Universitatea Babeş-Bolyai
Facultatea de Matematică şi Informatică

Contribuţii în teoria geometrică a funcţiilor în $\mathbb{C}^n$

Teză de Doctorat - Rezumat

Conducător Ştiinţific
Prof. Dr. Gabriela Kohr

Doctorand
Teodora Andrica (căs. Chirilă)

Cluj-Napoca
2013

Cuprins

Introducere **ii**

1 Funcţii univalente în planul complex **1**

1.1 Rezultate generale privind funcţiile olomorfe 1
1.2 Subordonare. Funcţii olomorfe cu partea reală pozitivă 3
1.3 Rezultate generale privind funcţiile univalente 4
1.4 Familii de funcţii univalente normate pe discul unitate 6
1.4.1 Clasa S 6
1.4.2 Clasa $S(M)$ 8
1.4.3 Funcţii stelate 8
1.4.4 Funcţii convexe şi aproape convexe 9
1.4.5 Funcţii spiralate 12
1.4.6 Raze de univalenţă asociate subclaselor lui S 13
1.5 Teoria lanţurilor Loewner în planul complex 13
1.5.1 Rezultate generale privind lanţurile Loewner 13
1.5.2 Lanţuri Loewner şi funcţii univalente pe discul unitate 15

2 Aplicaţii biolomorfe de mai multe variabile complexe **17**

2.1 Rezultate preliminare 18
2.1.1 Funcţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$ 18
2.1.2 Aplicaţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$ 19
2.2 Subordonare. Clasa Carathéodory în $\mathbb{C}^n$ 21
2.3 Subclase de aplicaţii biolomorfe pe B^n 22
2.3.1 Aplicaţii stelate 22
2.3.2 Aplicaţii convexe şi aproape stelate 24
2.3.3 Aplicaţii spiralate 27
2.4 Teoria lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe 28
2.4.1 Rezultate generale privind lanţurile Loewner în $\mathbb{C}^n$ 28
2.4.2 Lanţuri Loewner şi aplicaţii biolomorfe pe bila unitate B^n 30
2.4.3 Reprezentare parametrică pe B^n 31

3 Operatori de extensie care păstrează proprietăţi analitice şi geometrice 33
3.1 Rezultate generale privind operatori de extensie . . . 34
3.1.1 Operatorul de extensie Roper-Suffridge . . . 34
3.1.2 Generalizări ale operatorului Roper-Suffridge . . . 35
3.1.3 Operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge . . . 37
3.2 g-lanţuri Loewner asociate unor operatori de extensie generalizaţi Roper-Suffridge 38
3.2.1 Operatorul $\Phi_{n,\alpha}$ şi g-lanţuri Loewner . . . 39
3.2.2 Operatorul de extensie Muir şi g-lanţuri Loewner . . . 40
3.2.3 Operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi g-lanţuri Loewner . . . 42
3.3 Rezultate de subordonare asociate operatorului $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ . . . 43
3.4 Raze de univalenţă şi operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ . . . 44
3.5 O generalizare a operatorului de extensie Pfaltzgraff-Suffridge . . . 45
3.5.1 Lanţuri Loewner şi operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ . . . 46
3.5.2 ε-stelaritate şi operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ . . . 47
3.5.3 Subordonare şi operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ . . . 48

4 Subclase de aplicaţii biolomorfe asociate g-lanţurilor Loewner 49
4.1 g-stelaritate, g-spiralitate şi g-aproape stelaritate pe B^n . . . 49
4.1.1 Definiţii şi exemple . . . 49
4.1.2 Caracterizări folosind g-lanţuri Loewner . . . 52
4.2 O subclasă de aplicaţii biolomorfe pe B^n generată de g-lanţuri Loewner . . . 53

5 Puncte extreme şi puncte suport asociate familiei $\overline{S_g^0(B^n)}$ 59
5.1 Rezultate preliminare . . . 60
5.2 Puncte extreme asociate familiei $\overline{S_g^0(B^n)}$ . . . 61
5.3 Puncte suport asociate familiei $\overline{S_g^0(B^n)}$ . . . 62
5.4 Puncte extreme şi puncte suport asociate operatorilor de extensie . . . 63

Bibliografie - Listă selectivă 65

Introducere

În această teză de doctorat prezentăm rezultate generale şi originale din teoria geometrică a funcţiilor de una, respectiv mai multe variabile complexe. Una din cele mai importante direcţii din teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă este teoria funcţiilor univalente. Bieberbach (1916) [6] a demonstrat estimarea exactă a coeficientului al doilea pentru clasa S a funcţiilor univalente normate pe discul unitate U, şi a formulat celebra conjectură privind estimarea coeficienţilor funcţiilor din clasa S. Conjectura lui Bieberbach a fost demonstrată de L. de Branges [7] în 1985.

Menţionăm aici rezultatele importante obţinute de şcoala matematică românească de funcţii univalente, începând cu G. Călugăreanu [8]. El a obţinut primele condiţii necesare şi suficiente de univalenţă pentru funcţii olomorfe de o variabilă complexă. Pe de altă parte, S.S. Miller şi P.T. Mocanu [80] au obţinut rezultate fundamentale privind subordonările diferenţiale în planul complex, cu diverse aplicaţii la studiul funcţiilor univalente.

Un rezultat fundamental în teoria funcţiilor univalente de o variabilă complexă este teorema lui Riemann, care asigură conform echivalenţa domeniilor simplu conexe din $\mathbb{C}$ (a se vedea de exemplu [44], [57]). Pe de altă parte, acest rezultat nu are loc în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$ (a se vedea de exemplu [44]). Acest lucru arată o diferenţă esenţială între teoria geometrică a funcţiilor de una, respectiv mai multe variabile complexe.

Una din cele mai importante metode în studiul funcţiilor univalente este teoria lanţurilor Loewner. Se ştie că lanţurile Loewner sunt determinate de ecuaţia diferenţială Loewner. Amintim aici că ecuaţia diferenţială Loewner a jucat un rol important în demonstraţia conjecturii lui Bieberbach, obţinută de L. de Branges [7] (pentru detalii, a se vedea de asemenea [58]). Teoria lanţurilor Loewner a fost de asemenea utilă în demonstrarea unor rezultate privind funcţiile univalente, cum ar fi raza de stelaritate pentru clasa S, caracterizarea analitică a stelarităţii, spiralităţii, convexităţii şi aproape convexităţii prin intermediul lanţurilor Loewner, precum şi criterii de univalenţă pe discul unitate U. Pommerenke [93] a demonstrat că orice funcţie din clasa S se scufundă într-un lanţ Loewner. De asemenea, orice funcţie $f \in S$ admite reprezentare parametrică pe U (a se vedea [93]). Pe de altă parte, aceste rezultate nu au loc în cazul mai multor variabile complexe. Aşadar, există diferenţe esenţiale între teoria lanţurilor Loewner de una, respectiv mai multe variabile complexe (a se vedea de exemplu [44, Capitolul 8]).

Există un număr de monografii care tratează diverse aspecte ale teoriei funcţiilor univalente de o variabilă complexă, inclusiv lanţuri Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner. Menţionăm aici monografiile lui Duren [26], Pommerenke [93], Hayman [58], Graham şi Kohr [44], Mocanu, Bulboacă şi Sălăgean [81]. Menţionăm de asemenea cărţile lui Conway [20], Rosenblum şi Rovnyak [103], care conţin rezultate clasice privind funcţii univalente şi lanţuri Loewner în planul complex.

Studiul clasei $S(B^n)$ a aplicaţiilor biolomorfe normate f pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, a fost considerat de Cartan [9] în 1933. El a demonstrat că $S(B^n)$ nu e local uniform mărginită, aşadar nu e compactă, şi nu există teoreme de deformare şi distorsiune pentru întreaga clasă $S(B^n)$ (a se vedea [9], [29], [44]). Aşadar există o diferenţă fundamentală între teoria funcţiilor univalente pe U şi teoria aplicaţiilor univalente pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$, pentru $n \geq 2$ (pentru detalii, a se vedea [44, Capitolul 6]). Mai mult, teorema lui Riemann nu are loc în cazul mai multor variabile complexe. Poincaré [92] a demonstrat că bila unitate Euclidiană şi polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$ nu sunt biolomorfic echivalente pentru $n \geq 2$, deşi sunt omeomorfe.

Cartan [9] a furnizat exemple care arată că conjectura lui Bieberbach nu are loc pentru întreaga clasă $S(B^n)$, pentru $n \geq 2$. Pe de altă parte, Cartan [9] a conjecturat că există estimări inferioare şi superioare ale lui $|\det Df(z)|$, pentru $f \in S(B^n)$, care depind doar de $z \in B^n$ (a se vedea [9]). Duren şi Rudin [29] au demonstrat că această conjectură nu are loc pentru $n \geq 2$.

Mai mult, Cartan [9] a recomandat studiul aplicaţiilor stelate şi convexe la mai multe dimensiuni. Primele lucrări privind stelaritatea în cazul mai multor variabile complexe se datorează lui Matsuno (1955) [79] pe bila unitate Euclidiană, şi Suffridge [108] (1970) pe polidiscul unitate. Suffridge [109] şi Gurganus [49] au obţinut generalizarea caracterizării stelarităţii pe discul unitate la bila unitate a unui spaţiu Banach complex. Alte condiţii necesare şi suficiente de stelaritate pe domenii pseudoconvexe echilibrate mărginite în $\mathbb{C}^n$ au fost obţinute de Kikuchi [60], Gong (a se vedea [32] şi citările aferente), Liu [74].

Contribuţii ulterioare au fost aduse de Kubicka şi Poreda [71], Barnard, FitzGerald şi Gong [4], care au obţinut un rezultat de deformare exact pentru aplicaţiile stelate normate pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$. Alte contribuţii privind estimări ale coeficienţilor şi rezultate de distorsiune pentru aplicaţii stelate normate pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$ pot fi găsite în [44] şi în citările aferente.

Condiţii necesare şi suficiente de convexitate au fost obţinute de Suffridge (1970) [108] pe polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$, apoi de Kikuchi [60], Gong, Wang şi Yu [36] pe bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$. Contribuţii ulterioare privind rezultate de deformare pentru aplicaţii convexe normate pe B^n au fost obţinute de Suffridge [111], FitzGerald şi Thomas [31], şi Liu [74]. Pe de altă parte, estimări exacte ale coeficienţilor aplicaţiilor convexe normate pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$ au fost obţinute de FitzGerald şi Gong [31], Kohr [65] (a se vedea de asemenea [32] şi [44] şi citările aferente). Rezultate de distorsiune privind estimarea lui $\|Df(z)\|$, pentru $f \in K(B^n)$ (clasa aplicaţiilor convexe normate pe bila unitate Euclidiană B^n) au fost obţinute de Liczberski şi Starkov [72] (a se vedea de asemenea [32] şi citările aferente).

Diverse aspecte privind stelaritatea, convexitatea, spiralitatea în $\mathbb{C}^n$ pot fi găsite în [32], [36], [38], [44], [60], [88], [96], [101], [102], [110].

Numeroase rezultate din teoria lanţurilor Loewner au fost generalizate la mai multe dimensiuni. Acest subiect a fost iniţiat de Pfaltzgraff ([88], [89]), care a obţinut generalizări pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ a rezultatelor de univalenţă şi extensii cvasiconforme obţinute de Becker [5] în cazul unei variabile complexe. Poreda ([94], [95]) a obţinut aplicaţii ale reprezentării parametrice la teoreme de deformare şi estimări ale coeficienţilor pe polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$. El a obţinut de asemenea anumite generalizări pe bila unitate a unui spaţiu Banach complex (a se vedea [96]). Existenţa şi regularitatea teoriei lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe, incluzând aspecte geometrice şi analitice, au fost considerate de Duren, Graham, Hamada şi Kohr [27], Graham, Hamada, Kohr [38], Graham, Hamada, Kohr, Kohr [40], Graham, Kohr şi Kohr [46], Hamada [51], Curt şi Kohr [24], Poreda ([94], [95]; a se vedea de asemenea [96]), Arosio [3], Voda [112]. Condiţii suficiente de univalenţă pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$ au fost obţinute de Curt şi Pascu [25] (a se vedea de asemenea [23]; a se vedea de exemplu [44, Capitolul 8] şi citările aferente), Cristea [21], etc. Diverse aplicaţii privind reprezentarea parametrică pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$, incluzând teoreme de deformare, estimări ale coeficienţilor, rezultate de incluziune, au fost obţinute în [19], [38], [48], [83], [114], etc.

Pe de altă parte, există multe diferenţe între teoria lanţurilor Loewner de una, respectiv mai multe variabile complexe (a se vedea [44, Capitolul 8]). De exemplu, Graham, Hamada şi Kohr [38] (a se vedea de asemenea Poreda [94]) au demonstrat că, în cazul mai multor variabile complexe, există aplicaţii biolomorfe normate f pe bila unitate B^n în $\mathbb{C}^n$ care nu se pot scufunda în lanţuri Loewner $f(z,t)$ astfel încât $f = f(\cdot,0)$ şi $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este familie local uniform mărginită. De asemenea, există aplicaţii $f \in S(B^n)$ care nu admit reprezentare parametrică pe B^n, $n \geq 2$. Pe de altă parte, în cazul unei variabile complexe, ecuaţia diferenţială Loewner are o unică soluţie univalentă normată (a se vedea [93]). Rezultatul precedent nu are însă loc la mai multe dimensiuni (a se vedea [38]). Studiul formei soluţiilor ecuaţiei diferenţiale Loewner de mai multe variabile complexe a fost considerat de Duren, Graham, Hamada şi Kohr [27] (a se vedea de asemenea [3], [51], [112]).

Compactitatea familiei Carathéodory $\mathcal{M}$ a influenţat multe rezultate din teoria lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe (a se vedea [44]). Acest rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada şi Kohr [38] în 2002 (a se vedea de asemenea [55]). Numeroase detalii şi aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner în cazul mai multor variabile complexe pot fi găsite în lucrările [1], [27], [38], [40], [88], [89], [96] (a se vedea de asemenea [44, Capitolul 8] şi [23]).

Această teză este structurată pe 5 capitole.

- **Capitolul 1** prezintă rezultate generale privind funcţiile univalente de o variabilă complexă. Aceste rezultate vor fi utile în următoarele capitole ale tezei. Toate rezultatele sunt prezentate fără demonstraţie. Secţiunea 1.1 conţine noţiuni şi rezultate preliminare privind funcţiile olomorfe, ce vor fi folosite pe parcursul tezei. Secţiunea 1.2 prezintă noţiunea de subordonare în planul complex, precum şi proprietăţi importante ale funcţiilor olomorfe cu partea reală pozitivă pe discul unitate U. Secţiunea 1.3 prezintă proprietăţi clasice ale funcţiilor univalente de o variabilă complexă. Vom aminti noţiunea de echivalenţă conformă, precum şi teorema lui Riemann, unul din cele mai importante rezultate din teoria funcţiilor univalente.

  În Secţiunea 1.4 ne vom referi la diverse subclase de funcţii univalente pe discul unitate. Vom prezenta clasa S a funcţiilor univalente normate pe U, clasa S^* a funcţiilor stelate în raport cu originea şi normate, clasa K a funcţiilor convexe normate. Ne vom referi de asemenea la clasa funcţiilor aproape convexe, clasa funcţiilor stelate şi convexe de ordinul α, clasa funcţiilor spiralate de tipul γ şi clasa funcţiilor aproape stelate de ordinul α. Vom considera estimări ale coeficienţilor, teoreme de deformare, distorsiune şi acoperire pentru aceste clase. În Secţiunea 1.5 considerăm rezultate clasice din teoria lanţurilor Loewner şi ecuaţiei diferenţiale Loewner pe discul unitate în $\mathbb{C}$. Vom prezenta de asemenea aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner la studiul funcţiilor univalente, cum ar fi criterii de univalenţă şi caracterizarea analitică a unor subclase importante ale lui S prin intermediul lanţurilor Loewner. Rezultatele prezentate în această secţiune vor fi utile în demonstrarea rezultatelor principale ale tezei.

- **Capitolul 2** prezintă proprietăţi elementare ale funcţiilor olomorfe şi ale aplicaţiilor olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Aceste rezultate vor fi utile în următoarele capitole ale tezei şi sunt prezentate fără demonstraţie. Secţiunea 2.1 consideră proprietăţi elementare ale aplicaţiilor olomorfe în cazul mai multor variabile complexe. Secţiunea 2.2 prezintă noţiunea de subordonare pentru mai multe variabile complexe, precum şi generalizarea clasei Carathéodory $\mathcal{P}$ la $\mathbb{C}^n$, notată cu $\mathcal{M}$. Vom considera teoreme de deformare şi estimări ale coeficienţilor pentru clasa $\mathcal{M}$, precum şi exemple de aplicaţii din clasa $\mathcal{M}$. Vom prezenta de asemenea rezultatul de compactitate privind clasa $\mathcal{M}$.

  Secţiunea 2.3 consideră subclase de aplicaţii biolomorfe pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$. Ne vom referi la clasa aplicaţiilor stelate, convexe, aproape stelate şi spiralate normate. Vom prezenta caracterizări analitice, teoreme de deformare şi estimări ale coeficienţilor, şi vom da exemple de aplicaţii din aceste clase. Ne vom referi de asemenea la anumite subclase ale lui $S(B^n)$, cum ar fi: clasa aplicaţiilor stelate de ordinul α, clasa aplicaţiilor ε-stelate, clasa aplicaţiilor aproape stelate de ordinul α. Vom vedea că majoritatea acestor subclase ale lui $S(B^n)$ au caracterizări analitice şi geometrice. Această secţiune nu conţine rezultate originale, însă Definiţia 2.3.7 a fost introdusă de Chirilă [12].

  În Secţiunea 2.4 considerăm generalizarea ecuaţiei diferenţiale Loewner la mai multe dimensiuni. Vom prezenta rezultate clasice din teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$ şi vom considera diverse aplicaţii, cum ar fi criterii de univalenţă şi caracterizarea analitică a anumitor subclase ale lui $S(B^n)$ prin intermediul lanţurilor Loewner. Vom prezenta de asemenea clasa $S_g^0(B^n)$ a aplicaţiilor care admit g-reprezentare parametrică pe bila unitate B^n, unde g este o funcţie univalentă pe discul unitate U care verifică anumite condiţii naturale. Vom considera teoreme de deformare şi estimări ale coeficienţilor pentru aplicaţii din $S_g^0(B^n)$, şi vom prezenta anumite cazuri particulare. Vom vedea că toate lanţurile Loewner pe bila unitate B^n în $\mathbb{C}^n$ sunt determinate de ecuaţia diferenţială Loewner (a se vedea de exemplu [76]). De asemenea, vom vedea că orice lanţ Loewner $f(z,t)$ astfel încât $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este familie normală este generat de aplicaţia sa de tranziţie (a se vedea [41]).

Studiul operatorilor de extensie care extind o funcţie univalentă f pe discul unitate U la o aplicaţie univalentă F de la bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}^n$, cu proprietatea că $f(z_1) = F(z_1, 0)$, a început cu operatorul de extensie Roper-Suffridge [101]. Acest operator a fost introdus în 1995 cu scopul de a construi aplicaţii convexe pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$, pornind de la o funcţie convexă pe discul unitate. Dacă $f_1, \ldots, f_n$ sunt funcţii convexe pe discul unitate U, atunci $F(z) = (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n))$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in B^n$, nu este în mod necesar o aplicaţie convexă pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$. Păstrarea convexităţii prin operatorul Roper-Suffridge a fost de asemenea demonstrată în [43], folosind metode diferite.

Alte proprietăţi geometrice (stelaritate, spiralitate, stelaritate de un anumit ordin, etc.) sunt păstrate de către acest operator şi diferite generalizări ale acestuia. Graham şi Kohr [43] au arătat că operatorul de extensie Roper-Suffridge păstrează noţiunile de stelaritate şi aplicaţie Bloch, iar Graham, Kohr şi Kohr [46] au arătat că acesta păstrează noţiunile de reprezentare parametrică.

Diferiţi operatori de extensie care au proprietăţi similare cu cele ale operatorului Roper-Suffridge au fost studiaţi de Pfaltzgraff şi Suffridge [91], Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [42] (a se vedea de asemenea [46]), Muir ([82], [83]), Gong şi Liu ([34], [35]), Liu şi Liu [77], Xu şi Liu [114], etc.

Alţi operatori de extensie care păstrează proprietăţi analitice şi geometrice ale aplicaţiilor biolomorfe pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$ şi spaţii Banach complexe au fost obţinuţi de Elin [30] (a se vedea de asemenea [39]). Mai multe detalii privind generalizarea operatorului de extensie Roper-Suffridge pot fi găsite în [44, Capitolul 11] şi [45] (a se vedea de asemenea, [30], [39], [73], [76], [82], etc.).

O altă generalizare a operatorului de extensie Roper-Suffridge a fost considerată de Pfaltzgraff şi Suffridge [91] în 1999. Acest operator extinde o aplicaţie local biolomorfă pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ la o aplicaţie local biolomorfă pe bila unitate Euclidiană B^{n+1} în $\mathbb{C}^{n+1}$. Operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge a fost studiat de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48], care au obţinut un rezultat parţial privind păstrarea convexităţii prin acest operator. Ei au demonstrat de asemenea că operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge păstrează noţiunile de reprezentare parametrică şi stelaritate.

- **Capitolul 3** consideră operatori de extensie care păstrează anumite proprietăţi analitice şi geometrice. Acest subiect a început cu operatorul Roper-Suffridge [101], introdus în 1995, pentru a construi aplicaţii convexe pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$, pornind de la o funcţie convexă pe discul unitate. Acest capitol se bazează pe rezultatele originale obţinute în [11], [12], [14], [15], [16], [17].

  Secţiunea 3.1 prezintă operatorul de extensie Roper-Suffridge, precum şi câteva generalizări ale acestuia. Vom considera proprietăţile analitice şi geometrice ale acestor operatori şi vom prezenta legătura cu teoria lanţurilor Loewner. Vom discuta de asemenea cazul operatorului de extensie Pfaltzgraff-Suffridge [91] care extinde o aplicaţie local biolomorfă $f \in H(B^n)$ la o aplicaţie local biolomorfă $F \in H(B^{n+1})$.

  Secţiunea 3.2 prezintă rezultate originale privind anumite generalizări ale operatorului de extensie Roper-Suffridge. Vom demonstra că aceşti operatori păstrează noţiunea de g-lanţ Loewner, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$ şi $\gamma \in (0,1)$. În consecinţă, operatorii de extensie consideraţi păstrează diferite proprietăţi analitice şi geometrice, cum ar fi g-reprezentarea parametrică, stelaritatea de ordinul γ, spiralitatea de tipul δ şi ordinul γ, aproape stelaritatea de ordinul δ şi tipul γ. Această secţiune se bazează pe rezultatele originale obţinute în [11] şi [12]. Rezultatele principale prezentate în această secţiune sunt Teoremele 3.2.1, 3.2.7, 3.2.16, Propoziţia 3.2.11, Corolariile 3.2.2, 3.2.3, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.8, 3.2.9, 3.2.13, 3.2.14, 3.2.17, 3.2.18, 3.2.20, 3.2.21.

Secţiunea 3.3 prezintă rezultate de subordonare asociate unui operator de extensie generalizat Roper-Suffridge. Această secţiune conţine rezultate originale obţinute în [11]. Rezultatele principale prezentate în această secţiune sunt Teorema 3.3.1, Corolariile 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4, 3.3.5, 3.3.6, 3.3.7.

Secţiunea 3.4 consideră raze de univalenţă asociate unui operator de extensie generalizat Roper-Suffridge. Această secţiune conţine rezultate originale obţinute în [11]. Rezultatele principale sunt date de Teoremele 3.4.1, 3.4.3, 3.4.4, 3.4.5.

În Secţiunea 3.5 generalizăm operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge şi arătăm că acest operator generalizat păstrează noţiunile de reprezentare parametrică, stelaritate, spiralitate de tipul δ, aproape stelaritate de ordinul δ. Vom considera păstrarea ε-stelarităţii prin acest operator şi vom obţine un rezultat parţial referitor la păstrarea convexităţii. Vom obţine de asemenea un rezultat de păstrare a subordonării prin operatorul de extensie menţionat anterior şi vom considera cazuri particulare ale acestui rezultat. Această secţiune conţine rezultate originale obţinute în [14], [15], [17]. Rezultatele principale prezentate în această secţiune sunt Teoremele 3.5.2, 3.5.7, 3.5.12, Corolariile 3.5.3, 3.5.4, 3.5.5, 3.5.6, 3.5.8, 3.5.9, 3.5.10, 3.5.13, 3.5.14.

- **Capitolul 4** consideră studiul anumitor subclase de aplicaţii biolomorfe normate pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$, generate folosind metoda lanţurilor Loewner. Teoria lanţurilor Loewner reprezintă o metodă importantă în studiul diverselor probleme privind univalenţa în una şi mai multe variabile complexe. De exemplu, proprietăţi geometrice, cum ar fi stelaritatea, spiralitatea de tipul α, aproape stelaritatea de ordinul α, au caracterizări prin intermediul lanţurilor Loewner. Într-adevăr, dacă f este o aplicaţie olomorfă normată pe bila unitate B^n, atunci f este stelată (f este biolomorfă şi $f(B^n)$ este un domeniu stelat în raport cu originea) dacă şi numai dacă $f(z,t) = e^t f(z)$ este lanţ Loewner. Acest rezultat a fost obţinut de Pfaltzgraff şi Suffridge [90]. De asemenea, dacă f este o aplicaţie olomorfă normată pe B^n, atunci f este spiralată de tipul $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dacă şi numai dacă $f(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat}z)$ este lanţ Loewner, unde $a = \tan\alpha$. Acest rezultat a fost obţinut de Hamada şi Kohr [54]. Xu şi Liu [114] au obţinut caracterizarea aproape stelarităţii de ordinul α prin intermediul lanţurilor Loewner, şi au demonstrat că această noţiune este păstrată de anumiţi operatori de extensie, cum ar fi operatorul de extensie Roper-Suffridge.

  Pfaltzgraff şi Suffridge [91] au demonstrat că dacă $P : B^n \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă astfel încât $P(0) = 1$ şi dacă $F(z) = P(z)z$, $z \in B^n$, atunci F este stelată dacă şi numai dacă
  $$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{DP(z)(z)}{P(z)}\right] > 0,\ z \in B^n.$$
  Acest rezultat a fost generalizat în [38] (compară cu [115] în cazul spaţiilor Banach complexe) pentru g-stelaritate, o noţiune strâns legată de stelaritate, care va fi menţionată în Secţiunea 4.1.

  În acest capitol obţinem caracterizări similare pentru subclase ale aplicaţiilor stelate normate, spiralate de tipul α, aproape stelate de ordinul α, prin intermediul g-lanţurilor Loewner, unde $g : U \to \mathbb{C}$ este o funcţie univalentă care verifică anumite condiţii naturale. Diverse exemple şi aplicaţii vor fi de asemenea obţinute. Rezultate privind teoreme de deformare, distorsiune şi estimări ale coeficienţilor pentru aplicaţiile g-stelate pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$ au fost obţinute în [52], [53], [115].

Acest capitol conţine rezultate originale obţinute în [13].

Secţiunea 4.1 prezintă clasa aplicaţiilor g-stelate, g-spiralate de tipul $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, şi g-aproape stelate de ordinul $\alpha \in [0, 1)$ pe B^n. Vom considera exemple din aceste clase şi vom obţine caracterizarea acestora prin intermediul g-lanţurilor Loewner.

În Secţiunea 4.2 vom folosi aceste rezultate pentru a demonstra că, în anumite ipoteze, aplicaţia $F : B^n \to \mathbb{C}^n$ dată de $F(z) = P(z)z$ este g-stelată, g-spiralată de tipul $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi g-aproape stelată de ordinul $\alpha \in [0, 1)$ pe B^n, unde $P : B^n \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă astfel încât $P(0) = 1$. Mai general, considerăm condiţii astfel încât F admite g-reprezentare parametrică pe B^n. Diverse aplicaţii ale acestor rezultate vor fi de asemenea obţinute. În acest fel obţinem exemple concrete de aplicaţii care admit g-reprezentare parametrică pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$. Definiţiile şi rezultatele principale prezentate în acest capitol sunt Definiţiile 4.1.5, 4.1.6, Teoremele 4.1.11, 4.1.12, 4.1.13, 4.2.1, Corolariile 4.2.3, 4.2.4, 4.2.11, 4.2.12, 4.2.13, 4.2.14, 4.2.15, 4.2.16.

Probleme extremale în cazul unei variabile complexe au fost intensiv studiate. O foarte bună discuţie privind probleme extremale asociate diferitelor subclase compacte de funcţii univalente pe discul unitate U pot fi găsite în monografiile lui Hallenbeck şi MacGregor [50] şi în teza de doctorat a lui Roth [104] (a se vedea de asemenea [97]).

Se ştie că dacă f este un punct extrem pentru familia compactă S a funcţiilor univalente normate pe U, sau dacă f este un punct suport pentru S, atunci f transformă discul unitate U în complementul unui arc continuu ce tinde la ∞. Aşadar, f nu poate fi o aplicaţie mărginită (a se vedea de exemplu [26], [50] şi [93]). Pe de altă parte, Pell [87] şi Kirwan [61] au demonstrat că dacă f este un punct extrem (respectiv, f este un punct suport) al familiei S a funcţiilor univalente normate pe discul unitate U, şi dacă $f(z, t)$ este un lanţ Loewner astfel încât $f = f(\cdot, 0)$, atunci $e^{-t}f(\cdot, t)$ este un punct extrem al lui S (respectiv, $e^{-t}f(\cdot, t)$ este un punct suport al lui S), oricare ar fi $t \geq 0$.

