Universitatea Babeş Bolyai, Cluj-Napoca, România
Facultatea de Matematică şi Informatică

REZUMATUL TEZEI

Grupuri Brauer-Clifford si caractere ale algebrelor G-graduate

Autor:
Dana Debora Gliţia

Conducător ştiinţific:
Andrei Mărcuş

2013

Cuprins

Introducere **4**

1 Preliminarii **8**

1.1 Extinderi de corpuri şi acţiunea grupului Galois 8

1.2 Echivalenţe Morita graduate 9

2 Bimodule graduate de un grup peste un G-inel comutativ **10**

2.1 Motivaţia 10

2.2 F-algebre G-graduate peste Z şi echivalenţe Morita 11

2.3 Algebre grupale strâmbe 12

3 Extinderi de corpuri şi Teoria Clifford **13**

3.1 Motivaţia 13

3.2 Teoria Clifford pentru algebre tare G-graduate 13

3.3 Acţiuni Galois şi corespondenţe Clifford 14

3.4 R-module quasiomogene 16

4 Clasele Brauer-Clifford şi corespondeţe de caractere **17**

4.1 Motivaţia 17

4.2 Grupul Brauer-Clifford 17

4.3 Clasa Brauer-Clifford şi G-algebra centraă a unui caracter 18

4.4 Extinderi de corpuri 21

4.5 O echivalenţă Morita peste Z 21

5 Algebre G-graduate modulare şi G-algebre de endomorfisme **22**

5.1 Contextul general 22

5.2 Categori de module peste un modul dat 23

5.3 Endoizomorfisme şi corespondenţe de module 23

5.4 Endoizomorfisme peste $\mathcal{K}$ şi peste $\mathcal{O}$ 24

5.5 Corespondenţe în caracteristică zero 25

5.6 Corespondenţe în caracteristică p 25

6 Corespondenţa Glauberman şi echivalenţe Morita asociate **26**
6.1 Introducere 26
6.2 Motivaţia: corespondenţa Glauberman 27
6.3 Echivalenţe Morita graduate între algebre 29
6.4 Algebre modulare graduate de un grup 31
6.5 Situaţia “defect grupului normal" 32
6.6 Algebre G-graduate $\mathcal{O}P$-interioare 34

Bibliografie **36**

Introducere

Un loc aparte în algebră aparţine Teoriei Reprezentarii. Fie un grup oarecare (din natura, spre exemplu). Putem luat acest grup considerand mulţimi de simetriilor ale obiectului, inchise faţă de compunere şi inverse. Teoria Reprezentărilor încearcă să gasească obiectele asupra caruia actionează acest grup. Dacă notăm cu G acest grup, pentru ce obiecte X, există o funcţie

$$\alpha : G \times X \to X$$

compatibilă cu legea grupului. Munca e mult usurată daca considerăm X ca fiind un spaţiu vectorial şi G liniar.

Se zice că acestă ramura a început în 1896 când matematicianul german Richard J.W. Dedekind a cerut ajutorul prietenului său Ferdinand G. Frobenius printr-o scrisoare. El observase că luând tabla înmulţirii unui grup finit G şi transofrmand-o într-o matrice X_G prin inlocuirea fiecărui element g din tabla cu o variabilă x_g determinantul lui X_G se scrie ca produs de polinoame ireductibile cu multiplicitatea egală cu gradul lui. Dedekind l-a rugat pe Frobenius să demonstreze aceasta pentru cazul general.

Matematicieni precum Ferdinand G. Frobenius, William Burnside, Issai Schur (care a fost student al lui Frobenius) şi Richard Brauer au studiat Teoria Reprezentării la inceputul anilor 1900. Abia în 1937 matematicianul american Alfred H.Clifford a introdus Teoria Clifford în [5] descriind legătura dintre reprezentările unui grup şi cele ale unui subgroup normal. În mare, această teză studiază Teoria Clifford şi extinderi de corpuri.

Interesul pentru acest subiect a apărut în urma citirii unor articole precum acelea ale lui Everett C. Dade ([6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]) şi ale lui Alexandre Turull ([61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72]).

Studiul lui Alexandre Turull asupra Teoriei Clifford, în special a celei in combinaţie cu indici Schur, a oferit o puternică motivaţie pentru cercetarea din spatele acestei teze. În [61] A. Turull introduce clasele Clifford pentru a descrie indicii Schur a unor familii de grupuri strâns legate cu grupurile simple finite şi pentru a studia proprietăţi generale a reprezentărilor de grupuri finite. Cu aceste noţiuni a demonstrat o generalizare a conjecturii lui McKey pentru grupuri rezolubile. De asemenea a obsercat ca aceste clase Clifford nu formează un grup. Fixând însa centrul lor lucrurile devin mai interesante. Fie G un grup. Spre deosebire de încercarea lui by A. Turull (din 1994) mulţimea claselor de echivalenţă a acestor G-algebre simple centrale cu centrul fixat formează un grup numit grupul Brauer-Clifford. Tot el a introdus şi această noţiune în [67]. Definiţia dată de el e asemănătoare cu cea a grupului Brauer.

Algebre tare graduate sunt naturale pentru Teoria Clifford. De aceea întreaga teză e construită în jurul acestei noţiuni. De asemenea folosim echivalenţe Morita, mai exact, echivalenţe Morita graduate, deoarece în ultimii ani s-au dovedit deosebit de relevante in Teoria Reprezentărilor de grupuri.

De ce folosim algebre G-graduate. Sunt mai multe motive. Poate cel mai important e acela că teoreme precum Teorema 4.3.11 şi alte teoreme din aricolele lui Turull ([61, Teorema 3.5][70, Teorema 4.7], [71, Teorema 4.9], [70, Teorema 7.5], [71, Teorema 7.5]) arată ca urmări a unor echivalenţe Morita G-graduate sau echivalenţe Rickard.

Vom prezenta conţinutul acestei teze pe scurt. Teza are ca punct de pornire teoreme cunoscute de o mare importanţă, teoreme precum teoremele lui: Jordan-Hölder, Krull-Schmidt, Noether şi Schur (Teorema 1.1.4), Schur-Zassenhaus, Glauberman-Isaacs (Teorema 6.2.3),Watanabe şi mulţi alţii.

Fie R o F-algebră tare G-graduata finit dimensională, unde F e un corp. Studiul de faţă a început din încercarea de a răspunde la câteva întrebari, precum:

a) Poate grupul Brauer-Clifford sa fie caracterizat folosind echivalenţe Morita? Dar clasele Clifford?

b) Fie K/F o extindere algebrică de corpuri. Atunci R-modulul indus din R_1-modulul generează o categorie ce e echivalentă cu categoria de module peste algebra sa de endomorfisme. Ce se întâmplă cu echivalenţele derivate G-graduate peste F? Păstrează ele Teoria Clifford definită de modulele simple corespunzătoare? Dar actiunea Galois şi indicii Schur?

c) Pot rezultatele lui Turull din [61, 67] despre grupul Brauer-Clifford să fie generalizate pentru cazul algebrelor tare graduate de un grup? Daca da, atunci aceste rezultate ar putea caracteriza Teoria Clifford a lor.

d) Avem proprietăţi bune de compatibilitate pentru endoisomorfisme dintre endomorfisme de G-algebre de module peste algebre tare G-graduate?

e) Putem folosi echivalenţe Morita graduate pentru a deduce observaţiile lui Turull din [66] şi ale lui L.Puig din [53]. Mai exact, pot echivalenţele Morita din [75] să fie extinse la o echivalenţă Morita graduată?

Rezultatele studiului acestor întrebări sunt prezentate pe tot parcursul acestei teze. În cele ce urmează vom prezenta o privire de ansamblu asupra continutului tezei. În Chapter 2 se studiază algebrele G-graduate, algebrele asupra cărora acţionează G şi echivalenţe

Morita peste un G-inel comutativ Z. Cazul particular ar ar algebrelor graduate strâmbe şi legatura dintre echivalenţe Morita G-graduate şi echivalenţe Morita G-echivariante sunt de asemenea prezentate. Rezultatele autorului se găsesc în: Lema 2.2.2, Lema 2.2.3, Lema 2.2.4, Teorema 2.2.5, Lema 2.3.2 and Corolararul 2.3.3.

În următorul capitol, Capitolul 3 se prezintă Teoria Clifford în relaţie cu acţiunea Galois a unei extinderi de corpuri în contextul algebrelor graduate de un grup. Contribuţii originale ale autorului tezei precum şi ale lui A. Mărcuş sunt prezentate în: Teorema 3.4.2, Corolarul 3.4.4 şi Teorema 3.4.5.

Capitolul 4 prezintă o analiză a Teoriei Clifford pentru un grup finit folosind grupul Brauer-Clifford. Rezultatele originale sunt date de Teorema 4.3.11 şi Propozitia 4.5.1 continuând rezultatele din Capitolul 2 şi Capitolul 3.

Pornind de la aricolele lui Turull [70], [71] şi folosind sisteme p-modulare în Capitolul 5 sunt prezentate câteva echivalenţe speciale de categorii şi se dau nişte proprietăţi de compatibilitate. Contribuţiile originale se găsesc în Teorema 5.5.1 şi Teorema 5.6.1.

În ultimul capitol se se caută un răspuns la ultima întrebare din planul mai sus menţionat. Astfel, pornind de la corespondenţa Glauberman autorul împreună cu A. Mărcuş prezintă doua echivalenţe graduate speciale. Rezultatele originale se găsesc în Teorema 6.5.9 şi Teorema 6.6.5.

Pentru o citire mai uşoară, conceptele noi sunt introduse gradual, exceptând noţiunile prezentate în Capitolul 1.

Cuvinte cheie

Teoria Clifford, extinderi de corpuri, algebre simple centrale, algebre tare graduate, grupul Brauer-Clifford, algebre graduate de un grup, G-algebre, echivalenţe Morita, caractere, acţiuni Galois, endoizomorfisme, corespondenţa Glauberman.

Mulţumiri

Mulţumesc coordonatorului meu ştiinţific Prof. Dr. Andrei Mărcuş pentru timpul şi tot ajutorul acordat pentru realizarea acestei teze. De asemenea as dori să mulţumesc grupului de Algebră din Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj-Napoca. Doresc să îmi exprim recunoştinţa în mod special celor ce m-au îndrumat pe parcursul anilor mei de studii doctorale: Conf. Dr. Simion Breaz, Conf. Dr. Septimiu Crivei and Lect. Dr. Ciprian George Modoi.

Pe parcursul vizitei mele în Budapesta Conf. Dr. Horvath Erzsebet de la Universitatea Tehnică şi de Economie din Budapesta mi-a fost alături şi pentru aceasta doresc să îi mulţumesc.

Mulţi oameni, în special profesori cu care am lucrat înainte de inceperea studiilor universitare m-au încurajat şi mi-au introdus în lumea gândirii matematice. Pentru aceasta le sunt foarte recunoscătoare.

Această lucrare a fost posibilă prin sprijinul material oferid prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, cofinanţat prin Fondul Social European, în cadrul proiectului POSDRU/107/1.5/S/76841, cu titlul „ Studii doctorale moderne: internaţionalizare şi interdisciplinaritate".

Sunt foarte recunoscătoare familiei mele pentru dragostea şi sprijinul ei. Îi mulţumesc lui Dani pentru dragostea lui şi pentru că mi-a fost alături.

Dumnezeu m-a binecuvântat în acest ani de studii prin toţi aceşti oameni şi multţi altii. Pentru aceasta sunt foarte mulţumitoare...

Capitolul 1

Preliminarii

1.1 Extinderi de corpuri şi acţiunea grupului Galois

Vom începe prin a prezenta o teoremă ce provine din lucrările lui Noether (1933) şi Schur(1909). Pentru noţiunile generale se poate consulta cartea lui Grigory Karpilovsky [36]. Printr-un inel înţelegem un inel cu unitate iar modulele sunt presupuse a fi stângi.

1.1.1. Algebre semisimple.

Fie F un corp şi A o F-algebră finit dimensională. Presupunem că A e definită peste un subcorp perfect a lui F.

1.1.2. Fie K/F o extindere algebrică normală de corpuri şi considerăm grupul Galois: $\hat{G} := \mathrm{Gal}(K/F)$. Atunci $\hat{G}$ acţionează asupra claselor de izomorfism de $K \otimes_F A$-module simple şi dacă W e un $K \otimes_F A$-modul simplu atunci notăm

$$\hat{G}_W = \{\sigma \in \hat{G} \mid {}^{\sigma}W \simeq W \text{ as } K \otimes_F A\text{-modules}\}$$

stabilizatorul lui W.

Definiţia 1.1.3. Fie A o algebră peste corpul F. Spunem că F este un *corp de descompunere* pentru A dacă pentru orice A-modul simplu V avem $\mathrm{End}_A(V) = F$.

În acest context avem rezultate asemănatoare cu Teoria Clifford datorate lui Schur and Noether (see [36, Teorema 8.1.11]).

Teorema 1.1.4 (Noether, Schur). *Cu notaţiile de mai sus, următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

1) Dacă V este un A-modul simplu, atunci $K \otimes_F V$ este un $K \otimes_F A$-modul semisimplu.

2) Fie W un $K \otimes_F A$-modul simplu ce e sumand direct a lui $K \otimes_F V$, unde V este un

A-modul simplu. Atunci există $m \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$K \otimes_F V \simeq m \bigoplus_{\sigma \in [\hat{G}/\hat{G}_W]} {}^{\sigma}W.$$

3) Pentru orice $K \otimes_F A$-modul simplu W, există un A-modul simplu V, unic până la izomorfism, astfel încât W este sumand a lui $K \otimes_F V$.

