilon}(x, A).$$

Definiţia 3.6.4. [101] Fie $F : A \to \overline{\mathbb{R}}$ o funcţie finită în $\overline{x} \in A$. *Subdiferenţiala Mordukhovich* a lui F în $\overline{x}$ se defineşte astfel

$$\partial_L F(\overline{x}) = \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N((\overline{x}, F(\overline{x})), \text{epi } F)\}.$$

Definiţia 3.6.5. [101] Un spaţiu Banach X este Asplund, sau spunem că are proprietatea Asplund, dacă orice funcţie continuă convexă $F : A \to X$ definită pe o submulţime deschisă convexă A a lui X este Frèchet diferenţiablă pe o submulţime densă a lui A.

Remarca 3.6.6. Unul dintre cele mai populare spaţii Asplund este orice spaţiu Banach reflexiv.

Pentru mai multe detalii şi aplicaţii, vezi B. Mordukhovich [101].

În această secţiune considerăm de asemenea inegalităţi vectoriale variaţionale generalizate de tip Minty şi inegalităţi vectoriale variaţionale generalizate slabe de tip Stampacchia, definite cu ajutorul subdiferenţialei Mordukhovich în spaţii Asplund.

Fie $F = (F_1, ..., F_n) : A \to \mathbb{R}^n$ o funcţie vectorială, unde $F_i : A \to \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., n)$ sunt funcţii local Lipschitz pe A.

Considerăm următoarele inegalităţi vectoriale variaţionale generalizate de tip Minty şi inegalităţi vectoriale variaţionale generalizate (slabe) de tip Stampacchia:

$(MVVI)$ Să se afle $x_0 \in A$ astfel încât, pentru orice $x \in A$ există $\xi_i^* \in \partial_L F_i(x)$ $(i = 1, ..., n)$,

$$\langle \xi^*, \eta(x, x_0) \rangle = (\langle \xi_1^*, \eta(x, x_0) \rangle, ..., \langle \xi_n^*, \eta(x, x_0) \rangle) \notin -\mathbb{R}_+^n \backslash \{0\}.$$

$((W)SVVI)$ Să se afle $x_0 \in A$ astfel încât, pentru orice $x \in A$ există $\xi_i^* \in \partial_L F_i(x_0)$ $(i = 1, ..., n)$,

$$\langle \xi^*, \eta(x, x_0) \rangle = (\langle \xi_1^*, \eta(x, x_0) \rangle, ..., \langle \xi_n^*, \eta(x, x_0) \rangle) \notin -\mathbb{R}_+^n \backslash \{0\} \quad (\notin -\text{int}\mathbb{R}_+^n).$$

Vom obţine relaţii între soluţiile problemei (VOP) şi aceste inegalităţi vectoriale variaţionale generalizate, folosind conceptul de invexitate pentru funcţii vectoriale. Rezultatul pricipal din S. Al-Homidan şi Q.H. Ansari [1], Q.H. Ansari, M. Rezaie şi J. Zafarani [5], M. Rezaie şi J. Zafarani [109] a fost obţinut folosind subdiferenţiala Clarke. Deoarece clasa subdiferenţialei Clarke include clasa subdiferenţialei Mordukhovich (vezi B. Mordukhovich [101]), au fost autori care au studiat legăturile dintre aceste inegalităţi vectoriale variaţionale generalizate şi problemele vectoriale de optimizare folosind subdiferenţiala Mordukhovich, cu scopul de a obţine rezultate mai bune.

Printre autori ii enumerăm pe M. Oveisiha şi J. Zafarani [104] iar B. Chen şi N.J. Huang [33] au considerat aceste inegalităţi vectoriale variaţionale generalizate şi probleme vectoriale de optimizare, în spaţii Asplund.

Folosind câteva exemple în acest sens, vom demonstra că rezultatele noastre sunt mai tari decât cele obţinute pană acum.

Definiţia 3.6.7. (vezi, de exemplu, [115]) Fie $\eta : A \times A \to X$. O submulţime A a lui X se numeşte *invexă* în raport cu η dacă, pentru orice $x, y \in A$ şi $\lambda \in [0, 1]$ avem $y + \lambda\eta(x, y) \in A$.

În continuare, în caz că nu se specifică altfel, presupunem că X este spaţiu Asplund şi $A \subseteq X$ este o mulţime invexă nevidă în raport cu bifuncţia $\eta : A \times A \to X$.

Definiţia 3.6.8. (vezi, de exemplu, [104], [115]) Fie $F : A \to \mathbb{R}$ o funcţie. F se numeşte

(i) *quasi-preinvexă* în raport cu η pe A dacă pentru orice $x, y \in A$, $\lambda \in [0, 1]$,

$$F(x) \leq F(y) \Rightarrow F(y + \lambda\eta(x, y)) \leq F(y);$$

(ii) *strict-quasi-preinvexă* în raport cu η pe A dacă pentru orice $x, y \in A$, $\lambda \in (0, 1)$,

$$F(x) < F(y) \Rightarrow F(y + \lambda\eta(x, y)) < F(y);$$

(iii) *prequasi-invexă* în raport cu η on A dacă pentru orice $x, y \in A$, $\lambda \in [0, 1]$,

$$F(y + \lambda\eta(x, y)) \leq \max\{F(x), F(y)\}.$$

Este uşor de observat că $(iii) \Rightarrow (i)$ dar reciproc nu este adevărat, aşa cum ne arată exemplul următor.