O generalizare a rezultatelor lui Pell şi Kirwan la mai multe variabile complexe a fost obţinută de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48], în cazul familiei compacte $\Phi_n(S)$, unde Φ_n este operatorul de extensie Roper-Suffridge [101]. Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41] şi Schleissinger [106] au obţinut generalizări ale rezultatelor de mai sus în cazul aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică pe B^n. Într-adevăr, autorii din [41] au demonstrat că dacă f este un punct extrem pentru familia compactă $S^0(B^n)$ a aplicaţiilor biolomorfe normate care admit reprezentare parametrică pe B^n, şi dacă $f(z, t)$ este un lanţ Loewner astfel încât $f = f(\cdot, 0)$ şi $\{e^{-t}f(\cdot, t)\}_{t\geq 0}$ este familie normală pe B^n, atunci $e^{-t}f(\cdot, t)$ este un punct extrem al familiei $S^0(B^n)$, pentru $t \geq 0$. De asemenea, Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41] au demonstrat că dacă f este un punct suport al lui $S^0(B^n)$ şi $f(z, t)$ este un lanţ Loewner astfel încât $f = f(\cdot, 0)$ şi $\{e^{-t}f(\cdot, t)\}_{t\geq 0}$ este familie normală pe B^n, atunci există $t_0 > 0$ astfel încât $e^{-t}f(\cdot, t)$ este un punct suport al familiei $S^0(B^n)$, pentru $0 \leq t < t_0$. Schleissinger [106] a demonstrat recent că acest rezultat are loc, oricare ar fi $t \in [0, \infty)$.

Muir şi Suffridge [84] au considerat diferite caracterizări ale punctelor extreme pentru aplicaţii convexe pe B^n. Pe de altă parte, Muir [83] a considerat puncte extreme şi puncte suport pentru submulţimi compacte asociate unei familii generale de operatori de extensie. Recent, Voda [112] a studiat puncte extreme asociate familiei Carathéodory $\mathcal{M}$ şi a găsit diferenţe între structura lui $\mathcal{M}$ în cazul unei, respectiv mai multor variabile complexe.

- **Capitolul 5** consideră puncte extreme şi puncte suport asociate familiei compacte $\overline{S_g^0(B^n)}$, unde $g : U \to \mathbb{C}$ este o funcţie univalentă care verifică anumite condiţii naturale. Diferite aplicaţii şi consecinţe vor fi obţinute. Vom considera de asemenea puncte extreme şi puncte suport asociate operatorilor de extensie care păstrează lanţuri Loewner. În particular, vom considera puncte extreme şi puncte suport asociate familiei compacte $\Psi_n(\overline{S_g^0(B^n)})$, unde Ψ_n este operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge [91]. Acest capitol conţine rezultate originale obţinute de Chirilă, Hamada şi Kohr [18] şi Chirilă [17]. Acestea generalizează rezultatele lui Pell [87] şi Kirwan [61] în cazul mai multor variabile complexe şi continuă cercetarea obţinută în [41], [48], [106].

  În Secţiunea 5.1 amintim noţiunile de puncte extreme şi puncte suport pentru submulţimi compacte ale lui $H(B^n)$, unde B^n este bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$. În Secţiunea 5.2 considerăm puncte extreme asociate familiei compacte $\overline{S_g^0(B^n)}$. Rezultatele principale prezentate în această secţiune sunt Lema 5.2.1, Teorema 5.2.2, Propoziţia 5.2.3.

  În Secţiunea 5.3 considerăm puncte suport asociate familiei compacte $\overline{S_g^0(B^n)}$. Vom obţine de asemenea o generalizare la n-dimensiuni a unui principiu extremal obţinut de Kirwan şi Schober [62] (a se vedea de asemenea [104]). Rezultatele principale din această secţiune sunt Teoremele 5.3.1, 5.3.3, Lema 5.3.4, Corolarul 5.3.5.

  În Secţiunea 5.4 considerăm puncte extreme şi puncte suport asociate familiei compacte $\Phi(\overline{S_g^0(B^n)})$, unde $\Phi : \mathcal{L}S_n(B^n) \to \mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$ este un operator de extensie care păstrează lanţuri Loewner. În particular, considerăm puncte extreme şi puncte suport asociate familiei compacte $\Psi_n(\overline{S_g^0(B^n)})$, unde Ψ_n este operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge. Rezultatele principale prezentate în această secţiune sunt Lemele 5.4.2, 5.4.4, Teoremele 5.4.3, 5.4.5.

Rezultatele originale prezentate în această teză au fost publicate în următoarele lucrări:

- **T. Chirilă**, *An extension operator associated with certain g-Loewner chains*, Taiwanese J. Math. (**ISI**), **17**, no. 5 (2013), 1819–1837.

- **T. Chirilă**, *Analytic and geometric properties associated with some extension operators*, Complex Var. Elliptic Equ. (**ISI**), to appear, doi.org/10.1080/17476933.2012.746966.

- **T. Chirilă**, *Subclasses of biholomorphic mappings associated with g-Loewner chains on the unit ball in $\mathbb{C}^n$*, Complex Var. Elliptic Equ. (**ISI**), to appear, doi.org/10.1080/17476933.2013.856422.

- **T. Chirilă**, *An extension operator and Loewner chains on the Euclidean unit ball in* $\mathbb{C}^n$, Mathematica (Cluj), **54 (77)** (2012), 116–125.

- **T. Chirilă**, *An extension operator and Loewner chains on some Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^n$, Advances in Mathematics: Scientific Journal **1** (2012), 139–145.

- **T. Chirilă**, *Extension operators that preserve geometric and analytic properties of biholomorphic mappings*, in "Topics in Mathematical Analysis and Applications", L. Toth and Th. M. Rassias, Eds., Springer, 2014, to appear.

- **T. Chirilă**, *Extreme points associated with certain extension operators*, in preparation.

- **T. Chirilă**, H. Hamada, G. Kohr, *Extreme points and support points for mappings with g-parametric representation in* $\mathbb{C}^n$, submitted.

Rezultatele originale prezentate în această teză au fost comunicate la următoarele conferinţe internaţionale:

- 26.08–30.08.2013, 9th International Symposium on Geometric Function Theory and Applications (GFTA 2013), Işik University, Istanbul, Turkey; comunicarea: *Geometric properties of certain extension operators*.

- 27.06–30.06.2013, Joint International Meeting of the AMS and the Romanian Mathematical Society, Alba Iulia, Romania; comunicarea: *A subclass of biholomorphic mappings generated by* g*-Loewner chains*.

- 27.08–31.08.2012, International Symposium on Geometric Function Theory and Applications (GFTA 2012), Ohrid, R. Macedonia; comunicarea: *Geometric properties associated with generalized Roper-Suffridge extension operators*.

- 26.06–30.06.2012, International Conference on Complex Analysis and Related Topics, the 13th Romanian-Finnish Seminar, Ploieşti, Romania; comunicarea: *Extension operators and* g*-Loewner chains*.

- 9.02–12.02.2012, 9th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Siófok, Hungary; comunicarea: *An extension operator and Loewner chains on the Euclidean unit ball in* $\mathbb{C}^n$.

- 4.09–8.09.2011, International Symposium on Geometric Function Theory and Applications (GFTA 2011), Cluj-Napoca, Romania; comunicarea: *Extension operators that preserve geometric properties on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$.

Cuvinte cheie

Aplicaţie biolomorfă, aplicaţie convexă, aplicaţie g-aproape stelată de ordinul α, aplicaţie g-spiralată de tipul α, aplicaţie g-stelată, aplicaţie spiralată, aplicaţie stelată, ecuaţia diferenţială Loewner, g-lanţ Loewner, g-reprezentare parametrică, lanţ Loewner, operator de extensie, operatorul de extensie Roper-Suffridge, punct extrem, punct suport, reprezentare parametrică, subordonare.

Mulţumiri

Doresc să îi mulţumesc conducătorului meu de doctorat Prof. dr. Gabriela Kohr pentru sfaturile, suportul, sugestiile valoroase şi oportunităţile extraordinare pe care mi le-a oferit. A fost un privilegiu să studiez sub îndrumarea dânsei şi să fac parte din "Grant of the Romanian National Authority for Scientific Research, CNCS - UEFISCDI, project number PN-II-ID-PCE-2011-3-0899 (2011-2014) Geometric and analytic aspects of biholomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$ and complex Banach spaces", Director Prof. dr. Gabriela Kohr.

Sunt de asemenea recunoscătoare Prof. dr. Oliver Roth (Universitatea Julius-Maximilians Würzburg) pentru sfaturi, ospitalitate şi pentru oportunitatea de a studia la Institutul de Matematică, Universitatea Julius-Maximilians Würzburg. O parte din rezultatele din Capitolele 3 şi 4 ale acestei tezei au fost obţinute pe parcursul acestei vizite. Doresc să le mulţumesc membrilor acestui departament pentru ospitalitate şi suport.

Doresc să îi mulţumesc Prof. dr. Hidetaka Hamada (Universitatea Kyushu Sangyo) pentru sugestiile utile care au îmbunătăţit ultimul capitol al acestei teze.

Mulţumesc membrilor grupului de cercetare de Teoria Funcţiilor de la Universitatea Babeş-Bolyai pentru discuţiile şi sugestiile utile din cadrul seminarului de cercetare.

Sunt recunoscătoare pentru sprijinul financiar oferit prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, cofinanţat prin Fondul Social European, în cadrul proiectului POSDRU/107/1.5/S/76841, cu titlul "Studii doctorale moderne: internaţionalizare şi interdisciplinaritate".

Nu în ultimul rând, vreau să mulţumesc familiei mele pentru înţelegerea şi suportul acordat.

Capitolul 1

Funcţii univalente în planul complex

În acest capitol prezentăm rezultate generale privind funcţiile univalente de o variabilă complexă. Aceste rezultate vor fi utile în următoarele capitole ale tezei. Ne vom referi la noţiunea de subordonare şi vom aminti rezultate principale privind familia Carathéodory a funcţiilor olomorfe cu partea reală pozitivă pe discul unitate. Vom prezenta diferite proprietăţi clasice ale funcţiilor univalente de o variabilă complexă. De asemenea, vom reaminti noţiunea de aplicaţie conformă, şi vom prezenta teorema lui Riemann, care arată echivalenţa conformă a domeniilor simplu conexe din $\mathbb{C}$. Această teoremă reprezintă unul din cele mai importante rezultate din teoria funcţiilor univalente de o variabilă complexă, care nu are loc în $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$.

Vom considera clasa S a funcţiilor univalente pe discul unitate U, normate prin condiţiile $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$, oricare ar fi $f \in S$, şi vom prezenta rezultate principale privind această clasă. Vom considera de asemenea subclase speciale de funcţii univalente pe U, cum ar fi funcţiile stelate, convexe, spiralate, şi aproape convexe. Aceste subclase de funcţii univalente au caracterizări geometrice şi analitice. Ne vom referi de asemenea la diferite raze de univalenţă asociate clasei S şi diferitelor subclase ale acesteia.

Vom prezenta rezultate generale din teoria lanţurilor Loewner în planul complex. Această teorie reprezintă una din cele mai importante direcţii în studiul funcţiilor univalente. Vom reaminti rezultate clasice privind lanţurile Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner. Diferite aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner vor fi de asemenea considerate.

Sursele bibliografice principale folosite în pregătirea acestui capitol sunt [20], [26], [37], [44], [57], [66], [68], [81], [93].

1.1 Rezultate generale privind funcţiile olomorfe

Începem această secţiune prin a aminti notaţii şi rezultate preliminare ce vor fi folosite pe parcursul acestei teze. Pentru mai multe detalii, a se vedea [57], [66], [68], [99], [105], sursele bibliografice principale folosite în pregătirea acestei secţiuni.

Fie $\mathbb{C}$ planul complex, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, şi fie $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ planul complex extins. Fie

$$U(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

discul de centru $z_0 \in \mathbb{C}$ şi rază r. De asemenea, fie

$$\overline{U}(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

discul închis de centru z_0 şi rază r, şi fie

$$\partial U(z_0; r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

cercul de centru z_0 şi rază r. Discul $U(0, r)$ se notează cu U_r, iar discul unitate U_1 se notează cu U.

Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă. Notăm cu $H(\Omega)$ mulţimea funcţiilor olomorfe definite pe Ω cu valori în $\mathbb{C}$. Funcţiile olomorfe pe întreg planul complex se numesc *întregi*.

În continuare prezentăm proprietăţi elementare ale funcţiilor olomorfe care vor fi utile în următoarele secţiuni (a se vedea de exemplu [57], [66], [68]). Următorul rezultat poartă numele de *teorema aplicaţiei deschise* pentru funcţii olomorfe (a se vedea de exemplu [57], [66]).

Teorema 1.1.1 *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă neconstantă. Atunci $f(\Omega)$ este un domeniu în $\mathbb{C}$.*

Un alt rezultat important în teoria funcţiilor olomorfe este dat de *teorema maximului modulului* (a se vedea de exemplu [57], [66], [68]).

Teorema 1.1.2 *Fie Ω un domeniu în $\mathbb{C}$ şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Dacă există $z_0 \in \Omega$ astfel încât*

$$|f(z_0)| = \max\{|f(z)| : z \in \Omega\},$$

atunci f este constantă pe Ω.

O aplicaţie importantă a teoremei maximului modulului este dată de lema lui Schwarz (a se vedea de exemplu [57], [66], [68]).

Corolarul 1.1.3 (lema lui Schwarz) *Dacă f este o funcţie olomorfă pe U astfel încât $f(0) = 0$ şi $|f(z)| < 1$, $z \in U$, atunci $|f(z)| \leq |z|$, $z \in U$, şi $|f'(0)| \leq 1$. Dacă există $z_0 \in U \setminus \{0\}$ astfel încât $|f(z_0)| = |z_0|$, sau dacă $|f'(0)| = 1$, atunci există $c \in \mathbb{C}$ astfel încât $|c| = 1$ şi $f(z) = cz$, $z \in U$.*

În continuare reamintim noţiunile de familie local uniform mărginită şi familie normală, şi prezentăm legătura dintre aceste două noţiuni în cazul familiilor de funcţii olomorfe (a se vedea de exemplu [57], [66]).

Definiţia 1.1.4 Fie Ω o mulţime deschisă din $\mathbb{C}$. De asemenea, fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$. Spunem că $\mathcal{F}$ este *local uniform mărginită* dacă pentru orice $K \subset \Omega$ există o constantă $M = M(K) > 0$ astfel încât $\|f\|_K \leq M$, oricare ar fi $f \in \mathcal{F}$, unde $\|f\|_K = \max\{|f(z)| : z \in K\}$.

Definiţia 1.1.5 Fie Ω o mulţime deschisă din $\mathbb{C}$. De asemenea, fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$. Spunem că $\mathcal{F}$ este *familie normală* (*relativ compactă*) dacă orice şir $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ conţine un subşir convergent uniform pe compacte în Ω.

Următorul rezultat obţinut de Montel arată că Definiţiile 1.1.4 şi 1.1.5 sunt echivalente (a se vedea de exemplu [57], [66], [68]).

Teorema 1.1.6 (teorema lui Montel) *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ o mulţime deschisă şi fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$. Atunci $\mathcal{F}$ este familie normală dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este local uniform mărginită.*

Rezultatul precendent poate fi generalizat în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea [63], [85]). Pe baza teoremei lui Montel şi a binecunoscutei caracterizări a compactităţii în spaţii metrice, următorul rezultat are loc (a se vedea de exemplu [66]). Acest rezultat are de asemenea loc în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea [63], [85], [98]).

Corolarul 1.1.7 *Fie Ω o mulţime deschisă din $\mathbb{C}$. De asemenea, fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega)$. Atunci $\mathcal{F}$ este compactă dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este local uniform mărginită şi închisă.*

1.2 Subordonare. Funcţii olomorfe cu partea reală pozitivă

În această secţiune prezentăm noţiunea de subordonare în planul complex, precum şi proprietăţi importante ale funcţiilor olomorfe cu partea reală pozitivă pe discul unitate U. Sursele bibliografice principale folosite pe parcursul acestei secţiuni sunt [81] şi [93].

Pentru început reamintim definiţia subordonării (a se vedea de exemplu [80], [81]).

Definiţia 1.2.1 Fie $f, g \in H(U)$. Spunem că f este *subordonată* lui g (şi scriem $f \prec g$) dacă există o funcţie Schwarz v (adică, $v \in H(U)$ şi $|v(z)| \leq |z|$, $z \in U$) astfel încât $f(z) = g(v(z))$, $z \in U$.

Dacă g este univalentă (olomorfă şi injectivă) pe U, atunci următoarea caracterizare a subordonării are loc (a se vedea de exemplu [81], [93]).

Teorema 1.2.2 *Fie $f, g \in H(U)$ astfel încât g este univalentă pe U. Atunci $f \prec g$ dacă şi numai dacă $f(0) = g(0)$ şi $f(U) \subseteq g(U)$.*

Observaţia 1.2.3 Următorul rezultat poartă numele de *principiul subordonării* (a se vedea de exemplu [81], [93]): dacă $f, g \in H(U)$ astfel încât $f(0) = g(0)$, g este univalentă pe U, şi $f(U) \subseteq g(U)$, atunci $f(U_r) \subseteq g(U_r)$, oricare ar fi $r \in (0, 1)$.

În continuare reamintim clasa Carathéodory a funcţiilor olomorfe cu partea reală pozitivă pe discul unitate (a se vedea [44], [81], [93]):

$$\mathcal{P} = \{p \in H(U) : p(0) = 1, \mathrm{Re}\, p(z) > 0, z \in U\}.$$

Această clasă joacă un rol important în caracterizarea unor clase speciale de funcţii univalente pe discul unitate, cum ar fi funcţiile stelate, convexe, spiralate, precum şi în studiul lanţurilor Loewner şi ecuaţiei diferenţiale Loewner.

Vom prezenta următoarea teoremă de deformare şi distorsiune pentru clasa $\mathcal{P}$ (a se vedea de exemplu [81], [93]).

Teorema 1.2.4 *Dacă $p \in \mathcal{P}$, atunci următoarele relaţii au loc*

(i) $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leq \mathrm{Re}\, p(z) \leq |p(z)| \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|},\ z \in U,$

(ii) $|p'(z)| \leq \dfrac{2\mathrm{Re}\, p(z)}{1-|z|^2} \leq \dfrac{2}{(1-|z|)^2},\ z \in U.$

Aceste inegalităţi sunt exacte, iar egalitatea are loc pentru $p(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$, $z \in U$, unde $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

Încheiem această secţiune cu următoarele delimitări exacte ale coeficienţilor clasei $\mathcal{P}$, obţinute de Carathéodory (a se vedea de exemplu [81]).

Teorema 1.2.5 *Fie $p \in \mathcal{P}$ astfel încât $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$, $z \in U$. Atunci $|p_n| \leq 2$, $n \geq 1$. Acest rezultat este exact şi egalitatea are loc pentru $p(z) = \frac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$, $z \in U$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.*

1.3 Rezultate generale privind funcţiile univalente

În această secţiune prezentăm proprietăţi clasice şi binecunoscute ale funcţiilor univalente de de o variabilă complexă. De asemenea, reamintim noţiunea de echivalenţă conformă şi prezentăm teorema lui Riemann, unul din cele mai importante rezultate din teoria funcţiilor univalente. Pentru mai multe detalii privind funcţiile univalente, a se vedea [26], [37], [44], [57], [68], [93], sursele bibliografice principale folosite pe parcursul acestei secţiuni.

Începem prin a defini funcţiile univalente (a se vedea de exemplu [57], [66], [93]).

Definiţia 1.3.1 Fie Ω un domeniu din $\mathbb{C}$ şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Funcţia f se numeşte *univalentă* pe Ω dacă f este olomorfă şi injectivă pe Ω.
Notăm prin $H_u(\Omega)$ mulţimea funcţiilor univalente pe Ω.

Următorul rezultat asigură o condiţie necesară de univalenţă (a se vedea de exemplu [57], [66]). Teorema 1.3.2 nu asigură însă o condiţie suficientă de univalenţă.

Teorema 1.3.2 *Fie Ω un domeniu din $\mathbb{C}$ şi fie $f \in H_u(\Omega)$. Atunci $f'(z) \neq 0$, $z \in \Omega$.*

Următorul rezultat, obţinut de Alexander, Noshiro, Warschawski şi Wolff (a se vedea de exemplu [44], [81]), asigură o condiţie suficientă de univalenţă pentru funcţiile olomorfe pe domenii convexe din $\mathbb{C}$.

Teorema 1.3.3 *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu convex şi fie $f \in H(\Omega)$. Dacă $\mathrm{Re}\, f'(z) > 0$, $z \in \Omega$, atunci f este univalentă pe Ω.*

Următoarea generalizare a Teoremei 1.3.3 a fost obţinută de Ozaki şi Kaplan [59]. Acest rezultat joacă un rol important în definirea aproape convexităţii, după cum vom vedea într-o secţiune ulterioară.

Teorema 1.3.4 *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domeniu. De asemenea, fie $f, g \in H(\Omega)$ astfel încât $g \in H_u(\Omega)$ şi $g(\Omega)$ este un domeniu convex din $\mathbb{C}$. Dacă*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0, \quad z \in \Omega,$$

atunci $f \in H_u(\Omega)$.

În continuare prezentăm câteva exemple importante de funcţii univalente (a se vedea de exemplu [66], [81], [93]).

Exemplul 1.3.5 Fie $f : U \to \mathbb{C}$ definită prin $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, $z \in U$. Atunci f este univalentă pe U şi transformă discul unitate U în $\mathbb{C} \setminus \{\zeta \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\zeta \leq -1/4,\ \mathrm{Im}\,\zeta = 0\}$. Funcţia f se numeşte *funcţia lui Koebe* (a se vedea de exemplu [26], [44], [93]). După cum vom vedea în următoarele secţiuni, această funcţie joacă un rol important în multe rezultate extremale din teoria funcţiilor univalente.

Mai mult, fie $f_\theta : U \to \mathbb{C}$ definită prin $f_\theta(z) = \dfrac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$, unde $\theta \in \mathbb{R}$. Observăm că f_θ este o rotaţie de unghi $-\theta$ a funcţiei f, deoarece $f_\theta(z) = e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)$, $z \in U$. Prin urmare f_θ este univalentă pe U şi transformă discul unitate U în planul complex cu o tăietură spre ∞ ce porneşte din punctul $(-1/4)e^{-i\theta}$ (a se vedea de exemplu [26], [44], [93]).

Următorul rezultat, cunoscut ca şi teorema lui Hurwitz, este util în diferite aplicaţii privind funcţiile univalente (a se vedea de exemplu [26], [57], [66], [93]).

Teorema 1.3.6 (*vezi de exemplu* **[57]**) *Fie Ω un domeniu din $\mathbb{C}$ şi fie $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii univalente pe Ω astfel încât $f_k \to f$ uniform pe compacte în Ω. Atunci f este sau constantă, sau univalentă pe Ω.*

În continuare prezentăm noţiunea de conform echivalenţă a domeniilor din $\mathbb{C}$, precum şi un rezultat fundamental privind această noţiune, teorema lui Riemann (a se vedea pentru detalii, [2], [26], [57], [66], [93], [99]).

Definiţia 1.3.7 Fie Ω_1 şi Ω_2 domenii din $\mathbb{C}$ şi fie $f : \Omega_1 \to \Omega_2$. Spunem că f este *aplicaţie conformă* dacă f este univalentă pe Ω_1 şi $f(\Omega_1) = \Omega_2$. În acest caz, domeniile Ω_1 şi Ω_2 se numesc *conform echivalente* (a se vedea de exemplu [2], [57]).

Un rezultat fundamental în teoria funcţiilor univalente este dat de *teorema lui Riemann*. Pentru mai multe detalii şi aplicaţii, a se vedea [2], [86], [99], [105].

Teorema 1.3.8 (*vezi de exemplu* **[44]**, **[57]**) *Fie Ω un domeniu simplu conex din $\mathbb{C}$ astfel încât $\Omega \neq \mathbb{C}$. Atunci Ω şi discul unitate U sunt conform echivalente. Mai mult, dacă $z_0 \in \Omega$ este un punct dat, atunci există o unică aplicaţie conformă f a lui Ω pe U astfel încât $f(z_0) = 0$ şi $f'(z_0) > 0$.*

Următoarea proprietate privind conform echivalenţa domeniilor simplu conexe din $\mathbb{C}$ este o consecinţă a Teoremei 1.3.8 (a se vedea de exemplu [57], [66]).

Corolarul 1.3.9 *Orice două domenii simplu conexe din $\mathbb{C}$ şi diferite de $\mathbb{C}$ sunt conform echivalente.*

1.4 Familii de funcţii univalente normate pe discul unitate

În această secţiune ne referim la diferite subclase de funcţii univalente pe discul unitate. Vom prezenta clasa S a funcţiilor univalente normate pe U, clasa S^* a funcţiilor stelate în raport cu originea şi normate, clasa K a funcţiilor convexe normate. Ne vom referi la clasa funcţiilor aproape convexe, clasa funcţiilor stelate şi convexe de ordinul α, clasa funcţiilor spiralate de tipul γ şi clasa funcţiilor aproape stelate de ordinul α. Vom vedea că majoritatea acestor subclase ale lui S au caracterizări analitice şi geometrice.

Sursele bibliografice principale folosite pe parcursul acestei secţiuni sunt [26], [44], [81], [93].

1.4.1 Clasa S

În continuare considerăm clasa S a funcţiilor univalente normate pe discul unitate. Alegerea discului unitate este justificată de teorema lui Riemann. Aşadar, studiul funcţiilor univalente pe domenii simplu conexe din $\mathbb{C}$ poate fi redus la discul unitate.

Definiţia 1.4.1 (**[26], [93]**) Fie S clasa funcţiilor univalente f pe discul unitate U, normate prin condiţiile $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$. Aşadar,

$$S = \{f \in H_u(U) : f(0) = f'(0) - 1 = 0\}.$$

Orice funcţie $f \in S$ are dezvoltarea în serie de puteri

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k,\ z \in U.$$

În continuare reamintim proprietăţi clasice ale funcţiilor din clasa S.

Teorema 1.4.2 prezintă estimarea exactă a coeficientului al doilea al funcţiilor din clasa S. Acest rezultat a fost obţinut de L. Bieberbach [6].

Teorema 1.4.2 *Dacă $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in S$, atunci $|a_2| \leq 2$. Egalitatea $|a_2| = 2$ are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei lui Koebe.*

Pornind de la inegalitatea $|a_2| \leq 2$ pentru funcţiile din clasa S, Bieberbach [6] a formulat în 1916 următoarea conjectură, care a fost demonstrată de L. de Branges în 1985 [7]:

Conjectura 1.4.1 (conjectura lui Bieberbach) *Dacă $f \in S$ are dezvoltarea în serie de puteri $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$, atunci $|a_k| \leq k$, $k \geq 2$. Egalitatea $|a_k| = k$, $k \geq 2$, are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei lui Koebe.*

O aplicaţie a Teoremei 1.4.2 este dată de *teorema de acoperire a lui Koebe-Bieberbach* pentru clasa S (a se vedea de exemplu [26], [93]).

Teorema 1.4.3 *Fie $f \in S$. Atunci $f(U) \supseteq U_{1/4}$.*

În continuare prezentăm teorema de deformare şi distorsiune pentru clasa S (a se vedea de exemplu [26], [37, I p. 65], [93]). Acest rezultat reprezintă o altă aplicaţie a Teoremei 1.4.2.

Teorema 1.4.4 (**[6]**) *Dacă $f \in S$, atunci următoarele inegalităţi exacte au loc:*

(*i*) $\dfrac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|z|}{(1-|z|)^2},\ z \in U,$

(*ii*) $\dfrac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \dfrac{1+|z|}{(1-|z|)^3},\ z \in U,$

(*iii*) $\dfrac{1-|z|}{1+|z|} \leq \left|\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \dfrac{1+|z|}{1-|z|},\ z \in U.$

Egalitatea în fiecare din relaţiile de mai sus are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei lui Koebe.

Folosind Teorema 1.4.4 şi Corolarul 1.3.6, precum şi caracterizarea submulţimilor compacte ale lui $H(U)$, obţinem faptul că S este compactă (a se vedea de exemplu [81]).

Corolarul 1.4.5 *S este o submulţime compactă a lui $H(U)$.*

Observăm că relaţia (i) a Teoremei 1.4.4 asigură o condiţie necesară, dar nu şi suficientă de univalenţă. Condiţii necesare şi suficiente de univalenţă pot fi găsite în [28], [62] , [70] (a se vedea de asemenea [44] şi citările aferente).

1.4.2 Clasa $S(M)$

1.4.3 Funcţii stelate

În continuare considerăm clasa S^* a funcţiilor stelate normate pe discul unitate. Vom prezenta de asemenea clasa funcţiilor stelate de ordinul α. Diverse proprietăţi privind funcţiile stelate pot fi găsite în [26], [37], [44], [81], [93].

Definiţia 1.4.6 (**[81]**) Fie $f \in H(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Funcţia f se numeşte *stelată* dacă f este univalentă pe U şi $f(U)$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

În continuare prezentăm caracterizarea analitică a stelarităţii (a se vedea de exemplu [26], [44], [81], [93]).

Teorema 1.4.7 (**[26]**, **[93]**) *Fie $f \in H(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Atunci f este stelată dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0,\ z \in U.$$

Fie S^* clasa funcţiilor stelate normate pe U.