1.2 Echivalenţe Morita graduate

Fie G un grup finit şi $\mathcal{O}$ un inel comutativ. Spunem că există o *echivalenţă Morita G-graduată* intre două $\mathcal{O}$-algebre R şi S dacă există (R, S)-bimodulul G-graduat M şi (S, R)-bimodulul G-graduat N inducând o echivalenţă Morita între R şi S astfel încât izomorfismul de bimodule

$$\alpha : M \otimes_S N \to R \quad \text{and} \quad \beta : N \otimes_R M \to S$$

păstrează graduarea.

Următoarea teorema e importantă pentru că oferă o motivaţie pentru cercetărea din spatele acestei teze. Rezultatul este datorat lui A. Mărcuş [44, Teorema 5.1.2].

Teorema 1.2.1. *Fie M_1 un (R_1, S_1)-bimodul, N_1 un (S_1, R_1)-bimodul, şi notăm*

$$M = R \otimes_{R_1} M_1 \quad \text{and} \quad N = N_1 \otimes_{S_1} S.$$

Următoarele afirmaţii sunt echivalente: (i) M are o structură de (R, S)-bimodul G-graduat şi N are o structură de (S, R)-bimodul G-graduat, astfel încât M şi S induc o echivalenţă Morita graduată între R şi S. (ii) M_1 şi N_1 induc o echivalenţă Morita între R_1 şi S_1, şi M_1 se extinde la un Δ-modul, unde

$$\Delta = \bigoplus_{x \in G} (R_g \otimes_{\mathcal{O}} S_g^{\mathrm{op}}).$$

Capitolul 2

Bimodule graduate de un grup peste un G-inel comutativ

Scopul acestui capitol este de a studia algebrele G-graduate, algebre asupra cărora acţionează G şi echivalenţe Morita peste un G-inel comutativ Z. Cadrul prezentat este potrivit pentru următorul capitol în care arătăm cum să asociăm o algebră simplă centrală G-graduată peste Z unui caracter a unei algebre tare G-graduate peste un corp de caracteristică zero. Rezultatele sunt ale autorului şi se regăsesc în [23].

2.1 Motivaţia

Fie G un grup finit, Z un G-inel comutativ şi fie $F = Z^G$. De asemenea, fie A şi B două F-algebre asupra cărora acţionează G astfel încât $Z \to Z(A)$ şi $Z \to Z(A)$ sunt morfisme de G-inele. Atunci produsul tensorial peste Z dintre A şi B este de asemenea o F-algebre asupra căreia acţionează G. Motivivat de Teoria Clifford în combinaţie cu indici Schur, Turull a introdus o relaţie de echivalenţă intre algebre simple de acest tip, care se rezumă la echivalenţe Morita peste Z între ele.

Algebrele tare graduate fiind naturale pentru Teoria Clifford, fie R şi S două algebre tare G-graduate astfel încât $Z \to Z(R_1)$ şi $Z \to Z(S_1)$ sunt morfisme de G-inele.

Clasele de echivalenţă peste F ale lui Turull (vezi [61]) pot fi generalizate la cazul algebrelor tare G-graduate (vezi Mărcuş [46], [47]). Problema principală însă este că produsul tensorial peste Z a lui R şi S nu este o algebră.

Multe argumente din [43] au la bază faptul că $R \otimes_F S^{\mathrm{op}}$ este o F-algebră $G \times G$-graduată, şi atunci subalgebra

$$\Delta(R \otimes_F S^{\mathrm{op}}) := \bigoplus_{g \in G} (R_g \otimes_F S_g^{\mathrm{op}})$$

ieste o F-algebră tare G-graduată. Putem construi în cazul de faţă $R \otimes_Z S$, dar nici el nici $\Delta(R \otimes_Z S)$ nu mai e un inel în general.

2.2 F-algebre G-graduate peste Z şi echivalenţe Morita

Cu toate acestea, arătăm ca putem considera echivalenţe Morita G-graduate peste Z (nu doar peste F) între R şi S.

Definiţia 2.2.1. Spunem că M este un (R,S)-*bimodul G-graduat peste Z* dacă M este un (R,S)-bimodul, are descompunerea $M = \bigoplus_{x\in G} M_x$ astfel încât $R_g M_x S_h = M_{gxh}$, şi $m_g z =^g z m_g$ pentru orice $g \in G$, $z \in Z$, şi $m_g \in M_g$.

Lema 2.2.2. *$\Delta(R \otimes_Z S^{\mathrm{op}})$ este un inel, mai mult, este o G-algebră peste Z şi $R \otimes_Z S^{\mathrm{op}}$ este un $\Delta(R \otimes_Z S^{\mathrm{op}})$-modul.*

Fie $Delta = \Delta(R \otimes_Z S^{\mathrm{op}})$.

Lema 2.2.3. *Dacă N este un Δ-modul, atunci există un izomorfism de (R,S)-bimodule G-graduate peste Z:*

$$R \otimes_{R_1} N \simeq N \otimes_{S_1} S \simeq (R \otimes_Z S^{\mathrm{op}}) \otimes_\Delta N =: \widetilde{N}.$$

Lema 2.2.4. 1) *Presupunem că N este un $\Delta(R \otimes_Z S^{\mathrm{op}})$-modul stâng şi N' un $\Delta(S \otimes_Z T^{\mathrm{op}})$-modul stâng. Atunci $N \otimes_{S_1} N'$ este un $\Delta(R \otimes_Z T^{\mathrm{op}})$-modul cu multiplicarea*

$$(r_g \otimes_Z t_g^{\mathrm{op}})(n \otimes_{S_1} n') = \sum_{i=1}^{l} r_g n s_i' \otimes_{S_1} s_i n t_{g^{-1}}.$$

Mai mult, avem izomorfismul de (R,T)-bimodule G-graduate peste Z:

$$\widetilde{N \otimes_{S_1} N'} \simeq \widetilde{N} \otimes_S \widetilde{N'}.$$

2) *Presupunem că N este un $\Delta(S \otimes_Z R^{\mathrm{op}})$-modul şi că N este un $\Delta(S \otimes_Z T^{\mathrm{op}})$-modul. Atunci* $\mathrm{Hom}_{S_1}(N,N')$ *este un $\Delta(R \otimes_Z T^{\mathrm{op}})$-modul cu multiplicarea:*

$$(r_{g^{-1}} f t_g)(n) = \sum_{i=1}^{l} s_i' f(s_i n r_{g^{-1}}) t_g \quad \textit{for } n \in N \textit{ and } f \in \mathrm{Hom}_{S_1}(N,N').$$

Mai mult, avem izomorfismul de (R,T)-bimodule G-graduate peste Z:

$$\mathrm{Hom}_S(\widetilde{N}, \widetilde{N'}) \simeq \widetilde{\mathrm{Hom}_{S_1}(N,N')}.$$

Teorema 2.2.5. *Fie M_1 un (R_1,S_1)-bimodul şi N_1 un (S_1,R_1)-bimodul astfel încât bimodulele M_1 şi N_1 induc o echivalenţă Morita între R_1 şi S_1. Mai mult, dacă M_1 este* *un Δ_1-modul atunci N_1 se extinde la un Δ-modul şi $\widetilde{M_1}$, $\widetilde{N_1}$ induc echivalenţe Morita G-graduate între R şi S peste Z.*

2.3 Algebre grupale strâmbe

În această secţiune vom vorbi despre cazul particular al algebrelor grupale strâmbe şi legătura dintre echivalenţele Morita G-graduate şi echivalenţele Morita G-echivariante.

Fie G un grup finit, Z o G-algebră comutativă şi fie $F = Z^G$. Fie A şi B G-algebre peste Z. În acest caz, algebrele grupale strâmbe $A*G$ şi $B*G$ sunt F-algebre G-graduate peste Z. Notăm $R = A * G$ şi $S = B * G$. Observaţi că produsele tensoriale $A \otimes_Z B$ şi $A \otimes_Z B^{\mathrm{op}}$ sunt G-algebre cu acţiune diagonală.

Definiţia 2.3.1. O echivalenţă Morita peste Z între A şi B indusă de bimodulele M şi N este *G-echivariantă* dacă M este un $(A\otimes_Z B^{\mathrm{op}})*G$-modul, N un $(B\otimes_Z A^{\mathrm{op}})*G$-modul şi toate morfismele implicate în echivalenţa Morita sunt ZG-liniare.

Lema 2.3.2. *Fie A şi B G-algebre peste Z iar $R = A*G$ şi $S = B*G$. Avem următorul izomorfism de F-algebre G-graduate peste Z:*

$$\Delta(R \otimes_Z S^{\mathrm{op}}) \simeq (A \otimes_Z B^{\mathrm{op}}) * G.$$

Corolar 2.3.3. Fie M_1 un (A, B)-bimodul. Dacă M_1 induce o echivalenţă Morita G-echivariantă între A şi B atunci $R \otimes_{R_1} M_1$ induce o echivalenţă Morita G-graduată între R şi S. Invers, fie M un (R, S)-bimodul G-graduat. Dacă M induce o echivalenţă Morita G-graduată peste Z între R şi S, atunci M_1 induce o echivalenţă Morita G-echivariantă peste Z între A şi B.

Capitolul 3

Extinderi de corpuri şi Teoria Clifford

Studiem acum Teoria Clifford legată de acţiunea grupului Galois a unei extinderi de corpuri în contextul algebrelor graduate de un grup (vezi [25]).

3.1 Motivaţia

Fie G un group finit, K/F o extindere algebrică de corpuri şi $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ o F-algebră finit dimensională tare G-graduată. Un R_1-modul simplu, precum şi un$K \otimes_F R_1$-modul simplu, definesc "Teoria Clifford". Idea principală e că R-modulul indus de un R_1-modul simplu generează o subcategorie abeliană a categoriei R-modulelor care e echivalentă cu categoria modelelor peste algebra sa de endomorfisme. Cercetăm relaţia dintre aceste teori. Unul dintre principalele rezultate din acest capitol spune că o echivalenţă derivată G-graduată peste F păstrează Teoria Clifford definită de module simple corespunzătoare, precum şi acţiunile Galois şi indicii Schur.

O motivaţie puternică pentru acest capitol o constituie abordarea lui Turull pentru Teoria Clifford şi indici Schur folosind G-algebre. El foloseşte Teoria Clifford definită de un R-modul ce stă peste un R_1-modul simplu (sau semisimplu) şi introduce noţiunea de endoizomorfism pentru a formaliza idea de doua module ce determină aceeaşi Teorie Clifford. Arătăm în Secţiunea 3.4 că o echivalenţă derivată G-graduată peste F induce un endoizomorfism intre două R-module simple corespunzătoare. Acestea sunte legate şi de rezultatele din [47].

Grupurile sunt finite şi algebrele şi modulele sunt finit dimensionale. Lucrăm doar cu algebre peste corpuri în acest capitol.

3.2 Teoria Clifford pentru algebre tare G-graduate

Rezultatele din această secţiune sunt versiunea lui Dade din [10] şi [11] a corespondenţei Clifford pentru algebre graduate de un grup.

3.2.1. Fie G un group finit, F un corp şi fie $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ o F-algebră tare G-graduată finit dimensională. G acţionează asupra claselor de izomorfism de R_1-module simple. Dacă V este un R_1 modul simplu notăm ${}^gV = R_g \otimes_{R_1} V$, şi fie G_V stabilizatorul lui V în G, unde

$$G_V := \{g \in G \mid R_g \otimes_{R_1} V \simeq V \text{ ca } R_1\text{-modules}\}.$$

Teorema 3.2.2. *Dacă M este un R-modul simplu atunci există un R_1-modul simplu V astfel încât V e un sumand direct în M. Mai exact, ${}_{R_1}M$ este un R_1-modul semisimplu*

$${}_{R_1}M \simeq n \bigoplus_{g\in[G/G_V]} {}^gV, \quad \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Definiţia 3.2.3. Dacă notăm cu $(R|V)$-mod subcategoria plină a lui R-mod formată din acele R-module M pentru care există un R-epimorfism

$$(R \otimes_{R_1} V)^{(I)} \to M \to 0,$$

unde I e o mulţime, atunci $(R|V)$-mod se numeşte categoria *R-modulelor deasupra lui V*.

Teorema 3.2.4. *Categoria* $(R|V)$-mod *este abeliană şi coincide cu subcategoria plină a lui R*-mod *formată din R-module M care privite ca R_1-module au structura din Teorema (3.2.2).*

3.2.5. Dacă notăm $E := \mathrm{End}_R(R\otimes_{R_1} V)^{\mathrm{op}}$ atunci E este o algebră G-graduată şi $R\otimes_{R_1} V$ este un (R,E)-bimodul G-graduat. Mai mult, $E = E_{G_V}$ poate fi primit ca algebră tare G_V-graduată.

Teorema 3.2.6. *Avem următoarea diagramă comutativă de echivalenţe de categori:*

$$\begin{tikzcd}
(R|V)\text{-mod} \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_R(R\otimes_{R_1}V,-)"] \arrow[d, shift left, "(-)_{G_V}"] & E\text{-mod} \arrow[l, shift left, "(R\otimes_{R_1}V)\otimes_E -"] \arrow[d, equal] \\
(R_{G_V}|V)\text{-mod} \arrow[u, shift left, "R\otimes_{R_{G_V}} -"] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_{G_V}(R_{G_V}\otimes_{R_1}V,-)"] & E_{G_V}\text{-mod}. \arrow[l, shift left, "(R_{G_V}\otimes_{R_1}V)\otimes_{E_{G_V}} -"]
\end{tikzcd}$$

3.3 Acţiuni Galois şi corespondenţe Clifford

Studiem acum legătura dintre Teoriile Clifford peste F şi cele peste K. Deci, vorbim despre extinderea scalarilor de la F la K şi acţiunea grupului Galois $\mathrm{Gal}(K/F)$ asupra $K \otimes_F R$-modulelor. Cadrul e acelaşi cu cel din Teorema 1.1.4 la care mai adăugăm nişte notaţii. Deci, K/F e o extindere algebrică normală de corpuri. Notăm cu $\hat{G}$ grupul Galois $\mathrm{Gal}(K/F)$. Fie W un $K \otimes_F A$-modul simplu. Notăm cu $\hat{G}_W$ stabilizatorul lui W.