Exemplul 3.6.9. [96] Fie $X = \mathbf{R}$, $A =]1; 3[$, $F : A \to \mathbf{R}$, $F(x) = e^x$,
$\eta : A \times A \to \mathbf{R}$,

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 2x - y, \ x > y, \ x, y \in (1; \frac{3}{2}), \\ x - y, \ otherwise. \end{cases}$$

Funcţia F este quasi-preinvexă în raport cu η pe A şi nu este prequasi-invexă în raport cu η pe A deoarece pentru $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{11}{10}$, $\lambda = 1$, avem

$$F(x) > F(y) \text{ şi } F(y + \lambda\eta(x, y)) > F(x).$$

Se verifică uşor că A este invexă în raport cu η pe A.

În cele ce urmează, introducem următoarele definiţii pentru funcţii vectoriale.

Definiţia 3.6.10. [96] Fie $F = (F_1, ..., F_n) : A \to \mathbb{R}^n$ o funcţie vectorială şi $x_0 \in A$. F se numeşte

(i) *quasi-preinvexă* în raport cu η pe A dacă pentru orice $x, y \in A, \lambda \in [0, 1]$,

$$F(x) - F(y) \in -\mathbb{R}^n_+ \implies F(y + \lambda\eta(x, y)) - F(y) \in -\mathbb{R}^n_+;$$

(ii) *strict-quasi-preinvexă* în raport cu to η pe A dacă pentru orice $x, y \in A, \lambda \in (0, 1)$,

$$F(x) - F(y) \in -\mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\} \implies F(y + \lambda\eta(x, y)) - F(y) \in -\mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\};$$

(iii) *strict-pseudo-invexă* în raport cu η pe A dacă pentru orice $x, y \in A$,

$$F(x) - F(y) \in -\mathbb{R}^n_+ \implies \langle \partial_L F(y), \eta(x, y)\rangle \subseteq -\mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\};$$

(iv) *slab-quasi-invexă* în raport cu η pe A dacă pentru orice $x, y \in A$,

$$\langle \partial_L F(y), \eta(x, y)\rangle \subseteq \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\} \implies F(x) - F(y) \in \mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}.$$

Remarca 3.6.11. (vezi, de exemplu, [109]) Definiţia subdiferenţialei Mordukhovich a funcţiei F în $x \in A$ poate fi extinsă pentru funcţii vectoriale în felul următor:

$$\partial_L F(x) = \partial_L F_1(x) \times \partial_L F_2(x) \times ... \times \partial_L F_n(x).$$

Reamintim următoarele definiţii de monotonie generalizată pentru funcţii multivoce, în raport cu η. Fie K un con convex punctat şi solid a lui $\mathbb{R}^n$ astfel încât $K \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Definiţia 3.6.12. *(*vezi, de exemplu, [109], [115]) O funcţie multivocă
$F : A \to 2^{X^*}$ se numeşte

(i) *K-pseudomonotonă* în raport cu η pe A dacă pentru orice $x, y \in A$,

$$\langle F(x), \eta(y, x)\rangle \subseteq K \Longrightarrow \langle F(y), \eta(x, y)\rangle \subseteq -K;$$

(ii) *K-strict pseudomonotonă* în raport cu η on A dacă pentru orice $x, y \in A$,
$x \neq y$,

$$\langle F(x), \eta(y, x)\rangle \subseteq K \Longrightarrow \langle F(y), \eta(x, y)\rangle \subseteq -\operatorname{int} K.$$

În câteva din rezultatele următoare folosim ipoteza ca o bifuncţie η să satisfacă *condiţia C*:

$$\eta(x+\lambda\eta(x,y),y)=\lambda\eta(x,y), \quad \forall x,y\in A, \forall\lambda\in[0,1].$$

Această ipoteză este cunoscută în literatura specifică invexităţii, vezi T. Jabarootian şi J. Zafarani [68].

Definiţia 3.6.13. [96] Spunem că $\eta : A\times A\to X$ satisface *condiţia* C *în* $x_0\in A$ dacă pentru orice $x\in A, \lambda\in[0,1], x\neq x_0$,

$$\eta(x_0+\lambda\eta(x,x_0),x_0)=\lambda\eta(x,x_0).$$

Rezultatele de medie sunt importante în analiza nenetedă şi prezentăm unul în ceea ce priveşte subdiferenţiala Mordukhovich.

Teorema 3.6.14. [101] *Fie* F *o funcţie continuă, Lipschitz pe o mulţime deschisă a lui* X *ce conţine segmentul* $[x,y]$*. Atunci*

$$F(y)-F(x)\leq\langle\xi^*,y-x\rangle,$$

pentru un $c\in[x,y)$*, şi un* $\xi^*\in\partial_L F(c)$*.*

Următoarea teoremă este un rezultat care se referă la funcţiile prequasi-invexe, local Lipschitz.