Observaţia 1.4.8 Teorema de deformare şi distorsiune pentru clasa S (Teorema 1.4.4) are de asemenea loc pentru clasa S^* (a se vedea de exemplu [78], [81]). Mai mult, conjectura lui Bieberbach are de asemenea loc pentru clasa S^* (a se vedea de exemplu [78], [81]).

Funcţii stelate de ordinul α

În continuare prezentăm clasa S^*_α a funcţiilor stelate de ordinul α. Pentru mai multe detalii şi aplicaţii, a se vedea [37], [100].

Definiţia 1.4.9 (**[100]**) Fie $\alpha \in [0, 1)$. Clasa *funcţiilor stelate de ordinul α* este definită prin

$$S^*_\alpha = \left\{f \in H(U) :\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1, \mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha,\ z \in U\right\}.$$

Observăm că $S^*_\alpha \subseteq S^*$, $\alpha \in [0,1)$, şi $S^*_0 = S^*$.

Are loc următoarea legătură între clasele S^*_α şi S^* (a se vedea de exemplu [81]).

Teorema 1.4.10 *Fie $\alpha \in [0,1)$. Funcţia $f \in S^*_\alpha$ dacă şi numai dacă $g \in S^*$, unde $g(z) = z\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $\left.\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}\right|_{z=0} = 1$.*

Din Teorema 1.4.10 obţinem teorema de deformare pentru clasa S^*_α, $\alpha \in [0,1)$ (a se vedea de exemplu [37, I p. 140], [44], [81]).

Teorema 1.4.11 *Dacă $f \in S^*_\alpha$, $\alpha \in [0,1)$, atunci*

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^{2(1-\alpha)}} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^{2(1-\alpha)}},\ z \in U.$$

Aceste inegalităţi sunt exacte.

1.4.4 Funcţii convexe şi aproape convexe

În această secţiune considerăm clasa K a funcţiilor convexe normate pe discul unitate. În a doua parte a acestei secţiuni, vom prezenta de asemenea clasa funcţiilor convexe de ordinul α, respectiv clasa funcţiilor aproape convexe.

Alte detalii privind funcţiile convexe şi aproape convexe pe discul unitate pot fi găsite în [26], [37], [44], [81], [93].

Funcţii convexe

Definiţia 1.4.12 (**[81]**) Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Funcţia f se numeşte *convexă* dacă f este univalentă pe U şi $f(U)$ este un domeniu convex.

În continuare prezentăm caracterizarea analitică a convexităţii pe discul unitate (a se vedea de exemplu [26], [81], [93]).

Teorema 1.4.13 (**[26]**, **[93]**) *Dacă $f \in H(U)$, atunci f este convexă dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > 0,\ z \in U. \tag{1.4.1}$$

Notăm cu K clasa funcţiilor convexe normate pe U. Aşadar, $K \subset S^* \subset S$.

Vom prezenta teorema de deformare şi distorsiune pentru clasa K (a se vedea de exemplu [78], [81]).

Teorema 1.4.14 *Dacă $f \in K$, atunci următoarele relaţii au loc* (*i*) $\dfrac{|z|}{1+|z|} \le |f(z)| \le \dfrac{|z|}{1-|z|}$, $z \in U$,

(*ii*) $\dfrac{1}{(1+|z|)^2} \le |f'(z)| \le \dfrac{1}{(1-|z|)^2}$, $z \in U$.

Aceste inegalităţi sunt exacte şi egalitatea are loc într-un punct diferit de 0 pentru $f(z) = \dfrac{z}{1-\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| = 1$.

Pe baza Teoremelor 1.4.7 şi 1.4.13, obţinem teorema de dualitate a lui Alexander, care arată legătura dintre clasele S^* şi K (a se vedea de exemplu [81]). Observăm că acest rezultat nu poate fi generalizat în cazul aplicaţiilor convexe normate pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [110]; a se vedea de asemenea, de exemplu [44] şi [101]).

Teorema 1.4.15 *Fie* $f \in H(U)$ *astfel încât* $f(0) = 0$. *Atunci funcţia* f *este convexă pe* U *dacă şi numai dacă funcţia* $F(z) = zf'(z)$ *este stelată pe* U.

În continuare considerăm estimări exacte privind coeficienţii clasei K.

Teorema 1.4.16 (**[78]**) *Fie* $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, *astfel încât* f *aparţine clasei* K. *Atunci* $|a_n| \le 1$, $n \ge 2$. *Aceste estimări sunt exacte şi egalitatea* $|a_n| = 1$, $n \ge 2$, *are loc dacă şi numai dacă* $f(z) = \dfrac{z}{1-\lambda z}$, $\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| = 1$.

Următorul rezultat arată legătura dintre clasele K şi $S^*_{1/2}$. Acest rezultat a fost obţinut de A. Marx şi E. Strohhäcker (a se vedea de exemplu [44], [81]).

Teorema 1.4.17 *Dacă* $f \in K$, *atunci* $f \in S^*_{1/2}$. *Acest rezultat este exact.*

O generalizare a rezultatului precedent la mai multe dimensiuni a fost obţinută în [22] şi [64].

Funcţii convexe de ordinul α

În continuare prezentăm noţiunea de convexitate de ordinul α [100].

Definiţia 1.4.18 (**[100]**) Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă. Spunem că f este *convexă de ordinul* $\alpha \in [0, 1)$ dacă $f'(0) \neq 0$ şi

$$\text{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] > \alpha, \ z \in U.$$

Notăm cu $K(\alpha)$ clasa funcţiilor convexe de ordinul α şi normate pe U. Evident, $K(\alpha) \subseteq K$, pentru $\alpha \in [0, 1)$, şi $K(0) = K$.

Următoarea generalizare a Teoremei 1.4.17 a fost obţinută de Jack (a se vedea de exemplu [44]). Acest rezultat nu este exact. Pentru un rezultat exact, a se vedea de exemplu [80]. O generalizare a acestui rezultat la $\mathbb{C}^n$ a fost obţinută în [22] şi [64].

Teorema 1.4.19 *Dacă $f \in K(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$, atunci $f \in S^*_\beta$, unde*

$$\beta = \beta(\alpha) = \frac{2\alpha - 1 + \sqrt{(2\alpha-1)^2 + 8}}{4}. \tag{1.4.2}$$

Următoarea legătură dintre clasele $K(\alpha)$, $\alpha \in [0,1)$, şi S^* este utilă în aplicaţii (a se vedea de exemplu [44], [81]).

Teorema 1.4.20 *$f \in K(\alpha)$ dacă şi numai dacă $g \in S^*$, unde $g(z) = z(f'(z))^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $z \in U$. Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $(f'(z))^{\frac{1}{1-\alpha}}|_{z=0} = 1$.*

Funcţii aproape convexe

În continuare prezentăm o altă subclasă importantă de funcţii univalente pe discul unitate U, clasa funcţiilor aproape convexe. Mai multe detalii privind aproape convexitatea pot fi găsite în [26], [44], [81], [93].

Următoarea definiţie a fost considerată de Kaplan [59].

Definiţia 1.4.21 Funcţia $f \in H(U)$ se numeşte *aproape convexă* dacă există o funcţie g convexă pe U astfel încât

$$\mathrm{Re}\left[\frac{f'(z)}{g'(z)}\right] > 0,\ z \in U.$$

Observăm că orice funcţie aproape convexă este univalentă pe U, pe baza Teoremei 1.3.4.

Notăm cu C clasa funcţiilor aproape convexe normate pe U. Următoarea relaţie de incluziune are loc:

$$K \subset S^* \subset C \subset S.$$

Vom prezenta o caracterizare geometrică importantă a funcţiilor aproape convexe, obţinută de Kaplan [59] (a se vedea de asemenea [26], [93]).

Teorema 1.4.22 ([**59**]) *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie local univalentă normată. Atunci f este aproape convexă dacă şi numai dacă*

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathrm{Re}\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] d\tau > -\pi,\ z = re^{i\tau},$$

oricare ar fi $r \in (0,1)$ şi oricare ar fi $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $0 \le \tau_2 - \tau_1 \le 2\pi$.

Coeficienţii funcţiilor aproape convexe normate satisfac aceleaşi estimări ca şi cele din conjectura lui Bieberbach (a se vedea de exemplu [44], [81]).

1.4.5 Funcţii spiralate

Noţiunea de spiralitate a fost definită de L. Špaček [107] în 1932, şi reprezintă o generalizare a noţiunii de stelaritate. Pentru mai multe detalii privind funcţiile spiralate, a se vedea de exemplu [26], [44], [81], [93].

Pentru început, amintim noţiunea de spiralitate de tipul γ ([107]; a se vedea de asemenea [26], [37, I p. 148], [81]).

Definiţia 1.4.23 (**[107]**) O *γ-spirală logaritmică* (sau *γ-spirală*), $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$, este o curbă în planul complex dată de

$$w(t) = w_0 e^{-(\cos\gamma - i\sin\gamma)t},\ t \in \mathbb{R},$$

unde $w_0 \in \mathbb{C}^*$.

Un domeniu $\Omega \subset \mathbb{C}$ care conţine originea se numeşte *spiralat de tipul* γ, $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$, dacă oricare ar fi $w_0 \in \Omega \setminus \{0\}$, arcul de γ-spirală ce uneşte punctul w_0 cu originea este inclus în Ω.

Definiţia 1.4.24 (**[107]**)

(i) Fie $f \in H(U)$ astfel încât $f(0) = 0$ şi fie $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$. Funcţia f se numeşte *spiralată de tipul* γ pe discul unitate U dacă f este univalentă pe U şi $f(U)$ este un domeniu spiralat de tipul γ.

(ii) Fie $f \in H(U)$ astfel încât $f(0) = 0$. Funcţia f se numeşte *spiralată* dacă există $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ astfel încât f este spiralată de tipul γ.

Se observă că funcţiile spiralate de tipul 0 sunt stelate. Notăm cu $\hat{S}_\gamma$ clasa funcţiilor spiralate de tipul γ şi normate pe discul unitate, $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$. Prin urmare, $\hat{S}_\gamma \subset S$.

În continuare prezentăm caracterizarea analitică a funcţiilor spiralate ([107]; a se vedea de asemenea [44], [81], [93]).

Teorema 1.4.25 (**[107]**) *Fie $f \in H(U)$ astfel încât $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, şi fie $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$. Atunci f este spiralată de tipul γ dacă şi numai dacă*

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\gamma}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0,\ z \in U.$$

Următoarea teoremă de dualitate între clasele S^* şi $\hat{S}_\gamma$ furnizează exemple de funcţii spiralate pe discul unitate (a se vedea de exemplu [44], [81]).

Teorema 1.4.26 *Fie $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi fie $\delta = e^{-i\gamma}\cos\gamma$. Atunci $f \in \hat{S}_\gamma$ dacă şi numai dacă există $g \in S^*$ astfel încât $f(z) = z\left[\frac{g(z)}{z}\right]^\delta$, $z \in U$. Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $\left.\left[\frac{g(z)}{z}\right]^\delta\right|_{z=0} = 1$.*

1.4.6 Raze de univalenţă asociate subclaselor lui S

În continuare considerăm raze de univalenţă asociate clasei S şi unor subclase ale acesteia. Pentru început, amintim conceptul de rază pentru o anumită proprietate într-o anumită mulţime (a se vedea de exemplu [37, II p. 84]; a se vedea de asemenea, de exemplu [44], [81]).

Definiţia 1.4.27 Fiind date $\mathcal{F}$ o mulţime nevidă a lui S şi proprietatea $\mathcal{P}$ pe care funcţiile din $\mathcal{F}$ o satisfac sau nu în discul U_r, raza proprietăţii $\mathcal{P}$ în mulţimea $\mathcal{F}$ se notează cu $R_{\mathcal{P}}(\mathcal{F})$ şi este cel mai mare R astfel încât orice funcţie din $\mathcal{F}$ are proprietatea $\mathcal{P}$ pe fiecare disc U_r, oricare ar fi $r < R$.

Notăm cu $R_{S^*}(\mathcal{F})$ raza de stelaritate a lui $\mathcal{F}$, $R_K(\mathcal{F})$ raza de convexitate, $R_{S^*_\alpha}(\mathcal{F})$ raza de stelaritate de ordinul α şi $R_{\hat{S}_\gamma}(\mathcal{F})$ raza de spiralitate de tipul γ a lui $\mathcal{F}$.

Raza de convexitate a clasei S a fost obţinută de Nevanlinna (a se vedea de exemplu [37]).

Teorema 1.4.28 $R_K(S) = 2 - \sqrt{3}$.

Mai mult, $R_K(S^*) = 2 - \sqrt{3}$ (a se vedea de exemplu [37, II p. 86]).

Raza de stelaritate a clasei S a fost obţinută de Grunsky (a se vedea de exemplu [37]).

Teorema 1.4.29 $R_{S^*}(S) = \tanh \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{e^{\pi/2} - 1}{e^{\pi/2} + 1} \approx 0.66.$

1.5 Teoria lanţurilor Loewner în planul complex

În această secţiune considerăm rezultate clasice din teoria lanţurilor Loewner şi ecuaţiei diferenţiale Loewner pe discul unitate în $\mathbb{C}$. Vom prezenta de asemenea diferite aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner la studiul funcţiilor univalente, cum ar fi criterii de univalenţă şi caracterizarea analitică a unor subclase importante ale lui S folosind lanţuri Loewner. Generalizarea acestor rezultate în cazul mai multor variabile complexe va fi discutată în următorul capitol. Rezultatele prezentate în această secţiune vor fi utile în demonstrarea rezultatelor principale ale acestei teze.

Sursele bibliografice principale folosite în această secţiune sunt [20], [26], [44], [81], [93], [103].

1.5.1 Rezultate generale privind lanţurile Loewner

Începem această secţiune prin a defini lanţurile univalente de subordonare (a se vedea [93]; a se vedea de asemenea [44], [81]).

Definiţia 1.5.1 (**[93]**) Funcţia $f : U \times [0, \infty) \to \mathbb{C}$ se numeşte *lanţ Loewner* (lanţ univalent normat de subordonare) dacă $f(\cdot, t)$ este univalentă pe U, $f(0, t) = 0$, $f'(0, t) = e^t$, pentru $t \geq 0$, şi $f(\cdot, s) \prec f(\cdot, t)$, pentru $0 \leq s \leq t < \infty$.

Aici $f'(0, t) = \frac{\partial f}{\partial z}(0, t)$.

Condiţia de subordonare de mai sus este echivalentă cu faptul că există o unică funcţie Schwarz univalentă $v = v(z, s, t)$, numită *funcţia de tranziţie* asociată lui $f(z, t)$, astfel încât

$$f(z, s) = f(v(z, s, t), t), \quad z \in U, \quad t \geq s \geq 0.$$

Observăm că dacă $f(z,t)$ este lanţ Loewner, atunci $f(\cdot,0) \in S$. Următoarea teoremă arată că orice funcţie din clasa S se scufundă într-un lanţ Loewner. Acest rezultat a fost obţinut de Pommerenke [93].

Teorema 1.5.2 *Oricare ar fi $f \in S$, există un lanţ Loewner $f(z,t)$ astfel încât $f(z) = f(z,0)$, $z \in U$.*

De acum înainte, dacă f este o funcţie olomorfă în raport cu $z \in U$, şi e de asemenea o funcţie de altă variabilă reală, notăm cu $f'(z,\cdot)$ derivata lui f în raport cu z. Aşadar $f'(z,\cdot) = \frac{\partial f}{\partial z}(z,\cdot)$.

În continuare reamintim rezultate principale privind ecuaţia diferenţială Loewner pe discul unitate. Următoarea teoremă obţinută de Pommerenke [93] arată că soluţia problemei cu valori iniţiale (1.5.1) generează un lanţ Loewner (a se vedea de asemenea, de exemplu [44], [81], [103]).

Teorema 1.5.3 (**[93]**) *Fie $p = p(z,t) : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ o funcţie care verifică următoarele condiţii:*

(i) $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$, oricare ar fi $t \geq 0$;

(ii) $p(z,\cdot)$ este o funcţie măsurabilă pe $[0,\infty)$, oricare ar fi $z \in U$.

Atunci oricare ar fi $z \in U$ şi $s \geq 0$, problema cu valori iniţiale

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -vp(v,t), \text{ a.e. } t \geq s, \; v(z,s,s) = z, \tag{1.5.1}$$

are o unică soluţie $v(t) = v(z,s,t) = e^{s-t}z + \ldots$. Mai mult, pentru $s \geq 0$ şi $z \in U$ fixaţi, $v(z,s,\cdot)$ este Lipschitz continuă pe $[s,\infty)$ local uniform în raport cu z. De asemenea, $v(\cdot,s,t)$ este funcţie Schwarz univalentă pentru $t \in [s,\infty)$. În plus, oricare ar fi $s \geq 0$, limita

$$f(z,s) = \lim_{t\to\infty} e^t v(z,s,t) \tag{1.5.2}$$

există uniform pe orice compact din U, şi $f(z,s)$ este un lanţ Loewner, care verifică ecuaţia diferenţială

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zp(z,t)f'(z,t), \quad \text{a.e.} \quad t \geq 0,$$

oricare ar fi $z \in U$.

Următoarea teoremă a fost obţinută de Pommerenke (a se vedea [93]). Teorema 1.5.4 asigură o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o funcţie $f(z,t)$ să fie lanţ Loewner. Acest rezultat este foarte util în aplicaţii şi arată că lanţurile Loewner sunt strâns legate de ecuaţia diferenţială Loewner. Pentru mai multe detalii, a se vedea [44], [93] (a se vedea de asemenea [103]).

Teorema 1.5.4 (**[93]**) *Funcţia $f : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ astfel încât $f(0,t) = 0, \; f'(0,t) = e^t, \; t \geq 0$, este lanţ Loewner dacă şi numai dacă următoarele relaţii au loc:*

(i) Există $r \in (0,1)$ şi o constantă $M > 0$ astfel încât $f(\cdot,t)$ este olomorfă pe U_r, oricare ar fi $t \geq 0$, $f(z,\cdot)$ este local absolut continuă pe $[0,\infty)$ local uniform în raport cu $z \in U_r$, şi

$$|f(z,t)| \leq Me^t, \; z \in U_r, \; t \geq 0.$$

(ii) *Există o funcţie $p(z,t)$ astfel încât $p(\cdot,t) \in \mathcal{P}$, oricare ar fi $t \geq 0$, $p(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$, oricare ar fi $z \in U$, şi aproape pentru toţi $t \geq 0$,*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = zf'(z,t)p(z,t),\ z \in U_r.$$

1.5.2 Lanţuri Loewner şi funcţii univalente pe discul unitate

În această secţiune prezentăm caracterizarea unor subclase de funcţii univalente folosind lanţuri Loewner (a se vedea de exemplu [44]). Vom prezenta de asemenea anumite criterii de univalenţă pe discul unitate, care au fost obţinute prin metoda lanţurilor Loewner.

Lanţuri Loewner şi subclase de funcţii univalente

Următoarea teoremă prezintă caracterizarea stelarităţii folosind lanţuri Loewner (a se vedea [93]).

Teorema 1.5.5 *Fie f o funcţie olomorfă normată pe U. Atunci f este stelată dacă şi numai dacă*

$$f(z,t) = e^t f(z),\ z \in U,\ t \geq 0$$

este lanţ Loewner.

O generalizare a Teoremei 1.5.5 este prezentată în următorul rezultat, care reprezintă caracterizarea spiralităţii de tipul γ folosind lanţuri Loewner (a se vedea [93]).

Teorema 1.5.6 *Fie f o funcţie olomorfă normată pe U şi fie $\gamma \in (-\pi/2, \pi/2)$. De asemenea, fie $a = \tan\gamma$. Atunci f este spiralată de tipul γ dacă şi numai dacă*

$$f(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat}z),\ z \in U,\ t \geq 0$$

este lanţ Loewner.

Următoarea teoremă prezintă caracterizarea convexităţii folosind lanţuri Loewner.

Teorema 1.5.7 ([44], [93]) *Fie f o funcţie olomorfă normată pe U. Atunci $f \in K$ dacă şi numai dacă*

$$f(z,t) = f(z) + (e^t - 1)zf'(z),\ z \in U,\ t \geq 0$$

este lanţ Loewner.

Lanţuri Loewner şi criterii de univalenţă pe discul unitate

Încheiem această secţiune cu câteva aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner la criterii de univalenţă pe discul unitate. Generalizarea acestor rezultate la mai multe variabile complexe va fi discutată în capitolul următor. Următorul rezultat a fost obţinut de Becker [5].

Teorema 1.5.8 *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă normată. Dacă*

$$(1 - |z|^2)\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \leq 1,\ z \in U, \tag{1.5.3}$$

atunci f este univalentă pe U.

Următorul criteriu de univalenţă a fost obţinut de Ahlfors şi Becker (a se vedea [5]; a se vedea de asemenea, de exemplu [44]).

Teorema 1.5.9 *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă normată. De asemenea, fie $c \in \mathbb{C}$ astfel încât $|c| \leq 1$, $c \neq -1$. Dacă*

$$\left|(1 - |z|^2)\frac{zf''(z)}{f'(z)} + c|z|^2\right| \leq 1,\ z \in U,$$

atunci f este univalentă pe U.

Observaţia 1.5.10 Dacă alegem $c = 0$ în Teorema 1.5.9, obţinem condiţia suficientă de univalenţă datorată lui Becker [5], dată în Teorema 1.5.8.

Capitolul 2

Aplicaţii biolomorfe de mai multe variabile complexe

În acest capitol prezentăm proprietăţi clasice ale funcţiilor olomorfe şi aplicaţiilor olomorfe în $\mathbb{C}^n$. Vom aminti un rezultat binecunoscut în teoria aplicaţiilor olomorfe de mai multe variabile complexe, care arată că bila unitate Euclidiană şi polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$ nu sunt biolomorfic echivalente pentru $n \geq 2$. Aşadar teorema lui Riemann nu are loc în cazul mai multor variabile complexe. Vom aminti rezultate clasice privind aplicaţiile olomorfe în $\mathbb{C}^n$, ce vor fi utile în următoarele secţiuni ale tezei. Vom prezenta rezultate elementare privind noţiunea de subordonare, precum şi generalizarea la mai multe dimensiuni a clasei Carathéodory a funcţiilor cu partea reală pozitivă pe discul unitate. Vom considera teoreme de deformare şi distorsiune, precum şi estimări ale coeficienţilor pentru această clasă, rezultate obţinute de Graham, Hamada şi Kohr [38], Pfaltzgraff [88], şi Poreda [94]. Unul din cele mai importante rezultate în această direcţie este compactitatea familiei Carathéodory $\mathcal{M}$. Acest rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada şi Kohr [38] în 2002, şi a influenţat numeroase rezultate din teoria lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe (a se vedea [44]).

Vom studia de asemenea diferite subclase de aplicaţii biolomorfe pe bila unitate Euclidiană şi polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$, cum ar fi aplicaţiile stelate, convexe, spiralate, aproape stelate, şi vom prezenta proprietăţi analitice şi geometrice ale acestora.

Vom aminti noţiunea de lanţ Loewner şi aplicaţie de tranziţie asociată acestuia în cazul mai multor variabile complexe. Pe de altă parte, vom prezenta generalizarea ecuaţiei diferenţiale Loewner la mai multe variabile complexe, şi legătura acesteia cu lanţurile Loewner. De fapt, ca şi în cazul unei variabile complexe, toate lanţurile Loewner sunt determinate de ecuaţia diferenţială Loewner. Există însă numeroase diferenţe între teoria lanţurilor Loewner de una, respectiv mai multe variabile complexe (a se vedea [44, Capitolul 8]). Vom prezenta aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner în caracterizarea anumitor subclase de aplicaţii biolomorfe. Vom aminti de asemenea criterii de univalenţă pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$, obţinute folosind teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$. Vom considera clasa aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$. Această clasă este analoaga clasei S la mai multe variabile complexe. Numeroase detalii şi aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe pot fi găsite în principalele lucrări ale lui Pfaltzgraff ([88] şi [89]) şi Poreda [96], precum şi în monografiile lui Graham şi Kohr [44], şi Curt [23].

2.1 Rezultate preliminare

Această secţiune prezintă proprietăţi elementare ale aplicaţiilor olomorfe în cazul mai multor variabile complexe. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt clasice şi pot fi găsite în [63], [69], [98], sursele bibliografice principale folosite în pregătirea acestei secţiuni. Aceste rezultate vor fi utile în următoarele capitole ale tezei.

2.1.1 Funcţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$

Începem această secţiune prin a aminti rezultate binecunoscute privind funcţiile olomorfe de mai multe variabile complexe.

Fie $\mathbb{C}^n$ spaţiul de n variabile complexe $z = (z_1, \dots, z_n)$ cu produsul scalar Euclidian $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \overline{w}_j$ şi norma Euclideană $\|z\| = \langle z, z \rangle^{1/2}$. Fie $a \in \mathbb{C}^n$ şi fie $r > 0$. Fie

$$B^n(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - a\| < r\}$$

bila deschisă de centru a şi rază r. Închiderea lui $B^n(a, r)$ se notează cu $\overline{B}^n(a, r)$, iar frontiera se notează cu $\partial B^n(a, r)$. Vom nota B_r^n în loc de $B^n(0, r)$. Bila unitate deschisă B_1^n se notează cu B^n şi se numeşte bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$.

Polidiscul deschis $P^n(a, R)$ de centru $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ şi multirază $R = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ este definit prin

$$P^n(a, R) = U(a_1, r_1) \times \cdots \times U(a_n, r_n).$$

Dacă $r_1 = \ldots = r_n = r$, notăm acest polidisc prin $P^n(a, r)$. Polidiscul unitate $P^n(0, 1)$ se notează cu P^n. Evident, P^n este bila unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu norma supremum, $\|z\|_\infty = \max_{1 \le j \le n} |z_j|$, aşadar

$$P^n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\|_\infty < 1\}.$$

Amintim că $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ este un *domeniu Reinhardt* dacă, oricare ar fi $(z_1, \dots, z_n) \in \Omega$ şi $\theta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, avem $(e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n) \in \Omega$ (a se vedea de exemplu [44]).

Fie Ω o submulţime deschisă a lui $\mathbb{C}^n$. În continuare prezentăm definiţia funcţiilor olomorfe pe Ω (a se vedea de exemplu [44], [69], [85]).

Definiţia 2.1.1 Fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie. Spunem că f este *olomorfă* dacă f este continuă pe Ω şi olomorfă în fiecare variabilă separat, adică, oricare ar fi $w = (w_1, \dots, w_n) \in \Omega$ şi $j = 1, \dots, n$, funcţia de o variabilă complexă

$$f(w_1, \dots, w_{j-1}, \cdot, w_{j+1}, \dots, w_n)$$

este olomorfă pe mulţimea deschisă

$$\{\zeta \in \mathbb{C} : (w_1, \dots, w_{j-1}, \zeta, w_{j+1}, \dots, w_n) \in \Omega\}.$$

Hartogs a arătat că condiţia de continuitate din Definiţia 2.1.1 poate fi omisă, aşadar orice funcţie olomorfă în fiecare variabilă seprarat (funcţie parţial olomorfă) este olomorfă (a se vedea de exemplu [10], [69]). Notăm cu $H(\Omega, \mathbb{C})$ mulţimea funcţiilor olomorfe de la o mulţime deschisă $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}$. Funcţiile olomorfe pe întreg spaţiul $\mathbb{C}^n$ se numesc *întregi*.

În continuare prezentăm proprietăţi clasice ale funcţiilor olomorfe ce vor fi utile în următoarele secţiuni.

Următorul rezultat poartă numele de *teorema aplicaţiei deschise*, şi arată că orice funcţie olomorfă neconstantă este deschisă (a se vedea de exemplu [63], [85]).

Teorema 2.1.2 *Fie $f : \Omega \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă neconstantă, unde Ω este un domeniu (mulţime deschisă şi conexă) în $\mathbb{C}^n$. Atunci $f(\Omega)$ este un domeniu în $\mathbb{C}$.*

Observăm că rezultatul precedent nu are loc în cazul aplicaţiilor olomorfe $f : \Omega \subseteq \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, unde $m > 1$ (a se vedea de exemplu [98]). O generalizare a acestui rezultat are însă loc în cazul aplicaţiilor local biolomorfe de la domenii în $\mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [63]).

Teorema 2.1.3 este analoaga teoremei lui Montel în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea de exemplu [63], [85], [98]).

Teorema 2.1.3 (teorema lui Montel) *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ o mulţime deschisă şi fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega, \mathbb{C})$. Atunci $\mathcal{F}$ este familie normală dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este local uniform mărginită.*

Ca şi în cazul unei variabile complexe, are loc următoarea caracterizare a submulţimilor compacte în $H(\Omega, \mathbb{C})$, unde $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ este o mulţime deschisă (a se vedea de exemplu [63], [85], [98]). Acest rezultat va fi util în următoarele secţiuni.

Corolarul 2.1.4 *Fie Ω o mulţime deschisă în $\mathbb{C}^n$ şi fie $\mathcal{F} \subseteq H(\Omega, \mathbb{C})$. Atunci $\mathcal{F}$ este compactă dacă şi numai dacă $\mathcal{F}$ este local uniform mărginită şi închisă.*

2.1.2 Aplicaţii olomorfe în $\mathbb{C}^n$

În continuare prezentăm cazul aplicaţiilor olomorfe de la submulţimi deschise ale lui $\mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}^m$, unde $m > 1$.

Pentru început, amintim noţiunea de aplicaţie olomorfă de la o mulţime deschisă în $\mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}^m$ (a se vedea de exemplu [44], [63], [69]).