Fie $\hat{W} := \bigoplus_{\sigma \in [\hat{G}/\hat{G}_W]} {}^{\sigma}W$ suma $\hat{G}$-conjugatelor distincte ale lui W şi $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ o G-algebră tare G-graduată finit dimensională. Notăm $KR := K \otimes_F R$, care este o K-algebră tare G-graduată. Presupunem că R_1 (şi deci R) e definit peste un subcorp perfect a lui F. Fie V un R_1-modul simplu şi notăm $\hat{E} := \mathrm{End}_{KR}(KR \otimes_{KR_1} \hat{W})^{\mathrm{op}}$. Observăm că $\hat{E}$ este tare $G_{\hat{W}}$-graduată. Considerăm următorii stabilizatori, numiţi *grupuri de inerţie*:

- $I_G(V) := G_V = \{g \in G \mid R_g \otimes_{R_1} V \simeq V \text{ ca } R_1\text{-module}\}$,
- $I_G(W) := G_W = \{g \in G \mid KR_g \otimes_{KR_1} W \simeq W \text{ ca } KR_1\text{-module}\}$,
- $I_{G,F}(W) := \{g \in G \mid \text{ există } \sigma \in \hat{G} \text{ astfel încât } KR_g \otimes_{KR_1} W \simeq {}^{\sigma}W \text{ ca } KR_1\text{-module}\}$,
- $I_G(K \otimes_F V) := \{g \in G \mid KR_g \otimes_{KR_1} K \otimes_F V \simeq K \otimes_F V \text{ ca } KR_1\text{-module}\}$.

De asemenea, notăm $T := I_{G,F}(W)$ şi observăm că $I_G(W) \leq I_{G,F}(W) = T \leq G$.

Notaţia 3.3.1. Considerăm şi următoarele subcategori pline:

- $(KR|W)$-mod, formată din KR-module M astfel încât există un epimorfism de KR-module
$$(KR \otimes_{KR_1} W)^{(I)} \to M \to 0, \quad \text{pentru o mulţime } I.$$
- $(KR|W, F)$-mod formată din KR-module M astfel încât ${}_{KR_1}M$ e izomorf cu o sumă directă de $G \times \hat{G}$-conjugate ale lui W.
- $(KR|K \otimes_F V)$-mod formată din KR-modules M astfel încât există un epimorfism de KR-module
$$(KR \otimes_{KR_1} K \otimes_F V)^{(I)} \to M \to 0, \quad \text{pentru o mulţime } I.$$

Teorema 3.3.2. *Cu notaţiile de mai sus, presupunem că W este un sumand direct a luiis a direct summand a lui $K \otimes_F V$. Atunci $I_{G,F}(W) = I_G(K \otimes_F V)$ şi categoriile* $(KR|W, F)$-mod *şi* $(KR|K \otimes_F V)$-mod *coincid. Mai mult, avem următoarea diagramă comutativa de echivalenţe de categori:*

$$\begin{tikzcd}
(KR|W,F)\text{-mod} \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_{KR}(KR\otimes_{KR_1}\hat{W},-)"] \arrow[d, shift left, "\simeq"] & \hat{E}\text{-mod} \arrow[l, shift left, "(KR\otimes_{KR_1}\hat{W})\otimes_{\hat{E}}-"] \arrow[d, equal] \\
(KR_{G_{\hat{W}}}|W,F)\text{-mod} \arrow[u, shift left, "KR\otimes_{KR_{G_{\hat{W}}}}-"] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_{KR_{G_{\hat{W}}}}(KR_{G_{\hat{W}}}\otimes_{KR_1}\hat{W},-)"] & \hat{E}_{G_{\hat{W}}}\text{-mod.} \arrow[l, shift left, "(KR_{G_{\hat{W}}}\otimes_{KR_1}\hat{W})\otimes_{\hat{E}}-"]
\end{tikzcd}$$

3.3.3. Notăm $KE := \mathrm{End}_{KR}(KR \otimes_{KR_1} (K \otimes_F V))^{\mathrm{op}}$ şi privim $KE = KE_T$ ca K-algebră T-graduată. Avem următoarea diagramă comutativă de categori şi functori:

$$\begin{tikzcd}
(R|V)\text{-mod} \arrow[r, shift left] \arrow[dr, dashed] & E\text{-mod} \arrow[l, shift left] \arrow[dl, shift left] \arrow[dr] & \\
(R_T|V)\text{-mod} \arrow[u, "R\otimes_{R_T}-"] \arrow[ur, shift left] \arrow[dr] & (KR|K \otimes_F V)\text{-mod} \arrow[r, shift left] & KE\text{-mod} \arrow[l, shift left] \arrow[dl, shift left] \\
& (KR_T|K \otimes_F V)\text{-mod.} \arrow[u, "KR\otimes_{KR_T}-"] \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

3.4 R-module quasiomogene

Turull [67], [70] consideră „Teoria Clifford determinată de un R-modul" în loc de un R_1-modul. Fie W un KR_1-modul simplu, ca mai sus.

Definiţia 3.4.1. Un R-modul M este W-*quasiomogen* dacă $K \otimes_F M \in (KR|W)$-mod.

Teoria Clifford nu depinde de alegerea modulului W-quasiomogen.

Teorema 3.4.2. *Fie M şi M' R-module W-quasiomogene. Atunci există o echivalenţă Morita G-echivariantă între G-algebrele* $\mathrm{End}_{R_1}(M)$ *şi* $\mathrm{End}_{R_1}(M')$.

3.4.3. Considerăm următorul context. Fie R şi R' F-algebre G-graduate. Fie M un R-modul W-quasiomogen şi M' un R'-modul W'-quasiomogen, unde W este un KR_1-modul şi W' este un KR'_1-modul. Vrem să ştim dacă când Teoria Clifford determinată de M e echivalentă cu Teoria Clifford determinatăde M'?

Corolar 3.4.4. Dacă există un izomorfism $\varepsilon : \mathrm{End}_{R_1}(M) \to \mathrm{End}_{R'_1}(M')$ de G-algebre peste F, atunci există o echivalenţă de categori:

$$(KR|W, F)\text{-mod} \simeq (KR'|W', F)\text{-mod}.$$

ce păstrează graduarea de module şi comută cu acţiunea lui $\mathrm{Gal}(K/F)$.

Un izomorfism $\mathrm{End}_R(R \otimes_{R_1} M) \simeq \mathrm{End}_R(R \otimes_{R_1} M')$ de algebre G-graduate este numit *endoizomorfism* în [70]. Dar când există un endoizomorfism?

Teorema 3.4.5. *Presupunem că există o echivalenţă Rickard intre F-algebrele G-graduate R şi R'. Fie M un R-modul W-quasiomogen simplu şi fie M' R'-modulul corespunzător. Atunci:*

1) *Există un izomorfism* $\varepsilon : \mathrm{End}_{R_1}(M) \to \mathrm{End}_{R'_1}(M')$ *de G-algebre peste F, indus de echivalenţe Rickard.*

2) *KR_1-modulul simplu W corespunde de asemenea unui KR'_1-modul simplu W', şi echivalenţa derivată induce echivalenţa* $(KR|W, F)$-mod $\simeq (KR'|W', F)$-mod *din Corolarul 3.4.4.*

Capitolul 4

Clasele Brauer-Clifford şi corespondeţe de caractere

Rezultatele din [67] pot fi generalizate pentru cazul algebrelor graduate de un grup.

4.1 Motivaţia

Fie G un grup şi F un corp. Fie R o F-algebră tare G-graduata şi două R-module M şi M', de preferinţă simple sau semisimple. Întrebarea pe care o punem din nou, e când au aceste două module aceeaşi Teorie Clifford? Pentru aceasta vom da niste proprietăţi ale corespondenţelor de caractere şi a elementelor corespunzătoare din grupul Brauer-Clifford.

4.2 Grupul Brauer-Clifford

Pentru a defini grupul Brauer-Clifford, introdus în [69], avem nevoie de un grup G şi de un G-inel simplu comutativ Z. În acest context spunem că o G-algebră simplă centrală A peste Z este *trivială* daca există un G-modul $M \neq 0$ peste Z astfel încât $End_Z(M)$ este izomorf cu A ca G-algebră simplă centrală peste Z. Definiţia grupului Brauer-Clifford din [69] e mai generală decât cea din [67, 68], dar în esenţă e echivalentă.

Definiţia 4.2.1. Fie G un grup finit şi Z un G-inel simplu comutativ. Spunem că *grupul Brauer-Clifford* a lui G peste Z este mulţimea $\mathrm{BrClif}(G, Z)$ împreună cu o operaţie binară. Elementele din $\mathrm{BrClif}(G, Z)$ sunt clase de echivalenţă de G-algebre simple centrale de rang finit peste Z, sub echivalenţa prezentată in cele ce urmează. Fie A şi B G-algebre simple centrale de rang finit peste Z. Atunci, spunem că A este echivalentă cu B dacă c si numai daca există G-algebrele simple centrale triviale T_1 şi T_2 peste Z astfel încât

$$A \otimes_Z T_1 \simeq B \otimes_Z T_2$$

ca G-algebre centrale peste Z. Operaţia binară pe $\mathrm{BrClif}(G,Z)$ este aceea indusă de produsul tensorial peste Z de G-algebre simple centrale peste Z.

4.3 Clasa Brauer-Clifford şi G-algebra centraă a unui caracter

Fie G un grup, Z un G-inel simplu comutativ, F un corp de caracteristică zero, şi $\bar{F}$ închiderea algebrică a lui F. Presupunem că toate caracterele au valori în $\bar{F}$. Vom nota cu $\mathrm{Irr}(G)$ mulţimea caracterelor ireductibile a unui grup finit G. Vrem să studiem Teoria Clifford în cazul particular ar algebrelor tare graduate.

4.3.1. Fie R o F-algebră tare G-graduată semisimplă. Fie ψ un caracter ireductibil al algebrei $\bar{F}R_H$, unde $H \leq G$. Fie θ_1 un caracter ireductibil al lui $\bar{F}R_1$ care e inclus în restiţia lui ψ la $\bar{F}R_1$, $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathrm{Irr}(\bar{F}R_1)$ fie $G \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-orbita lui θ_1, şi fie

$$\bar{\theta} = \theta_1 + \cdots + \theta_r.$$

Fie $e_{\theta_1}, \ldots, e_{\theta_r}$ idempotenţii primitivi corespunzători ai lui $Z(\bar{F}R_1)$, şi fixăm $e = e_{\theta_1} + \cdots + e_{\theta_r}$. Atunci $e \in Z(R_1)$, şi dacă mulţimea $F_0 := e(R_1 \cap Z(R))$ atunci F_0 este un corp.

Definiţia 4.3.2. Se numeşte *algebră centrală a lui ψ* faţă de R şi F, F_0-algebra asupra căreia acţionează G $eZ(R_1)$. O vom nota cu $Z(\psi, R, F)$. Pentru fiecare $\theta \in \{\theta_1, \ldots, \theta_r\}$, caracterul central asociat lui θ, se reduce non-trivial la o funcţie

$$\omega_\theta : Z(\psi, R, F) \to \bar{F}$$

pe care o numim *caracterul central asociat lui θ.*

$Z(\psi, R, F)$ este o G-algebră simplă centrală comutativăpeste corpul F_0, determinată în mod unic de ψ şi F iar

$$Z(\psi, R, F) \simeq F(\theta_1) \oplus F(\theta_2) \oplus \cdots F(\theta_s),$$

unde G-acţiunea peste algebra din dreapta e obţinută din G-acţiunea pe Θ. Algebra centrală deţine informaţii despre caracter. Următoarea proziţie descrie cum se întâmpla aceasta.

Propoziţia 4.3.3. *Fie R şi R' două F-algebre tare G-graduate semisimple, şi fie ψ_1 şi ψ_2 doua caractere ireductibile ale algebrei $\bar{F}R_H$ şi $\bar{F}R'_H$, respectiv, unde $H \leq G$. Fie $\theta_1 \in \mathrm{Irr}(\bar{F}R_1)$ inclusă în $\mathrm{Res}^{\bar{F}R}_{\bar{F}R_1}(\psi_1)$ şi $\theta_2 \in \mathrm{Irr}(\bar{F}R'_1)$ inclusă în $\mathrm{Res}^{\bar{F}R'}_{\bar{F}R'_1}(\psi_2)$. Pentru $i = 1, 2$ fie O_i $G \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-orbita lui θ_i. Fixăm $Z_1 = Z(\psi_1, R, F)$ şi $Z_2 = Z(\psi_2, R', F)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) Există $\alpha : Z_1 \to Z_2$ un izomorfism de G-algebre peste F care duce caracterul central asociat lui θ_1 in caracterul central asociat lui θ_2.

(2) Există o bijeţie $\beta : O_1 \to O_2$ care păstrează acţiunea lui $G \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ şi este astfel încât $\beta(\theta_1) = \theta_2$.

Mai mult, dacă α şi β există atunci sunt unice.

4.3.4. Fie ψ un caracter ireductibil al algebrei $\bar{F}R_H$, unde $H \leq G$. Fie θ_1 un caracter ireductibil inclus în resticţia lui ψ la $\bar{F}R_1$, $\theta_1, \ldots, \theta_r \in \mathrm{Irr}(\bar{F}R_1)$ e $G \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-orbita lui θ_1, şi fie $\bar{\theta} = \theta_1 + \cdots + \theta_r$.