Teorema 3.6.15. [104] *Fie* $F : A\to\mathbb{R}$ *o funcţie local Lipschitz pe* A*. Presupunem că* F *este prequasi-invexă în raport cu* η *pe* A*,* η *este continuă în raport cu a doua variabilă şi satisface condiţia C. Dacă* $\langle\xi^*,\eta(y,x)\rangle>0$ *pentru un* $\xi^*\in\partial_L F(x)$*, atunci* $F(y)>F(x)$*.*

Folosind argumente similare cu cele din demonstraţia Teoremei 3.6.15, proprietatea poate fi extinsă la funcţiile quasi-preinvexe.

Teorema 3.6.16. [96] *Fie* $F : A\to\mathbb{R}$ *o funcţie local Lipschitz pe* A*. Presupunem că* F *este quasi-preinvexă în raport cu* η *pe* A*,* η *este continuă în raport cu al doilea argument şi satisface condiţia C. Dacă* $\langle\xi^*,\eta(y,x)\rangle>0$ *pentru un* $\xi^*\in\partial_L F(x)$*, atunci* $F(y)>F(x)$*.*

Teorema următoare ne dă condiţii suficiente pentru ca o soluţie a problemei $(MVVI)$ să fie soluţie pentru (VOP).

Teorema 3.6.17. [96] *Presupunem că* $F : A\to\mathbb{R}^n$ *este strict-quasi-preinvexă în* x_0 *în raport cu* η *pe* A*,* $\partial_L F_i$ $(i=1,...,n)$ *este strict pseudomonotonă în raport cu* η *pe* A*. Dacă* $x_0\in A$ *este soluţie a problemei* $(MVVI)$ *şi* η *satisface condiţia* C *în* x_0*, atunci* x_0 *este soluţie eficientă pentru* (VOP)*.*

Remarca 3.6.18. În [104] (Teorema 13), autorii au demonstrat că dacă x_0 este o soluţie a problemei $(MVVI)$, atunci x_0 este o soluţie eficientă a problemei (VOP) presupunând că F_i $(i = 1, \ldots, n)$ este pseudo-invexă în raport cu η pe A şi η este continuă în raport cu al doilea argument şi satisface condiţia C. Următorul exemplu ne demonstrează că Teorema 3.6.17 se aplică, în timp Teorema 13 [104] nu. Funcţia $F : A \to \mathbb{R}^2$ este strict-quasi-preinvexă într-un punct x_0 în raport cu aceeaşi funcţie η pe A, $\partial_L F_i$ $(i = 1, ..., n)$ este strict pseudomonotonă în raport cu η pe A, η satisface condiţia C în x_0 dar există $k, 1 \leq k \leq n$, astfel încât F_k nu este pseudo-invexă în raport cu η pe A.

Exemplul 3.6.19. [96] Să considerăm $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$, $F : A \to \mathbb{R}^2$, $F = (F_1, F_2)$ definită astfel
$$F(x) = (F_1(x), F_2(x)) = (x, \frac{1}{2}x),$$
$x_0 = 0$ şi $\eta : A \times A \to \mathbf{R}$ definită astfel

$$\eta(x, y) = \begin{cases} x - y, & \begin{array}{l}(x > 0, y = 0) \text{ sau} \\ (x = 0, y > 0),\end{array} \\ 0, & x = y, \\ 1 - y, & y > x > 0, \\ -y, & 0 < y < x. \end{cases}$$

Obţinem că
$$\partial_L F(x) = \{(1, \frac{1}{2})\}, \quad x \in A.$$
Se verifică uşor F este strict quasi-preinvexă în $x_0 = 0$ în raport cu η pe A şi F_2 nu este pseudo-invexă în raport cu η pe A deoarece pentru $y > x > 0$ avem că

$$\exists\ \xi^* = \frac{1}{2} \in \partial_L F_2(y),\ \langle \xi^*, \eta(x, y)\rangle > 0 \ \text{ şi } F_2(x) < F_2(y).$$

Pe de altă parte, pentru orice $x, y \in A$, $x \neq y$,

$$\langle \partial_L F_i(x), \eta(y, x)\rangle \subseteq \mathbb{R}_+ \implies \langle \partial_L F_i(y), \eta(x, y)\rangle \ \subseteq -\mathrm{int}\mathbb{R}\ (i = 1, 2).$$

Prin urmare, $\partial_L F_{\ 1}$, $\partial_L F_{\ 2}$ sunt strict pseudomonotone în raport cu η pe A şi η satisface condiţia C în x_0. Este uşor de observat că $x_0 = 0$ este soluţie a problemei $(MVVI)$ şi o soluţie eficientă a problemei (VOP).

Remarca 3.6.20. Funcţia $\eta : A \times A \to \mathbf{R}$ definită în Exemplul 3.6.19 nu satisface condiţia C. Să luăm, de exemplu, $x = 2$, $y = 1$, şi $\lambda = \frac{1}{2}$.