Definiţia 2.1.5 Fie Ω o submulţime deschisă a lui $\mathbb{C}^n$ şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$ o aplicaţie, unde $m > 1$. Spunem că f este *olomorfă* dacă fiecare componentă f_k a lui f este o funcţie olomorfă de la Ω la $\mathbb{C}$, pentru $k = 1, \ldots, m$.

Notăm cu $H(\Omega)$ mulţimea aplicaţiilor olomorfe de la Ω la $\mathbb{C}^n$.

Vom prezenta rezultate clasice din teoria aplicaţiilor olomorfe din $\mathbb{C}^n$. Următorul rezultat reprezintă o generalizare a principiului maximului modulului la aplicaţii olomorfe (a se vedea de exemplu [63], [85]). Considerăm spaţiul $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară $\|\cdot\|$.

Teorema 2.1.6 *Fie Ω un domeniu în $\mathbb{C}^n$ şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}^m$ o aplicaţie olomorfă. Dacă există $z_0 \in \Omega$ astfel încât*

$$\|f(z_0)\| = \max\{\|f(z)\| : z \in \Omega\},$$

atunci $\|f(z)\|$ este constant pe Ω.

O consecinţă a Teoremei 2.1.6 este dată de următoarea generalizare a lemei lui Schwarz la aplicaţii olomorfe definite pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară (a se vedea de exemplu [63], [85]).

Corolarul 2.1.7 (lema lui Schwarz) *Dacă $f : B^n \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ este o aplicaţie olomorfă astfel încât $f(0) = 0$ şi $\|f(z)\| < 1$, $z \in B^n$, atunci $\|f(z)\| \leq \|z\|$, $z \in B^n$, şi $\|Df(0)\| \leq 1$. Mai mult, dacă există $z_0 \in B^n \setminus \{0\}$ astfel încât $\|f(z_0)\| = \|z_0\|$, atunci $\|f(\zeta z_0)\| = \|\zeta z_0\|$, oricare ar fi $\zeta \in \mathbb{C}$ astfel încât $|\zeta| < 1/\|z_0\|$.*

În continuare prezentăm noţiunile de biolomorfie şi univalenţă în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea de exemplu [44], [63], [69], [85]). De asemenea, vom prezenta exemple de aplicaţii biolomorfe pe bila unitate B^n în $\mathbb{C}^n$.

Definiţia 2.1.8 Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$.

(i) Aplicaţia f se numeşte *aplicaţie biolomorfă* dacă f este o aplicaţie olomorfă de la Ω la un domeniu $\Omega' \subseteq \mathbb{C}^n$ şi f are o inversă f^{-1} care este olomorfă pe Ω'. În acest caz, domeniile Ω şi Ω' se numesc *biolomorfic echivalente*.

(ii) Spunem că f este *aplicaţie univalentă* dacă f este olomorfă şi injectivă pe Ω.

Ca şi în cazul unei variabile complexe, noţiunile de biolomorfie şi univalenţă sunt echivalente (a se vedea de exemplu [85], [98]). Teorema 2.1.9 nu are însă loc în cazul spaţiilor Banach complexe infinit dimensionale (a se vedea [110]).

Teorema 2.1.9 (**[85], [98]**) *Fie $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ un domeniu şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie. Atunci f este univalentă pe Ω dacă şi numai dacă f este biolomorfă de la Ω la $f(\Omega)$.*

Următorul rezultat obţinut de Poincaré [92] arată că, în cazul mai multor variabile complexe, bila unitate Euclidiană şi polidiscul unitate nu sunt biolomorfic echivalente, chiar dacă sunt omeomorfe (a se vedea de exemplu [85], [98]). Aşadar, teorema lui Riemann nu are loc în cazul mai multor variabile complexe (a se vedea [98]).

Teorema 2.1.10 *Bila unitate Euclidiană B^n şi polidiscul unitate P^n nu sunt biolomorfic echivalente pentru $n \geq 2$.*

În continuare prezentăm definiţia aplicaţiilor local biolomorfe (a se vedea de exemplu [44], [63], [85]).

Definiţia 2.1.11 Fie Ω un domeniu în $\mathbb{C}^n$ şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie olomorfă. Spunem că f este *local biolomorfă* pe Ω dacă oricare ar fi $z \in \Omega$, există o vecinătate deschisă şi conexă $V \subset \Omega$ a lui z astfel încât restricţia $f|_V : V \to f(V)$ este biolomorfă.

Observaţia 2.1.12 Se ştie că, dacă $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ este un domeniu şi $f \in H(\Omega)$, atunci f este local biolomorfă pe Ω dacă şi numai dacă $J_f(z) \neq 0$, $z \in \Omega$, unde $J_f(z) = \det Df(z)$.

Fie $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ spaţiul operatorilor liniari de la $\mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}^m$ cu norma operatorială

$$\|A\| = \sup\{\|A(z)\| : \|z\| = 1\},$$

şi fie I_n identitatea lui $L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Dacă $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ este o mulţime deschisă care conţine originea, şi dacă $f \in H(\Omega)$, atunci f este *normată* dacă $f(0) = 0$ şi $Df(0) = I_n$.

Notăm cu $S(\Omega)$ mulţimea aplicaţiilor biolomorfe normate pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. În particular, notăm cu $S(B^n)$ mulţimea aplicaţiilor biolomorfe normate pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$. Se observă că, dacă $n = 1$, atunci $S(B^1) = S$ este mulţimea funcţiilor univalente normate pe discul unitate U.

Notăm de asemenea cu $\mathcal{L}S_n(\Omega)$ mulţimea aplicaţiilor local biolomorfe normate pe un domeniu $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$. În particular, notăm cu $\mathcal{L}S_n(B^n)$ mulţimea aplicaţiilor local biolomorfe normate pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$. În cazul unei variabile complexe, notăm $\mathcal{L}S_1(B^1) = \mathcal{L}S$.

2.2 Subordonare. Clasa Carathéodory în $\mathbb{C}^n$

În continuare prezentăm noţiunea de subordonare în cazul mai multor variabile complexe, precum şi generalizarea clasei Carathéodory $\mathcal{P}$ la $\mathbb{C}^n$.

Sursele bibliografice principale folosite pe parcursul acestei secţiuni sunt [44], [38] şi [88].

Pentru început, amintim definiţia subordonării (a se vedea de exemplu [44]).

Definiţia 2.2.1 Fie $f, g \in H(B^n)$. Spunem că f este *subordonată* lui g (şi notăm $f \prec g$) dacă există o aplicaţie Schwarz v (adică, $v \in H(B^n)$ şi $\|v(z)\| \leq \|z\|$, $z \in B^n$) astfel încât $f(z) = g(v(z))$, $z \in B^n$.

Ca şi în cazul $n = 1$, dacă g este biolomorfă pe B^n, următoarea caracterizare a subordonării are loc (a se vedea de exemplu [44]).

Teorema 2.2.2 *Fie $f, g \in H(B^n)$ astfel încât g este biolomorfă pe B^n. Atunci $f \prec g$ dacă şi numai dacă $f(0) = g(0)$ şi $f(B^n) \subseteq g(B^n)$.*

Următoarea clasă de aplicaţii olomorfe normate pe B^n joacă rolul clasei Carathéodory în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [49], [88], [110]; a se vedea de asemenea, de exemplu [44], [63]):

$$\mathcal{M} = \{h \in H(B^n) : h(0) = 0, Dh(0) = I_n, \operatorname{Re}\langle h(z), z\rangle > 0, z \in B^n \setminus \{0\}\}.$$

În cazul $n = 1$, $h \in \mathcal{M}$ dacă şi numai dacă $p \in \mathcal{P}$, unde $h(\zeta) = \zeta p(\zeta)$, pentru $\zeta \in U$. Clasa $\mathcal{M}$ joacă un rol important în studiul lanţurilor Loewner şi ecuaţiei diferenţiale Loewner în cazul mai multor variabile complexe, precum şi în caracterizarea anumitor clase de aplicaţii biolomorfe pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ (pentru detalii, a se vedea [44]).

Următoarea teoremă a fost obţinută de Pfaltzgraff [88] (a se vedea de asemenea [49], în cazul spaţiilor Banach complexe).

Teorema 2.2.3 *Dacă $h : B^n \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie din clasa $\mathcal{M}$, atunci*

$$\|z\|^2 \frac{1 - \|z\|}{1 + \|z\|} \le \mathrm{Re}\,\langle h(z), z\rangle \le \|z\|^2 \frac{1 + \|z\|}{1 - \|z\|},\ z \in B^n. \tag{2.2.1}$$

Aceste estimări sunt exacte.

Următorul rezultat are loc pentru aplicaţii din clasa $\mathcal{M}$. Marginea inferioară din (2.2.2) este o consecinţă directă a relaţiei (2.2.1) din Teorema 2.2.3. Marginea superioară din (2.2.2) este mai tare decât marginea superioară din (2.2.1), şi a fost obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [38].

Teorema 2.2.4 *Dacă $h : B^n \to \mathbb{C}^n$ aparţine clasei $\mathcal{M}$, atunci*

$$r\frac{1 - r}{1 + r} \le \|h(z)\| \le \frac{4r}{(1 - r)^2},\ \|z\| = r < 1. \tag{2.2.2}$$

Teorema 2.2.4 şi faptul că clasa $\mathcal{M}$ este închisă ne conduc la următoarea concluzie. Acest rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada şi Kohr [38] (a se vedea de asemenea [55]).

Corolarul 2.2.5 (**[38]**, **[55]**) *Clasa $\mathcal{M}$ este compactă în $H(B^n)$.*

2.3 Subclase de aplicaţii biolomorfe pe B^n

În această secţiune prezentăm anumite subclase de aplicaţii biolomorfe pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$. Ne vom referi la clasa aplicaţiilor stelate, convexe, aproape stelate şi spiralate normate. Vom considera de asemenea anumite subclase ale lui $S(B^n)$, cum ar fi: clasa aplicaţiilor stelate de ordinul α, clasa aplicaţiilor ε-stelate, şi clasa aplicaţiilor aproape stelate de ordinul α. Vom vedea că majoritatea acestor subclase ale lui $S(B^n)$ au caracterizări analitice şi geometrice.

Sursele bibliografice principale folosite pe parcursul acestei secţiuni sunt [44], [63], [110] (a se vedea de asemenea [32]).

Această secţiune nu conţine rezultate originale, însă Definiţia a fost introdusă de Chirilă [12].

2.3.1 Aplicaţii stelate

În continuare discutăm cazul aplicaţiilor stelate pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$. Următoarele rezultate sunt generalizări la mai multe dimensiuni ale proprietăţilor funcţiilor stelate pe discul unitate. Considerăm $\mathbb{C}^n$ în raport cu produsul scalar Euclidian $\langle \cdot, \cdot \rangle$ şi norma Euclidiană $\|z\| = \langle z, z\rangle^{1/2}$,

$z \in \mathbb{C}^n$. Cu toate acestea, următoarele rezultate rămân adevărate în raport cu o normă arbitrară în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea de exemplu [32], [44]).

Pentru început prezentăm definiţia stelarităţii pe bila unitate Euclidiană B^n (a se vedea de exemplu [44], [63]).

Definiţia 2.3.1 Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie olomorfă. Spunem că f este *stelată* dacă f este biolomorfă pe B^n, $f(0) = 0$ şi $f(B^n)$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

Următoarea caracterizare analitică a stelarităţii pe bila unitate Euclidiană B^n a fost obţinută de Matsuno [79]. Suffridge a generalizat acest rezultat în cazul polidiscului unitate în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [108]). Gurganus [49] şi Suffridge [109] au generalizat acest rezultat pe bila unitate a unui spaţiu Banach complex.

Teorema 2.3.2 ([79], [109]) *Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie local biolomorfă astfel încât $f(0) = 0$. Atunci f este stelată dacă şi numai dacă*

$$\mathrm{Re}\,\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle > 0,\ z \in B^n \setminus \{0\}. \tag{2.3.1}$$

Notăm cu $S^*(B^n)$ clasa aplicaţiilor stelate normate pe B^n. Dacă $n = 1$, această clasă revine la clasa S^* a funcţiilor stelate normate pe discul unitate U.

În continuare prezentăm teorema de deformare pentru aplicaţiile din clasa $S^*(B^n)$, rezultat obţinut de Kubicka şi Poreda [71], şi Barnard, FitzGerald şi Gong [4].

Teorema 2.3.3 ([4], [71]) *Dacă $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie stelată normată, atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \le \|f(z)\| \le \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2},\ z \in B^n.$$

Acest rezultat este exact. Mai mult, $f(B^n) \supseteq B^n_{1/4}$.

Aplicaţii stelate de ordinul α

În continuare prezentăm noţiunea de stelaritate de ordinul α pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$, introdusă de Curt [22] şi Kohr [64].

Definiţia 2.3.4 Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie local biolomorfă normată şi fie $\alpha \in [0, 1)$. Aplicaţia f se numeşte *stelată de ordinul* α dacă

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\|z\|^2}{\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle}\right] > \alpha,\ z \in B^n \setminus \{0\}.$$

Notăm cu $S^*_\alpha(B^n)$ mulţimea aplicaţiilor stelate de ordinul α pe B^n.

Vom prezenta teorema de deformare pentru aplicaţiile stelate de ordinul $\alpha \in [0, 1)$ pe B^n (a se vedea [22], [38]).

Teorema 2.3.5 *Fie $f \in S^*_\alpha(B^n)$, $\alpha \in [0,1)$. Atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^{2(1-\alpha)}} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^{2(1-\alpha)}},\ z \in B^n.$$

Aceste estimări sunt exacte.

Aplicaţii aproape stelate de ordinul α

În continuare prezentăm clasa aplicaţiilor aproape stelate de ordinul α pe bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [114]).

Definiţia 2.3.6 Fie $0 \leq \alpha < 1$. O aplicaţie local biolomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte *aproape stelată de ordinul* α dacă

$$\mathrm{Re}\,\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle > \alpha\|z\|^2,\ z \in B^n \setminus \{0\}.$$

O noţiune strâns legată de aproape stelaritatea de ordinul α este cea de aproape stelaritate de ordinul α şi tipul γ, unde $\alpha \in [0,1)$ şi $\gamma \in [0,1)$. Această noţiune a fost introdusă de Chirilă [12].

Definiţia 2.3.7 Fie $\alpha \in [0,1)$ şi $\gamma \in [0,1)$. O aplicaţie $f \in \mathcal{L}S_n(B^n)$ este aproape stelată de ordinul α şi tipul γ dacă

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\frac{1}{(1-\alpha)\|z\|^2}\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle - \frac{\alpha}{1-\alpha}}\right] > \gamma,\ z \in B^n \setminus \{0\}. \tag{2.3.2}$$

Observaţia 2.3.8 (vezi de exemplu **[11]**) Se observă că, dacă f verifică (2.3.2), atunci f este de asemenea aproape stelată de ordinul α. Prin urmare $f \in S(B^n)$ (a se vedea [114]). De fapt, f este de asemenea stelată pe B^n.

2.3.2 Aplicaţii convexe şi aproape stelate

În cele ce urmează, prezentăm cazul aplicaţiilor convexe pe bila unitate Euclidiană şi pe polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$.

În partea a doua a acestei secţiuni, vom prezenta clasa aplicaţiilor aproape stelate pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$, precum şi clasa aplicaţiilor ε-stelate.

Sursele bibliografice principale folosite pe parcursul acestei secţiuni sunt [32], [44], [63] (a se vedea de asemenea [33], [110]).

Pentru început, prezentăm definiţia aplicaţiilor convexe pe bila unitate B^n în $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară $\|\cdot\|$ (a se vedea de exemplu [44], [63]).

Definiţia 2.3.9 O aplicaţie olomorfă $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte *convexă* dacă f este biolomorfă şi $f(B^n)$ este un domeniu convex.

Notăm cu $K(B^n)$ mulţimea aplicaţiilor convexe normate pe bila unitate B^n. Dacă $n = 1$, $K(B^n)$ revine la clasa K a funcţiilor convexe normate pe discul unitate U.

Aplicaţii convexe pe polidiscul unitate P^n în $\mathbb{C}^n$

Următoarea caracterizare a convexităţii pe polidiscul unitate P^n în $\mathbb{C}^n$ a fost obţinută de Suffridge [108]. În acest rezultat, considerăm $\mathbb{C}^n$ în raport cu norma supremum $\|\cdot\|_\infty$.

Teorema 2.3.10 *Fie $f : P^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie local biolomorfă normată. Atunci f este convexă dacă şi numai dacă există $f_j \in K$, $j = 1, \ldots, n$, astfel încât*

$$f(z) = (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n)),\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in P^n.$$

În continuare prezentăm teorema de deformare pentru aplicaţii din clasa $K(P^n)$ [74] (conform [44]).

Teorema 2.3.11 ([**74**]) *Dacă $f : P^n \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie din $K(P^n)$, atunci*

$$\frac{\|z\|_\infty}{1 + \|z\|_\infty} \leq \|f(z)\|_\infty \leq \frac{\|z\|_\infty}{1 - \|z\|_\infty},\ z \in P^n.$$

Aceste estimări sunt exacte.

Aplicaţii convexe pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$

Următoarea teoremă prezintă caracterizarea analitică a convexităţii pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$. Acest rezultat a fost obţinut de Kikuchi [60], şi Gong, Wang şi Yu [36].

Teorema 2.3.12 ([**36**], [**60**]) *Dacă $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie local biolomorfă, atunci f este convexă dacă şi numai dacă*

$$1 - \operatorname{Re}\langle [Df(z)]^{-1} D^2 f(z)(u, u), z\rangle > 0, \tag{2.3.3}$$

oricare ar fi $z \in B^n$ şi $u \in \mathbb{C}^n$ astfel încât $\|u\| = 1$ şi $\operatorname{Re}\langle z, u\rangle = 0$.

În continuare prezentăm exemple de aplicaţii convexe (a se vedea de exemplu [44], [63]).

Exemplul 2.3.13 (i) Aplicaţia $f : P^n \to \mathbb{C}^n$ dată de

$$f(z) = \left(\frac{z_1}{1 - z_1}, \ldots, \frac{z_n}{1 - z_n}\right),\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in P^n,$$

este convexă pe polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$. Pe de altă parte, restricţia acestei aplicaţii la bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ nu este convexă, pentru $n \geq 2$ (a se vedea [36]; a se vedea de asemenea [32]).

(ii) Aplicaţia $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ dată de

$$f(z) = \left(\frac{z_1}{1 - z_1}, \ldots, \frac{z_n}{1 - z_1}\right),\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in B^n,$$

este convexă pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea [101] şi [102]).

Vom prezenta teorema de deformare pentru aplicaţii din $K(B^n)$, unde B^n este bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$. Acest rezultat a fost obţinut de Suffridge [111], FitzGerald şi Thomas [31], Liu [74].

Teorema 2.3.14 *Dacă $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ este o aplicaţie din $K(B^n)$, atunci*

$$\frac{\|z\|}{1+\|z\|} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{1-\|z\|},\ z \in B^n.$$

Aceste estimări sunt exacte.

În cazul unei variabile complexe, teorema lui Marx şi Strohhäcker arată că o funcţie convexă normată este stelată de ordinul $1/2$ (a se vedea Teorema 1.4.17). Acest rezultat a fost generalizat la mai multe variabile complexe de Curt [22] şi Kohr [64].

Teorema 2.3.15 *Dacă $f \in K(B^n)$, atunci $f \in S^*_{1/2}(B^n)$. Acest rezultat este exact.*

Aplicaţii aproape stelate

În continuare considerăm noţiunea de aproape stelaritate pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$. Extinderea la mai multe dimensiuni a clasei funcţiilor aproape convexe a fost considerată de Pfaltzgraff şi Suffridge [90].

Definiţia 2.3.16 (**[90]**) O aplicaţie olomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte *aproape stelată* dacă există $h \in \mathcal{M}$ şi o aplicaţie $g \in S^*(B^n)$ astfel încât

$$Df(z)h(z) = g(z),\ z \in B^n. \tag{2.3.4}$$

Se observă că orice aplicaţie $f \in S^*(B^n)$ este de asemenea aproape stelată (în raport cu ea însăşi).

Dacă $n = 1$, Definiţia 2.3.16 revine la definiţia funcţiilor aproape convexe pe discul unitate U (Definiţia 1.4.21), folosind teorema lui Alexander.

Aplicaţii ε-stelate

În continuare prezentăm noţiunea de ε-stelaritate introdusă de Gong şi Liu [34]. Această noţiune interpolează între stelaritate şi convexitate, dacă ε este cuprins între 0 şi 1. Noţiunea de ε-stelaritate va fi utilă în următorul capitol.

Definiţia 2.3.17 (**[34]**) Fie Ω un domeniu în $\mathbb{C}^n$ care conţine originea şi fie $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie biolomorfă astfel încât $f(0) = 0$. Spunem că f este *ε-stelată*, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, dacă $f(\Omega)$ este stelată în raport cu fiecare punct din $\varepsilon f(\Omega)$, adică

$$(1-\lambda)f(z) + \lambda\varepsilon f(w) \in f(\Omega),\ \lambda \in [0,1],\ z, w \in \Omega.$$

Dacă $\varepsilon = 0$, obţinem familia aplicaţiilor stelate pe Ω, iar dacă $\varepsilon = 1$ obţinem familia aplicaţiilor convexe pe Ω.

Diverse rezultate privind aplicaţiile ε-stelate pot fi găsite în [34], [35].

2.3.3 Aplicaţii spiralate

În continuare prezentăm clasa aplicaţiilor spiralate în cazul mai multor variabile complexe. Noţiunea de spiralitate în raport cu un operator liniar normal ale cărui valori proprii au partea reală pozitivă a fost introdusă de Gurganus [49]. Suffridge [110] a generalizat noţiunea de spiralitate la spaţii Banach complexe.

Definiţia 2.3.18 (**[110]**; vezi de exemplu **[44]**) Fie $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$, unde

$$m(A) = \min\{\mathrm{Re}\,\langle A(z), z\rangle : \|z\| = 1\}.$$

O aplicaţie biolomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ este *spiralată relativ la* A dacă $e^{-tA}f(B^n) \subseteq f(B^n)$ oricare ar fi $t \geq 0$, unde

$$e^{-tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} t^k A^k.$$

Următorul rezultat a fost obţinut de Suffridge [110] şi reprezintă o generalizare la mai multe dimensiuni a Teoremei 1.4.25. Cazul în care A este operator normal a fost considerat de Gurganus [49].

Teorema 2.3.19 (**[110]**, **[49]**) *Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie local biolomorfă normată şi fie $A \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ astfel încât $m(A) > 0$. Atunci f este spiralată relativ la A dacă şi numai dacă*

$$\mathrm{Re}\,\langle [Df(z)]^{-1} A f(z), z\rangle > 0, \quad z \in B^n \setminus \{0\}. \tag{2.3.5}$$

Observaţia 2.3.20 Dacă $A = e^{-i\alpha} I_n$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, obţinem clasa *aplicaţiilor spiralate de tipul* α, studiată de Hamada şi Kohr [54]. În acest caz condiţia (2.3.5) devine

$$\mathrm{Re}\,[e^{-i\alpha}\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle] > 0, \quad z \in B^n \setminus \{0\}. \tag{2.3.6}$$

Această clasă are un comportament similar clasei funcţiilor spiralate de tipul α pe discul unitate U.

O noţiune strâns legată de spiralitatea de tipul α este cea de spiralitate de tipul α şi ordinul γ, unde $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\gamma \in [0, 1)$. Această noţiune a fost studiată de Liu şi Liu [77], şi Chirilă [11] (conform [54]).

Definiţia 2.3.21 (**[77]**; conform **[11]**) Fie $f \in \mathcal{L}S_n(B^n)$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\gamma \in [0, 1)$. Spunem că f este spiralată de tipul α şi ordinul γ dacă

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{(1 - i\tan\alpha)\frac{1}{\|z\|^2}\langle [Df(z)]^{-1} f(z), z\rangle + i\tan\alpha}\right] > \gamma,\ z \in B^n \setminus \{0\}. \tag{2.3.7}$$

Observaţia 2.3.22 (vezi de exemplu **[11]**) Din (2.3.7) deducem că dacă f este spiralată de tipul α şi ordinul γ, atunci f este de asemenea spiralată de tipul α. Prin urmare $f \in S(B^n)$ (a se vedea [54]). De fapt, f admite reprezentare parametrică, după cum vom vedea în următoarea secţiune (conform [38]).

2.4 Teoria lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe

În această secţiune vom prezenta rezultate clasice din teoria lanţurilor Loewner în $\mathbb{C}^n$ şi vom considera diverse aplicaţii, cum ar fi criterii de univalenţă şi caracterizarea analitică a anumitor subclase ale lui $S(B^n)$ folosind lanţuri Loewner. De asemenea, vom prezenta clasa $S_g^0(B^n)$ a aplicaţiilor care admit g-reprezentare parametrică pe bila unitate B^n, unde g este o funcţie univalentă pe discul unitate U care verifică anumite condiţii naturale.

Sursele bibliografice principale folosite pe parcursul acestei secţiuni sunt [44], [23], [38] şi [47] (a se vedea de asemenea [88] şi [96]).

2.4.1 Rezultate generale privind lanţurile Loewner în $\mathbb{C}^n$

Vom prezenta rezultate clasice privind lanţurile Loewner şi ecuaţia diferenţială Loewner de mai multe variabile complexe.

Pentru început, prezentăm definiţia lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe (a se vedea de exemplu [23], [44], [88], [96]).

Definiţia 2.4.1 (**[88]**, **[44]**) O aplicaţie $f : B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ se numeşte *lanţ Loewner* (lanţ univalent normat de subordonare) dacă $f(\cdot,t)$ este biolomorfă pe B^n, $f(0,t) = 0$, $Df(0,t) = e^t I_n$, pentru $t \geq 0$, şi $f(\cdot,s) \prec f(\cdot,t)$, oricare ar fi $0 \leq s \leq t < \infty$.

Condiţia de subordonare precedentă este echivalentă cu faptul că există o unică aplicaţie Schwarz biolomorfă $v = v(z,s,t)$, numită *aplicaţia de tranziţie* asociată lui $f(z,t)$, astfel încât (a se vedea [88], [44])

$$f(z,s) = f(v(z,s,t),t),\ z \in B^n,\ t \geq s \geq 0.$$

În continuare prezentăm rezultate clasice privind ecuaţia diferenţială Loewner în cazul mai multor variabile complexe. Următorul rezultat a fost obţinut de Pfaltzgraff [88, Teorema 2.1]. Poreda [96] a studiat problema cu valori iniţiale (2.4.1) pe bila unitate a unui spaţiu Banach complex.

Teorema 2.4.2 (**[88]**) *Fie $h : B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie care verifică următoarele condiţii:*

(*i*) $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}$*, pentru* $t \geq 0$*;*

(*ii*) $h(z,\cdot)$ *este măsurabilă pe* $[0,\infty)$*, pentru* $z \in B^n$*.*

Atunci oricare ar fi $s \geq 0$ şi $z \in B^n$, problema cu valori iniţiale

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -h(v,t),\ \text{a.e. } t \geq s,\ v(s) = z, \tag{2.4.1}$$

are o unică soluţie local absolut continuă $v(t) = v(z,s,t) = e^{s-t}z + \dots$. Mai mult, pentru s şi t fixaţi, $0 \leq s \leq t < \infty$, $v_{s,t}(z) = v(z,s,t)$ este o aplicaţie Schwarz univalentă, şi pentru $s \geq 0$ fixat şi $z \in B^n$, este o funcţie Lipschitz de $t \geq s$ local uniform în raport cu z.

De acum înainte, dacă $f = f(z, \cdot)$ este o aplicaţie olomorfă în raport cu $z \in B^n$, şi depinde de asemenea de o altă variabilă reală, vom scrie $Df(z, \cdot)$ pentru diferenţiala lui f în variabila z.

Următorul rezultat arată că dacă $v(t) = v(z, s, t)$ este unica soluţie a problemei cu valori iniţiale (2.4.1), atunci $\lim_{t\to\infty} e^t v(z, s, t)$ există şi dă naştere unui lanţ Loewner (conform [96]; a se vedea de asemenea, de exemplu [44]).

Teorema 2.4.3 (*conform* **[96]**; *vezi de exemplu* **[44]**) *Fie $h : B^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie care verifică condiţiile (i)-(ii) din Teorema 2.4.2. Fie $v(t) = v(z, s, t)$ soluţia problemei cu valori iniţiale (2.4.1). Atunci oricare ar fi $s \geq 0$, limita*

$$\lim_{t\to\infty} e^t v(z, s, t) = f(z, s),\ s \geq 0, \tag{2.4.2}$$

există local uniform pe B^n. Mai mult, $f(\cdot, s)$ este univalentă pe B^n şi $f(z, s) = f(v(z, s, t), t)$, oricare ar fi $z \in B^n$ şi $0 \leq s \leq t < \infty$. Atunci $f(z, t)$ este un lanţ Loewner care are proprietatea că $\{e^{-t} f(\cdot, t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală pe B^n. Mai mult, $f(z, \cdot)$ este o funcţie local Lipschitz pe $[0, \infty)$ local uniform în raport cu $z \in B^n$, şi aproape pentru toţi $t \geq 0$ următoarea relaţie are loc

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z, t) = Df(z, t)h(z, t),\ \forall z \in B^n.$$

Următoarea teoremă obţinută de Pfaltzgraff [88] reprezintă un rezultat important în teoria lanţurilor Loewner de mai multe variabile complexe, şi generalizează Teorema 1.5.4. Poreda a obţinut un rezultat analog în cazul spaţiilor Banach complexe (a se vedea de exemplu [96]). Vom folosi acest rezultat în diverse aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner în următoarele capitole.