Vom da acum definiţia modulului quasiomogen când modulul este "deasupra" caracterului.

Definiţia 4.3.5. U R-modul M este *ψ-quasihomogeneous* (faţă de R_1) dacă nu este zero şi caracterul χ al lui $\bar{F} \otimes_F M$ este de forma $m\bar{\theta}_{R_1}$, unde m este un intreg pozitiv.

Astfel de R-module există întotdeauna.

Teorema 4.3.6. *Fie $Z = Z(\psi, R, F)$ algebra centrală a lui ψ facţă de F. Presupunem că M este un R-modul ψ-quasiomogen peste F. Atunci $\mathrm{End}_{R_1}(M)$ este o G-algebră simplă centralăpeste Z şi clasa sa în $\mathrm{BrClif}(G, Z)$ nu depinde de alegerea lui M.*

Definiţia 4.3.7. Fie $Z = Z(\psi, R, F)$ algebră centraă a lui ψ faţă de R şi F. Presupunem că M este un R-modul ψ-quasiomogen peste F şi privind $\mathrm{End}_{R_1}M$ ca o G-algebră simplă centrală peste Z notăm

$$[[\psi]] = [[\psi, R, F]] \in \mathrm{BrClif}(G, Z)$$

elementele din $\mathrm{BrClif}(G, Z)$ pe care le reprezint. Spunem că acesta este elementul din *grupul Brauer-Clifford asociat lui ψ.*

4.3.8. Fie R şi R' două F-algebre tare G-graduate semisimple. Fie ψ un caracter ireductibil al algebrei $\bar{F}R_H$, unde $H \leq G$ şi ψ_1 este un caracter ireductibil al algebrei $\bar{F}R'_{H'}$, unde $H' \leq G$. Fie $Z = Z(\psi, R, F)$ algebra centrală a lui ψ faţă de R şi F, şi fie $Z' = Z(\psi_1, R', F)$ algebra centrală a lui ψ_1 faţă de R' şi F. Presupunem că avem un izomorfism de G-algebre $\alpha : Z \to Z'$ şi notăm cu

$$\bar{\alpha} : \mathrm{BrClif}(G, Z) \to \mathrm{BrClif}(G, Z')$$

izomorfismul indus de α. Presupunem că $\bar{\alpha}([[\psi]]) = [[\psi_1]]$.

Observaţia 4.3.9. Fie $F_0 = Z^G$ şi $F'_0 = (Z')^G$. Atunci, $\alpha(F_0) = F'_0$. Fie M un R-modul ψ-quasiomogen peste F şi fie M' un R'-modul ψ_1-quasiomogen peste F. Atunci, centrul lui $\mathrm{End}_{R_1}(M)$ e identificat în mod natural cu Z, şi clasa lui $\mathrm{End}_{R_1'}(M')$ în $\mathrm{BrClif}(G,Z)$ este $[[\psi]]$, şi centrul lui $\mathrm{End}_{R_1'}(M')$ e identificat în mod natural cu Z', iar clasa lui $\mathrm{End}_{R_1'}(M')$ în $\mathrm{BrClif}(G,Z')$ este $[[\psi_1]]$. Deoarece $\bar{\alpha}[[\psi]] = [[\psi_1]]$, există G-algebre triviale T_1 şi T_2 şi un izomorfism de G-algebre peste F

$$\beta : \mathrm{End}_{R_1}(M) \otimes_{F_0} T_1 \to \mathrm{End}_{R_1'}(M') \otimes_{F_0'} T_2$$

care prin reduce la centrul algebrelor ca aplicaţia $\alpha : Z \to Z'$. Prin anumite construţii si identificări se obţin alte module quasiprimitive peste F pe care le renumim M şi M' respectiv. Obţinem izomorfismul β de la $A = \mathrm{End}_{R_1}(M)$ la $A' = \mathrm{End}_{R_1'}(M')$. Se obţine şi o corespondenţă bijectivă intre caracterele lui R şi R'. Pentru mai multe detalii vezi [61].

4.3.10. Dacă $H \leq G$ atunci notăm cu $\mathrm{Irr}(H,R,\psi)$ mulţimea caracterelor ireductibilieϕ ale lui $\bar{F}R_H$ astfel încât resticţia lui ψ l $\bar{F}R_1$ conţine cel putin un caracter ireductibile ce e $G\times\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-conjugat cu un caracter ireductibil conţinut in restiţia lui ψ la $\bar{F}R_1$. Notăm cu $\mathbf{Z}\mathrm{Irr}(H,R,\psi)$ mulţimea combinaţiile liniare întregi de elemente din $\mathrm{Irr}(H,R,\psi)$. O construţie analoagă o facem pentru G, o F-algebră tare G-graduată R'şi caracterul ψ_1.

Teorema 4.3.11. *Presupunem notaţiile din 4.3.8 şi că $\theta \in \mathrm{Irr}(\bar{F}R_1)$ este $G\times\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-conjugată cu un caracter ireductibil conţinut in restiţia lui ψ la $\bar{F}R_1$, şi că $\theta_1 \in \mathrm{Irr}(\bar{F}R_1')$ este $G \times \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-conjugată cu un caracter ireductibil conţinut în restiţia lui ψ_1 la $\bar{F}R_1$. Mai presupunem că caracterul central asociat lui θ resticţionat la Z corespunde caracterului central asociat lui θ_1 restiţionat la Z' prin izomorfismul α. Atunci, există o bijeţie $\phi \mapsto \phi'$ de la reuniune lui $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\bar{F}R_H|\psi)$ la reuniune de $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\bar{F}R_H'|\psi_1)$ când H e un subgrup al lui G şi avem proprietăţile:*

(1) Pentru orice $H \leq G$, restrictia aplicaţiei $\phi \mapsto \phi'$ determină un izomorfism de $\mathbb{Z}$-module de la $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\bar{F}R_H|\psi)$ la $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\bar{F}R_H'|\psi_1)$, care păstrează produsul inter uzual şi restricţia produce o bijecţie de la $\mathrm{Irr}(\bar{F}R_H|\psi)$ la $\mathrm{Irr}(\bar{F}R_H',|\psi_1)$.

(2) Există o constantă raţională d, astfel încât, pentru $H \leq G$, $\phi \in \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\bar{F}R_H|\psi)$ şi $\phi \mapsto \phi'$, avem $\phi'(1) = d\phi(1)$.

(3) Aplicaţia $\phi \mapsto \phi'$ comuta cu inducţia şi resticţia de caractere , înmulţirea cu caractere ale lui $\bar{F}R_H$, cu orice automorfism Galois fixat de F şi cu conjugarea cu G.

(4) Aplicaţia $\phi \mapsto \phi'$ pastrează corpul de valori al caracterelor ireductibile şi elementele corespunzătoare ale grupului Brauer şi în particular indicii Schur.

(5) Dacă $\phi \mapsto \phi'$ şi ϕ e ireductibil, atunci ϕ şi ϕ' au algebre centrale izomorfe.

4.4 Extinderi de corpuri

Egalitatea claselor Brauer-Clifford peste un corp dă naştere unei egalităţi peste un corp mai mare. Fie F un cor de caracteristică zero iar caracterele iau valori în $\bar{F}$. Fie K un subcorp al lui $\bar{F}$ ce îl conţine pe F. Fie R şi R' două F-algebre tare G-graduate semisimple. Fie $\theta \in \mathrm{Irr}(\bar{F}R_1)$, şi $\theta' \in \mathrm{Irr}(\bar{F}R'_1)$. Fie $Z = Z(\theta, R, F)$ algebra centrală a lui θ faţă de R şi F, şi fie $Z' = Z(\theta', R', F)$ algebra centrală lui θ' faţă de R şi F.

Propoziţia 4.4.1. *Presupunem că există un izomorfism de G-algebre $\alpha : Z \to Z'$, care induce un izomorfism $\bar{\alpha} : \mathrm{BrClif}(G, Z) \to \mathrm{BrClif}(G, Z')$ şi e astfel încât α duce caracterul central asociat lui θ la caracterul central asociat lui θ'. Mai mult, presupunem că*

$$\bar{\alpha}([[\theta, R, F]]) = [[\theta', R', F]].$$

Fixăm $Z_K = Z(\theta, KR, K)$ şi $Z'_K = Z(\theta', KR', K)$. Atunci, există un unic izomorfism de G-algebre $\beta : Z_K \to Z'_K$, astfel încât β duce caracterul central asociat lui θ la caracterul central asociat lui θ'. Mai mult, dacă notăm cu $\bar{\beta} : \mathrm{BrClif}(G, Z_K) \to \mathrm{BrClif}(G, Z'_K)$ izomofrismul indus de β, atunci

$$\bar{\beta}([[\theta, KR, K]]) = [[\theta', KR', K]].$$

4.5 O echivalenţă Morita peste Z

Fie M un R-modul simplu, şi fie ψ un caracter al unui subomdul simplu al $\bar{F}R$-modulului $\bar{F} \otimes_F M$. Fie θ_1 un caracter ireductibil conţinut în restriţia lui ψ la $\bar{F}A$ şi $\theta_1, \ldots, \theta_r$, $\bar{\theta}$, e and F_0 ca în Secţiunea 4.3, unde $A = R_1$. Fie $\theta_1, \ldots, \theta_s$ reprezentanţii orbitelor actiunii lui $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ asupra mulţimii $\{\theta_1 \ldots \theta_r\}$.

Atunci $\mathrm{End}_R(R \otimes_A M)^{\mathrm{op}}$ este o F_0-algebră simplă centrală G-graduată peste Z, unde

$$Z := eZ(A) \simeq F(\theta_1) \oplus F(\theta_2) \oplus \cdots \oplus F(\theta_s)$$

ca F_0-algebre asupra cărora acţionează G. In loc de M ca mai sus putem folosi un alt R-modul mai general: un R-modul ψ-quasiomogen M'.

Propoziţia 4.5.1. *Dacă M' este un R-modul ψ-quasiomogen, atunci există o echivalenţă Morita G-graduată peste Z între $\mathrm{End}_R(R \otimes_A M)$ şi $\mathrm{End}_R(R \otimes_A M')$.*

Capitolul 5

Algebre G-graduate modulare şi G-algebre de endomorfisme

Alexandre Turull în [70], [71] a introdus noţiunea de endoizomorfism arătând că există o legătură naturală între această noţiune şi Teoria Clifford a grupurilor finite. Un endoizomorfism este un izomorfism între G-algebre de endomorfisme, unde G este un grup finit. Considerăm endoizomorfisme între module peste algebre tare G-graduate. Un endoizomorfism induce echivalenţe de categori cu proprietăţi de compatibilitate bune (vezi Teorema 5.5.1 c si Teorema 5.6.1 mai jos). Rezultate sunt ale lui D. Gliţia şi pot fi găsite în [24].

5.1 Contextul general

5.1.1. Fie p un număr prim. Vom considera sistemele p-modulare $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ şi $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\mathcal{O}}, \hat{k})$ astfel încât $\hat{\mathcal{K}}$ este o extindere finită a lui $\mathcal{K}$ şi $\hat{\mathcal{O}}$ este un inel de intregi ai lui $\hat{\mathcal{K}}$. Fie $\mathfrak{m}$ idealul maximal al lui $\mathcal{O}$ şi $\hat{\mathfrak{m}}$ idealul maximal al lui $\hat{\mathcal{O}}$.

5.1.2. Fie G un grup finit şi $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ o $\mathcal{O}$-algebră a tare G-graduată $\mathcal{O}$-algebra, liberă de rang finit peste $\mathcal{O}$. Notăm $\hat{\mathcal{O}}R = \hat{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} R$, $\hat{\mathcal{K}}R = \hat{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{O}} R$ şi $\hat{k}R = \hat{k} \otimes_{\mathcal{O}} R$.

Presupunem că pentru $H \leq G$ algebra $\mathcal{K}R_H$ este simetrică iar $\hat{\mathcal{K}}R_H$ şi $\hat{k}R_H$ scindează. Modulele sunt presupuse finit generate. Notăm cu $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}(R)$ *grupul Grothendieck* al categoriei de $\mathcal{K}R$-module finit generate. Dacă M este un $\mathcal{K}R$-modul, notăm cu $[M]$ imaginea sa în $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}(R)$.

Notăm cu $\mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(R)$ mulţimea claselor de izomorfism de $\mathcal{K}R$-module simple şi cu$\mathrm{IBr}(kR)$ mulţimea claselor de izomorfism de kR-module simple.

5.1.3. Morfismul de descompunere. Fie M un $\mathcal{K}R$-modul. O *R-latice a lui M* este un R-submodul L al lui M cu următoarele proprietăţi. Luăm o $\mathcal{K}$-bază în M şi fie L $\mathcal{O}$-submodulul lui M generat de această bază şi de către toate produsele între elementele acestei baze şi elementele dintr-o $\mathcal{O}$-bază a lui R. Atunci L este un R-submodul al lui M cu proprietatea că $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} L \simeq M$.

Fie L o R-latice a lui M. Putem construi cu aceasta kR-modulul $L/\mathfrak{m}L$, reprezentând o *reducere modulo p a lui M*. Acest modul nu este unic dar toate modulele au aceaşi factor de compozitie pâna la izomorfism. În acest mod, *aplicaţia de descompunere*

$$d : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\mathcal{K}R) \to \mathbb{Z}\mathrm{IBr}(kR).$$

duce clasa lui M în $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}(R)$ la clasa lui $L/\mathfrak{m}L$ în $\mathcal{R}_k(R)$.

5.1.4. Din [46, Teorema 3.4] ştim că există o acţiune a $\mathcal{K}G$-modulelor asupra $\mathcal{K}R$-modulelor. Fie M un R-modul şi N un $\mathcal{K}G$-modul. Atunci putem construi $\mathcal{K}R$-modulul $M \otimes_{\mathcal{O}} N$ care este de asemenea un modul peste algebra $(G \times G)$-graduată $R \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}G$.