Teorema 3.6.21. [96] *Presupunem că $F : A \to \mathbb{R}^n$ este slab quasi-invexă în raport cu η pe A şi $\partial_L F$ este -$\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$-pseudomonotonă în raport cu η pe A. Dacă $x_0 \in A$ este o soluţie eficientă a problemei (VOP), atunci x_0 este o soluţie a problemei $(SVVI)$.*

Corolar 3.6.22. [96] *Presupunem că $F : A \to \mathbb{R}^n$ este slab quasi-invexă în raport cu η pe A şi $\partial_L F$ este -$\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$-pseudomonotonă în raport cu η pe A. Dacă $x_0 \in A$ este o soluţie eficientă a problemei (VOP), atunci x_0 este soluţie pentru $(WSVVI)$.*

Remarca 3.6.23. În [33] (Teorema 4.2) autorii demonstrează că dacă x_0 este soluţie slabă a problemei (VOP) atunci este soluţie pentru $(WSVVI)$ presupunând că F_i $(i = 1, \ldots, n)$ este invexă în raport cu η pe A. Exemplul următor ne arată că putem obţine un rezultat cu $F : A \to \mathbb{R}^n$ slab quasi-invexă în raport cu η pe A, $\partial_L F$ -$\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$-pseudomonotonă şi există $k, 1 \leq k \leq n$, astfel încât F_k nu este invexă în raport cu η pe A.

Exemplul 3.6.24. [96] Fie $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$, $F = (F_1, F_2) : A \to \mathbf{R^2}$ definită astfel

$$F(x) = (F_1(x), F_2(x)) = (\sqrt{x}, \frac{1}{2}\sqrt{x}),$$

$x_0 = 0$ şi $\eta : A \times A \to \mathbf{R}$ definită

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 0, & (0 < x < y) \text{ sau } (x = y), \\ x, & x > 0,\ y = 0, \\ x - y, & x > y > 0, \\ 0, & x = 0,\ y > 0. \end{cases}$$

Obţinem

$$\partial_L F(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2\sqrt{x}}, \frac{1}{4\sqrt{x}}), & x > 0, \\ [0, \infty[\times [0, \infty[, & x = 0. \end{cases}$$

Funcţia F este slab quasi-invexă în raport cu η pe A deoarece

$$\langle \partial_L F(y), \eta(x, y) \rangle \subseteq \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\} \implies F(x) - F(y) \in \mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}.$$

Funcţia F_2 nu este invexă în raport cu η pe A deoarece pentru $x > 0$, $y = 0$ avem

$$F_2(x) - F_2(0) < \langle \xi^*, \eta(x, 0) \rangle,$$

pentru $\xi^* = 2$. Se observă că $\partial_L F$ este -$\mathbb{R}^2_+ \setminus \{0\}$-pseudomonotonă în raport cu η pe A, x_0 este o soluţie eficientă a problemei (VOP) şi soluţie pentru $((W)SVVI)$.

Teorema 3.6.25. [96] *Presupunem că*

(i) $\partial_L F_i$ $(i = 1, ..., n)$ este strict pseudomonotonă în raport cu η pe A;

(ii) η satisface condiţia C în x_0;

(iii) pentru orice $x \neq u$ şi orice $i = 1, ..., n$,

$$[F_i(x) \geq F_i(u) \Rightarrow \tag{3.1}$$

$$\exists\ c_i = x + \lambda_i \eta(u, x) \in A, \lambda_i \in (0, 1), \exists\ \xi_i \in \partial_L F_i(c_i)$$

astfel încât

$$\langle \xi_i, \eta(x, c_i) \rangle \geq 0].$$

Dacă $x_0 \in A$ este soluţie a problemei $(WSVVI)$, atunci x_0 este soluţie eficientă a problemei (VOP).

Corolar 3.6.26. [96] *Presupunem că*

1. *$\partial_L F_i$ $(i = 1, ..., n)$ este strict pseudomonotonă în raport cu η pe A;*
2. *η satisface condiţia C în x_0;*
3. *pentru orice $x \neq u$ şi orice $i = 1, ..., n$,*

$$[F_i(x) \geq F_i(u) \Rightarrow$$

$$\exists\ c_i = x + \lambda_i \eta(u, x) \in A, \lambda_i \in (0, 1), \exists\ \xi_i \in \partial_L F_i(c_i)$$

astfel încât

$$\langle \xi_i, \eta(x, c_i) \rangle \geq 0].$$

Dacă $x_0 \in A$ este soluţie a problemei $(SVVI)$, atunci x_0 este soluţie eficientă a problemei (VOP).

Ansari, Rezaie şi Zafarani (2011) [5] au considerat o formă perturbată a inegalităţii vectoriale variaţionale generalizate slabe Stampacchia.

Pornind de la această lucrare, considerăm următoarea formă a inegalităţii vectoriale variaţionale generalizate de tip Stampacchia.

$(PSVVI)$ Să se afle $x_0 \in A$ pentru care există $t_0 \in (0, 1)$ astfel încât pentru orice $x \in A$ şi orice $t \in (0, t_0]$, există $\xi_i^t \in \partial_L F_i(x_0 + t\eta(x, x_0))$ $(i = 1, ..., n)$ care satisface

$$\langle \xi^t, \eta(x, x_0) \rangle = (\langle \xi_1^t, \eta(x, x_0) \rangle, ..., \langle \xi_n^t, \eta(x, x_0) \rangle) \notin -\mathbb{R}^n_+ \backslash \{0\}.$$

Teorema următoare ne dă relaţia dintre problemele $(PSVVI)$ şi $(WSVVI)$.