Teorema 2.4.4 ([88]) *Fie $h = h(z, t) : B^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie care verifică condiţiile (i)-(ii) din Teorema 2.4.2.*

Fie $f = f(z, t) : B^n \times [0, \infty) \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie astfel încât $f(\cdot, t) \in H(B^n)$, $f(0, t) = 0$, $Df(0, t) = e^t I_n$, pentru $t \geq 0$, şi $f(z, \cdot)$ este local absolut continuă pe $[0, \infty)$ local uniform în raport cu $z \in B^n$. Presupunem că

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z, t) = Df(z, t)h(z, t),\ \text{a.e.}\, t \geq 0,\ \forall\, z \in B^n. \tag{2.4.3}$$

Mai mult, presupunem că există un şir crescător $\{t_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ astfel încât $t_m > 0$, $t_m \to \infty$ şi $\lim_{m\to\infty} e^{-t_m} f(z, t_m) = F(z)$ local uniform pe B^n. Atunci $f(z, t)$ este un lanţ Loewner şi

$$\lim_{t\to\infty} e^t v(z, s, t) = f(z, s)$$

local uniform pe B^n, oricare ar fi $s \geq 0$, unde $v(t) = v(z, s, t)$ este soluţia problemei cu valori iniţiale (2.4.1), oricare ar fi $z \in B^n$.

În cazul mai multor variabile complexe, Graham, Kohr şi Kohr [47] (a se vedea de asemenea [44]) au demonstrat că dacă $f(z, t)$ este un lanţ Loewner pe B^n, atunci $f(z, \cdot)$ este local Lipschitz pe $[0, \infty)$ local uniform în raport cu $z \in B^n$. De asemenea, Graham, Hamada şi Kohr [38], Curt şi Kohr [24] au demonstrat că orice lanţ Loewner pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ verifică ecuaţia diferenţială Loewner (2.4.4).

Teorema 2.4.5 ([47], [24]) *Fie $f(z,t): B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ un lanţ Loewner. Atunci există o aplicaţie $h = h(z,t): B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ astfel încât $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}$ oricare ar fi $t \geq 0$, $h(z,\cdot)$ este măsurabilă pe $[0,\infty)$ oricare ar fi $z \in B^n$ şi următoarea relaţie are loc*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \text{ a.e.}\, t \geq 0, \, \forall z \in B^n. \tag{2.4.4}$$

2.4.2 Lanţuri Loewner şi aplicaţii biolomorfe pe bila unitate B^n

În continuare prezentăm caracterizarea anumitor subclase de aplicaţii biolomorfe pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ folosind lanţuri Loewner.

Lanţuri Loewner şi subclase de aplicaţii biolomorfe

Caracterizarea aplicaţiilor stelate folosind lanţuri Loewner a fost obţinută de Pfaltzgraff şi Suffridge [90].

Teorema 2.4.6 *Fie $f: B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie local biolomorfă normată. Atunci f este stelată dacă şi numai dacă $f(z,t) = e^t f(z)$ este lanţ Loewner.*

Următoarea teoremă obţinută de Hamada şi Kohr [54] generalizează Teorema 1.5.6 la n-dimensiuni, şi arată că aplicaţiile spiralate de tipul α pot fi caracterizate folosind lanţuri Loewner.

Teorema 2.4.7 *Fie $f: B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie local biolomorfă normată şi fie $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < \pi/2$. Atunci f este aplicaţie spiralată de tipul α dacă şi numai dacă $f(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat}z)$, $z \in B^n$, $t \geq 0$, este lanţ Loewner, unde $a = \tan\alpha$.*

Următorul rezultat prezintă caracterizarea aplicaţiilor aproape stelate de ordinul α folosind lanţuri Loewner. Acest rezultat a fost obţinut de Xu şi Liu [114] în cazul spaţiilor Banach complexe.

Teorema 2.4.8 *Fie f o aplicaţie local biolomorfă normată pe B^n şi fie $\alpha \in [0,1)$. Atunci f este aproape stelată de ordinul α dacă şi numai dacă $f(z,t) = e^{\frac{1}{1-\alpha}t} f(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}t}z)$, $z \in B^n$, $t \geq 0$, este lanţ Loewner.*

Lanţuri Loewner şi criterii de univalenţă pe B^n

În continuare prezentăm aplicaţii ale teoriei lanţurilor Loewner la criterii de univalenţă în cazul mai multor variabile complexe. Următorul rezultat reprezintă generalizarea la n-dimensiuni a criteriului lui Becker (a se vedea Teorema 1.5.8). Această generalizare a fost obţinută de Pfaltzgraff în 1974 [88].

Teorema 2.4.9 *Fie $f: B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie local biolomorfă normată care verifică*

$$(1 - \|z\|^2)\|[Df(z)]^{-1}D^2 f(z)(z,\cdot)\| \leq 1, \; z \in B^n.$$

Atunci f este univalentă pe B^n.

Pentru alte criterii de univalenţă pe bila unitate, obţinute prin metoda lanţurilor Loewner, a se vedea [21], [25].

2.4.3 Reprezentare parametrică pe B^n

În continuare prezentăm clasa aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$.

Pentru început prezentăm definiţia reprezentării parametrice (a se vedea [38], [47]; conform [94], [95]).

Definiţia 2.4.10 O aplicaţie normată $f \in H(B^n)$ admite *reprezentare parametrică* dacă există un lanţ Loewner $f(z,t)$ astfel încât $\{e^{-t}f(z,t)\}_{t\geq 0}$ este familie normală pe B^n (familie local uniform mărginită) şi $f = f(\cdot, 0)$.

Notăm cu $S^0(B^n)$ mulţimea aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică.

Dacă $n = 1$, $S^0(U) = S$ [93] (a se vedea Teorema 1.5.2). Pe de altă parte, dacă $n \geq 2$, atunci $S^0(B^n)$ este o submulţime proprie a lui $S(B^n)$ (a se vedea [38]; conform [94], [95]). Observăm că submulţimi importante ale lui $S(B^n)$, cum ar fi $S^*(B^n)$ şi $\hat{S}_\alpha(B^n)$, sunt de asemenea submulţimi ale lui $S^0(B^n)$ (a se vedea [38]).

Vom prezenta următorul rezultat de deformare pentru aplicaţii din $S^0(B^n)$. Acest rezultat a fost obţinut de Poreda [94] pe polidiscul unitate în $\mathbb{C}^n$, şi de Graham, Hamada şi Kohr [38] pe bila unitate în $\mathbb{C}^n$ în raport cu o normă arbitrară.

Teorema 2.4.11 (**[38]**, **[94]**) *Dacă* $f \in S^0(B^n)$, *atunci*

$$\frac{\|z\|}{(1+\|z\|)^2} \leq \|f(z)\| \leq \frac{\|z\|}{(1-\|z\|)^2},\ z \in B^n.$$

Aceste estimări sunt exacte. Prin urmare $f(B^n) \supseteq B^n_{1/4}$.

Observăm că aplicaţiile din $S(B^n)$, $n \geq 2$, nu satisfac în mod necesar rezultatul precedent (a se vedea de exemplu [44]). Prin urmare clasa $S(B^n)$ este mai largă decât clasa $S^0(B^n)$, pentru $n \geq 2$. Mai mult, clasa $S^0(B^n)$ este compactă, rezultat obţinut de Graham, Kohr şi Kohr [47].

Corolarul 2.4.12 $S^0(B^n)$ *este o mulţime compactă în topologia lui* $H(B^n)$.

Aplicaţii care admit g-reprezentare parametrică pe B^n

Este natural să introducem noţiunea de g-reprezentare parametrică. Vom începe cu următoarea condiţie (a se vedea [38]).

Definiţia 2.4.13 Fie $g \in H(U)$ o funcţie univalentă astfel încât $g(0) = 1$, $g(\overline{\zeta}) = \overline{g(\zeta)}$, pentru $\zeta \in U$ (adică, g are coeficienţi reali), Re $g(\zeta) > 0$ pe U, şi presupunem că g verifică următoarele condiţii pentru $r \in (0,1)$:

$$\begin{cases} \min_{|\zeta|=r} \mathrm{Re}\ g(\zeta) = \min\{g(r), g(-r)\} \\ \max_{|\zeta|=r} \mathrm{Re}\ g(\zeta) = \max\{g(r), g(-r)\} \end{cases} \tag{2.4.5}$$

Vom defini clasa $\mathcal{M}_g$, unde g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Această clasă a fost introdusă de Graham, Hamada şi Kohr [38].

Definiţia 2.4.14 Clasa $\mathcal{M}_g$ este dată de

$$\mathcal{M}_g = \Big\{h : B^n \to \mathbb{C}^n : h \in H(B^n),\, h(0) = 0,\, Dh(0) = I_n, \Big\langle h(z), \frac{z}{\|z\|^2} \Big\rangle \in g(U),\, z \in B^n \Big\}.$$

Observăm că $\langle h(z), \frac{z}{\|z\|^2} \rangle$ are valoarea 1 (la limită) dacă $z = 0$. Se observă că $\mathcal{M}_g \subseteq \mathcal{M}$, şi dacă $g(\zeta) \equiv \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, atunci $\mathcal{M}_g \equiv \mathcal{M}$. Observăm că $\mathcal{M}_g \neq \emptyset$, deoarece $\mathrm{id}_{B^n} \in \mathcal{M}_g$.

În continuare prezentăm definiţia g-lanţurilor Loewner. Această noţiune a fost introdusă de Graham, Hamada şi Kohr [38] (compară cu [47] şi [94], pentru $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $\zeta \in U$).

Definiţia 2.4.15 Spunem că o aplicaţie $f = f(z,t) : B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$ este *g-lanţ Loewner* dacă $f(z,t)$ este lanţ Loewner astfel încât $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este familie normală pe B^n (familie local uniform mărginită) şi aplicaţia $h = h(z,t)$ obţinută din ecuaţia diferenţială Loewner

$$\frac{\partial f}{\partial t}(z,t) = Df(z,t)h(z,t), \quad \text{a.e. } t \geq 0, \quad \forall\, z \in B^n, \tag{2.4.6}$$

verifică condiţia $h(\cdot,t) \in \mathcal{M}_g$, aproape pentru toţi $t \geq 0$.

Vom prezenta definiţia g-reprezentării parametrice, introdusă de Graham, Hamada şi Kohr [38] (compară cu [47] şi [94], pentru $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $\zeta \in U$).

Definiţia 2.4.16 O aplicaţie normată $f \in H(B^n)$ are g-reprezentare parametrică dacă există un g-lanţ Loewner $f(z,t)$ astfel încât $f = f(\cdot,0)$.

Notăm cu $S_g^0(B^n)$ mulţimea aplicaţiilor care admit g-reprezentare parametrică.

Dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $\zeta \in U$, mulţimea $S_g^0(B^n)$ revine la mulţimea $S^0(B^n)$ a aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică obişnuită (a se vedea [38]).

Graham, Hamada şi Kohr [38] au demonstrat că $K(B^n) \subset S_g^0(B^n)$, unde $g(\zeta) \equiv 1 - \zeta$. Această incluziune reprezintă una din motivaţiile pentru studiul g-reprezentării parametrice şi g-lanţurilor Loewner în cazul mai multor variabile complexe.

Observăm că teorema de deformare pentru clasa $S_g^0(B^n)$ a fost obţinută de Graham, Hamada şi Kohr [38], şi implică faptul că $S_g^0(B^n)$ este local uniform mărginită (a se vedea de asemenea [44]).

Capitolul 3

Operatori de extensie care păstrează proprietăţi analitice şi geometrice

În acest capitol considerăm diferiţi operatori de extensie care extind o funcţie univalentă f pe discul unitate U la o aplicaţie univalentă F de la bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ la $\mathbb{C}^n$, cu proprietatea că $f(z_1) = F(z_1, 0)$. Acest subiect a început cu operatorul de extensie Roper-Suffridge [101], introdus în 1995, care are proprietatea că dacă f este o funcţie convexă pe U, atunci F este o aplicaţie convexă pe B^n. Alte proprietăţi geometrice (stelaritate, spiralitate, stelaritate de un anumit ordin, etc.) sunt păstrate de către acest operator şi diferite generalizări ale acestuia. Graham şi Kohr [43] au arătat că operatorul de extensie Roper-Suffridge păstrează noţiunile de stelaritate şi aplicaţie Bloch, iar Graham, Kohr şi Kohr [46] au arătat că acesta păstrează noţiunile de reprezentare parametrică şi spiralitate de tipul δ.

În prima parte a acestui capitol prezentăm operatorul de extensie Roper-Suffridge, precum şi diferite generalizări ale acestuia. Vom prezenta principalele lor proprietăţi analitice şi geometrice, precum şi legătura cu teoria lanţurilor Loewner. Vom discuta de asemenea cazul operatorului de extensie Pfaltzgraff-Suffridge [91], care extinde o aplicaţie local biolomorfă $f \in H(B^n)$ la o aplicaţie local biolomorfă $F \in H(B^{n+1})$.

În partea a doua a acestui capitol prezentăm rezultate originale referitoare la diferite generalizări ale operatorului de extensie Roper-Suffridge. Vom demonstra că aceşti operatori păstrează noţiunea de g-lanţ Loewner, unde $g(\zeta) = (1-\zeta)/(1+(1-2\gamma)\zeta)$, $|\zeta| < 1$ şi $\gamma \in (0, 1)$. În consecinţă, operatorii de extensie consideraţi păstrează diferite proprietăţi analitice şi geometrice, cum ar fi g-reprezentarea parametrică, stelaritatea de ordinul γ, spiralitatea de tipul δ şi ordinul γ, aproape stelaritatea de ordinul δ şi tipul γ. Vom generaliza operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge şi vom demonstra că acest operator de extensie generalizat păstrează noţiunile de reprezentare parametrică, stelaritate, spiralitate de tipul δ, aproape stelaritate de ordinul δ. Vom considera păstrarea ε-stelarităţii prin acest operator şi vom obţine un rezultat parţial referitor la păstrarea convexităţii. Vom studia de asemenea rezultate de conservare a subordonării prin operatorii de extensie menţionaţi anterior şi vom considera raze de subordonare asociate acestora.

Sursele bibliografice principale folosite pe parcursul acestui capitol sunt [34], [35], [38], [42],

[43], [44], [45], [46], [48], [56], [67], [75], [77], [82], [91], [101], [102].

Rezultatele originale prezentate în acest capitol au fost obţinute în [11], [12], [14], [15], [16].

3.1 Rezultate generale privind operatori de extensie

3.1.1 Operatorul de extensie Roper-Suffridge

Pentru $n \geq 2$, fie $\tilde{z} = (z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$ astfel încât $z = (z_1, \tilde{z}) \in \mathbb{C}^n$.

Operatorul Roper-Suffridge extinde o funcţie local univalentă pe discul unitate U la o aplicaţie local biolomorfă pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$. Acest operator a fost introdus de Roper şi Suffridge în 1995 [101] pentru a construi aplicaţii convexe pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$, pornind de la o funcţie convexă pe discul unitate. Dacă $f_1, \ldots, f_n$ sunt funcţii convexe pe discul unitate U, atunci $F(z) = (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n))$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in B^n$, nu este în mod necesar o aplicaţie convexă pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ (a se vedea Exemplul 2.3.13 (i)).

Operatorul Roper-Suffridge $\Phi_n : \mathcal{L}S \to \mathcal{L}S_n(B^n)$ este definit astfel [101]

$$\Phi_n(f)(z) = (f(z_1), \tilde{z}\sqrt{f'(z_1)}),\ z = (z_1, \tilde{z}) \in B^n. \tag{3.1.1}$$

Ramura funcţiei putere se alege astfel încât $\sqrt{f'(z_1)}\big|_{z_1=0} = 1$.

Roper şi Suffridge [101] au demonstrat următorul rezultat:

Teorema 3.1.1 *Dacă f este o funcţie convexă pe discul unitate U, atunci $F = \Phi_n(f)$ este o aplicaţie convexă pe bila unitate Euclideană B^n în $\mathbb{C}^n$. Prin urmare $\Phi_n(K) \subseteq K(B^n)$.*

O demonstraţie diferită a Teoremei 3.1.1 a fost dată de Graham şi Kohr în 2000 (a se vedea [43]). Graham şi Kohr [43] au demonstrat de asemenea următorul rezultat, care arată că operatorul Roper-Suffridge păstrează noţiunea de stelaritate.

Teorema 3.1.2 *Dacă $f \in S^*$, atunci $F = \Phi_n(f) \in S^*(B^n)$. Prin urmare $\Phi_n(S^*) \subseteq S^*(B^n)$.*

Hamada, Kohr şi Kohr [56] au demonstrat că operatorul Φ_n păstrează noţiunea de stelaritate de ordinul $1/2$. Această proprietate este legată de convexitate, deoarece $K(B^n) \subset S^*_{1/2}(B^n)$ (a se vedea Teorema 2.3.15).

Teorema 3.1.3 *Dacă $f \in S^*_{1/2}$, atunci $F = \Phi_n(f) \in S^*_{1/2}(B^n)$. Prin urmare $\Phi_n(S^*_{1/2}) \subseteq S^*_{1/2}(B^n)$.*

Graham, Kohr şi Kohr [46] au arătat că operatorul Roper-Suffridge păstrează noţiunea de spiralitate de tipul $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Teorema 3.1.4 *Dacă $f \in \hat{S}_\delta$, $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$, atunci $F = \Phi_n(f) \in \hat{S}_\delta(B^n)$. Prin urmare $\Phi_n(\hat{S}_\delta) \subseteq \hat{S}_\delta(B^n)$.*

În continuare prezentăm legătura dintre operatorul Roper-Suffridge şi teoria lanţurilor Loewner. Graham, Kohr şi Kohr (a se vedea [46]; a se vedea de asemenea [44]) au obţinut următorul rezultat, care arată că operatorul Φ_n păstrează noţiunea de reprezentare parametrică.

Teorema 3.1.5 *Dacă $f \in S$ şi $F = \Phi_n(f)$, atunci $F \in S^0(B^n)$. Prin urmare $\Phi_n(S) \subseteq S^0(B^n)$.*

Graham, Kohr şi Kohr (a se vedea [46]; a se vedea de asemenea [42]) au obţinut următorul rezultat, care determină raza de stelaritate asociată lui $\Phi_n(S)$.

Teorema 3.1.6 $R_{S^*}(\Phi_n(S)) = \tanh(\pi/4)$.

Raza de convexitate asociată lui $\Phi_n(S)$ şi $\Phi_n(S^*)$ a fost obţinută de Graham, Kohr şi Kohr (a se vedea [46]; a se vedea de asemenea [42]).

Teorema 3.1.7 $R_K(\Phi_n(S)) = R_K(\Phi_n(S^*)) = 2 - \sqrt{3}$.

3.1.2 Generalizări ale operatorului Roper-Suffridge

În această secţiune prezentăm alţi operatori de extensie care au proprietăţi similare cu cele ale operatorului Roper-Suffridge. Pentru diferite generalizări ale operatorului Roper-Suffridge, a se vedea [34], [35], [42], [43], [44], [45], [46], [67], [76], [82]. Alţi operatori de extensie care păstrează proprietăţi analitice şi geometrice ale aplicaţiilor biolomorfe în $\mathbb{C}^n$ şi spaţii Banach complexe au fost obţinuţi de Elin [30] (folosind teoria semigrupurilor), şi Hamada şi Kohr [39] (folosind lanţuri univalente de subordonare).

Graham, Kohr şi Kohr [46] au considerat următorul operator

$$\Phi_{n,\alpha}(f)(z) = F(z) = (f(z_1), \tilde{z}(f'(z_1))^\alpha),\ z = (z_1, \tilde{z}) \in B^n, \tag{3.1.2}$$

unde $\alpha \in [0, 1/2]$, şi f este o funcţie local univalentă pe U, normată prin $f(0) = f'(0) - 1 = 0$. Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $(f'(z_1))^\alpha|_{z_1=0} = 1$. Dacă $\alpha = 1/2$, acest operator se reduce la operatorul de extensie Roper-Suffridge.

Graham, Kohr şi Kohr [46] au obţinut diferite rezultate privind operatorul $\Phi_{n,\alpha}$, $\alpha \in [0, 1/2]$.

Teorema 3.1.8 ([46]) *Fie $f \in \mathcal{L}S$, $\alpha \in [0, 1/2]$.*

(i) Dacă $f \in S$, atunci $\Phi_{n,\alpha}(f)$ se scufundă într-un lanţ Loewner şi mai mult $\Phi_{n,\alpha}(f) \in S^0(B^n)$. Prin urmare $\Phi_{n,\alpha}(S) \subseteq S^0(B^n)$.

(ii) Dacă $f \in S^*$, atunci $\Phi_{n,\alpha}(f) \in S^*(B^n)$. Prin urmare $\Phi_{n,\alpha}(S^*) \subseteq S^*(B^n)$.

(iii) Dacă $f \in \hat{S}_\delta$, $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$, atunci $\Phi_{n,\alpha}(f) \in \hat{S}_\delta(B^n)$. Prin urmare $\Phi_{n,\alpha}(\hat{S}_\delta) \subseteq \hat{S}_\delta(B^n)$.

Graham, Kohr şi Kohr [46] au demonstrat că operatorul $\Phi_{n,\alpha}$ păstrează convexitatea doar dacă $\alpha = 1/2$, adică doar în cazul operatorului de extensie Roper-Suffridge.

Graham, Kohr şi Kohr [46] au obţinut raza de stelaritate pentru $\Phi_{n,\alpha}(S)$.

Teorema 3.1.9 $R_{S^*}(\Phi_{n,\alpha}(S)) = \tanh(\pi/4)$, *oricare ar fi* $\alpha \in [0, 1/2]$.

Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [42] au considerat operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ definit astfel

$$\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(z) = \left(f(z_1), \tilde{z}\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha}(f'(z_1))^{\beta}\right),\ z = (z_1, \tilde{z}) \in B^n, \tag{3.1.3}$$

unde $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, şi f este o funcţie local univalentă pe U, normată prin $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, şi astfel încât $f(z_1) \neq 0$ pentru $z_1 \in U \backslash \{0\}$. Ramurile funcţiilor putere sunt alese astfel încât

$$\left.\left(\frac{f(z_1)}{z_1}\right)^{\alpha}\right|_{z_1=0} = 1 \text{ şi } (f'(z_1))^{\beta}|_{z_1=0} = 1.$$

Se observă că operatorul $\Phi_{n,0,1/2}$ revine la operatorul de extensie Roper-Suffridge.

Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [42] au obţinut diferite rezultate privind operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$, unde $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1/2]$, şi $\alpha + \beta \leq 1$.

Teorema 3.1.10 ([42]) *Fie* $f \in \mathcal{L}S$, $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1/2]$, $\alpha + \beta \leq 1$.

(i) *Dacă* $f \in S$, *atunci* $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ *se scufundă într-un lanţ Loewner şi mai mult* $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in S^0(B^n)$. *Prin urmare* $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S) \subseteq S^0(B^n)$.

(ii) *Dacă* $f \in S^*$, *atunci* $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in S^*(B^n)$. *Prin urmare* $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*) \subseteq S^*(B^n)$.

Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [42] au arătat că $\Phi_{n,\alpha,\beta}(K) \subset K(B^n)$ doar dacă $(\alpha, \beta) = (0, 1/2)$, adică doar în cazul operatorului de extensie Roper-Suffridge.

Raza de stelaritate pentru $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ a fost obţinută de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [42].

Teorema 3.1.11 $R_{S^*}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)) = \tanh(\pi/4)$, *pentru* $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in [0, 1/2]$, *astfel încât* $\alpha + \beta \leq 1$.

Următorul operator de extensie a fost introdus de Muir [82], cu scopul de a obţine exemple de puncte extreme ale lui $K(B^n)$, pornind de la puncte extreme ale lui K (a se vedea [84]).

Definiţia 3.1.12 (**[82]**) Fie $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ un polinom omogen de gradul 2. Operatorul de extensie Muir $\Phi_{n,Q} : \mathcal{L}S \to \mathcal{L}S_n(B^n)$ este definit astfel

$$\Phi_{n,Q}(f)(z) = (f(z_1) + Q(\tilde{z})f'(z_1), \tilde{z}\sqrt{f'(z_1)}),\ z = (z_1, \tilde{z}) \in B^n.$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $\sqrt{f'(z_1)}|_{z_1=0} = 1$.

Dacă $Q \equiv 0$, operatorul de extensie Muir revine la operatorul Roper-Suffridge.

Muir [82] a demonstrat următorul rezultat. Relaţia (ii) a fost de asemenea obţinută de Kohr [67].

Teorema 3.1.13 ([82]) *(i) $\Phi_{n,Q}(K) \subseteq K(B^n)$ dacă şi numai dacă $\|Q\| \leq 1/2$.*

(ii) $\Phi_{n,Q}(S^*) \subseteq S^*(B^n)$ dacă şi numai dacă $\|Q\| \leq 1/4$.

Kohr [67] a demonstrat următorul rezultat:

Teorema 3.1.14 *$\Phi_{n,Q}(S) \subseteq S^0(B^n)$ dacă şi numai dacă $\|Q\| \leq 1/4$.*

Operatori de extensie care păstrează diferite proprietăţi geometrice (de exemplu, stelaritate şi convexitate) pe anumite domenii Reinhardt în $\mathbb{C}^n$ au fost consideraţi de Gong şi Liu (a se vedea [34], [35]), Liu şi Liu [76]. Mai multe detalii legate de generalizări ale operatorului Roper-Suffridge pot fi găsite în [44, Capitolul 11] şi [45] (a se vedea de asemenea, [30], [39], [73], [76], [82], etc.)

3.1.3 Operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge

O altă generalizare a operatorului de extensie Roper-Suffridge a fost considerată de Pfaltzgraff şi Suffridge [91] în 1999. Acest operator extinde o aplicaţie local biolomorfă pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ la o aplicaţie local biolomorfă pe bila unitate Euclidiană B^{n+1} în $\mathbb{C}^{n+1}$.

Pentru $n \geq 1$, fie $z' = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ şi $z = (z', z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge $\Psi_n : \mathcal{L}S_n(B^n) \to \mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$ este definit astfel (a se vedea [91])

$$\Psi_n(f)(z) = F(z) = \left(f(z'), z_{n+1}[J_f(z')]^{\frac{1}{n+1}}\right), \; z = (z', z_{n+1}) \in B^{n+1}, \tag{3.1.4}$$

unde $J_f(z') = \det Df(z')$, $z' \in B^n$. Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $[J_f(z')]^{\frac{1}{n+1}}\big|_{z'=0} = 1$. Atunci $F = \Psi_n(f) \in \mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$ dacă $f \in \mathcal{L}S_n(B^n)$. Mai mult, dacă $f \in S(B^n)$ atunci $F \in S(B^{n+1})$. Observăm că dacă $n = 1$, atunci Ψ_1 revine la operatorul de extensie Roper-Suffridge Φ_2.

Pfaltzgraff şi Suffridge [91] au propus următoarea conjectură referitoare la păstrarea convexităţii prin operatorul Ψ_n.

Conjectura 3.1.1 *Dacă $f \in K(B^n)$ atunci $\Psi_n(f) \in K(B^{n+1})$.*

Operatorul Ψ_n a fost de asemenea studiat de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48]. Ei au obţinut un rezultat parţial al Conjecturii 3.1.1 (a se vedea [48]).

Pentru $a \in (0, 1]$, fie

$$\Omega_{a,n} = \{z = (z', z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : \; |z_{n+1}|^2 < a^{\frac{2n}{n+1}}(1 - \|z'\|^2)\}.$$

Atunci $\Omega_{a,n} \subseteq B^{n+1}$ şi $\Omega_{1,n} = B^{n+1}$. Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48] au demonstrat următorul rezultat referitor la păstrarea convexităţii prin operatorul Ψ_n.

Teorema 3.1.15 *Fie $f \in K(B^n)$, $a_1, a_2 > 0$ astfel încât $a_1 + a_2 \leq 1$ şi fie $F = \Psi_n(f)$. Atunci*

$$(1-\lambda)F(z) + \lambda F(w) \in F(\Omega_{a_1+a_2,n}),\ z \in \Omega_{a_1,n},\ w \in \Omega_{a_2,n},\ \lambda \in [0,1].$$

Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48] au demonstrat următoarele rezultate, care arată că operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge păstrează noţiunile de reprezentare parametrică şi stelaritate.

Teorema 3.1.16 *(i) Dacă $f \in S^0(B^n)$, atunci $F = \Psi_n(f) \in S^0(B^{n+1})$. Prin urmare, $\Psi_n(S^0(B^n)) \subseteq S^0(B^{n+1})$.*

(ii) Dacă $f \in S^*(B^n)$, atunci $F = \Psi_n(f) \in S^*(B^{n+1})$. Prin urmare, $\Psi_n(S^*(B^n)) \subseteq S^*(B^{n+1})$.

Hamada, Kohr şi Kohr [56] au obţinut o generalizare a operatorului de extensie Pfaltzgraff-Suffridge pe anumite domenii Reinhardt în $\mathbb{C}^n$.

Noţiunile de operator de extensie continuu $\Phi : \mathcal{L}S \to \mathcal{L}S_n(B^n)$ şi operator de extensie care păstrează lanţuri Loewner au fost introduse recent de Muir [83]. Generalizarea acestor noţiuni pentru operatori continui $\Phi : \mathcal{L}S_n(B^n) \to \mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$ a fost recent considerată de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41].