5.2 Categori de module peste un modul dat

Fie R o $\mathcal{O}$-algebră tare G-graduată, şi fie M o R-latice.

Definiţia 5.2.1. Notăm cu $\widehat{M'_{\mathcal{K}}}$ suma directă de un număr infit numărabil de copii de $\mathcal{K}R$-module $M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{K}G$ şi cu $(\mathcal{K}R_H|M)$-mod subcategoria plină a lui $\mathcal{K}R_H$-mod formată din $\mathcal{K}R_H$-modulele ce sunt câturi de $\mathcal{K}R_H$-submodule ale lui $\widehat{M'_{\mathcal{K}}}$ finit generate. Spunem că un modul din $(\mathcal{K}R_H|M)$ este *deasupra* lui M.

Definiţia 5.2.2. O extindere de corpuri $\mathcal{K}$ a lui $\mathcal{O}$ este o *extindere bună pentru* M dacă $\mathrm{Res}^{\mathcal{K}R}_{\mathcal{K}R_1}(\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} M)$ e un modul semisimplu şi

$$\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{End}_{R_1}(M) = \mathrm{End}_{R_1}(\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} M).$$

Vom presupunem că $\mathcal{K}A_1$ e semisimplu pentru ca extinderea $\mathcal{K}/\mathcal{O}$ să fie.

Definiţia 5.2.3. Fie V un $\mathcal{K}R_1$-modul. Notăm cu $\mathrm{Irr}(\mathcal{K}R|V)$ mulţimea tuturor claselor de izomorfism de $\mathcal{K}R$-module simple a căror restriţie la R_1 conţine un sumand simplu care este sumand şi în V. Spunem că modulele din $\mathrm{Irr}(\mathcal{K}R|V)$ sunt *deasupra* lui V.

Definiţia 5.2.4. Fie W un kR_1-modul. Notăm cu $\mathrm{IBr}(kR|W)$ mulţimea tuturor claselor de izomorfim de kR_1-module simple a căror restiţie la R_1 conţine un sumand simplu care este şi sumand în W. Spunem că modulele din $\mathrm{IBr}(kR|W)$ sunt *deasupra* lui W.

5.3 Endoizomorfisme şi corespondenţe de module

Fie R şi R' două $\mathcal{O}$-algebre tare G-graduate. Fie M o R-latice şi fie M' o R'-latice. Presupunem că extinderea $\mathcal{K}$ a lui $\mathcal{O}$ este bună pentru M şi M'.

5.3.1. Asemănător cu Secţiunea 3.4 definim un *endoizomorfism peste* $\mathcal{O}$ de la M la M' ca fiind un izomorfism de G-algebre peste $\mathcal{O}$

$$\epsilon : \mathrm{End}_{R_1}(M) \to \mathrm{End}_{R_1'}(M').$$

Definiţia 5.3.2. a) O G-algebră Z peste $\mathcal{K}$ se numeşte o *algebră centrală a lui* $\mathcal{K}R$ dacă, fixând $Z_0 = Z(R_1/J(R_1))$ pentru un idempotent e al lui Z_0^G avem $Z = eZ_0$.

b) Fie e suma tuturor idempotenţilor primitivi ai lui Z_0^G care acţionează netrivial asupra lui $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} M$. Atunci eZ_0 se numeşte *algebra centrală a lui* R *asociată cu* $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} M$, şi se notează cu $Z(M, R, \mathcal{K})$.

Teorema 5.3.3. *Fie* ϵ *un endoizomorfism de la* M *la* M'. *Atunci* ϵ *determina un izomorfism de* G*-algebre peste* $\mathcal{K}$ *notat* $\bar{\epsilon_{\mathcal{K}}}$ *de la* $Z(M, R, \mathcal{K})$ *la* $Z(M', R', \mathcal{K})$ *şi un endoizomorfism*

$$\widehat{\epsilon_{\mathcal{K}}} : \mathrm{End}_{R_1}(\widehat{M_{\mathcal{K}}}) \to \mathrm{End}_{R_1}(\widehat{M'_{\mathcal{K}}}).$$

care la rândul lui determină un izomorfism κ_ϵ $\mathcal{K}$*-linear de categori, de la* $(\mathcal{K}A_H|M)$*-mod la* $(\mathcal{K}A'_H|M')$*-mod.*

5.3.4. Un izomorfism $\phi : M \to M'$ induce un endoizomorfism ϵ de la M la M' iar κ_ϵ duce fiecare modul într-un modul izomorf cu el. Dacă există o echivalenţă Morita G-graduată peste $\mathcal{O}$ între R şi R' astfel încât M corespunde lui M', atunci există un endoizomorfism de la M la M'.

5.4 Endoizomorfisme peste $\mathcal{K}$ şi peste $\mathcal{O}$

Fie R şi R' două $\mathcal{O}$-algebre tare G-graduatĕ. Fie M un $\mathcal{K}R$-modul şi M' un $\mathcal{K}R'$-modul. Pornind de la un endoizomorfism peste corpul fraţiiilor $\mathcal{K}$ al unui domeniu cu ideale principale $\mathcal{O}$, putem obţine endoizomorfismul peste $\mathcal{O}$. Fie $E = \mathrm{End}_{\mathcal{K}R_1}(M)$.

Teorema 5.4.1. *Presupunem că resticţia* $\mathrm{Res}^{\mathcal{K}R}_{\mathcal{K}R_1}(M)$ *este semisimplă. Atunci orice* $\mathcal{O}$*-ordin în* E *este finit generat ca* $\mathcal{O}$*-modul. Mai mult,* E *are un* $\mathcal{O}$*-ordin* B *care este* G*-invariant şi maximal între ordinele* G*-invariante ale lui*E*, şi există o latice* G*-invariantă latice* L *astfelîncât* $B = \{e \in E \mid e(L) \subseteq L\}$.

Teorema 5.4.2. *Presupunem că* $\mathrm{Res}^{\mathcal{K}R}_{\mathcal{K}R_1}(M)$ *şi* $\mathrm{Res}^{\mathcal{K}R'}_{\mathcal{K}R'_1}(M')$ *sunt semisimple, şi fie* ϵ *un edoizomorfism peste* $\mathcal{K}$ *de la* M *la* M'. *ATunci există o* $\mathcal{O}$*-latice* G*-invariantă* L *a lui* M*, o* $\mathcal{O}$*-latice* G*-invariantă* L' *a lui* M' *şi un endoizomorfsim* ν *de la* $\mathrm{End}_{R_1}(L)$ *la* $\mathrm{End}_{R'_1}(L')$*, astfel încât* $\epsilon = \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} \nu$ *şi mai mult,*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{K}R_1}(M) = \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{End}_{R_1}(L) \qquad \textit{iar} \qquad \mathrm{End}_{\mathcal{K}R'_1}(M') = \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{End}_{R'_1}(L').$$

5.5 Corespondenţe în caracteristică zero

Fie R şi R' două $\mathcal{O}$-algebre tare G-graduate cu $\mathcal{K}R_1$ şi $\mathcal{K}R'_1$ semisimple.

Teorema 5.5.1. *Fie M un $\mathcal{K}R$-modul şi M' un $\mathcal{K}R'$-modul. Fie*

$$\epsilon : \mathrm{End}_{\mathcal{K}R_1}(M) \to \mathrm{End}_{\mathcal{K}R'_1}(M')$$

un endoizomorfism de la M la M'. Fie V suma directă a tuturor $\hat{\mathcal{K}}R_1$-modulelor simple neizomorfe care apar în descompunerea lui $\mathrm{Res}^{\hat{\mathcal{K}}R}_{\hat{\mathcal{K}}R_1}(M)$. Analog pentru V' şi $\hat{\mathcal{K}}R'_1$-modulele ce apar în descompunerea lui $\mathrm{Res}^{\hat{\mathcal{K}}R'}_{\hat{\mathcal{K}}R'_1}(M')$. Sunt adevărate următoarele afirmaţii:

(1) *κ_ϵ induce izomorfisme de $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\mathcal{K}H)$-module*

$$\kappa_\epsilon : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\hat{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{O}} R_H|V) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\hat{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{O}} R'_H|V').$$

(2) *κ_ϵ duce sumanzi simpli ai lui $\hat{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} M$ în sumanzi simpli ai lui $\hat{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} M'$ şi comută cu restiţia şi induţia de module, cu acţiunea lui $\mathrm{Gal}(\hat{\mathcal{K}}/\mathcal{K})$ şi cu conjugarea cu G.*

(3) *Fie χ caracterul unui modul simplu din $\mathrm{Irr}(\hat{\mathcal{K}} \otimes_O R_H|V)$. Atunci avem $\mathcal{K}(\kappa_\epsilon(\chi)) = \mathcal{K}(\chi)$ and $[\kappa_\epsilon(\chi)] = [\chi]$ iar indicele Schur al caracterelor ireductibile sunt păstrate de κ_ϵ.*

5.6 Corespondenţe în caracteristică p

Fie R şi R' $\mathcal{O}$-algebre tare G-graduate. Fie M o R-latice şi M' o R'-latice. Presupunem că $\mathcal{K}R_1$ şi $\mathcal{K}R'_1$ sunt semisimple iar extinderea $\hat{k}$ a lui $\mathcal{O}$ e bună pentru M şi M'.

Teorema 5.6.1. *Fie W suma directă a tuturor $\hat{k} \otimes_{\mathcal{O}} R_1$-modulelor simple neizomorfe ce apar în seria de compoziţie a lui $\mathrm{Res}^R_{R_1}(\hat{k} \otimes_{\mathcal{O}} M)$, şi fie W' suma directă a tuturor $\hat{k} \otimes_{\mathcal{O}} R'_1$-modulelor simple neizomorfe ce apar în seria de compoziţiea lui $\mathrm{Res}^R_{R_1}(\hat{k} \otimes_{\mathcal{O}} M')$. Fie ϵ un endoizomorfism de la M la M'. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

(1) *ϵ induce endoizomorfismul*

$$\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} \epsilon : \mathrm{End}_{\mathcal{K}R_1}(\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} M) \to \mathrm{End}_{\mathcal{K}R'_1}(\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} M').$$

(2) *κ_ϵ induce izomorfismul*

$$\kappa_\epsilon : \mathbb{Z}\mathrm{IBr}(\hat{k}R_H|W) \to \mathbb{Z}\mathrm{IBr}(\hat{k}R'_H|W'),$$

de $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(kH)$-module, ducând module simple în module simple şi sumanzi ai lui $k \otimes_{\mathcal{O}} M$ în sumanzi ai lui $k \otimes_{\mathcal{O}} M'$ şi κ_ϵ commuteă cu resticţia şi inducţia de module şi cu conjugări cu G.

Capitolul 6

Corespondenţa Glauberman şi echivalenţe Morita asociate

Pornind de la algebre P-interioare, unde P este un p-grup, demonstrăm două teoreme obţinând echivalenţe Morita graduate de un grup. Acestea se aplică blocurilor cu defect grup normal şi blocuri cu defact zero ale subgrupurilor normale, respectiv. Rrezultatele principale provin din [26] şi se datorează lui D. Gliţia şi A. Mărcuş.

6.1 Introducere

Acest capitol este motivat de mai multe rezultate despre existenţa echivalenţelor Morita în contextul corespondenţei Glauberman-Watanabe(vezi [37], [31], [28], [75], [54] şi bibliografia lor). Pentru a explica aceasa, fie $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ un sistem p-modular, G un grup finit şi A un grup finit rezolubil ce acţionează asupra lui G astfel încât G şi A au ordine coprime. Fie b un bloc A-invariant al lui $\mathcal{O}G$. În anumite condiţii, există o echivalenţă Morita între $b\mathcal{O}G$ şi $w(b)\mathcal{O}G^A$ indusă de un$(b\mathcal{O}G, w(b)\mathcal{O}G^A)$-bimodul M cu proprietatea că privit ca $G \times G^A$-modul, M are o sursă care este un modul de endopermutare module. Mai mult, dacă avem un sistem p-modular, această echivalenţă Morita induce o bijeţie

$$\pi(G, A) : \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(G, b) \to \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(G^A, w(b)),$$

care coincide cu corespondenţa Glauberman correspondence, unde blocul $w(b)$ a lui $\mathcal{O}G^A$ este corespondentul lui Watanabe al lui b (vezi [73]).

Prin inducţie, aceast caz e rdus la cazul în care considerăm blocuri peste un bloc al unui p'-subgrup normal al lui G. Mai general, în loc de un p'-subgrup normal e folositor să folosim blocuri cu defect zero a unui subgrup normal (vezi [29]). De fapt, e îndeajuns să considerăm $\mathcal{O}$-algebra R tare G-graduate P-interioare R, unde p-grupul P este un subgrup normal al unităţilor omogene ale lui R, şi R_1 este o algebră $\mathcal{O}$-simplă . Identitatea lui R_1 are defect grup $Q \leq P$, iar cealaltă algebră e consdtruită considerând întâi câtul Brauer

$R_1(Q)$. Teorema 6.6.5 de mai jos generalizează rezultatul principal din Dade [6] despre corespondenţe deasupra corespondenţei (vezi şi Turull [66] şi Ladisch [40]), iar abordarea noastră e asemănătoare cu cea din [6] şi [8],folosind extensii Clifford în mod repetat.