Teorema 3.6.27. [96] *Dacă $x_0 \in A$ este soluţie a problemei $(PSVVI)$, atunci este soluţie a problemei $(WSVVI)$.*

Remarca 3.6.28. Reciproca Teoremei 3.7 nu este adevărată. În următorul exemplu vom vedea că există soluţie a problemei $(WSVVI)$ care nu este soluţie pentru problema $(PSVVI)$.

Exemplul 3.6.29. [96] Fie $X = \mathbb{R}$, $A = [-1, 1]$, $F : A \to \mathbb{R}$ definită astfel

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ x, & x < 0, \end{cases}$$

şi $\eta : A \times A \to \mathbb{R}$ definită astfel

$$\eta(x, y) = x - y.$$

Avem că

$$\partial_L F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0, \\ [0, \infty[, & x = 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Se observă că $x_0 = 0$ este soluţie a problemei $(WSVVI)$. Pe de altă parte, pentru orice $t_0 \in (0, 1)$ există $x = -1 \in A$ şi $t = t_0 \in (0, t_0]$ astfel încât $\xi^t \in \partial_L F(-t)$,

$$\langle \xi^t, \eta(x, 0) \rangle \in -\mathbf{R}_+ \setminus \{0\}.$$

Bibliografie

[1] S. Al-Homidan, Q.H. Ansari, *Generalized Minty vector variational-like inequalities and vector optimization problems*, J. Optim. Theory Appl., **144** (2010), 1-11.

[2] M.H. Alizadeh, N. Hadjisavvas, M. Roohi, *Local boundedness and surjectivity properties for generalized monotone operators*, Private communication.

[3] Q.H. Ansari, G.M. Lee, *Nonsmooth vector optimization problems and Minty vector variational inequalities*, J. Optim. Theory Appl., **145**(**1**) (2010), 1-16.

[4] Q.H. Ansari, M. Rezaie, *Existence results for Stampacchia and Minty type vector variational inequalities*, Optimization **59**(**7**) (2010), 1053-1065.

[5] Q.H. Ansari, M. Rezaie, J. Zafarani, *Generalized variational-like inequalities and vector optimization*, J. Global Optim. **53**(**2**) (2011), 271-284

[6] Q.H. Ansari, J.-K. Yao, *Recent Developments on Vector Optimization*, Springer, Berlin, 2012.

[7] Q.H. Ansari, X.C. Yang, J.C. Yao, *Existence and duality of implicit vector variational problems*, Numer. Funct. Anal. Optim., 2002.

[8] Q.H. Ansari, S. Schaible, J.C. Yao, *System of vector equilibrium problems and its applications*, J. Optim. Theory Appl. **107** (2000), 547-557.

[9] J.P. Aubin, *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*, North Holland, Amsterdam, 1979.

[10] J.P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued Analysis*, Birkhauser, Boston, 1990.

[11] T. Başar, G.J. Olsder, *Dynamic Noncooperative Game Theory* (second edition), SIAM, Philadelphia, 1999.

[12] T.Q. Bao, B.S. Mordukhovich, *Relative Pareto minimizer to multiobjective problems: Existence and optimality conditions*, Math. Program. **122** (2010), 301-347.

[13] L.B. Batista Dos Santos, G. Ruiz-Garzón, M.A. Rojas-Medar, A. Rufián-Lizana, *Some relations between variational-like inequality problems and vector optimization problems in Banach spaces*, Comput. Math. Appl. **55** (2008), 1808-1814.

[14] H.H. Bauschke, P.L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer, New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[15] M. Bianchi, S. Schaible, *Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems*, J. Optim. Theory Appl. **90** (1996), 31-43.

[16] M. Bianchi, N. Hadjisavvas, S. Schaible, *Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions*, J. Optim. Theory Appl. **92** (1997), 527-542.

[17] M. Bianchi, R. Pini, *A note on equilibrium problems with properly quasimonotone bifunctions*, J. Global Optim. **20** (2001), 67-76.

[18] M. Bianchi, R. Pini, *Coercivity conditions for equilibrium problems*, J. Optim. Theory Appl. **124** (2005), 79-92.

[19] M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini, *Existence of equilibria via Ekeland's principle*, J. Math. Anal. Appl. **305** (2005), 502-512.

[20] G. Bigi, M. Castellani, G. Kassay, *A dual view of equilibrium problems*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 17-26.

[21] E. Blum, W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Stud. **63** (1994), 123-145.

[22] H. Brézis, G. Nirenberg, G. Stampacchia, *A remark on Ky Fan's minimax principle*, Bollettino U.M.I. **6** (1972), 293-300.

[23] H. Brézis, *Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectorieles en dualité*, Ann. Inst. Fourier **18** (1968), 115-175.

[24] F.E. Browder, *Multi-valued monotone nonlinear mappings*, Trans. Amer. Math. Soc. **118** (1965), 338-551.

[25] F.E. Browder, *Nonlinear maximal monotone mappings in Banach spaces*, Math. Ann. **175** (1968), 81-113.