Definiţia 3.1.17 **([41])** Aplicaţia $\Phi : \mathcal{L}S_n(B^n) \to \mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$ se numeşte *operator de extensie* dacă Φ este continuă şi

$$\Phi(f)(z',0) = (f(z'),0), \quad \forall\, f \in \mathcal{L}S_n(B^n), \quad z' \in B^n.$$

Dacă Φ este un operator de extensie, spunem că Φ *păstrează lanţuri Loewner* (conform [83], pentru $n = 1$) dacă, pentru orice lanţ Loewner $f = f(z',t) : B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^n$, aplicaţia $F = F(z,t) : B^{n+1} \times [0,\infty) \to \mathbb{C}^{n+1}$ dată de

$$F(\cdot,t) = e^t \Phi(e^{-t} f(\cdot,t)), \quad t \geq 0, \tag{3.1.5}$$

este lanţ Loewner pe $B^{n+1} \times [0,\infty)$.

Observăm că toţi operatorii de extensie consideraţi în această secţiune reprezintă exemple concrete de operatori de extensie care păstrează lanţuri Loewner.

3.2 g-lanţuri Loewner asociate unor operatori de extensie generalizaţi Roper-Suffridge

În această secţiune considerăm operatorii de extensie $\Phi_{n,\alpha}$, $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi $\Phi_{n,Q}$ care extind o funcţie local univalentă f pe discul unitate U la o aplicaţie local biolomorfă $F \in H(B^n)$, unde B^n este bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$. Folosind metoda lanţurilor Loewner, demonstrăm că dacă f se scufundă într-un g-lanţ Loewner pe discul unitate, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$ pentru $|\zeta| < 1$ şi

$\gamma \in (0,1)$, atunci $F = \Phi_{n,\alpha}(f)$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner pe B^n, unde $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$. În particular, dacă f este stelată de ordinul γ pe U (respectiv f este spiralată de tipul δ şi ordinul γ pe U, unde $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$), atunci $F = \Phi_{n,\alpha}(f)$ este stelată de ordinul γ pe B^n (respectiv $F = \Phi_{n,\alpha}(f)$ este spiralată de tipul δ şi ordinul γ pe B^n). De asemenea, dacă f este aproape stelată de ordinul δ şi tipul γ pe U, unde $\delta \in [0,1)$, atunci $F = \Phi_{n,\alpha}(f)$ este aproape stelată de ordinul δ şi tipul γ pe B^n. Vom aplica idei similare în cazul operatorului de extensie Muir $\Phi_{n,Q}$, unde Q este un polinom omogen de gradul 2 pe $\mathbb{C}^{n-1}$ astfel încât $\|Q\| \leq \frac{1-|2\gamma-1|}{8\gamma}$, $\gamma \in (0,1)$, şi în cazul operatorului de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$.

Pe parcursul acestei secţiuni considerăm g-lanţuri Loewner cu $g \in H(U)$ dată de

$$g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}, \quad |\zeta| < 1,$$

unde $\gamma \in (0,1)$. Atunci g transformă discul unitate U în discul deschis de centru $1/(2\gamma)$ şi rază $1/(2\gamma)$. Prin urmare, în acest caz clasa $\mathcal{M}_g$ este dată de (a se vedea Definiţia 2.4.14)

$$\mathcal{M}_g = \Big\{ h \in H(B^n) : h(0) = 0, Dh(0) = I_n, \Big| \frac{1}{\|z\|^2}\langle h(z), z\rangle - \frac{1}{2\gamma} \Big| < \frac{1}{2\gamma},\ z \in B^n \setminus \{0\} \Big\}.$$

Această secţiune se bazează pe rezultatele originale obţinute în [11] şi [12].

3.2.1 Operatorul $\Phi_{n,\alpha}$ şi g-lanţuri Loewner

Rezultatul principal al acestei secţiuni este dat de Teorema 3.2.1 obţinută de Chirilă [12]. Acest rezultat arată că operatorul $\Phi_{n,\alpha}$ dat de (3.1.2) păstrează noţiunea de g-lanţ Loewner pentru $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, unde $\gamma \in (0,1)$. În cazul în care $\gamma = 0$, a se vedea [46] (a se vedea de asemenea Teorema 3.1.8).

Teorema 3.2.1 ([12]) *Presupunem că $f \in S$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, $\gamma \in (0,1)$. Atunci $F = \Phi_{n,\alpha}(f)$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner pe B^n, pentru $\alpha \in [0, 1/2]$.*

Pe baza Teoremei 3.2.1, Chirilă [12] a obţinut următoarele cazuri particulare.

Corolarul 3.2.2 ([12]) *Dacă $f : U \to \mathbb{C}$ are g-reprezentare parametrică şi $\alpha \in [0, 1/2]$, atunci $F = \Phi_{n,\alpha}(f) \in S_g^0(B^n)$, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $\zeta \in U$, şi $\gamma \in (0,1)$.*

Următorul rezultat a fost obţinut de Hamada, Kohr şi Kohr [56], în cazul $\alpha = \gamma = 1/2$, şi de Liu [75], în cazul $\gamma \in (0,1)$ şi $\alpha \in [0, 1/2]$. Chirilă [12] a dat o demonstraţie diferită a acestui rezultat folosind g-lanţuri Loewner.

Corolarul 3.2.3 *Dacă $f \in S_\gamma^*$, $\gamma \in (0,1)$ şi $\alpha \in [0, 1/2]$, atunci $F = \Phi_{n,\alpha}(f) \in S_\gamma^*(B^n)$. În particular, operatorul de extensie Roper-Suffridge păstrează noţiunea de stelaritate de ordinul γ.*

Următoarea observaţie rezultă din Corolarul 3.2.3 (a se vedea [12]).

Observaţia 3.2.4 Deoarece $K \subset S^*_{1/2}$ (a se vedea Teorema 1.4.17), pe baza Corolarului 3.2.3 rezultă că $\Phi_{n,\alpha}(K) \subset S^*_{1/2}(B^n)$ pentru $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$. Pe de altă parte, $\Phi_{n,\alpha}(K) \nsubseteq K(B^n)$ pentru $\alpha \neq 1/2$ (a se vedea [46]).

Următorul rezultat a fost obţinut de Liu şi Liu [77] (a se vedea de asemenea [75]). Chirilă [12] a obţinut acest rezultat folosind metoda g-lanţurilor Loewner.

Corolarul 3.2.5 *Fie $\alpha \in [0, 1/2]$, $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\gamma \in (0, 1)$. De asemenea, fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie spiralată de tipul δ şi ordinul γ pe U, şi fie $F = \Phi_{n,\alpha}(f)$. Atunci F este spiralată de tipul δ şi ordinul γ pe B^n.*

Xu şi Liu [114] au demonstrat că anumiţi operatori de extensie păstrează noţiunea de aproape stelaritate de ordinul δ. Chirilă [12] a demonstrat următorul rezultat de conservare a aproape stelarităţii de ordinul δ şi tipul γ în cazul operatorului $\Phi_{n,\alpha}$.

Corolarul 3.2.6 ([12]) *Fie $\alpha \in [0, 1/2]$, $\delta \in [0, 1)$ şi $\gamma \in (0, 1)$. De asemenea, fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie aproape stelată de ordinul δ şi tipul γ. Atunci $F = \Phi_{n,\alpha}(f)$ este aproape stelată de ordinul δ şi tipul γ pe B^n.*

3.2.2 Operatorul de extensie Muir şi g-lanţuri Loewner

Chirilă [12] a demonstrat că operatorul de extensie Muir $\Phi_{n,Q}$ dat de Definiţia 3.1.12 păstrează noţiunea de g-lanţ Loewner, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, pentru $\zeta \in U$, şi $\gamma \in (0, 1)$. În cazul $\gamma = 0$, a se vedea [67] (a se vedea Teorema 3.1.14). Teorema 3.2.7 reprezintă rezultatul principal al acestei secţiuni.

Teorema 3.2.7 ([12]) *Fie $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ un polinom omogen de gradul 2 astfel încât $\|Q\| \leq \frac{1-|2\gamma-1|}{8\gamma}$, unde $\gamma \in (0, 1)$. Presupunem că $f \in S$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner. Atunci $F = \Phi_{n,Q}(f)$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner pe B^n, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$.*

Pe baza rezultatului precedent, Chirilă [12] a obţinut că operatorul $\Phi_{n,Q}$ păstrează noţiunile de g-reprezentare parametrică şi stelaritate de ordinul γ, pentru $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, $\gamma \in (0, 1)$, şi $\|Q\| \leq \frac{1-|2\gamma-1|}{8\gamma}$.

Corolarul 3.2.8 ([12]) *Fie $\gamma \in (0, 1)$ şi fie $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ un polinom omogen de gradul 2 astfel încât $\|Q\| \leq \frac{1-|2\gamma-1|}{8\gamma}$. Dacă $f : U \to \mathbb{C}$ are g-reprezentare parametrică, atunci $F = \Phi_{n,Q}(f) \in S^0_g(B^n)$, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$.*

Următorul rezultat a fost obţinut de Wang şi Liu [113]. Chirilă [12] a obţinut acest rezultat folosind metoda g-lanţurilor Loewner.

Corolarul 3.2.9 *Fie $\gamma \in (0,1)$ şi fie $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ un polinom omogen de gradul 2 astfel încât $\|Q\| \le \frac{1-|2\gamma-1|}{8\gamma}$. Dacă $f \in S^*_\gamma$, atunci $F = \Phi_{n,Q}(f) \in S^*_\gamma(B^n)$.*

Observaţia 3.2.10 Fie $f(z_1,t)$ un lanţ Loewner astfel încât $f(\cdot,t)$ este o funcţie convexă pe U pentru $t \ge 0$. Atunci următoarea relaţie are loc (a se vedea de exemplu [44], [81] şi [93]):

$$\left| \frac{1-|z_1|^2}{2} \cdot \frac{f''(z_1,t)}{f'(z_1,t)} - \overline{z}_1 \right| \le 1, \quad |z_1| < 1, \quad t \ge 0. \tag{3.2.1}$$

Folosind Observaţia 3.2.10, Chirilă [12] a obţinut următoarea îmbunătăţire a Teoremei 3.2.7 în cazul g-lanţurilor Loewner $f(z_1,t)$ astfel încât $f(\cdot,t)$ este convexă pe U pentru $t \ge 0$, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, $\gamma \in (0,1)$ (conform [67] şi [82]).

Propoziţia 3.2.11 ([12]) *Fie $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ un polinom omogen de gradul 2 astfel încât $\|Q\| \le \frac{1-|2\gamma-1|}{4\gamma}$, unde $\gamma \in (0,1)$. Presupunem că $f \in S$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner $f(z_1,t)$ astfel încât $f(\cdot,t)$ este convexă pe U pentru $t \ge 0$, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$. Atunci $F = \Phi_{n,Q}(f)$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner pe B^n pentru $t \ge 0$.*

Observaţia 3.2.12 Fie $f \in K(\gamma)$. Atunci $f \in S^*_\beta$, unde $\beta = \beta(\gamma)$ este dată de (1.4.2). Deoarece $\beta(\gamma) \in (\gamma,1)$, rezultă că $f \in S^*_\gamma$, prin urmare $f(z_1,t) = e^t f(z_1)$ este un g-lanţ Loewner pe U, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$. Se observă că $f(\cdot,t)$ este convexă pentru $t \ge 0$, deoarece f este convexă pe U.

Pe baza Propoziţiei 3.2.11 şi Observaţiei 3.2.12, Chirilă [12] a obţinut următoarele cazuri particulare (conform [67], [82]).

Corolarul 3.2.13 ([12]) *Fie $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ un polinom omogen de gradul 2 astfel încât $\|Q\| \le \frac{1-|2\gamma-1|}{4\gamma}$, unde $\gamma \in (0,1)$. Dacă $f \in K(\gamma)$, atunci $F = \Phi_{n,Q}(f)$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner pe B^n, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$.*

Corolarul 3.2.14 ([12]) *Fie $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ un polinom omogen de gradul 2 astfel încât $\|Q\| \le \frac{1}{2}$, şi fie $f \in K$. Atunci $F = \Phi_{n,Q}(f)$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner pe B^n, unde $g(\zeta) = 1-\zeta$, $|\zeta| < 1$.*

Folosind corolariile precedente, Chirilă [12] a arătat că următoarea observaţie are loc.

Observaţia 3.2.15 (i) Dacă $f \in K(\gamma)$, atunci $\Phi_{n,Q}(f) \in S^*_\gamma(B^n)$, unde $\gamma \in (0,1)$ şi $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ este un polinom omogen de gradul 2 astfel încât $\|Q\| \le \frac{1-|2\gamma-1|}{4\gamma}$ (conform [82]).

(ii) Dacă $f \in K$, atunci $\Phi_{n,Q}(f) \in S^*_{1/2}(B^n)$, unde $Q : \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}$ este un polinom omogen de gradul 2 astfel încât $\|Q\| \le 1/2$ (conform [82]).

Chirilă [12] a arătat că marginea $\|Q\| \le \frac{1}{2}$ este exactă pentru Corolarul 3.2.14 (conform [82]).

3.2.3 Operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ şi g-lanţuri Loewner

Rezultatul principal al acestei secţiuni este dat de Teorema 3.2.16 obţinută de Chirilă [11]. Acest rezultat arată că operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ dat de (3.1.3) păstrează noţiunea de g-lanţ Loewner pentru $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, unde $\gamma \in (0,1)$. Acest rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [42], în cazul $\gamma = 0$ (a se vedea Teorema 3.1.10). În cazul $\alpha = 0$ şi $\gamma \in (0,1)$, Teorema 3.2.16 a fost obţinută de Chirilă [12] (a se vedea Teorema 3.2.1).

Teorema 3.2.16 ([11]) *Presupunem că $f \in S$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, şi $\gamma \in (0,1)$. Atunci $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ se scufundă într-un g-lanţ Loewner pe B^n, pentru $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha + \beta \leq 1$.*

Pe baza Teoremei 3.2.16, Chirilă [11] a obţinut următoarele cazuri particulare. Corolarul 3.2.17 a fost obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [42], în cazul $\gamma = 0$. De asemenea, Corolarul 3.2.17 a fost obţinut de Chirilă [12], în cazul $\alpha = 0$ (a se vedea Corolarul 3.2.2).

Corolarul 3.2.17 ([11]) *Dacă $f : U \to \mathbb{C}$ are g-reprezentare parametrică şi $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha + \beta \leq 1$, atunci $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in S_g^0(B^n)$, unde $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $\zeta \in U$, şi $\gamma \in (0,1)$.*

Următorul rezultat a fost obţinut de Hamada, Kohr şi Kohr [56], în cazul $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1/2$, şi de Liu [75], în cazul $\gamma \in (0,1)$ şi $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha + \beta \leq 1$. Dacă $\gamma = 0$, următorul rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [42]. Chirilă [11] a demonstrat acest rezultat folosind metoda g-lanţurilor Loewner.

Corolarul 3.2.18 *Dacă $f \in S_\gamma^*$ şi $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha + \beta \leq 1$, atunci $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in S_\gamma^*(B^n)$, unde $\gamma \in (0,1)$. În particular, operatorul de extensie Roper-Suffridge păstrează noţiunea de stelaritate de ordinul γ.*

Următoarea observaţie se obţine din Corolarul 3.2.18 (a se vedea [11]).

Observaţia 3.2.19 Deoarece $K \subset S_{1/2}^*$ (a se vedea Teorema 1.4.17), pe baza Corolarului 3.2.18 rezultă că $\Phi_{n,\alpha,\beta}(K) \subset S_{1/2}^*(B^n)$ pentru $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha + \beta \leq 1$. Pe de altă parte, $\Phi_{n,\alpha,\beta}(K) \nsubseteq K(B^n)$ pentru $(\alpha,\beta) \neq (0,1/2)$ (a se vedea [42]).

Următorul rezultat a fost obţinut de Liu şi Liu [77] (a se vedea de asemenea [75]). Chirilă [11] a obţinut o demonstraţie diferită folosind metoda g-lanţurilor Loewner.

Corolarul 3.2.20 *Fie $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha + \beta \leq 1$, $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\gamma \in (0,1)$. De asemenea, fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie spiralată de tipul δ şi ordinul γ pe U, şi fie $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$. Atunci F este spiralată de tipul δ şi ordinul γ pe B^n.*

Chirilă (conform [12]) a obţinut următorul rezultat de conservare a aproape stelarităţii de ordinul δ şi tipul γ prin operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$. Corolarul 3.2.21 a fost obţinut de Chirilă [12], în cazul $\alpha = 0$ (a se vedea Corolarul 3.2.6).

Corolarul 3.2.21 *Fie $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha+\beta \leq 1$, $\delta \in [0,1)$ şi $\gamma \in (0,1)$. De asemenea, fie $f: U \to \mathbb{C}$ o funcţie aproape stelată de ordinul δ şi tipul γ. Atunci $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ este aproape stelată de ordinul δ şi tipul γ pe B^n.*

3.3 Rezultate de subordonare asociate operatorului $\Phi_{n,\alpha,\beta}$

În această secţiune prezentăm câteva rezultate de subordonare asociate operatorului $\Phi_{n,\alpha,\beta}$. Chirilă [11] a obţinut un rezultat de păstrare a subordonării prin operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$. Mai precis, următoarea teoremă are loc (a se vedea [56], în cazul $\alpha = 0$ şi $\beta = 1/2$):

Teorema 3.3.1 ([11]) *Fie $f, g : U \to \mathbb{C}$ două funcţii local univalente astfel încât $f(0) = g(0) = 0$, $f'(0) = a$ şi $g'(0) = b$, unde $0 < a \leq b$. Presupunem că $f(z_1) \neq 0$ şi $g(z_1) \neq 0$ pentru $0 < |z_1| < 1$. Dacă $\alpha \geq 0$, $\beta \in [0,1/2]$ şi $f \prec g$, atunci $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \prec \Phi_{n,\alpha,\beta}(g)$. Alegem ramura funcţiei putere astfel încât*

$$[f'(z_1)]^\beta|_{z_1=0} = a^\beta,\ \left[\frac{f(z_1)}{z_1}\right]^\alpha\bigg|_{z_1=0} = a^\alpha,$$

$$[g'(z_1)]^\beta|_{z_1=0} = b^\beta,\ \left[\frac{g(z_1)}{z_1}\right]^\alpha\bigg|_{z_1=0} = b^\alpha.$$

Chirilă [11] a obţinut anumite consecinţe ale rezultatului anterior. Aceste rezultate au fost obţinute în [56], pentru $\alpha = 0$ şi $\beta = 1/2$.

Corolarul 3.3.2 ([11]) *Fie $f \in \mathcal{L}S$ şi $M \geq 1$ astfel încât $|f(z_1)| \leq M$, $z_1 \in U$. Presupunem că $f(z_1) \neq 0$, $0 < |z_1| < 1$. Atunci $\|\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(z)\| \leq M$, $z \in B^n$, unde $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha+\beta \leq 1$.*

Corolarul 3.3.3 ([11]) *Fie $f \in \mathcal{L}S$ şi $M \geq 1$ astfel încât $|f(z_1)| \leq M$, $z_1 \in U$. Presupunem că $f(z_1) \neq 0$ pentru $0 < |z_1| < 1$. Atunci $\Phi_{n,\alpha,\beta}(f) \in S^0(B^n_r)$, unde $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha+\beta \leq 1$, şi $r = 1/(M + \sqrt{M^2-1})$.*

Corolarul 3.3.4 ([11]) *Fie $f : U \to \mathbb{C}$ o funcţie local univalentă pe U astfel încât $f(0) = 0$ şi $f'(0) = a$, unde $a \in (0,1]$. Presupunem că $f(z_1) \neq 0$ pentru $0 < |z_1| < 1$. De asemenea, fie $g \in S$ şi presupunem că $f \prec g$. Atunci $\|\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(z)\| \leq \|z\|/(1-\|z\|)^2$, $z \in B^n$, unde $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha+\beta \leq 1$.*

Corolarul 3.3.5 ([11]) *Fie f o funcţie local univalentă pe discul unitate U cu $f(0) = 0$ şi $f'(0) = a \in (0,1]$. Presupunem că $f(z_1) \neq 0$ pentru $0 < |z_1| < 1$. De asemenea, fie $g \in S^*_\gamma$, $\gamma \in (0,1)$, şi presupunem că $f \prec g$. Atunci $\|\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(z)\| \leq \|z\|/(1-\|z\|)^{2(1-\gamma)}$, $z \in B^n$, unde $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha+\beta \leq 1$.*

Pe baza Corolarului 3.3.5, Chirilă [11] a obţinut următoarea consecinţă.

Corolarul 3.3.6 ([11]) *Fie f o funcţie local univalentă pe discul unitate U cu $f(0) = 0$ şi $f'(0) = a \in (0,1]$. Presupunem că $f(z_1) \neq 0$ pentru $0 < |z_1| < 1$. De asemenea, fie $g \in K$ şi presupunem că $f \prec g$. Atunci $\|\Phi_{n,\alpha,\beta}(f)(z)\| \leq \|z\|/(1-\|z\|)$, $z \in B^n$, unde $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, $\alpha + \beta \leq 1$.*

În continuare prezentăm o altă consecinţă a Teoremei 3.3.1, obţinută de Chirilă [11]. Acest rezultat a fost obţinut de Hamada, Kohr şi Kohr [56] pentru $\alpha = 0$ şi $\beta = 1/2$.

Corolarul 3.3.7 ([11]) *Fie $F = \Phi_{n,\alpha,\beta}(f)$ şi $G = \Phi_{n,\alpha,\beta}(g)$, unde f este o funcţie local univalentă pe discul unitate astfel încât $f(0) = 0$, $f'(0) = a \in (0,1]$, $f(z_1) \neq 0$ pentru $0 < |z_1| < 1$, $g \in K$, $\alpha \geq 0$, $\beta \in [0,1/2]$. Presupunem că $DF(z)(z) \prec DG(z)(z)$, $z \in B^n$. Atunci $F(z) \prec G(z)$, $z \in B^n$.*

3.4 Raze de univalenţă şi operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$

În continuare considerăm anumite raze de univalenţă asociate operatorului $\Phi_{n,\alpha,\beta}$. Aceste rezultate au fost obţinute de Chirilă [11].

Graham, Kohr şi Kohr [46] au obţinut raza de stelaritate şi raza de convexitate asociate operatorului $\Phi_n(S)$ (a se vedea Teoremele 3.1.6 şi 3.1.7). De asemenea, Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [42] au obţinut raza de stelaritate asociată operatorului $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$ (a se vedea Teorema 3.1.11). În această secţiune, vom considera alte raze de univalenţă ale unor subclase ale lui $S(B^n)$ asociate operatorului $\Phi_{n,\alpha,\beta}$.

Chirilă [11] a obţinut următorul rezultat referitor la raza de spiralitate de tipul δ pentru clasa $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$.

Teorema 3.4.1 ([11]) $R_{\hat{S}_\delta}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)) = \tanh\left[\frac{\pi}{4} - \frac{|\delta|}{2}\right]$*, pentru $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$, astfel încât $\alpha + \beta \leq 1$ şi $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$.*

Observaţia 3.4.2 Dacă alegem $\delta = 0$, $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$ astfel încât $\alpha + \beta \leq 1$, din Teorema 3.4.1 obţinem că $R_{S^*}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)) = \tanh(\pi/4)$. Acest rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Suffridge [42].

Chirilă [11] a demonstrat următorul rezultat referitor la raza de stelaritate de ordinul γ pentru clasa $\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)$.

Teorema 3.4.3 ([11]) $R_{S^*_\gamma}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S)) = r$*, unde r este unica soluţie a ecuaţiei*

$$\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\cos x} \cos x - \gamma = 0,$$

pentru $\gamma \in (0, 1/e)$, unde $x = x(r)$, $0 < x < \pi$ este unic determinat de ecuaţia

$$\sin x \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right) - x = 0$$

şi $r = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$, pentru $\gamma \in [1/e, 1)$.

Folosind faptul că $R_K(S^*_{1/2}) = \sqrt{2\sqrt{3}-3}$ (a se vedea de exemplu [37, II p. 87]), precum şi faptul că operatorul Roper-Suffridge păstrează convexitatea (a se vedea Teorema 3.1.1), deducem următorul rezultat obţinut de Chirilă [11].

Teorema 3.4.4 ([11]) $R_K(\Phi_n(S^*_{1/2})) = \sqrt{2\sqrt{3}-3}$.

Similar, folosind rezultate privind raze de univalenţă prezentate în [37, Capitolul 13] şi faptul că operatorul $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ păstrează noţiunea de stelaritate (a se vedea Teorema 3.1.10), stelaritate de ordinul $\gamma \in (0,1)$ (a se vedea Corolarul 3.2.18) şi spiralitate de tipul $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$ (a se vedea de exemplu [75]), Chirilă [11] a obţinut următoarele rezultate.

Teorema 3.4.5 ([11]) *Dacă $\alpha \in [0,1]$, $\beta \in [0,1/2]$ astfel încât $\alpha + \beta \leq 1$, atunci următoarele relaţii au loc:*

(i) $R_{\hat{S}_\delta}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(S^*_\gamma))$ *este cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei*

$$((1-2\gamma)\cos\delta)x^2 - 2(1-\gamma)x + \cos\delta = 0,\ \delta \in (-\pi/2, \pi/2),\ \gamma \in (0,1).$$

(ii) $R_{S^*_\gamma}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(K)) = \sin(\gamma\pi/2)$, $\gamma \in (0,1)$.

(iii) $R_{\hat{S}_\delta}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(K)) = \cos\delta$, $0 \leq \delta < 1$.

(iv) $R_{S^*}(\Phi_{n,\alpha,\beta}(\hat{S}_\delta)) = 1/(\cos\delta + |\sin\delta|)$, $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

3.5 O generalizare a operatorului de extensie Pfaltzgraff-Suffridge

În această secţiune considerăm operatorul de extensie $\Psi_{n,\alpha}$, $\alpha \geq 0$, care extinde o aplicaţie local biolomorfă $f \in H(B^n)$ la o aplicaţie local biolomorfă $F \in H(B^{n+1})$. În cazul $\alpha = \frac{1}{n+1}$, acest operatorul revine la operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge (3.1.4). Folosind metoda lanţurilor Loewner, arătăm că dacă $f \in S^0(B^n)$, atunci $\Psi_{n,\alpha}(f) \in S^0(B^{n+1})$, pentru $\alpha \in [0, 1/(n+1)]$. În particular, dacă $f \in S^*(B^n)$, atunci $\Psi_{n,\alpha}(f) \in S^*(B^{n+1})$, şi dacă f este spiralată de tipul $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$ pe B^n, atunci $\Psi_{n,\alpha}(f)$ este spiralată de tipul δ pe B^{n+1}. Vom arăta de asemenea că dacă f este aproape stelată de ordinul $\delta \in [0,1)$ pe B^n, atunci $\Psi_{n,\alpha}(f)$ este aproape stelată de ordinul δ pe B^{n+1}. Vom arăta că dacă $f \in K(B^n)$ şi $1/(n+1) \leq \alpha \leq 1/n$, atunci imaginea lui $F = \Psi_{n,\alpha}(f)$ conţine învelitoarea convexă a imaginii unui domeniu Reinhardt conţinut în B^{n+1}. O generalizare a acestui rezultat în cazul aplicaţiilor ε-stelate va fi de asemenea considerată. Vom obţine de asemenea un rezultat de păstrare a subordonării prin operatorul menţionat anterior.

Această secţiune conţine rezultate originale obţinute în [14], [15]. O parte a rezultatelor din această secţiune sunt generalizări ale unor rezultate obţinute de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff (a se vedea [48]), în cazul $\alpha = \frac{1}{n+1}$.

3.5.1 Lanţuri Loewner şi operatorul $\Psi_{n,\alpha}$

Vom începe prin a introduce operatorul $\Psi_{n,\alpha}$. Acest operator a fost considerat de Chirilă [14]. Pentru $n \geq 1$, fie $z' = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ şi $z = (z', z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$.

Definiţia 3.5.1 Fie $\alpha \geq 0$. Operatorul de extensie $\Psi_{n,\alpha} : \mathcal{L}S_n(B^n) \to \mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$ este definit astfel [14]

$$\Psi_{n,\alpha}(f)(z) = F(z) = \Big(f(z'), z_{n+1}[J_f(z')]^\alpha\Big),\ z = (z', z_{n+1}) \in B^{n+1}. \tag{3.5.1}$$

Alegem ramura funcţiei putere astfel încât $[J_f(z')]^\alpha\big|_{z'=0} = 1$. Atunci $F = \Psi_{n,\alpha}(f) \in \mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$, dacă $f \in \mathcal{L}S_n(B^n)$. De asemenea, dacă $f \in S(B^n)$ atunci $F \in S(B^{n+1})$.

Dacă $\alpha = 1/(n+1)$, operatorul $\Psi_{n,1/(n+1)}$ revine la operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge Ψ_n dat de (3.1.4) [91]. Dacă $n = 1$ şi $\alpha = 1/2$, atunci $\Psi_{1,1/2}$ revine la operatorul de extensie Roper-Suffridge Φ_2 (a se vedea [101]). Observăm că operatorul $\Psi_{1,\alpha}$, $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$, a fost considerat de Graham, Kohr şi Kohr [46].

Rezultatul principal al acestei secţiuni este dat de Teorema 3.5.2 obţinută de Chirilă [14]. Acest rezultat arată că operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ păstrează noţiunea de lanţ Loewner. În cazul $\alpha = \frac{1}{n+1}$, a se vedea [48] (a se vedea Teorema 3.1.16).