De fapt, metodele de demonstrare sunt inspirate de [17] şi ca urmare, primul nostru rezultat este o generalizare a Teoremei de Structură pentru blocuri cu defect grup normal a lui Külshammer (vezi also [51, Propoziţia 14.6], Alperin, Linckelman şi Rouquier [2], Fan şi Puig [20, Theorem 1.17]). În loc să începem cu un block al unei algebre grupale $\mathcal{O}G$, considerăm o extindere separabilă de algebre $\mathcal{O}P \to B$, unde P este un p-grup finit iar B are $\mathcal{O}$-rangul finit şi pe urmă construim algebrele noastre echivalente Morita.

6.2 Motivaţia: corespondenţa Glauberman

Vom prezenta aceastčorespondenţă şi vom continua cu rezultate mai noi care au la bază o teoremă a luiAtumi Watanabe din 1999 (vezi [73]).

Fie A şi K grupuri finite. Presupunem că A acţionează asupra lui K. Atunci putem construi produsul semidirect

$$K \rtimes A = \{(x,a) | x \in K, a \in A\}, \qquad \text{undee } (x,a)(y,b) = (x^a y, ab).$$

Mai mult, avem următorul şir exact ce scindează :

$$1 \to K \to K \rtimes A \xrightarrow{\pi} A \to 1$$

Există un morfism de grupuri $\lambda : A \to K \rtimes A$ astfel încât $\pi\lambda = 1_A$.

Ipoteza 6.2.1. *Fie K şi A grupuri finite şi A rezolubil. Presupunem că A acţionează asupra lui K şi $(|K|, |A|) = 1$.*

6.2.2. Fie p un număr prim. Luăm un sistem p-modular $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ care este "destul de mare". În acest caz $\mathrm{Irr}(K) = \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(K)$. Un caracter χ poate fi definit fie ca

$$\chi : K \to \mathcal{K}, \quad \text{ fie } \chi : K \to \mathbb{C}$$

dar $\chi(K) \subseteq \mathcal{K} \cap \mathbb{C}$. Notăm $\mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(K)^A = \{\chi \in \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(K) \mid {}^a\chi = \chi, \forall a \in A\}$.

Teorema 6.2.3 (**Glauberman-Isaacs**). *Presupunem că are loc Ipoteza 6.2.1. Atunci avem bijeţia*

$$\pi(K,A) : \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(K)^A \to \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(K^A)$$

cu următoarele proprietăţi:

(1) Pentru orice $B \trianglelefteq A$ avem $\pi(K,B)(\mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(K)^A) \subseteq \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(K^B)^A$. Mai mult, în $\mathrm{Irr}(K)^A$

avem

$$\pi(K,A) = \pi(K^B, A/B) \circ \pi(K,B),$$

deci comută următoarea diagramă:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Irr}(K)^A \arrow[r, "\pi(K,A)"] \arrow[d, "\pi(K,B)"'] & \mathrm{Irr}(K^A) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Irr}(K^B)^A \arrow[r, "\pi(K^B,A/B)"'] & \mathrm{Irr}((K^B)^{A/B}).
\end{tikzcd}$$

(2) Dacă A este un q-grup, unde q este un număr prim, atunci $\pi(K,A)(\chi)$ este unicul caracter ireductibil al lui K^A care este o componentă a lui $\mathrm{Res}^K_{K^A}(\chi)$ şi are multiplicitatea primă cu q, pentru orice $\chi \in \mathrm{Irr}(K)^A$.

Teorema lui Watanabe spune că că bijeţia din Teorema 6.2.3 respectă p-blocuri.

6.2.4. $\mathcal{O}P$-module de permutare şi endo-permutare ˙

Definiţia 6.2.5. O $\mathcal{O}P$-latice M se numşte *latice de permutare* dacă M are o $\mathcal{O}$-basis P-invariantă. Modulul M se numeşte *modul de permutare.*

Dacă M este un modul de permutare atunci M e izomorf cu o sumă directă de $\mathcal{O}P$-module indusă de subgrupurile $Q \leq P$, de forma

$$\mathcal{O}P \otimes_{\mathcal{O}Q} V = \mathrm{Ind}_Q^P V,$$

unde V este $\mathcal{O}Q$-modulul trivial.

Fie M un $\mathcal{O}P$-modul. Atunci $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ este o P-algebră liberă peste $\mathcal{O}$, unde

$$({}^u f)(m) = f(u^{-1}m).$$

De fapt, există un morfism de la P la $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(M)$. Spunem că M se numeşte *$\mathcal{O}P$-laticea de endo-permutare* dacă M este o $\mathcal{O}P$-latice astfel încât $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}(M)$ este un $\mathcal{O}P$-modul de permutarea sub acţiunea de conjugare a lui P. Modulul M, în acest caz, se numeşte *modulul de endo-permutare.*

6.2.6. Morfismul Brauer. Fie B $\mathcal{O}D$-algebra interioară ce are o bază P-stabilă, deci B este o $\mathcal{O}$-algebră, liberă de rang finit peste $\mathcal{O}$ şi există un morfism de $\mathcal{O}$-algebre de la $\mathcal{O}D$ la B.

Morfismul Brauer $\mathrm{Br}_D : B^D \to B(D)$, este definit în cele ce urmează. Fie

$$B^D := \{b \in B | {}^u b = b \text{ pentru orice } u \in D\},$$

cu ${}^u b = ubu^{-1}$. Fie
$$B(D) := k \otimes_{\mathcal{O}} \frac{B^D}{\sum_{Q<D} \mathrm{Tr}_Q^D B^Q},$$
unde $B^Q = \{b \in B | {}^u b = b \ \forall u \in Q\}$. Atuni $\mathrm{Br}_D = \mathrm{Br}_D^B$ este un morfism surjectiv de k-algebre.

6.2.7. Echivalenţe categoriale. Izometriile de caractere sunt de multe ori rezultatul existenţei unei echivalenţe Morita sau Rickard de blocuri. Koshitani şi Michler în 2001 în [37] şi Harris şi Linckelmann în 2002 în [31] au arătăt ca dacă mai avem nişte condiţii există o echivalenţă Morita între $b\mathcal{O}K$ şi $w(b)\mathcal{O}K^A$, unde b este un bloc al lui $\mathcal{O}K$ care este A-invariant şi $w(b)$ este blocul corespondent al lui $\mathcal{O}K^A$.

Teorema 6.2.8. *Cu ipotezele teoremei lui Watanabe există o echivalenţă Morita $b\mathcal{O}K \simeq w(b)\mathcal{O}K^A$. Mai mult această echivalenţă induce o bijecţie*
$$\pi(K, A) : \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(K, b) \to \mathrm{Irr}_{\mathcal{K}}(K^A, w(b))$$
cu condiţia ca fie K este p-rezolubil şi $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ destul de mare (din [31]) fie $D \trianglelefteq K$ şi $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ e destul de mare (din [37]) fie b este un bloc nilpotent şi $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ e destul de mare (din [54]) îmreună cu alte câteva condiţie.

Prin induţie, Teorema 6.2.8 e redusă la cazul când avem un blocal unui p'-subgrup normal al lui K. Deci algebra grupală $\mathcal{O}O_{p'}(K)$ e semisimplă.

6.2.9. Mai general, în loc de p'-subgrupul normal putem folosi blocuri cu defect zero ale unui subgrup normal (vezi [31]). Pentru aceasta putem considera cazurile din [29], [6], [66], [40] şi [75, Paragrful 2.4] unde $K \trianglelefteq G$ şi b e un bloc cu defect zero a lui $\mathcal{O}K$ iar $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ e "destul de mare" (vezi articolele lui Dade sau Harris din bibliografie), $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$, $\mathcal{K} = \mathbb{Q}_p$ şi $k = \mathbb{F}_p$.

6.3 Echivalenţe Morita graduate între algebre

Considerând că teoremele lui Glauberman şi Isaacs (Teorema 6.2.3) şi a lui Watanabe se referă la grupuri rezolubile, prin inducţie demonstrarea lor se reduce la un caz special. Această situaţie se referă la cazul când avem un caracter care este dintr-un p-bloc cu defect zero al unui subgrup normal. În această seţiune vom prezenta acest context folosindu-ne de Dade [6], Turull [66] şi Ladisch [40]. Fie G un grup finit, $K \trianglelefteq G$ şi $K \trianglelefteq M \leq G$ astfel încât M/K este un p-grup. Fie $\theta \in \mathrm{Irr(K)}$. Atunci $\theta : K \to \mathbb{C}$ şi $\theta(x)$ este un întreg algebric. Să presupunem că θ este într-un p-bloc cu defect 0 al lui K.

Fie $k = \mathbb{F}_p$, $\mathcal{K} = \mathbb{Q}_p$ şi $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$. Deci, $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$ este un sistem p-modular. Fie $\hat{\mathcal{K}} = \mathcal{K}(\theta)$, fie $\hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}(\theta)$ şi $\hat{k} = \mathbb{Z}_p(\theta)/p\mathbb{Z}_p(\theta)$. Deci, $(\hat{\mathcal{K}}, \hat{\mathcal{O}}, \hat{k})$ este un sistem p-modular.

6.3.1. p-blocul luiθ. p-blocul ce îl conţine pe θ poate fi privit precum urmează. Există un idempotent central primitiv $e_\theta \in Z(\hat{\mathcal{O}}K)$ asociat lui θ. Atunci $e_\theta\hat{\mathcal{K}}K$ este o $\hat{K}$-algebră simplă centrală. Mai mult, avem că $e_\theta\hat{\mathcal{K}}K \simeq M_n(\hat{\mathcal{K}})$ şi θ este un caracter (complex) asociat unicului $e_\theta\hat{\mathcal{K}}K$-modul simplu $\hat{V}$. Dacňotăm cu $\bar{\mathcal{K}}$ închiderea algebrică a lui $\hat{\mathcal{K}}$ atunci modulul θ apare în descompunerea lui $\bar{\mathcal{K}} \otimes_{\hat{\mathcal{K}}} \hat{V}$. În acest caz avem

$$\hat{G} := \mathrm{Gal}(\hat{\mathcal{K}}/\mathcal{K}) \simeq \mathrm{Gal}(\hat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \simeq \mathrm{Gal}(\hat{k}/k).$$

Mai mult, există un idempotent primitiv $e_{\theta,\mathcal{O}} \in Z(\mathcal{O}K)$ astfel încât $e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{K}K$ este o $\mathcal{K}$-algebră simplă cu centrul $\hat{\mathcal{K}}$, θ este o componentă a lui $V \otimes_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{K}}$ şi $e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{K}K \simeq M_m(\hat{\mathcal{K}})$. De fapt, $V \otimes_{\mathcal{K}} \hat{\mathcal{K}}$ este suma $\hat{G}$-conjugatelor lui θ.

Observaţia 6.3.2. $\hat{\mathcal{K}}$ este corpul de descompunere a lui $e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{K}K$.

6.3.3. Fie $K \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq M \leq G$ şi M/K un p-grup. Fie $\theta \in \mathrm{Irr}(K)$. Caracterului θ îi corespunde un idempotent central primitiv $e_{\theta,\mathcal{O}} \in Z(\mathcal{K}K)$. Atunci $e_{\theta,\mathcal{O}} \in Z(\mathcal{O}K)$ este un idempotent primitiv. Mai mult,

$$e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{K}K \simeq M_m(\hat{\mathcal{K}}) \quad \text{şi} \quad e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{O}K \simeq M_n(\hat{\mathcal{O}}).$$

De fapt, $e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{K}K \simeq \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{O}K$. Presupunem că $e_{\theta,\mathcal{O}}$ e G-invariant, deci θ e G-semi-invariant. $e_{\theta,\mathcal{O}}$ are un defect grup $P \leq G$ cu proprietatea că $Q := P \cap K$ este defect grup al lui $e_{\theta,\mathcal{O}}$ in K. Atunci $Q = \{1\}$ şi notăm $M := KP = PK \leq G$.

Considerăm morfismul Brauer surjectiv

$$\mathrm{Br}_p : (\mathcal{O}K)^p \to kC_K(P)$$

de $\mathcal{O}$-algebre definite precum urmează:

$$\sum_{x \in K} \alpha_x x \longmapsto \sum_{x \in C_K(P)} \bar{\alpha}_x x,$$

unde $\alpha \in \mathcal{O}$ e dus în $\bar{\alpha} \in k = \mathcal{O}/J(\mathcal{O})$ de către Br_p. În acest caz $e_{\theta,\mathcal{O}}$ determină blocul $e_{\varphi,\mathcal{O}} \in Z(\mathcal{O}C_K(P))$în mod unic astfel încât $e_{\varphi,\mathcal{O}} \in Z(kC_K(P))$. Deci, caracterul θ determină caracterul φ al lui $C_K(P)$. De fapt $e_{\varphi,\mathcal{O}}C_K(P)$ este o $\hat{K}$-algebră simplă centrală având un unic modul simplu W şi φ e o componentă a lui $\hat{\mathcal{K}} \otimes_{\mathcal{K}} W$. De asemenea, $e_{\varphi,\mathcal{O}}$ are defect grup P în H şi defect zero în $C_K(P) = L$. Folosind asa-numitul argument Frattini avem că $G/K \simeq H/L$. Atunci avem algebrele G/K-graduate $e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{O}G$ şi $e_{\varphi,\mathcal{O}}\mathcal{O}H$.

Următoarea teoremă e datorată lui E.Dade ([6]), A.Turull ([66]) şi F.Ladisch ([40]).

Teorema 6.3.4. *Există o echivalenţă Morita G/K-graduată între algebrele $e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{O}G$ şi $e_{\varphi,\mathcal{O}}\mathcal{O}H$.*

Observaţia 6.3.5. Dacă K este un p'-grup atunci corespondenţa $\theta \mapsto \varphi$ descisă mai suscoincide cu corespondenţa Glauberman.

În acest caz dacă notăm $R := e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{O}G$ şi $S := e_{\varphi,\mathcal{O}}\mathcal{O}H$, atunci $R_1 = e_{\theta,\mathcal{O}}\mathcal{O}K$ şi $S_1 = e_{\varphi,\mathcal{O}}\mathcal{O}L$.