[26] F.E. Browder, P. Hess, *Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces*, J. Funct. Anal. **11** (1972), 251-294.

[27] R.S. Burachik, A.N. Iusem, *Set-Valued Mappings and Enlargements of Monotone Operators*, Springer, Berlin, 2007.

[28] A. Cambini, L. Martein, *Handbook of Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, In: Nonconvex Optimization and Its Applications, vol. 76, Springer, The Netherlands, 2005.

[29] A. Capătă, G. Kassay, *On vector equilibrium problems and applications*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 365-380.

[30] O. Chadli, Y. Chiang, S. Huang, *Topological pseudomonotonicity and vector equilibrium problems*, J. Math. Anal. Appl. **270** (2002), 435-450.

[31] S.S. Chang, Y. Zhang, *Generalized KKM theorem and variational inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **159** (1991), 208-223.

[32] G.-Y. Chen, Q.M. Cheng, *Vector variational inequality and vector optimization*, in: Y. Sawaragi, K. Inoue and H. Nakayama (eds.), *Towards Interactive and Intelligent Decision Support Systems*, Springer-Verlag, New York, 1987, 408-416.

[33] B. Chen, N.J. Huang, *Vector variational-like inequalities and vector optimization problems in Asplund spaces*, Optim. Lett., **6(7)** (2012), 1513-1525.

[34] G.-Y. Chen, S.H. Hou, *Existence of solutions for vector variational inequalities*, in: F. Giannessi (ed.), *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 2000, 73-86.

[35] Y. Chiang, *Vector superior and inferior*, Taiwanese J. Math. **8(3)** (2004), 477-487.

[36] A. Chinchuluun, P.M. Pardalos, *A survey of recent developments in multiobjective optimization*, Ann. Oper. Res. **154(1)** (2007), 29-50.

[37] B.D. Craven, *Mathematical Programming and Control Theory*, Chapman and Hall, London, 1978.

[38] A. Daniilidis, N. Hadjisavvas, *On generalized cyclically monotone operators and proper quasimonotonicity*, Optimization **47** (2000), 123-135.

[39] A. Domokos, J. Kolumbán, *Comparison of two different types of pseudomonotone mappings*, In: Seminaire de la théorie de la meilleure approximation, convexité et optimisation, Cluj-Napoca, 2000, 95-103.

[40] M. Eidelheit, *Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen*, Studia Math. **6** (1936), 104-111.

[41] I. Ekeland, *On the variational principle*, J. Math. Anal. Appl. **47** (1974), 324-353.

[42] K. Fan, *Minimax theorems*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39** (1953), 42-47.

[43] K. Fan, *A generalization of Tychonoff's fixed point theorem*, Math. Ann. **142** (1961), 305-310.

[44] K. Fan, *Application of a theorem concerning sets with convex sections*, Math. Ann. **163** (1966), 189-203.

[45] K. Fan, *A minimax inequality and applications*, In: Inequalities, Vol. III, O. Shisha (Ed.), Academic Press 1972, 103-113.

[46] Y.P. Fang, N.J. Huang, *Strong vector variational inequalities in Banach spaces*, Appl. Math. Lett. **19** (2006), 362-368.

[47] Y.P. Fang, N.J. Huang, *Existence results for generalized implicit vector variational inequalities with multivalued mappings*, Indian J. Pure Appl. Math. **36** (2005), 629-640.

[48] A.P. Farajzadeh, A.A. Harandi, K.R. Kazmi, *Existence of solutions to generalized vector variational-like inequalities*, J. Optim. Theory Appl. **146** (2010), 95-104.

[49] F. Ferro, *A minimax theorem for vector-valued functions*, J. Optim. Theory Appl. **60** (1989), 19-31.

[50] C. Finet, L. Quarta, C. Troestler, *Vector-valued variational principles*, Nonlinear Anal. **52** (2003), 197-218.

[51] G.R. Garzon, R.O. Gomez, A.R. Lizana, *Generalized invex monotonicity*, Eur. J. Oper. Res. **144** (2003), 501-512.

[52] G.R. Garzon, R.O. Gomez, A.R. Lizana, *Relationship between vector variational-like inequality and optimization problems*, Eur. J. Oper. Res. **157** (2004), 113-119.

[53] F. Giannessi, *On Minty variational principle*, In: Giannessi, F., Komlósi, S., TapKsáKk, T. (eds.) New Trends in Mathematical Programming, Kluwer Academic, Dordrecht, 1998, 93-99.

[54] F. Giannessi, *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria: Mathematical Theories*, Kluwer Academic, Dordrecht, 2000.

[55] F. Giannessi, A. Maugeri, P.M. Pardalos, *Equilibrum Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequalities Models*, Springer, Berlin, 2002.

[56] X.H. Gong, *Optimality conditions for vector equilibrium problems*, J. Math. Anal. Appl. **342** (2008), 1455-1466.

[57] N. Hadjisavvas, *Generalized Convexity, Generalized Monotonicity and Nonsmooth Analysis*, In: *Handbook of Generalized Convexity and Monotonicity*, Series: Nonconvex Optimization and its Applications, Vol. **76**, Hadjisavvas, Nicolas; Komlósi, Sándor; Schaible, Siegfried (Eds.), Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2005, 3-87.