Teorema 3.5.2 ([14]) *Presupunem că $f \in S(B^n)$ se scufundă într-un lanţ Loewner $f(z', t)$. Atunci $F = \Psi_{n,\alpha}(f)$ se scufundă într-un lanţ Loewner $F(z, t)$, pentru $\alpha \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]$.*

Pe baza Teoremei 3.5.2, obţinem că operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ păstrează noţiunile de reprezentare parametrică, stelaritate, spiralitate de tipul δ, şi aproape stelaritate de ordinul δ. Aceste rezultate au fost obţinute de Chirilă [14]. Corolariile 3.5.3 şi 3.5.4 au fost obţinute de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48] în cazul $\alpha = \frac{1}{n+1}$.

Corolarul 3.5.3 ([14]) *Presupunem că $f \in S^0(B^n)$. Atunci $F = \Psi_{n,\alpha}(f) \in S^0(B^{n+1})$, pentru $\alpha \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]$.*

Corolarul 3.5.4 ([14]) *Presupunem că $f \in S^*(B^n)$. Atunci $F = \Psi_{n,\alpha}(f) \in S^*(B^{n+1})$, pentru $\alpha \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]$.*

Corolarul 3.5.5 ([14]) *Presupunem că $f \in \hat{S}_\delta(B^n)$, unde $\delta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Atunci $F = \Psi_{n,\alpha}(f) \in \hat{S}_\delta(B^{n+1})$, pentru $\alpha \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]$.*

Următorul rezultat obţinut de Chirilă [14] arată că operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ păstrează noţiunea de aproape stelaritate de ordinul $\delta \in [0, 1)$ (compară cu [114]).

Corolarul 3.5.6 ([14]) *Presupunem că f este o aplicaţie aproape stelată de ordinul δ pe B^n, unde $\delta \in [0, 1)$. Atunci $F = \Psi_{n,\alpha}(f)$ este o aplicaţie aproape stelată de ordinul δ pe B^{n+1}, unde $\alpha \in \left[0, \frac{1}{n+1}\right]$.*

3.5.2 ε-stelaritate şi operatorul $\Psi_{n,\alpha}$

În continuare discutăm cazul aplicaţiilor ε-stelate asociate operatorului $\Psi_{n,\alpha}$, pentru $\alpha \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.

Pentru $a \in (0,1]$, fie

$$\Omega_{a,n,\alpha} = \{z = (z', z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} : |z_{n+1}|^2 < a^{2n\alpha}(1 - \|z'\|^2)^{(n+1)\alpha}\}.$$

Atunci $\Omega_{a,n,\alpha} \subseteq B^{n+1}$. Pentru $a = 1$ şi $\alpha = \frac{1}{n+1}$, obţinem că $\Omega_{1,n,\frac{1}{n+1}} = B^{n+1}$.

Următoarea teoremă a fost obţinută de Chirilă [14]. Dacă $\varepsilon = 1$, aceasta reprezintă un rezultat parţial de păstrare a convexităţii prin operatorul $\Psi_{n,\alpha}$. Teorema 3.5.7 a fost obţinută în [48], în cazul $\alpha = \frac{1}{n+1}$ şi $\varepsilon = 1$ (compară cu [35]).

Teorema 3.5.7 ([14]) *Fie $\varepsilon \in [0,1]$ şi fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie ε-stelată normată. De asemenea, fie $F = \Psi_{n,\alpha}(f)$, pentru $\alpha \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, şi fie $a_1, a_2 > 0$ astfel încât $a_1 + a_2 \leq 1$. Atunci*

$$(1-\lambda)F(z) + \lambda\varepsilon F(w) \in F(\Omega_{a_1+a_2,n,\alpha}),\ z \in \Omega_{a_1,n,\alpha},\ w \in \Omega_{a_2,n,\alpha},\ \lambda \in [0,1].$$

Luând $\varepsilon = 1$ în Teorema 3.5.7, Chirilă [14] a obţinut următorul rezultat parţial referitor la păstrarea convexităţii prin operatorul $\Psi_{n,\alpha}$. Dacă $\alpha = \frac{1}{n+1}$, a se vedea [48] (a se vedea Teorema 3.1.15).

Corolarul 3.5.8 ([14]) *Dacă $f \in K(B^n)$ şi $F = \Psi_{n,\alpha}(f)$, atunci $(1-\lambda)F(z) + \lambda F(w) \in F(\Omega_{a_1+a_2,n,\alpha})$, $z \in \Omega_{a_1,n,\alpha}$, $w \in \Omega_{a_2,n,\alpha}$, $\lambda \in [0,1]$, unde $a_1, a_2 > 0$, $a_1 + a_2 \leq 1$.*

Luând $\alpha = \frac{1}{n+1}$ în Teorema 3.5.7, Chirilă [14] a obţinut următorul rezultat referitor la păstrarea ε-stelarităţii prin operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge Ψ_n (conform [48], pentru $\varepsilon = 1$; compară cu [35]).

Corolarul 3.5.9 ([14]) *Fie $\varepsilon \in [0,1]$ şi fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie ε-stelată normată. De asemenea, fie $F = \Psi_n(f)$ şi fie $a_1, a_2 > 0$ astfel încât $a_1 + a_2 \leq 1$. Atunci*

$$(1-\lambda)F(z) + \lambda\varepsilon F(w) \in F(\Omega_{a_1+a_2,n,1/(n+1)}),$$

oricare ar fi $z \in \Omega_{a_1,n,1/(n+1)}$, $w \in \Omega_{a_2,n,1/(n+1)}$ şi $\lambda \in [0,1]$.

Alegând $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ în Corolarul 3.5.9 şi folosind faptul că $\Omega_{1,n,1/(n+1)} = B^{n+1}$, deducem următorul rezultat obţinut de Chirilă [14]. În cazul $\varepsilon = 1$, a se vedea [48].

Corolarul 3.5.10 ([14]) *Dacă f este o aplicaţie ε-stelată normată pe B^n, $\varepsilon \in [0,1]$, şi $F = \Psi_n(f)$, atunci*

$$(1-\lambda)F(z) + \lambda\varepsilon F(w) \in F(B^{n+1}),\ z, w \in \Omega_{1/2,n,1/(n+1)},\ \lambda \in [0,1].$$

Observaţia 3.5.11 Operatorul $\Psi_{n,\alpha}$ a fost generalizat pe anumite domenii Reinhardt în $\mathbb{C}^n$ de către Chirilă [15], şi proprietăţi similare celor de mai sus au fost obţinute.

3.5.3 Subordonare şi operatorul $\Psi_{n,\alpha}$

În continuare obţinem un rezultat de păstrare a subordonării prin operatorul $\Psi_{n,\alpha}$, şi prezentăm câteva cazuri particulare ale acestuia. Teorema 3.5.12 a fost obţinută de Chirilă [17] (a se vedea [56] pentru $\alpha = 1/(n+1)$).

Teorema 3.5.12 ([17]) *Fie $f, g : B^n \to \mathbb{C}^n$ două aplicaţii local biolomorfe astfel încât $f(0) = g(0) = 0$, $Df(0) = aI_n$, $Dg(0) = bI_n$, unde $0 < a \leq b$. Dacă $\alpha \in [0, 1/(n+1)]$ şi $f \prec g$, atunci $\Psi_{n,\alpha}(f) \prec \Psi_{n,\alpha}(g)$. Alegem ramurile funcţiilor putere astfel încât*

$$[J_f(z')]^\alpha|_{z'=0} = a^{n\alpha} \text{ şi } [J_g(z')]^\alpha|_{z'=0} = b^{n\alpha}.$$

Următoarele consecinţe ale Teoremei 3.5.12 au fost obţinute de Chirilă [17]. Aceste rezultate au fost obţinute în [56] pentru $\alpha = 1/(n+1)$.

Corolarul 3.5.13 ([17]) *Fie $f \in \mathcal{L}S_n(B^n)$ şi $M \geq 1$ astfel încât $\|f(z')\| \leq M$, $z' \in B^n$. Atunci $\|\Psi_{n,\alpha}(f)(z)\| \leq M$, $z \in B^{n+1}$, pentru $\alpha \in [0, 1/(n+1)]$. Mai mult, $\Psi_{n,\alpha}(f)$ este biolomorfă pe bila B^{n+1}_ρ, unde $\rho = 1/(mM^n)$ şi $m = \min\limits_{r\in[0,1]} (2-r^2)/(r(1-r^2))$.*

Corolarul 3.5.14 ([17]) *Fie $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ o aplicaţie local biolomorfă pe B^n astfel încât $f(0) = 0$ şi $Df(0) = aI_n$, $a \in (0, 1]$. Fie $g \in S^0(B^n)$ şi presupunem că $f \prec g$. Atunci $\|\Psi_{n,\alpha}(f)(z)\| \leq \|z\|/(1-\|z\|)^2$, $z \in B^{n+1}$, pentru $\alpha \in [0, 1/(n+1)]$.*

Capitolul 4

Subclase de aplicaţii biolomorfe asociate g-lanţurilor Loewner

În acest capitol folosim metoda lanţurilor Loewner pentru a genera anumite subclase de aplicaţii biolomorfe normate pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$, care au caracterizări geometrice interesante. Vom prezenta clasa aplicaţiilor g-stelate, g-spiralate de tipul $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, şi g-aproape stelate de ordinul $\alpha \in [0, 1)$ pe B^n. Vom prezenta exemple pentru aceste clase şi vom obţine caracterizarea acestora folosind g-lanţuri Loewner. Vom folosi aceste rezultate pentru a demonstra că, în anumite ipoteze, aplicaţia $F : B^n \to \mathbb{C}^n$ dată de $F(z) = P(z)z$ este g-stelată, g-spiralată de tipul $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi g-aproape stelată de ordinul $\alpha \in [0, 1)$ pe B^n, unde $P : B^n \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă astfel încât $P(0) = 1$. Mai general, vom considera condiţii astfel încât F să admită g-reprezentare parametrică pe B^n. Diferite aplicaţii ale acestor rezultate vor fi obţinute. Astfel putem obţine exemple concrete de aplicaţii care admit g-reprezentare parametrică pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$.

Acest capitol conţine rezultate originale obţinute în [13].

4.1 g-stelaritate, g-spiralitate şi g-aproape stelaritate pe B^n

În această secţiune prezentăm definiţia aplicaţiilor g-stelate, g-spiralate de tipul α şi g-aproape stelate de ordinul α, precum şi caracterizarea acestora folosind g-lanţuri Loewner. Prezentăm de asemenea exemple pentru aceste subclase de aplicaţii biolomorfe. Rezultatele prezentate în această secţiune au fost obţinute de Chirilă [13].

4.1.1 Definiţii şi exemple

Începem prin a prezenta clasa aplicaţiilor g-stelate pe B^n, unde g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Această noţiune a fost introdusă de Graham, Hamada şi Kohr [38] şi de Hamada şi Honda [52]. Această noţiune a fost de asemenea studiată de Xu şi Liu în cazul spaţiilor Banach complexe [115].

Definiţia 4.1.1 O aplicaţie local biolomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte *g-stelată* pe B^n dacă

$$\frac{1}{\|z\|^2}\langle [Df(z)]^{-1}f(z), z\rangle \in g(U),\ z \in B^n \setminus \{0\}. \tag{4.1.1}$$

Notăm clasa aplicaţiilor g-stelate pe B^n prin $S_g^*(B^n)$. Dacă $n = 1$, notăm această clasă prin S_g^*. Dacă $g(\zeta) = (1-\zeta)/(1+\zeta)$, această clasă revine la clasa aplicaţiilor stelate pe B^n.

Prezentăm acum câteva exemple particulare ale clasei $S_g^*(B^n)$ (conform [52]).

Observaţia 4.1.2 Dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$ şi $\gamma \in (0,1)$, atunci g transformă discul unitate U în discul deschis de centru $1/(2\gamma)$ şi rază $1/(2\gamma)$. Atunci clasa $S_g^*(B^n)$ revine la clasa aplicaţiilor stelate de ordinul γ pe B^n.

Observaţia 4.1.3 Dacă $g(\zeta) = (1-\alpha)\frac{1-\zeta}{1+\zeta} + \alpha$, $|\zeta| < 1$ şi $0 \le \alpha < 1$, relaţia (4.1.1) poate fi rescrisă astfel

$$\text{Re } \langle [Df(z)]^{-1}f(z), z\rangle > \alpha\|z\|^2,\ z \in B^n \setminus \{0\}.$$

Aşadar clasa $S_g^*(B^n)$ revine la clasa aplicaţiilor aproape stelate de ordinul α pe B^n.

Fie

$$q_\rho(\zeta) = 1 + \frac{4(1-\rho)}{\pi^2}\left(\log\frac{1+\sqrt{\zeta}}{1-\sqrt{\zeta}}\right)^2,\ 0 \le \rho < 1.$$

Alegem ramura radicalului astfel încât $\sqrt{\zeta}|_{\zeta=1} = 1$ şi ramura logaritmului astfel încât $\log 1 = 0$.

Definiţia 4.1.4 **([53])** O aplicaţie local biolomorfă $f \in H(B^n)$ se numeşte *parabolic stelată de ordinul* ρ dacă

$$\frac{1}{\|z\|^2}\langle [Df(z)]^{-1}f(z), z\rangle \in g(U),\ z \in B^n \setminus \{0\},$$

unde $g = \dfrac{1}{q_\rho}$.

Hamada, Honda şi Kohr [53] au demonstrat că $g(U)$ este stelată în raport cu 1.

Pentru diferite rezultate referitoare la aplicaţiile g-stelate, cum ar fi teoreme de deformare şi acoperire şi estimări ale coeficienţilor, a se vedea [38], [52], [115].

În continuare definim clasa aplicaţiilor g-spiralate de tipul $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ pe B^n, unde g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Această noţiune a fost introdusă de Chirilă [13].

Definiţia 4.1.5 **([13])** O aplicaţie local biolomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte *g-spiralată de tipul* $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ dacă

$$i\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{e^{-i\alpha}}{\cos\alpha}\left\langle [Df(z)]^{-1}f(z), \frac{z}{\|z\|^2}\right\rangle \in g(U),\ z \in B^n \setminus \{0\}. \tag{4.1.2}$$

Dacă $g(\zeta) = (1-\zeta)/(1+\zeta)$, această clasă revine la clasa aplicaţiilor spiralate de tipul α pe B^n, şi dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, $\gamma \in (0,1)$, obţinem clasa aplicaţiilor spiralate de tipul α şi ordinul γ pe B^n. Dacă $\alpha = 0$, clasa aplicaţiilor g-spiralate de tipul 0 pe B^n revine la clasa aplicaţiilor g-stelate pe B^n.

Dacă f este g-spiralată de tipul α, atunci f este de asemenea spiralată de tipul α, deci f este biolomorfă pe B^n. Pe de altă parte, motivaţia introducerii clasei aplicaţiilor g-spiralate de tipul α este dată de Corolarul 4.2.13.

În continuare prezentăm clasa aplicaţiilor g-aproape stelate de ordinul $\alpha \in [0,1)$ pe B^n, unde g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Această clasă a fost introdusă de Chirilă [13].

Definiţia 4.1.6 (**[13]**) O aplicaţie local biolomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ se numeşte *g-aproape stelată de ordinul* $\alpha \in [0,1)$ dacă

$$\frac{1}{1-\alpha}\left\langle [Df(z)]^{-1}f(z), \frac{z}{\|z\|^2}\right\rangle - \frac{\alpha}{1-\alpha} \in g(U),\ z \in B^n \setminus \{0\}. \tag{4.1.3}$$

Dacă $g(\zeta) = (1-\zeta)/(1+\zeta)$, această clasă revine la clasa aplicaţiilor aproape stelate de ordinul α pe B^n, şi dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, $\gamma \in (0,1)$, obţinem clasa aplicaţiilor aproape stelate de ordinul α şi tipul γ pe B^n. Dacă $\alpha = 0$, clasa aplicaţiilor g-aproape stelate de ordinul 0 pe B^n revine la clasa aplicaţiilor g-stelate pe B^n.

Dacă f este g-aproape stelată de ordinul α, atunci f este de asemenea aproape stelată de ordinul α, şi deci f este biolomorfă pe B^n. Motivaţia introducerii clasei aplicaţiilor g-aproape stelate de ordinul α pe B^n este dată de Corolarul 4.2.15.

În continuare prezentăm exemple de aplicaţii g-stelate, g-spiralate de tipul α şi g-aproape stelate de ordinul α pe discul unitate U şi pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ (conform [52]).

Prezentăm acum un exemplu de funcţie g-stelată pe discul unitate U (a se vedea [52]).

Exemplul 4.1.7 Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. De asemenea, fie $b \in S_g^*$ definită prin $b(0) = 0$, $b'(0) = 1$ şi

$$\frac{\zeta b'(\zeta)}{b(\zeta)} = \frac{1}{g(\zeta)},\ |\zeta| < 1.$$

Atunci

$$b(\zeta) = \zeta \exp \int_0^\zeta \left[\frac{1}{g(x)} - 1\right]\frac{dx}{x},\ |\zeta| < 1. \tag{4.1.4}$$

Funcţia b dată de relaţia (4.1.4) este g-stelată pe U, prin urmare b are g-reprezentare parametrică pe U (a se vedea Teorema 4.1.11).

În continuare prezentăm exemple de aplicaţii g-stelate pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$ (conform [52]).

Exemplul 4.1.8 Presupunem că g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13.

(i) Presupunem că g este convexă. Dacă $f_1, \ldots, f_n \in S_g^*$, atunci $f \in S_g^*(B^n)$, unde $f(z) = (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n))$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in B^n$. Mai mult, $f \in S_g^0(B^n)$.

(ii) Dacă $f \in S_g^*$, atunci aplicaţia $F(z) = \dfrac{f(z_1)}{z_1} z$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in B^n$, este g-stelată pe B^n. Prin urmare $F \in S_g^0(B^n)$.

În continuare prezentăm exemple de aplicaţii g-spiralate de tipul α pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. Aceste exemple au fost obţinute de Chirilă [13] (conform [52]).

Exemplul 4.1.9 Presupunem că g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13.

(i) Presupunem că g este convexă. Dacă $f_1, \ldots, f_n$ sunt g-spiralate de tipul α pe U, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$, atunci $f(z) = (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n))$ este g-spiralată de tipul α pe B^n. Mai mult, $f \in S_g^0(B^n)$.

(ii) Dacă f este g-spiralată de tipul $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ pe U , atunci aplicaţia $F(z) = \dfrac{f(z_1)}{z_1} z$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in B^n$, este g-spiralată de tipul α pe B^n. Prin urmare $F \in S_g^0(B^n)$.

În continuare prezentăm exemple de aplicaţii g-aproape stelate de ordinul $\alpha \in [0, 1)$ pe bila unitate Euclidiană B^n în $\mathbb{C}^n$. Aceste exemple au fost obţinute de Chirilă [13] (conform [52]).

Exemplul 4.1.10 Presupunem că g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13.

(i) Presupunem că $g(U)$ este stelată în raport cu 1. Dacă f_1 este g-aproape stelată de ordinul α pe U, $\alpha \in [0, 1)$, atunci $f(z) = (f_1(z_1), z_2, \ldots, z_n)$ este g-aproape stelată de ordinul α pe B^n. Mai mult, $f \in S_g^0(B^n)$.

(ii) Presupunem că g este convexă. Dacă $f_1, \ldots, f_n$ sunt g-aproape stelate de ordinul α pe U, $\alpha \in [0, 1)$, atunci $f(z) = (f_1(z_1), \ldots, f_n(z_n))$ este g-aproape stelată de ordinul α pe B^n. Mai mult, $f \in S_g^0(B^n)$.

(iii) Dacă f este g-aproape stelată de ordinul $\alpha \in [0, 1)$ pe U , atunci aplicaţia $F(z) = \dfrac{f(z_1)}{z_1} z$, $z = (z_1, \ldots, z_n) \in B^n$, este g-aproape stelată de ordinul α pe B^n. Prin urmare $F \in S_g^0(B^n)$.

4.1.2 Caracterizări folosind g-lanţuri Loewner

În această secţiune obţinem caracterizarea aplicaţiilor g-stelate, g-spiralate de tipul α, şi g-aproape stelate de ordinul α, prin intermediul g-lanţurilor Loewner.

Începem prin a prezenta caracterizarea aplicaţiilor g-stelate folosind g-lanţuri Loewner, unde g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Acest rezultat a fost obţinut de Chirilă [13]. Dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $|\zeta| < 1$, obţinem caracterizarea obişnuită a stelarităţii folosind lanţuri Loewner (a se vedea [90]; a se vedea de asemenea Teorema 2.4.6).

Teorema 4.1.11 ([13]) *O aplicaţie local biolomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ este g-stelată dacă şi numai dacă $f(z,t) = e^t f(z)$ este g-lanţ Loewner, unde g verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13.

Caracterizarea aplicaţiilor g-spiralate de tipul $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ pe B^n folosind g-lanţuri Loewner a fost obţinută de Chirilă [13], unde g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13 (compară cu [54]). În cazul $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$ în Teorema 4.1.12, obţinem caracterizarea obişnuită a spiralităţii de tipul α folosind lanţuri Loewner (a se vedea Teorema 2.4.7).

Teorema 4.1.12 ([13]) *O aplicaţie local biolomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ este g-spiralată de tipul $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ dacă şi numai dacă $f(z,t) = e^{(1-ia)t} f(e^{iat} z)$ este g-lanţ Loewner, unde $a = \tan \alpha$ şi g verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13.

Chirilă [13] a obţinut de asemenea caracterizarea aplicaţiilor g-aproape stelate de ordinul $\alpha \in [0,1)$ folosind g-lanţuri Loewner, unde g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Dacă considerăm $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$ în Teorema 4.1.13, obţinem caracterizarea aplicaţiilor aproape stelate de ordinul α folosind lanţuri Loewner (a se vedea [114]; a se vedea de asemenea Teorema 2.4.8).

Teorema 4.1.13 ([13]) *O aplicaţie local biolomorfă normată $f : B^n \to \mathbb{C}^n$ este g-aproape stelată de ordinul $\alpha \in [0,1)$ dacă şi numai dacă $f(z,t) = e^{\frac{1}{1-\alpha}t} f(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}t} z)$ este g-lanţ Loewner, unde g verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13.

4.2 O subclasă de aplicaţii biolomorfe pe B^n generată de g-lanţuri Loewner

În continuare, folosind caracterizările obţinute în secţiunea precedentă, vom arăta că, în anumite ipoteze, aplicaţia $F(z) = P(z)z$, $z \in B^n$, este g-stelată, g-spiralată de tipul $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi g-aproape stelată de ordinul $\alpha \in [0,1)$ pe B^n, unde $P : B^n \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă astfel încât $P(0) = 1$. Mai general, considerăm condiţii astfel încât F are g-reprezentare parametrică pe B^n, unde g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Diferite aplicaţii ale acestor rezultate vor fi obţinute.

Această secţiune se bazează pe rezultatele originale obţinute în [13].

Teorema 4.2.1 obţinută de Chirilă [13] reprezintă rezultatul principal al acestei secţiuni. În această teoremă considerăm condiţii astfel încât o aplicaţie $F : B^n \to \mathbb{C}^n$ dată de $F(z) = P(z)z$ aparţine lui $S_g^0(B^n)$, unde $P \in H(B^n, \mathbb{C})$ astfel încât $P(0) = 1$. Diferite cazuri particulare şi aplicaţii ale Teoremei 4.2.1 vor fi de asemenea obţinute.

Teorema 4.2.1 ([13]) *Fie $P : B^n \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe B^n astfel încât $P(0) = 1$ şi fie $F(z) = P(z)z$, $z \in B^n$. Fie $F(z,t) = P(z,t)z$, $z \in B^n$, $t \geq 0$, unde $P(z,t) : B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ verifică următoarele condiţii:*

(i) $P(\cdot,t) \in H(B^n, \mathbb{C})$, $P(0,t) = e^t$, $t \geq 0$, $P(\cdot,0) = P$, $P(z,t) \neq 0$, $z \in B^n$, $t \geq 0$, şi

$$1 + \frac{DP(z,t)(z)}{P(z,t)} \neq 0, \text{ pentru } z \in B^n \text{ şi } t \geq 0;$$

(ii) *$P(z,\cdot)$ este local Lipschitz continuă pe $[0,\infty)$ local uniform în raport cu $z \in B^n$.*

(iii) *$\{e^{-t}P(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală pe B^n.*

Dacă g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13 *şi*

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial t}(z,t)}{P(z,t)\left(1+\dfrac{DP(z,t)(z)}{P(z,t)}\right)} \in g(U), \quad \text{a.e. } t \geq 0,\ \forall z \in B^n, \tag{4.2.1}$$

atunci $F(z,t)$ este un g-lanţ Loewner. Mai mult, $F \in S_g^0(B^n)$.

Se observă uşor că reciproca Teoremei 4.2.1 are loc (a se vedea [13]).

Propoziţia 4.2.2 *Fie $P : B^n \to \mathbb{C}$ o funcţie olomorfă pe B^n astfel încât $P(0) = 1$ şi fie $F(z) = P(z)z$, $z \in B^n$. Fie $F(z,t) = P(z,t)z$, $z \in B^n$, $t \geq 0$, unde $P(z,t) : B^n \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ verifică condiţiile $(i)-(iii)$ ale Teoremei* 4.2.1*. Dacă g verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13 *şi $F(z,t)$ este un g-lanţ Loewner, atunci relaţia* $(4.2.1)$ *are loc.*

Pe baza Teoremei 4.2.1, Chirilă [13] a obţinut următoarele cazuri particulare.

Corolarul 4.2.3 a fost obţinut de Pfaltzgraff şi Suffridge [91] în cazul $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, şi de Graham, Hamada şi Kohr [38], în cazul în care $g : U \to \mathbb{C}$ verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Corolarul 4.2.3 a fost de asemenea obţinut de Chirilă [13].

Corolarul 4.2.3 *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13*. De asemenea, fie $F(z) = P(z)z$, $z \in B^n$, unde $P : B^n \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă astfel încât $P(0) = 1$. Dacă $1 + \frac{DP(z)(z)}{P(z)} \in \frac{1}{g}(U)$, $z \in B^n$, atunci $F(z,t) = e^tP(z)z$, $z \in B^n$, $t \geq 0$, este g-lanţ Loewner. Mai mult, $F \in S_g^*(B^n)$.*

Dacă considerăm $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, $\gamma \in [0,1)$, în Corolarul 4.2.3, obţinem următoarea consecinţă, pe baza Observaţiei 4.1.2 (a se vedea [13]).

Corolarul 4.2.4 *Fie $F(z) = P(z)z$, $z \in B^n$, unde $P : B^n \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă astfel încât $P(0) = 1$. Dacă*

$$\operatorname{Re}\left[1+\frac{DP(z)(z)}{P(z)}\right] > \gamma, \quad z \in B^n,$$

atunci F este stelată de ordinul γ pe B^n, unde $\gamma \in [0,1)$.

Observaţia 4.2.5 În aceleaşi ipoteze ca şi ale Corolarului 4.2.3, considerând valoarea lui g ca şi în Observaţia 4.1.3 şi Definiţia 4.1.4, obţinem că F este aproape stelată de ordinul $\alpha \in [0,1)$, respectiv parabolic stelată de ordinul $\rho \in [0,1)$ pe B^n (a se vedea [13]).

În continuare prezentăm aplicaţii ale Corolarului 4.2.3. Pentru aceasta, avem nevoie de următorul rezultat. În cazul $g(\zeta) \equiv \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, Propoziţia 4.2.6 a fost obţinută de Pfaltzgraff şi Suffridge [91], iar în cazul în care g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13, acest rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada şi Kohr [38]. Xu şi Liu [115] au obţinut o generalizare a Propoziţiei 4.2.6 în cazul spaţiilor Banach complexe.

Propoziţia 4.2.6 *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13, astfel încât $1/g$ este convexă pe U. Fie $f_j \in S_g^*$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Dacă $\lambda_j \geq 0$ şi $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, atunci*

$$F(z) = z \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{f_j(z_j)}{z_j} \right)^{\lambda_j}, \ z \in B^n \tag{4.2.2}$$

aparţine lui $S_g^*(B^n)$.

Dacă considerăm $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, $\gamma \in [0, 1)$ în Propoziţia 4.2.6, obţinem următoarea consecinţă. Acest rezultat a fost obţinut de Xu şi Liu [115] în cazul spaţiilor Banach complexe (a se vedea de asemenea [13]).

Corolarul 4.2.7 *Dacă $f_j \in S_\gamma^*$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\gamma \in [0, 1)$ şi $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, atunci*

$$F(z) = z \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{f_j(z_j)}{z_j} \right)^{\lambda_j}$$

este stelată de ordinul γ pe B^n. Mai mult,

$$\frac{1-(1-2\gamma)\|z\|}{(1+\|z\|)^{2n(1-\gamma)+1}} \leq |J_F(z)| \leq \frac{1+(1-2\gamma)\|z\|}{(1-\|z\|)^{2n(1-\gamma)+1}}, \ z \in B^n. \tag{4.2.3}$$

Această estimare este exactă.

În continuare formulăm următoarea conjectură (a se vedea [13]).

Conjectură. Dacă $f \in S_\gamma^*(B^n)$, $\gamma \in [0, 1)$, atunci relaţia $(4.2.3)$ are loc.

Din Corolarul 4.2.7 obţinem următoarea consecinţă (conform [91], [115, Teorema 5]; a se vedea de asemenea [13]).

Corolarul 4.2.8 *Dacă $f_j \in K$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ şi F este dată de $(4.2.2)$, atunci $F \in S_{1/2}^*(B^n)$ şi*

$$\frac{1}{(1+\|z\|)^{n+1}} \leq |J_F(z)| \leq \frac{1}{(1-\|z\|)^{n+1}}, \ z \in B^n. \tag{4.2.4}$$

Acest rezultat este exact.