6.4 Algebre modulare graduate de un grup

Considerăm sistemul p-modular $(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$, unde k este un corp perfect. Un caz particular important este cazul când $\mathcal{K} = \mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p$ şi $k = \mathbb{F}_p$.

Dorim să studiem produse încrucişate G-graduate $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$, unde R e presups liber, de rang finit peste $\mathcal{O}$, deci G este un grup finit. Avem un şir exact de grupuri

$$1 \to R_1^\times \to \mathrm{hU}(R) \to G \to 1,$$

unde am notat cu $\mathrm{hU}(R)$ grupul elementelor omogene inversabile ale lui R. Fie $A := R_1$.

6.4.1. Folosim construţia din [52, Capitolul 9], care ne dă o bijecţie între H-algebre K-interioare şi algebre H-interoare G-graduate, unde H e un grup, $K \trianglelefteq H$, $G = H/K$, şi $\mathcal{O}H$ e privită ca $\mathcal{O}$-algebră G-graduată (vezi [16, Secţiunea 2]).

Ca în [52, 4.2], o H-algebră K-interoarăeste o $\mathcal{O}$-algebră A cu morfismul de grupuri $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(A)$ şi $\psi : K \to A^\times$ astfel încât, pentru orice $x \in H,\ y \in K$ şi $a \in A$, avem $(y \cdot a)^x = y^x \cdot a^x$ and $a^y = y^{-1} \cdot a \cdot y$, unde $y \cdot a$ şi $a \cdot y$ sunt notaţii pentru $\psi(y)a$ şi $a\psi(y)$ şi $a^x := \varphi(x)^{-1}(a)$. Atunci A determină o G-graduare $\mathcal{O}$-algebra $R := \bigoplus_{g\in G} R_g$

$$R := A \otimes_{\mathcal{O}K} \mathcal{O}H = \bigoplus_{x\in[H/K]} A \otimes x,$$

şi există un morfism $\psi : \mathcal{O}H \to R$ de algebre G-graduate.

Invers, dacă $\psi : \mathcal{O}H \to R$ este un morfism de $\mathcal{O}$-algebre G-graduate, atunci $A := R_1$ este o H-algebră K-interioară, unde

$$\varphi : H \to \mathrm{Aut}(A), \qquad \varphi(h)(a) = \psi(h)a\psi(h)^{-1},$$

şi $\psi : K \to A^\times$ e restriţia lui ψ.

6.4.2. Fie P un p-grup. Din [66, Teorema 3.3], dacă $\hat{k}/k$ e o extindere de corpuri şi M este un$\hat{k}P$ modul de endo-permutare, atunci există un kP-modul de endo-permutare M_0 astfel încât $M \simeq \hat{k} \otimes_k M_0$.

Teorema 6.4.3 (Dade)**.** *Fie R un produs încrucişat G-graduat astfel încât $R_1 = kP$ şi fie M un kP-module de endo-permutare indecompozabil G-invariant. Fie* $E = \mathrm{End}_R(R \otimes_{R_1}$

$M)^{\mathrm{op}}$ *şi* $\bar{E} = E/J_{\mathrm{gr}}(R)$. *Atunci următoarea extindere de grupuri scindează:*

$$1 \to \bar{E}_1^{\times} \to \mathrm{hU}(\bar{E}) \to G \to 1.$$

6.5 Situaţia “defect grupului normal"

În această seţiune vom generaliza rezultatul principal din [17], stabilind o echivalenţă Moritaintre algebre tare graduate. Cadrul e dat de Ipotezele 6.5.1 şi 6.5.2, iar algebrele în discuţie sunt definite în 6.5.5 şi 6.5.8.

6.5.1. Fie B o $\mathcal{O}D$-algebră interioară, liberă de rang finit peste $\mathcal{O}$, cu baza D-stabilă. Presupunem că 1 e un idempotent primitiv în $Z(B)$, şi că B are defect grup D. Mai presupunem că ${}_{\mathcal{O}D}B$ şi $B_{\mathcal{O}D}$ sunt proiective.

6.5.2. Există un idempotent primitiv $i \in B^D$ astfel încât $B \mid Bi \otimes_{\mathcal{O}D} iB$ ca (B, B)-bimodule. Fie

$$\gamma = \left\{aia^{-1} \mid a \in (B^D)^{\times}\right\}$$

classa de $(B^D)^{\times}$-conjugare a lui i. Atunci perechea $(D, \gamma) = D_\gamma$ se numeşte *defect grupul punctat al lui* B (noţiune introdusă de Puig, vezi [60]). Mai mult, $\mathrm{Br}_D(i)$ este un idempotent primitiv în $B(D)$, şi $\mathrm{Br}_D(\gamma)$ este un punct a lui $B(D)$.

Există un unic ideal maximal al lui B^D, notat $\mathfrak{m}_\gamma$, care corespunde lui γ astfel încât $\gamma \not\subset \mathfrak{m}_\gamma$ şi un unic ideal maximal al lui, notat cu $\mathfrak{m}_{\mathrm{Br}_D(\gamma)}$, care corespunde lui $\mathrm{Br}_D(\gamma)$ astfel încât $\mathrm{Br}_D(\gamma) \not\subset \mathfrak{m}_{\mathrm{Br}_D(\gamma)}$. Mai mult, avem că

$$B^D/\mathfrak{m}_\gamma \simeq B(D)/\mathfrak{m}_{\mathrm{Br}_D(\gamma)},$$

şi notăm cu S K-algebra simpla $B(D)/\mathfrak{m}_{\mathrm{Br}_D(\gamma)}$.

Fie $\bar{V}$ be unicul S-module simplu. Există un unic idempotent central primitiv $e_\gamma \in Z(B(D))$ astfel încât $e_\gamma\mathrm{Br}_\gamma(i) \neq 0$ şi imaginea lui$e_\gamma \in B(D)$ prin aplicaţia $B(D) \to S$ este identitatea lui S.

Vom presupune că S are indice Schur 1. Avem că $\hat{k} = Z(S)$ şi $S \simeq \mathrm{End}_{\hat{k}}(\bar{V}) \simeq M_m(\hat{k})$, where $m = \dim_{\hat{k}}\bar{V}$.

6.5.3. Fie $C_{B^\times}(D)$ şi $N_{B^\times}(D)$centralizatorul lui D în $B^\times$ c si respectiv normalizatorul lui D în $B^\times$. Notăm

$$G := N_{B^\times}(D)/C_{B^\times}(D) \quad \text{and} \quad \bar{G} := N_{B^\times}(D)/DC_{B^\times}(D).$$

Observăm că $N_{B^\times}(D)$ acţionează asupra lui B^D şi lui $B(D)$. Mai mult, avem următoarele funcţii care sutn compatibile cu acţiunea lui $N_{B^\times}(D)$:

$$C_{B^\times}(D) \hookrightarrow B^D \to B(D).$$

În acest context putem construi produsul încrucişat G-graduat crossed product notat $B(D) * G$.

6.5.4. Dacă $a \in N_{B^\times}(D)$, atunci aia^{-1} rămâne un idempotent primitiv înB^D. Fie

$$N_{B^\times}(D)_\gamma := \{a \in N_{B^\times}(D) \mid a\gamma a^{-1} = \gamma\}$$

stabilizatorul lui γ în $N_{B^\times}(D)$. Fie $G_\gamma := N_{B^\times}(D)/C_{B^\times}(D)$ stabilizatorul lui γ în G. Stabilizatorul lui e_γ în $N_{B^\times}(D)$ coincide cu $N_{B^\times}(D)_\gamma$. Notăm

$$\bar{G}_\gamma := N_{B^\times}(D)_\gamma / DC_{B^\times}(D) \quad \text{şi} \quad \bar{D} := D/Z(D) \simeq DC_{B^\times}(D)/C_{B^\times}(D).$$

Doarece $D \to B^\times$ e injectivă, avem că $Z(D) = D \cap C_{B^\times}(D)$, deci $\bar{G}_\gamma = G_\gamma/\bar{D}$.

6.5.5. Observăm că toate morfismele din diagramă

$$\begin{tikzcd} B^D \arrow[r, "\mathrm{Br}_D"] \arrow[d] & B(D) \arrow[d] \\ B^D/\mathfrak{m}_\gamma \arrow[r] & B(D)/\mathfrak{m}_{\mathrm{Br}(\gamma)} = S \end{tikzcd}$$

sunt morfisme de $N_{B^\times}(D)_\gamma$-algebre iar $e_\gamma B(D)$ este o k-algebra $C_{B^\times}(D)$-interioară asupra căreia acţionează $N_{B^\times}(D)$ deci, putem construi produsul încrucişat tare G_γ-graduat $R := e_\gamma B(D) * G$, cu $R_1 := e_\gamma B(D)$.

De asemenea, există un morfismde grupuri $\sigma : D \to S^\times$ astfel încât pentru orice $u \in D$ şi orice $s \in S$ avem ${}^u s = \sigma(u) s \sigma(u)^{-1}$, deci D-algebra S e interioara. Prin urmare, S este o k-algebră $DC_{B^\times}(D)$-interioară acţionată de $N_{B^\times}(D)_\gamma$ şi putem construi produsul încrucişat $\bar{G}_\gamma$-graduat $\bar{R} := S * \bar{G}_\gamma$.

Vom presupune că γ este G-invariant.

Observaţia 6.5.6. Dacă pornim cu un bloc B al lui $\mathcal{O}G$, atunci există funcţiile

$$\mathcal{O}C_G(D) \hookrightarrow \mathcal{O}G \xrightarrow{\mathrm{Br}_D} kC_G(D),$$

şi $e_\gamma B(D) = kC_G(D)e_\gamma$.

6.5.7. Grupul $\bar{G}$ actionează asupra lui $\hat{k}$, si avem morfismul de grupuri

$$\theta : \bar{G} \to \mathrm{Gal}(\hat{k}/k).$$

Fie $K \leq \bar{G}$ kernelul lui θ. Prin ipoteză, extinderea $\mathcal{O}D \to B$ e separabilă, deci $\bar{e}_\gamma \in \mathrm{Tr}_1^{\bar{G}}(\hat{k})$ şi $\bar{e}_\gamma \in Z(S) = \hat{k}$. Atuci $\hat{k}$ este un modul proiectiv peste o algebră grupală $\hat{k}K$, şi prin Teorema lui Maschke $p \nmid |K|$.

Grupul $N_{B^\times}(D)$ acţionează asupra lui D, şi avem

$$G \to \mathrm{Aut}(D) \to \mathrm{Out}(D), \quad \text{şi} \quad \bar{G} \to \mathrm{Out}(D).$$

Atunci grupul $\bar{G}$ (şi deci G) sunt finite. Acţiunea lui $N_{B^\times}(D)$ asupra lui D şi $\hat{k}$ induce diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \bar{D} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d] & \bar{G} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\sigma"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Int}(\hat{k}D) \arrow[r] & \mathrm{Aut}_k(\hat{k}D) \arrow[r] & \mathrm{Out}_k(\hat{k}D) \arrow[r] & 1,
\end{tikzcd}$$

Din [20, Corollary 3.13], există un morfism $\sigma : \bar{G} \to \mathrm{Aut}_k(\hat{k}D)$ care ridică morfismul $\bar{G} \to \mathrm{Out}_k(\hat{k}D)$.

6.5.8. Deoarece am presupus că $\bar{V}$ e $\bar{G}$-invariant, din Teoria Clifford theory avem izomorfismul de algebre $\bar{G}$-graduate algebras

$$\mathrm{End}_{\bar{R}}(\bar{R} \otimes_S \bar{V})^{\mathrm{op}} \simeq \hat{k}^{\theta}_{\beta}\bar{G},$$

unde $\hat{k}^{\theta}_{\beta}\bar{G}$ este un produs încrucişat $\bar{G}$-graduatal lui $\hat{k}$ şi $\bar{G}$ determinat de 2-cociclul $\beta : \bar{G} \times \bar{G} \to \hat{k}^\times$ şi de acţiunea $\theta : \bar{G} \to \mathrm{Gal}(\hat{k}/k)$. În acest caz avem o echivalenţă Morita $\bar{G}$-graduată între $\bar{R} = S * \bar{G}$ şi $\hat{k}^{\theta}_{\beta}\bar{G}$, şi mai mult, izomorfismul $\bar{R} \simeq S \otimes_{\hat{k}} (\hat{k}^{\theta}_{\beta}\bar{G})$ de algebre G-graduate duce $s\bar{g}$ în $s \otimes_{\hat{k}} g$. Folosind morfismul $\sigma : \bar{G} \to \mathrm{Aut}_k(\hat{k}D)$, putem construi produsul încrucişat tare $\bar{G}$-graduat $(\hat{k}D)^{\sigma}\bar{G}$, cu$\bar{1}$-componenta $\hat{k}D$. Fie $R' := (\hat{k}D)^{\sigma}_{\beta}\bar{G}$, privit ca algebră G-graduată, cu 1-componenta $R'_1 = \hat{k}Z(D)$.

Teorema 6.5.9. *Există o echivalenţă Morita G-graduată între $R = e_\gamma B(D) * G$ şi $R' = (\hat{k}D)^{\sigma}_{\beta}\bar{G}$.*

6.6 Algebre G-graduate $\mathcal{O}P$-interioare

6.6.1. Fie R o $\mathcal{O}$-algebră G-graduată ca în secţiunea 2. Presupunem următoarele:

(1) R este un produs încrucişat a lui $A := R_1$ şi G, deci avem sirul exact:

$$1 \to A^\times \to \mathrm{hU}(R) \to G \to 1.$$

(2) A este o k-algebră simplă şi dacă notăm $\hat{k} := Z(A)$ atunci $\hat{k}$ este o extindere Galois a lui k, adică, A are indice Schur 1. Notăm cu V unicul (până la izomorfism)A-modul simplu.