[58] N. Hadjisavvas, S. Schaible, *From scalar to vector equilibrium problems in the quasimonotone case*, J. Optim. Theory Appl. **96** (1998), 297-309.

[59] M.A. Hanson, *On sufficienty of the Kuhn-Tucker conditions,* J. Math. Anal. Appl. **80** (1981), 545-550.

[60] R. Hartley, *On cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness*, SIAM J. Appl. Math. **34** (1978), 211-222.

[61] S.H. Hu, N.S. Papageorgiu, *Handbook of Multivalued Analysis*, vol. I, Kluwer, 1997.

[62] D. Inoan, J. Kolumbán, *On pseudomonotone set-valued mappings*, Nonlinear Anal. **68** (2008), 47-53.

[63] A.N. Iusem, W. Sosa, *New existence results for equilibrium problems*, Nonlinear Anal. **52** (2003), 621-635.

[64] A.N. Iusem, W. Sosa, *Iterative algorithms for equilibrium problems*, Optimization **52** (2003), 301-316.

[65] A.N. Iusem, G. Kassay, W. Sosa, *An existence result for equilibrium problem with some surjectivity consequences*, J. Convex Anal. **16** (2009), 807-826.

[66] A.N. Iusem, G. Kassay, W. Sosa, *On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems*, Math Prog. **116** (2009), 259-273.

[67] J. Jahn, *Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[68] T. Jabarootian, J. Zafarani, *Generalized invariant monotonicity and invexity of non-differentiable functions*, J. Global Optim. **36** (2006), 537-564.

[69] V. Jeyakumar, *Convexlike alternative theorems and mathematical programming*, Optimization **16** (1985), 643-652.

[70] V. Jeyakumar, *A generalization of a minimax theorem of Fan via a theorem of the alternative*, J. Optim. Theory Appl. **48** (1986), 525-533.

[71] A.J. Jones, *Game theory: Mathematical Models of Conflict*, Horwood Publishing, Chicester, 2000.

[72] S. Karamardian, *Complementarity problems over cones with monotone and pseudomonotone maps*, J. Optim. Theory Appl. **18** (1976), 445-454.

[73] S. Karamardian, S. Schaible, *Seven kinds of monotone maps*, J. Optim. Theory Appl. **66** (1990), 37-46.

[74] P. Kas, G. Kassay, Z. Boratas-Sensoy, *On generalized equilibrium points*, J. Math. Anal. Appl. **296** (2004), 619-633.

[75] G. Kassay, *The Equilibrium Problem and Related Topics*, Risoprint, Cluj-Napoca, 2000.

[76] G. Kassay, J. Kolumbán, *On a generalized sup-inf problem*, J. Optim. Theory Appl. **91** (1996), 651-670.

[77] G. Kassay, M. Miholca, *Existence results for variational inequalities with surjectivity consequences related to generalized monotone operators*, J. Optim. Theory Appl. **159** (2013), 721-740.

[78] G. Kassay, M. Miholca, *On vector equilibrium problems given by a sum of two functions*, submitted.

[79] K.R. Kazmi, *On vector equilibrium problem*, Proc. Indian Acad. Sci. **110** (2000), 213-223.

[80] B.T. Kien, *The normalized duality mapping and two related characteristic properties of a uniformly convex Banach space*, Acta Math. Vietnamica **27** (2002), 53-67.

[81] M.D. Kirszbraun, *Über die Zusammenziehenden und Lipschitzschen Transformationen*, Fund. Math. **22** (1934), 7-10.

[82] B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, *Ein Beweis des Fixpunktsatzes für n-dimensionale Simplexe*, Fund. Math. **14** (1929), 132-138.

[83] J. Kolomŷ, *Maximal monotone mappings in Banach spaces*, Acta Univ. Carolinae - Math. et Phys. **33** (1992), 63-67.

[84] S. Komlósi, *Generalized Monotonicity in Nonsmooth Analysis*, In: *Generalized Convexity*, S. Komlósi, T. Rapcsák, S. Schaible (Eds.), Springer-Verlag 1994, 263-275.

[85] H. König, *Über das von Neumannsche minimax-theorem*, Archiv der Mathematik **19** (1968), 482-487.

[86] I. Konnov, *Generalized monotone equilibrum problems and variational inequalities*, In: *Handbook of Generalized Convexity and Monotonicity*, Series: Nonconvex Optimization and its Applications, Vol. 76, Hadjisavvas, Nicolas; Komlósi, Sándor; Schaible, Siegfried (Eds.), Springer, Berlin-Heidelberg-New York 2005, 559-618.

[87] I.V. Konnov, J.C. Yao, *Existence of solutions for generalized vector equilibrium problems*, J. Math. Anal. Appl. **233** (1999), 328-335.

[88] I. Konnov, D.T. Luc, A.M. Rubinov (eds.), *Generalized Convexity and Related Topics*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[89] H.W. Kuhn, *Lectures on the Theory of Games*, Princeton University Press, Princeton, 2003.

[90] K.L. Lin, D.P. Yang, J.C. Yao, *Generalized vector variational inequalities*, J. Optim. Theory Appl. **92** (1997), 117-125.