(3) Există un p-group finit P şi un morfsim unital $\varphi : \mathcal{O}P \to$ astfel încât ${}_{\mathcal{O}P}R$ şi $R_{\mathcal{O}P}$ sunt module proiective.

(4) $\varphi(P) \cap A^\times = \{1\}$ şi avem diagrama comutativă:

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[r, equal] \arrow[dl, dashed, "\psi"'] \arrow[d] & P \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & A^\times \arrow[r] & \mathrm{hU}(R) \arrow[r] & G \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

Presupunem că P este un subgrup normal al lui $\mathrm{hU}(R)$, deci şi a lui G, şi notăm $\bar{G} := G/P$.

(5) Fie $Q \leq P$ un defect group al lui kA. Presupunem că privită ca $\hat{k}$-algebra simplă centrală, kA este o Q- algebră Dade.

6.6.2. Observăm că existŭn unic $\psi : P \to kA^\times$ astfel încât $\det \psi(u) = 1$, şi induce acţiunea lui P P A. Evident ψ se extinde la un morfism de algebre $\psi : \mathcal{O}P \to A$, deci putem să privim pe A ca o P-algebră interioară. Atunci funcţia $\mathcal{O}Q \to A$ scindează şi câtul Brauer $A(Q)$ nu e zero.

6.6.3. Grupul $\mathrm{hU}(R)$ acţionează asupra algebra simplă kA şi asupra lui $\hat{k} = Z(kA)$. Mai mult, $P(kA)^\times$ acţionează trivial pe $\hat{k}$ şi avem morfismul

$$\theta : \bar{G} \to \mathrm{Gal}(\hat{k}/k).$$

Notăm cu K kernelrul lui θ.

6.6.4. Considerăm normalizatorii şi centralizatorii $N_{A^\times}(Q)$, $N_{\mathrm{hU}(R)}(Q)$, $C_{A^\times}(Q)$ şi $C_{\mathrm{hU}(R)}(Q)$. Atunci există un morfism de grupuri $C_{A^\times}(Q) \to A(Q)^\times$. Mai mult, această funcţie şi morfismul Brauer

$$A^Q \to A(Q)$$

sunt compatibile cu acţiunea de conjugare a lui $N_{\mathrm{hU}(R)}(Q)$ pe aceste obiecte. Notăm

$$G' := N_{\mathrm{hU}(R)}(Q)/C_{A^\times}(Q),$$

deci G' poate fi privit în mod natural ca un subgrup al lui G. Putem construi acum produsul încrucişat G'-graduat $R' := A(Q) * G'$, cu 1-componenta $A' := A(Q)$.

Teorema 6.6.5. *Presupunem că $G' = G$. Atunci există o echivalenţă Morita G-graduată peste k între kR şi R'.*

Bibliografie

[1] Alperin, Jonathan L. and Bell, Rowen B.: *Groups and representations.* GTM, Springer, 1995.

[2] Alperin, Jonathan L., Linckelmann, Markus şi Rouquier, Raphaël: *Source algebras and source modules.* J. Algebra **239** (2001), 262–291.

[3] Benson, David J.: *Representations and cohomology I, II*, Cambridge University Press, 1991.

[4] Broué, Michel: *Isométries parfaites, Types de blocs, Catégories dérivées.* Astérisque **181-182** (1990), 61–92.

[5] Clifford, Alfred H.: *Representations induced in an invariant subgroup.* Ann. of Math. **3**, no.3 (1937), 533–550.

[6] Dade, Everett C.: *A correspondence of characters.* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics **37** (1980), 401–403.

[7] Dade, Everett C.: *Group graded rings and modules* Math.Z., **174** (1980), 241–262.

[8] Dade, Everett C.: *Extending endo-permutation modules.* Manuscript (1982).

[9] Dade, Everett C.: *The equivalence of various generalizations of group rings and modules.* Math. Z. **181** (1982), 335-344.

[10] Dade, Everett C.: *Clifford theory for group-graded rings.* J. Reine Angew. Math. **369** (1986), 40–86.

[11] Dade, Everett C.: *Clifford theory for group-graded rings. II.* J. Reine Angew. Math. **387** (1988), 148–181.

[12] Dade, Everett C.: *Counting characters in blocks I.* Invent. Math. **109** (1992), 187–210.

[13] Dade, Everett C.: *Counting characters in blocks II.* J.reine angew. Math. **448** (1994), 97–190.

[14] Dade, Everett C.: *A new approach to Glauberman's correspondence.* J. Algebra **270** (2003), 583–628.

[15] Dade, Everett C.: *Clifford theory and Galois theory I.* J. Algebra **319** (2008), 779–799.

[16] Dicu, Camelia c si Mărcuş, Andrei: *Group-graded algebras and the relative projectivity of pointed groups.* Quart. J. Math. **57** (2006), 309–318.

[17] Dicu, Camelia şi Mărcuş, Andrei: *Source modules of blocks with normal defect group.* Arch. Math. **88** (2007), 289–296.

[18] Etingof Pavel, Golberg Oleg, Hensel Sebastian, Liu Tiankai, Schwendner Alex, Vaintrob Dmitry şi Yudovina Elena. *Introduction to representation theory.* MIT course in Mathematics. Available at: http://www-math.mit.edu/ etingof/replect.pdf

[19] Fan, Yun: *Two questions on blocks with nilpotent coefficient extensions.* Algebra Colloquium **4** (1997), 439-460.

[20] Fan, Yun şi Puig, Lluís.: *On blocks with nilpotent coefficient extensions.* Algebras and Representation theory **1** (1998), 27–73.

[21] Fottner, Hubert: *Morita theory for G-algebras*, unpublished manuscript.

[22] Fottner, Hubert: *G-algebras and Clifford Theory.* Jena University dissertation, 1997.

[23] Gliţia, Dana D.: *Group graded bimodules over a commutative G-ring.* Urmeazaă să apară în Mathematica, **55**(78), (2013), no.2.

[24] Gliţia, Dana D.: *Modular G-graded algebras and G-algebras of endomorphisms* (2013). Trimis la Carpathian Journal of Mathematics.

[25] Gliţia, Dana D. şi Mărcuş, Andrei: *Field extensions and Clifford theory.* Urmeazaă să apară în Mathematica, **55**(78), (2013), no.2.

[26] Gliţia, Dana D. şi Mărcuş, Andrei: *Morita equivalences related to the Glauberman correspondence.* Trimis la Journal of Algebra.

[27] Harris, Morton E.: *Glauberman-Watanabe corresponding p-blocks of finite groups with normal defect groups are Morita equivalent.* Trans. AMS **357**(2004) 1, 309–335.

[28] Harris, Morton E.: *A Morita equivalence for blocks of finite p-solvable groups in the Glauberman-Isaacs-Watanabe correspondence context.* J. Group Theory **10** (2007), 15–34.

[29] Harris, Morton E.: *Clifford Theory of a Finite Group that Contains a Defect* 0 *p-Block of a Normal Subgroup.* To appear in Communications in Algebra (2012).

[30] Harris, Morton E. şi Koshitani, Shigeo: *An extension of Watanabe's theorem for the Isaacs-Horimoto-Watanabe corresponding blocks.* J. Algebra **296** (2006), 96–109.

[31] Harris, Morton E. şi Linckelmann Markus: *On the Glauberman and Watanabe Correspondences of Blocks of Finite p-solvable Groups.* Trans. AMS **354**, (2002), no.9, 3435–3453.

[32] Herman, Alen şi Mitra, Dipra: *Equivalence and the Brauer-Clifford group for G-algebras over commutative rings.* Communications in Algebra **39** (2011), 3905–3915.

[33] Horimoto Hiroshi: *On a correspondence between blocks of finite groups induced from the Isaacs character correspondence.* Hokkaido Math. J. **30** (2001), 65-74.

[34] Ion, Ion D. şi Niţă, Constantin: *Capitole speciale de algebra moderna*, 1984.

[35] Ion, Ion D. şi Radu, Nicolae: *Algebră.* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1991.

[36] Karpilovsky, Gregory: *Projective representations of finite groups.* Marcel Dekker, 1985.

[37] Koshitani, Shigeo şi Michler, Gerhard O.: *Glabuerman Correspondence of p-Blocks of Finite Groups.* J. Algebra **243** (2001),504–517.

[38] Külshammer, Burkhard: *Crossed products and blocks with normal defect groups.* Commun. Algebra **13** (1985), 147–876.

[39] Külshammer, Burkhard, Okuyama, Testuro şi Watanabe, Atumi: *A lifting theorem with applications to blocks and source algebras.* J. Algebra **232** (2000), 299–309.

[40] Ladisch, Frieder: *Character correspondences induced by magic representations.* ArXiv e-prints (Aug.2011), arXiv: 1004.4538v2 [math.RT].

[41] Ladisch, Frieder: *Character correspondences above fully ramified sections and Schur indices.* ArXiv e-prints (Aug.2011), arXiv: 1108.3777v1 [math.Gr].

[42] Mărcuş, Andrei: *Clifford theory for projective modules over strongly graded rings*, Comm. Algebra **23** (12)(1995), 4393–4404.

[43] Mărcuş, Andrei: *Equivalences induced by graded bimodules*, Comm. Algebra **26** (1998), 713–731.

[44] Mărcuş, Andrei: *Representation Theory of Group Graded Algebras.* Nova Science Publishers, Commack, NY 1999.

[45] Mărcuş, Andrei: *Blocks with cyclic defect groups, and Clifford extensions.* J. Algebra **287** (2005), 1–14.

[46] Mărcuş, Andrei: *Characters and equivalence classes of central simple group graded algebras.* Commun. Algebra, **36** (2008), 1394–1412.

[47] Mărcuş, Andrei: *Derived invariance of Clifford classes.* J. Group Theory, **12** (2009), 83–94.

[48] Năstăsescu, Constantin şi Oystaeyen, Freddy Van : *Graded Ring Theory.* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.

[49] Pierce, Richard S. : *Associative Algebras*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[50] Puig, Lluís: *Local extensions in endo-permutation modules split: A proof of Dade's theorem*, in: Sèminaire sur les groupes finis, Tome III, in: Publ. Math. Univ. Paris VII, vol. 25, Univ. Paris VII, Paris, 1986, pp. 199–205.

[51] Puig, Lluís: *Pointed groups and construction submodules* .J. Algebra **116** (1988), 1, 7–129.

[52] Puig, Lluís: *Blocks of Finite Groups. The Hyperfocal Subalgebra of a Block*. Springer, Berlin, 2002.

[53] Puig, Lluís: *On the Brauer-Glauberman correspondence*. J. Algebra **319** (2008), 1, 629–656.

[54] Puig, Lluís şi Zhou, Yuanyang: *Glauberman correspondents and extensions of nilpotent block algebras.* J. London Math. Soc. (2) **85** (2012) 809–837.

[55] Purdea, Ioan: *Tratat de algebră modernă.* Editura Academiei, vol. I, Bucureşti, 1977.

[56] Purdea, Ioan: *Tratat de algebră modernă.* Editura Academiei, vol. I, Bucureşti, 1982.

[57] Rotman, Joseph J. : *Advanced Modern Algebra*, ed. 2, Upper Saddle River, NJ, 2003.

[58] Serre, Jean-Pierre: *Linear Representations of Finite Groups* Springer-Verlag, New York, 1977.

[59] Tasaka, Fuminori: *On the isotypy induced by the Glauberman-Dade correspondence between blocks of finite groups.* J. Algebra **319** (2008), 2451–2470.

[60] Thevenaz, Jacques: *G-Algebras and Modular Representation Theory.* Clarendon Press, Oxford 1995.

[61] Turull, Alexandre: *Clifford theory with Schur indices*, J. Algebra **170** (1994), 661–677.

[62] Turull, Alexandre: *Some invariants for equivalent G-algebras.* J. Pure Appl.Algebra **98** (1995), 209-222.

[63] Turull, Alexandre: *Reduction theorems for Clifford classes.* J. Group Theory **9** (2006), 27-47.

[64] Turull, Alexandre: *Character correspondences in solvable groups.* J. Algebra **295** (2006), 157-178.

[65] Turull, Alexandre: *Strengthening the McKay conjecture to include local fields and local Schur indices.* J. Algebra **319** (2008), 4853-4868.

[66] Turull, Alexandre: *Above the Glauberman correspondence.* Adv. Math. **217** (2008), 5, 2170–2205.

[67] Turull, Alexandre: *The Brauer-Clifford group.* J. Algebra **321** (2009), 3620–3642.

[68] Turull, Alexandre: *Brauer-Clifford equivalence of full matrix algebras.* J. Algebra **321** (2009), 3643-3658.

[69] Turull, Alexandre: *The Brauer-Clifford group of G-rings*, J. Algebra **341** (2011), 109–124.

[70] Turull, Alexandre: *Clifford theory and endoisomorphisms.* J. Algebra **371** (2012), 510–520.

[71] Turull, Alexandre: *Endoisomorphisms yield module and character correspondences.* J. Algebra **394** (2013), 7–50.

[72] Turull, Alexandre: *The strengthened Alperin-McKey conjecture for p-solvable groups.* To appear in J. Algebra, (2013).

[73] Watanabe, Atumi: *The Glauberman Character Correspondence and Perfect Isometries for Blocks of Finite Groups.* J. Algebra **216**, (1999), 2, 548–565.

[74] Watanabe, Atumi: *Morita equivalence of Isaacs correspondence for blocks of finite groups.* Arch. Math. **82**, (2004), 488–494.

[75] Zhou, Yuanyang: *On the Glauberman correspondent of a block.* Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 8, 2641–2651.