[91] A. Löhne, *Vector Optimization with Infimum and Supremum*, Springer, 2011.

[92] D.T. Luc, *Theory of Vector Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[93] A. Maugeri, F. Raciti, *On existence theorems for monotone and nonmonotone variational inequalities*, J. Convex Anal. **16** (2009), 899-911.

[94] M. Miholca, *Vector variational-like inequalities and set-valued optimization problems*, Ann. of Tiberiu Popoviciu Seminar **10** (2012), 75-85.

[95] M. Miholca, *On set-valued optimization problems and vector variational-inequalities*, Optim. Lett. **8**(**2**) (2014), 463-476.

[96] M. Miholca, *Vector variational-like inequalities and vector optimization problems*, Carpathian J. Math. **30**(**1**) (2014), 101-108.

[97] M. Miholca, *Lipschitz B-preinvex functions in Asplund spaces*, submitted.

[98] M. Miholca, *On vector variational-like inequalities and vector optimization problems in Asplund spaces*, accepted for publication in Studia Mathematica Universitatis Babeş-Bolyai.

[99] G.J. Minty, *Monotone (nonlinear) operators in Hilbert spaces*, Duke Math. J. **29** (1962), 341-346.

[100] S.K. Mishra, S.Y. Wang, *Vector variational-like inequalities and non-smooth vector optimization problems*, Nonlinear Anal. **64** (2006), 1939-1945.

[101] B. Mordukhovich, *Variations Analysis and Generalized Differentation, I: Basic Theory*, Grundlehren series (fundamental principles of mathematical sciences) **330**, Springer, Berlin, 2006.

[102] I. Muntean, *Functional Analisys* (Romanian), Babeş-Bolyai University, Cluj, 1973.

[103] W. Oettli, *A remark on vector-valued equilibria and generalized monotonicity*, Acta Math. Vietnam. **22** (1997), 215-221.

[104] M. Oveisiha, J. Zafarani, *Vector optimization problem and generalized convexity*, J. Global Optim., **52**(**1**) (2011), 29-43.

[105] S. Paeck, *Convexlike and concavelike conditions in alternative, minimax, and minimization theorems*, J. Optim. Theory Appl. **74** (1992), 317-332.

[106] P.M. Pardalos, T.M. Rassias, A.A. Khan, *Nonlinear Analysis and Variational Problems*, Springer, Berlin, 2010.

[107] R. Pini, *Invexity and generalized convexity*, Optimization **22** (1991), 513-525.

[108] N. Popovici, *Vector Optimization* (Romanian), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.

[109] M. Rezaie, J. Zafarani, *Vector optimization and variational-like inequalities*, J. Global Optim. **43** (2009), 47-66.

[110] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[111] H.L. Royden, *Real Analysis* (third edition), Macnmillan Publishing Company, New York, 1988.

[112] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1976.

[113] W. Rudin, *Functional Analysis*, T. M. H. Edition, New Delhi, 1976.

[114] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. **2** (1930), 171-180.

[115] M. Soleimani-damaneh, *Characterizations and applications of generalized invexity and monotonicity in Asplund spaces*, Top. **20**(2012), 592-613.

[116] M. Soleimani-damaneh, *Characterization of nonsmooth quasiconvex and pseudoconvex functions*, J. Math. Anal. Appl. **330** (2007), 1387-1392.

[117] T. Tanaka, *Generalized semicontinuity and existence theorems for cone saddle points*, Appl. Math. Optim. **36** (1997), 313-322.

[118] J. Von Neumann, *Zur theorie der gesellschaftsspiele*, Math. Ann. **100** (1928), 295-320.

[119] N.N. Vorob'ev, *Game theory: Lectures for Economists and Systems Scientists*, Springer, New York, 1977.

[120] J.C. Yao, *Multi-valued variational inequalities with K-pseudomonotone operators*, J. Optim. Theory Appl. **83** (1994), 391-403.

[121] X.M. Yang, X.Q. Yang, *Vector variational-like inequalities with pseudoinvexity*, Optimization **55** (2006), 157-170.

[122] X.M. Yang, X.Q. Yang, K.L. Teo, *Generalized invexity and generalized invariant monotonicity*, J. Optim. Theory Appl. **117** (2003), 607-625.

[123] X.M. Yang, X.Q. Yang, K.L. Teo, *Criteria for generalized invex monotonicity*, Eur. J. Oper. Res. **164** (2005), 115-119.

[124] X.M. Yang, X.Q. Yang, K.L. Teo, *Some remarks on the Minty vector variational inequality*, J. Optim. Theory Appl. **121** (2004), 193-201.

[125] X.M. Yang, X.Q. Yang, K.L. Teo, *Generalizations and applications of prequasi-invex functions*, J. Optim. Theory Appl. **110** (2001), 645-668.

[126] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1980.

[127] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications II/B, Nonlinear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[128] J. Zeng, S.J. Li, *On vector variational-like inequalities and set-valued optimization problems*, Optim. Lett. **5**(**1**) (2011), 55-69.

[129] J.X. Zhou, G. Chen, *Diagonal convexity conditions for problems in convex analysis and quasi-variational inequalities*, J. Math. Anal. Appl. **132** (1998), 213-225.