Observaţia 4.2.9 Corolarul 4.2.8 nu are loc pentru familia $K(B^n)$ (a se vedea de exemplu [44]). De fapt, nu se cunosc estimări exacte pentru $|J_F(z)|$, $F \in K(B^n)$. Discuţii generale despre J_F, unde $F \in K(B^n)$, pot fi găsite în [32] şi [44].

Observaţia 4.2.10 Folosind Propoziţia 4.2.6, Observaţia 4.1.3 şi Definiţia 4.1.4, obţinem că aplicaţia F dată de (4.2.2) păstrează noţiunile de aproape stelaritate de ordinul $\alpha \in [0,1)$, respectiv parabolic stelaritate de ordinul $\rho \in [0,1)$ pe B^n (a se vedea [13]).

În continuare prezentăm o altă aplicaţie a Corolarului 4.2.3. Următorul rezultat a fost considerat de Chirilă [13].

Corolarul 4.2.11 *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13 *şi presupunem că $1/g$ este convexă pe U. Fie $p_j(\zeta)$ o funcţie olomorfă normată pe U astfel încât $1 + \frac{\zeta p_j''(\zeta)}{p_j'(\zeta)} \prec \frac{1}{g}(\zeta)$, pentru $\zeta \in U$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Dacă $\lambda_j \geq 0$ şi $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, atunci*

$$F(z) = z\prod_{j=1}^{n}(p_j'(z_j))^{\lambda_j},\ z \in B^n \tag{4.2.5}$$

este o aplicaţie din $S_g^*(B^n)$.

Dacă alegem $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, $\gamma \in [0,1)$ în Corolarul 4.2.11, deducem următoarea consecinţă obţinută de Chirilă [13].

Corolarul 4.2.12 *Dacă $f_j \in K(\gamma)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\gamma \in [0,1)$ şi $\lambda_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$, atunci*

$$F(z) = z\prod_{j=1}^{n}(f_j'(z_j))^{\lambda_j}$$

este stelată de ordinul γ pe B^n.

Pe baza Teoremei 4.2.1, obţinem următoarea consecinţă privind aplicaţiile g-spiralate de tipul α pe B^n. Următorul corolar a fost obţinut de Chirilă [13].

Corolarul 4.2.13 ([13]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13*. De asemenea, fie $F(z) = P(z)z$, $z \in B^n$, unde $P : B^n \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă astfel încât $P(0) = 1$ şi $1 + \frac{DP(z)(z)}{P(z)} \neq 0$, $z \in B^n$. Dacă $\frac{1+ia\frac{DP(z)(z)}{P(z)}}{1+\frac{DP(z)(z)}{P(z)}} \in g(U)$, $z \in B^n$, atunci $F(z,t) = e^t P(e^{iat}z)z$, $z \in B^n$, $t \geq 0$, este g-lanţ Loewner, unde $a = \tan\alpha$ şi $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$. Mai mult, F este g-spiralată de tipul α pe B^n.*

Considerând $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, $\gamma \in [0,1)$ în Corolarul 4.2.13, Chirilă [13] a obţinut următoarea consecinţă.

Corolarul 4.2.14 *Fie $F(z) = P(z)z$, $z \in B^n$, unde $P : B^n \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă astfel încât $P(0) = 1$ şi $1 + \frac{DP(z)(z)}{P(z)} \neq 0$, $z \in B^n$. Dacă*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1+\frac{DP(z)(z)}{P(z)}}{1+ia\frac{DP(z)(z)}{P(z)}}\right] > \gamma, \quad z \in B^n,$$

atunci F este spiralată de tipul α şi ordinul γ pe B^n, unde $a = \tan\alpha$, $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\gamma \in [0, 1)$.

Pe baza Teoremei 4.2.1, Chirilă [13] a obţinut următoarea consecinţă privind aplicaţiile g-aproape stelate de ordinul α pe B^n.

Corolarul 4.2.15 ([13]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă, care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. De asemenea, fie $F(z) = P(z)z$, $z \in B^n$, unde $P : B^n \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă astfel încât $P(0) = 1$ şi $1 + \frac{DP(z)(z)}{P(z)} \neq 0$, $z \in B^n$. Dacă $\frac{1+\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{DP(z)(z)}{P(z)}}{1+\frac{DP(z)(z)}{P(z)}} \in g(U)$, $z \in B^n$, $\alpha \in [0, 1)$, atunci $F(z, t) = e^t P(e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}t}z)z$, $z \in B^n$, $t \geq 0$, este g-lanţ Loewner. Mai mult, F este g-aproape stelată de ordinul α pe B^n.*

Dacă considerăm $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+(1-2\gamma)\zeta}$, $|\zeta| < 1$, $\gamma \in [0, 1)$ în Corolarul 4.2.15, deducem următoarea consecinţă obţinută de Chirilă [13].

Corolarul 4.2.16 *Fie $F(z) = P(z)z$, $z \in B^n$, unde $P : B^n \to \mathbb{C}$ este o funcţie olomorfă astfel încât $P(0) = 1$ şi $1 + \frac{DP(z)(z)}{P(z)} \neq 0$, $z \in B^n$. Dacă*

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1+\frac{DP(z)(z)}{P(z)}}{1+\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{DP(z)(z)}{P(z)}}\right] > \gamma, \quad z \in B^n,$$

atunci F este aproape stelată de ordinul α şi tipul γ pe B^n, unde $\gamma \in [0, 1)$ şi $\alpha \in [0, 1)$.

Capitolul 5

Puncte extreme şi puncte suport asociate familiei $\overline{S_g^0(B^n)}$

În acest capitol considerăm puncte extreme şi puncte suport asociate familiei compacte $\overline{S_g^0(B^n)}$, unde $g : U \to \mathbb{C}$ este o funcţie univalentă care verifică anumite condiţii naturale. Diferite consecinţe şi aplicaţii vor fi de asemenea prezentate. Vom discuta de asemenea cazul punctelor extreme şi punctelor suport asociate operatorilor de extensie care păstrează lanţuri Loewner. Contribuţii recente în această direcţie au fost obţinute în [18], [41], [83], [84], [106].

În cazul unei variabile complexe, Pell [87] şi Kirwan [61] au demonstrat că dacă f este un punct extrem (respectiv, f este un punct suport) al familiei S a funcţiilor univalente normate pe discul unitate U, şi dacă $f(z,t)$ este un lanţ Loewner astfel încât $f = f(\cdot, 0)$, atunci $e^{-t}f(\cdot,t)$ este un punct extrem pentru S (respectiv, $e^{-t}f(\cdot,t)$ este un punct suport pentru S), oricare ar fi $t \geq 0$.

O foarte bună discuţie privind probleme extremale asociate diferitelor subclase compacte de funcţii unvalente pe discul unitate U pot fi găsite în [50], [97], [104].

O generalizare a rezultatelor lui Pell şi Kirwan la mai multe variabile complexe a fost obţinută de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48], în cazul familiei compacte $\Phi_n(S)$, unde Φ_n este operatorul de extensie Roper-Suffridge. Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41] şi Schleissinger [106] au obţinut generalizări ale rezultatelor precedente în cazul aplicaţiilor care admit reprezentare parametrică pe B^n. Muir şi Suffridge [84] au considerat diferite caracterizări ale punctelor extreme pentru aplicaţii convexe pe B^n. Pe de altă parte, Muir [83] a considerat puncte extreme şi puncte suport pentru subclase compacte asociate unei familii generale de operatori de extensie.

În acest capitol considerăm versiunea n-dimensională a rezultatelor lui Pell [87] şi Kirwan [61] în cazul familiei $\overline{S_g^0(B^n)}$.

Acest capitol conţine rezultate originale obţinute în [18] şi [17].

5.1 Rezultate preliminare

Începem această secţiune prin a reaminti noţiunile de puncte extreme şi puncte suport pentru submulţimi compacte ale lui $H(B^n)$, unde B^n este bila unitate Euclidiană în $\mathbb{C}^n$.

Definiţia 5.1.1 (vezi de exemplu **[50]**) Fie $\mathcal{F}$ o submulţime a lui $H(B^n)$.

(i) Un punct $f \in \mathcal{F}$ se numeşte *punct extrem* al lui $\mathcal{F}$ dacă $f = tg+(1-t)h$, oricare ar fi $t \in (0,1)$, $g, h \in \mathcal{F}$, implică faptul că $f = g = h$. Cu alte cuvinte, $f \in \mathcal{F}$ este un punct extrem al lui $\mathcal{F}$ dacă f nu poate fi scris ca şi o combinaţie convexă proprie a două puncte din $\mathcal{F}$.

(ii) Un punct $g \in \mathcal{F}$ se numeşte *punct suport* al lui $\mathcal{F}$ dacă există o funcţională liniară şi continuă $L : H(B^n) \to \mathbb{C}$ astfel încât $\operatorname{Re} L|_{\mathcal{F}}$ nu este constantă şi $\operatorname{Re} L(g) = \max_{h\in\mathcal{F}} \operatorname{Re} L(h)$.

Notăm prin $\operatorname{ex} \mathcal{F}$ şi $\operatorname{supp} \mathcal{F}$ submulţimile lui $\mathcal{F}$ formate din puncte extreme ale lui $\mathcal{F}$, respectiv puncte suport ale lui $\mathcal{F}$.

Observaţia 5.1.2 Pell [87] şi Kirwan [61] au demonstrat că dacă f este un punct extrem al lui S (respectiv, f este un punct suport al lui S) şi dacă $f(z,t)$ este un lanţ Loewner astfel încât $f = f(\cdot, 0)$, atunci $e^{-t}f(\cdot,t)$ este un punct extrem al lui S (respectiv, $e^{-t}f(\cdot,t)$ este un punct suport al lui S), oricare ar fi $t \geq 0$.

Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48] au studiat puncte extreme şi puncte suport pentru familii de aplicaţii univalente pe B^n construite folosind operatorul de extensie Roper-Suffridge.

Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41] au demonstrat următorul rezultat privind puncte extreme pentru familia compactă $S^0(B^n)$. În cazul unei variabile complexe, următorul rezultat a fost obţinut de Pell [87] şi Kirwan [61], deoarece $S^0(B^1) = S$.

Teorema 5.1.3 *Fie $f \in \operatorname{ex} S^0(B^n)$ şi $f(z,t)$ un lanţ Loewner astfel încât $f = f(\cdot,0)$ şi $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală pe B^n. Atunci $e^{-t}f(\cdot,t) \in \operatorname{ex} S^0(B^n)$, pentru $t \geq 0$.*

Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41] au obţinut următorul rezultat privind puncte suport pentru familia $S^0(B^n)$. În cazul unei variabile complexe, a se vedea [61] şi [87]. Schleissinger [106] a demonstrat că Teorema 5.1.4 are loc oricare ar fi $t \geq 0$.

Teorema 5.1.4 *Fie $f \in \operatorname{supp} S^0(B^n)$ şi fie $f(z,t)$ un lanţ Loewner astfel încât $f = f(\cdot,0)$ şi $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală pe B^n. Atunci există $t_0 > 0$ astfel încât $e^{-t}f(\cdot,t) \in \operatorname{supp} S^0(B^n)$, pentru $0 \leq t < t_0$.*

Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41] au demonstrat rezultate similare pentru aplicaţii din $S^0(B^n)$ care sunt mărginite în normă de o constantă fixă. Ei au considerat de asemenea puncte extreme şi puncte suport pentru aplicaţii biolomorfe pe B^n generate folosind operatori de extensie care păstrează lanţuri Loewner. Pe de altă parte, Muir [83] a considerat puncte extreme şi puncte suport pentru familii compacte generate de o clasă generală de operatori de extensie.

În acest capitol obţinem diferite rezultate privind puncte extreme şi puncte suport pentru familia $\overline{S_g^0(B^n)}$, unde g verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Observăm că $\overline{S_g^0(B^n)}$ este o submulţime compactă a lui $H(B^n)$, deoarece $S_g^0(B^n)$ este o familie local uniform mărginită (a se vedea [38, Corolarul 2.3]). De asemenea, $\overline{S_g^0(B^n)} \subseteq S^0(B^n)$, deoarece $S_g^0(B^n) \subseteq S^0(B^n)$ şi $S^0(B^n)$ este o submulţime compactă, şi deci închisă a lui $S(B^n)$ (a se vedea [47]).

Diferite aplicaţii şi consecinţe vor fi obţinute. Vom considera de asemenea puncte extreme şi puncte suport asociate operatorilor de extensie care păstrează lanţuri Loewner. În particular, vom considera puncte extreme şi puncte suport pentru familia compactă $\Psi_n(\overline{S_g^0(B^n)})$, unde Ψ_n este operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge dat de (3.1.4).

Acest capitol conţine rezultate originale obţinute de Chirilă, Hamada şi Kohr [18] şi Chirilă [17].

5.2 Puncte extreme asociate familiei $\overline{S_g^0(B^n)}$

În continuare considerăm puncte extreme asociate familiei compacte $\overline{S_g^0(B^n)}$. Pentru început, prezentăm următorul rezultat (conform [41], pentru $g(\zeta) = (1-\zeta)/(1+\zeta)$, $|\zeta| < 1$). Acest rezultat a fost obţinut de Chirilă, Hamada şi Kohr [18].

Lema 5.2.1 ([18]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă, care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Fie $f \in S_g^0(B^n)$ şi fie $f(z,t)$ un g-lanţ Loewner astfel încât $f = f(\cdot,0)$. De asemenea, fie $v_{s,t}(z) = v(z,s,t)$ aplicaţia de tranziţie asociată lui $f(z,t)$ şi fie $v_t(z) = v(z,t) = v_{0,t}(z)$, pentru $z \in B^n$ şi $t \geq 0$. Dacă $r \in S_g^0(B^n)$, atunci $e^t r(v(\cdot,t)) \in S_g^0(B^n)$, pentru $t \geq 0$.*

În continuare prezentăm următorul rezultat privind puncte extreme pentru familia compactă $\overline{S_g^0(B^n)}$. Dacă $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $|\zeta| < 1$, acest rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41, Teorema 2.1] (conform [61] şi [87], în cazul $n = 1$). Teorema 5.2.2 a fost recent obţinută de Chirilă, Hamada şi Kohr [18].

Teorema 5.2.2 ([18]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă, care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Fie $f \in \mathrm{ex}\,\overline{S_g^0(B^n)}$. Atunci există un lanţ Loewner $f(z,t)$ astfel încât $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie local uniform mărginită, $f = f(\cdot,0)$, şi $e^{-t}f(\cdot,t) \in \mathrm{ex}\,\overline{S_g^0(B^n)}$, pentru $t \geq 0$.*

Încheiem această secţiune cu următorul rezultat, care reprezintă generalizarea [41, Propoziţia 2.2] în cazul aplicaţiilor cu g-reprezentare parametrică pe B^n.

Propoziţia 5.2.3 ([18]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă, care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. De asemenea, fie $f \in \overline{S_g^0(B^n)}$. Atunci există un lanţ Loewner $f(z,t)$ astfel încât $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie local uniform mărginită, $f = f(\cdot,0)$, $e^{-t}f(\cdot,t) \in \overline{S_g^0(B^n)}$ şi $e^t v(\cdot,t) \in \overline{S_g^0(B^n)} \setminus \mathrm{ex}\,\overline{S_g^0(B^n)}$, pentru $t \geq 0$, unde $v_{s,t}(z) = v(z,s,t)$ este aplicaţia de tranziţie asociată lui $f(z,t)$ şi $v_t(z) = v(z,t) = v(z,0,t)$, pentru $z \in B^n$ şi $t \geq 0$. În particular, aplicaţia identică id_{B^n} nu este punct extrem al lui $\overline{S_g^0(B^n)}$.*

5.3 Puncte suport asociate familiei $\overline{S_g^0(B^n)}$

În această secţiune considerăm puncte suport asociate familiei compacte $\overline{S_g^0(B^n)}$, unde $g : U \to \mathbb{C}$ este o funcţie univalentă pe discul unitate U care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13.

Pentru început, vom prezenta următorul rezultat privind puncte suport asociate familiei $\overline{S_g^0(B^n)}$. Acest rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41, Teorema 2.5], în cazul $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $|\zeta| < 1$ (conform [48, Teorema 3.3]). Schleissinger [106] a demonstrat că următorul rezultat are loc pentru orice $t \in [0, \infty)$, în cazul $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $|\zeta| < 1$. Teorema 5.3.1 a fost obţinută de Chirilă, Hamada şi Kohr [18], şi reprezintă o generalizare la mai multe variabile a unui rezultat obţinut de Pell [87] şi Kirwan [61].

Teorema 5.3.1 ([18]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13. *De asemenea, fie $f \in \operatorname{supp} \overline{S_g^0(B^n)}$. Atunci există un lanţ Loewner $f(z,t)$ şi $t_0 > 0$ astfel încât $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie local uniform mărginită, $f = f(\cdot,0)$, şi $e^{-t}f(\cdot,t) \in \operatorname{supp} \overline{S_g^0(B^n)}$, pentru $0 \leq t < t_0$.*

Observaţia 5.3.2 Într-o lucrare viitoare [18], vom demonstra că aplicaţia $e^t v(\cdot,t)$ nu este un punct suport al familiei $\overline{S_g^0(B^n)}$, pentru $t \geq 0$. Aşadar concluzia Teoremei 5.3.1 va fi $e^{-t}f(\cdot,t) \in \operatorname{supp} \overline{S_g^0(B^n)}$, pentru $t \geq 0$.

Prezentăm de asemenea o generalizare la cazul n-dimensional a unui principiu extremal obţinut de Kirwan şi Schober [62] (a se vedea de asemenea [104]). În cazul $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $|\zeta| < 1$, acest rezultat a fost obţinut de Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41].

Teorema 5.3.3 ([18]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă, care verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13. *Fie $\lambda : \overline{S_g^0(B^n)} \to \mathbb{R}$ o funcţională reală continuă. Presupunem că $f \in \overline{S_g^0(B^n)}$ realizează maximul pentru λ peste mulţimea $\overline{S_g^0(B^n)}$. Atunci există un lanţ Loewner $f(z,t)$ astfel încât $\{e^{-t}f(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie local uniform mărginită, $f = f(\cdot,0)$, şi $e^{-t}f(\cdot,t) \in \overline{S_g^0(B^n)}$ realizează maximul pentru funcţionala asociată $\lambda_t : \overline{S_g^0(B^n)} \to \mathbb{R}$ definită prin*

$$\lambda_t(r) = \lambda(e^t r \circ v_t), \quad r \in \overline{S_g^0(B^n)}, \quad t \geq 0. \tag{5.3.1}$$

Aici $v_t = v_{0,t}$ şi $v_{s,t} = v(\cdot,s,t)$ reprezintă aplicaţia de tranziţie asociată lui $f(z,t)$.

Următorul rezultat de compactitate de interes independent a fost util în demonstraţia Corolarului 5.3.5 (a se vedea [18]).

Lema 5.3.4 ([18]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă, care verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13. *Atunci familia $S_g^*(B^n)$ este compactă.*

Dacă $f \in S_g^*(B^n)$ realizează maximul pentru o funcţională reală continuă λ peste mulţimea $\overline{S_g^0(B^n)}$, atunci obţinem următoarea consecinţă a Teoremei 5.3.3.

Corolarul 5.3.5 ([18]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13. *Fie $\lambda : \overline{S_g^0(B^n)} \to \mathbb{R}$ o funcţională reală continuă. Dacă $f \in S_g^*(B^n)$ realizează maximul pentru λ peste mulţimea $\overline{S_g^0(B^n)}$, atunci f realizează maximul pentru funcţionala asociată λ_t dată de* (5.3.1), *şi $\lambda(f) = \lambda_t(f)$, pentru $t \geq 0$.*

5.4 Puncte extreme şi puncte suport asociate operatorilor de extensie

În această secţiune continuăm cercetările din [41] şi [48], şi arătăm că dacă $g : U \to \mathbb{C}$ este o funcţie univalentă, care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13, şi dacă $\Phi : \mathcal{L}S_n(B^n) \to \mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$ este un operator de extensie care păstrează lanţuri Loewner (a se vedea Definiţia 3.1.17), atunci putem considera familia compactă $\Phi(\overline{S_g^0(B^n)})$. Vom considera puncte extreme şi puncte suport asociate acestei familii. În particular, vom considera puncte extreme şi puncte suport asociate familiei compacte $\Psi_n(\overline{S_g^0(B^n)})$, unde Ψ_n este operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge dat de (3.1.4).

Graham, Hamada, Kohr şi Kohr [41] (conform Muir [83]) au demonstrat următorul rezultat, prin care obţinem exemple concrete de puncte extreme şi puncte suport asociate familiei compacte $\Phi(\overline{S_g^0(B^n)})$.

Lema 5.4.1 *Dacă $\Phi : \mathcal{L}S_n(B^n) \to \mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$ este un operator de extensie şi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}S_n(B^n)$ este o mulţime compactă nevidă, atunci $\Phi(\operatorname{ex}\mathcal{F}) \subseteq \operatorname{ex}\Phi(\mathcal{F})$ şi $\Phi(\operatorname{supp}\mathcal{F}) \subseteq \operatorname{supp}\Phi(\mathcal{F})$.*

Pe baza Lemei 5.4.1, obţinem că (a se vedea [18]; conform [83] şi [41])

$$\Phi(\operatorname{ex}\overline{S_g^0(B^n)}) \subseteq \operatorname{ex}\Phi(\overline{S_g^0(B^n)}) \text{ şi } \Phi(\operatorname{supp}\overline{S_g^0(B^n)}) \subseteq \operatorname{supp}\Phi(\overline{S_g^0(B^n)}). \tag{5.4.1}$$

Următorul rezultat obţinut de Chirilă, Hamada şi Kohr [18] este o consecinţă directă a relaţiei (5.4.1) şi Teoremei 5.2.2. În cazul $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $|\zeta| < 1$, acest rezultat a fost obţinut de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48].

Lema 5.4.2 ([18]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13. *De asemenea, fie $\Phi : \mathcal{L}S_n(B^n) \to \mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$ un operator de extensie care păstrează lanţuri Loewner. Fie $f \in \operatorname{ex}\overline{S_g^0(B^n)}$. De asemenea, fie $f(z', t)$ un lanţ Loewner care verifică condiţiile Teoremei* 5.2.2, *şi fie $F(z, t)$ lanţul Loewner dat de* (3.1.5). *Atunci $e^{-t}F(\cdot, t) \in \operatorname{ex}\Phi(\overline{S_g^0(B^n)})$, pentru $t \geq 0$.*

În continuare, prezentăm următoarea generalizare a [48, Teorema 3.1] în cazul punctelor extreme asociate familiei compacte $\Psi_n(\overline{S_g^0(B^n)})$, unde Ψ_n este operatorul de extensie Pfaltzgraff-Suffridge dat de (3.1.4). Următoarea teoremă a fost obţinută de Chirilă, Hamada şi Kohr [18]. Dacă $n = 1$ şi $g(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $|\zeta| < 1$, acest rezultat a fost obţinut de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48].

Teorema 5.4.3 ([18]) *Fie $g : U \to \mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei* 2.4.13. *Fie $f \in \overline{S_g^0(B^n)}$ şi fie $F = \Psi_n(f)$. Presupunem că $F \in \operatorname{ex}\Psi_n(\overline{S_g^0(B^n)})$. Atunci există un lanţ*

Loewner $F(z,t): B^{n+1}\times[0,\infty)\to\mathbb{C}^{n+1}$ astfel încât $F = F(\cdot,0)$, $\{e^{-t}F(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală pe B^{n+1}, şi $e^{-t}F(\cdot,t)\in \operatorname{ex}\Psi_n(\overline{S_g^0(B^n)})$, pentru $t\geq 0$.

Observăm că Teorema 5.4.3 poate fi generalizată în cazul operatorului de extensie $\Psi_{n,\alpha}$ dat de (3.5.1). Mai mult, un rezultat similar are loc pentru operatorul de extensie $\Phi_{n,\alpha,\beta}$ dat de (3.1.3) (a se vedea [17]).

În cazul punctelor suport asociate familiei $\overline{S_g^0(B^n)}$, are loc următorul rezultat analog Lemei 5.4.2 (a se vedea [18]).

Lema 5.4.4 ([18]) *Fie $g: U\to\mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. De asemenea, fie $\Phi: \mathcal{L}S_n(B^n)\to\mathcal{L}S_{n+1}(B^{n+1})$ un operator de extensie care păstrează lanţuri Loewner. Fie $f\in\operatorname{supp}\overline{S_g^0(B^n)}$. De asemenea, fie $f(z',t)$ un lanţ Loewner care verifică condiţiile Teoremei 5.3.1, şi fie $F(z,t)$ lanţul Loewner dat de (3.1.5). Atunci există $t_0>0$ astfel încât $e^{-t}F(\cdot,t)\in\operatorname{supp}\Phi(\overline{S_g^0(B^n)})$, pentru $0\leq t<t_0$.*

În continuare discutăm cazul punctelor suport asociate familiei compacte $\Psi_n(\overline{S_g^0(B^n)})$ (a se vedea [18]). Dacă $n=1$ şi $g(\zeta)=\frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $|\zeta|<1$, acest rezultat a fost obţinut de Graham, Kohr şi Pfaltzgraff [48]. Observăm că dacă $g(\zeta)=\frac{1-\zeta}{1+\zeta}$ şi operatorul Ψ_n se înlocuieşte cu operatorul de extensie Roper-Suffridge Φ_n, atunci Teorema 5.4.5 are loc oricare ar fi $t\in[0,\infty)$, pe baza unui rezultat obţinut de Schleissinger [106].

Teorema 5.4.5 ([18]) *Fie $g: U\to\mathbb{C}$ o funcţie univalentă care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Fie $f\in\overline{S_g^0(B^n)}$ şi fie $F=\Psi_n(f)$. Presupunem că $F\in\operatorname{supp}\Psi_n(\overline{S_g^0(B^n)})$. Atunci există un lanţ Loewner $F(z,t): B^{n+1}\times[0,\infty)\to\mathbb{C}^{n+1}$ şi $t_0>0$ astfel încât $F=F(\cdot,0)$, $\{e^{-t}F(\cdot,t)\}_{t\geq 0}$ este o familie normală pe B^{n+1}, şi $e^{-t}F(\cdot,t)\in\operatorname{supp}\Psi_n(\overline{S_g^0(B^n)})$, pentru $0\leq t<t_0$.*

Observaţia 5.4.6 Ar fi interesant de văzut dacă rezultatele conţinute în Teorema 5.4.5 rămân adevărate, oricare ar fi $t\geq 0$. Acesta reprezintă un punct de plecare pentru cercetări ulterioare.

Observaţia 5.4.7 Ar fi interesant de studiat puncte extreme şi puncte suport pentru aplicaţii mărginite din familia $\overline{S_g^0(B^n)}$, unde $g: U\to\mathbb{C}$ este o funcţie univalentă, care verifică condiţiile Definiţiei 2.4.13. Acesta reprezintă un alt punct de plecare pentru cercetări ulterioare. Rezultate recente în această direcţie au fost obţinute în [41], pentru $g(\zeta)=\frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, $|\zeta|<1$ (a se vedea [104] şi [97] în cazul $n=1$).

Bibliografie

Listă selectivă

[1] M. Abate, F. Bracci, M.D. Contreras, S. Diaz-Madrigal, *The evolution of Loewner's differential equations*, Newsletter European Math. Soc. **78**, December 2010, 31–38.

[2] L.V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 2nd edn., McGraw-Hill, New York, 1966.

[3] L. Arosio, *Resonances in Loewner equations*, Adv. Math., **227** (2011), 1413–1435.

[4] R.W. Barnard, C.H. FitzGerald, S. Gong, *The growth and* $1/4$*-theorems for starlike mappings in* $\mathbb{C}^n$, Pacif. J. Math., **150** (1991), 13–22.

[5] J. Becker, *Löwnersche differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte funktionen*, J. Reine Angew. Math., **255** (1972), 23–43.

[6] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb., **138** (1916), 940–955.

[7] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta. Math., **154**, 1-2 (1985), 137–152.

[8] G. Călugăreanu, *Sur la condition nècessaire et suffisante pour l'univalence d'une fonction holomorphe dans un circle*, C.R. Acad. Sci. Paris, **193** (1931), 1150–1153.

[9] H. Cartan, *Sur la possibilité d'étendre aux fonctions de plusieurs variables complexes la théorie des fonctions univalentes*, 129-155. Note added to P. Montel, *Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes*, Gauthier-Villars, Paris, 1933.

[10] B. Chabat, *Introduction à l'Analyse Complexe*, I-II, Ed. MIR, Moscou, 1990.

[11] **T. Chirilă**, *An extension operator associated with certain* g*-Loewner chains*, Taiwanese J. Math. (**ISI**), **17**, no. 5 (2013), 1819–1837.

[12] **T. Chirilă**, *Analytic and geometric properties associated with some extension operators*, Complex Var. Elliptic Equ. (**ISI**), to appear, doi.org/10.1080/17476933.2012.746966.

[13] **T. Chirilă**, *Subclasses of biholomorphic mappings associated with* g*-Loewner chains on the unit ball in* $\mathbb{C}^n$, Complex Var. Elliptic Equ. (**ISI**), to appear, doi.org/10.1080/17476933.2013.856422.

[14] **T. Chirilă**, *An extension operator and Loewner chains on the Euclidean unit ball in* $\mathbb{C}^n$, Mathematica (Cluj), **54 (77)** (2012), 116–125.

[15] **T. Chirilă**, *An extension operator and Loewner chains on some Reinhardt domains in* $\mathbb{C}^n$, Advances in Mathematics: Scientific Journal **1** (2012), 139–145.

[16] **T. Chirilă**, *Extension operators that preserve geometric and analytic properties of biholomorphic mappings*, in "Topics in Mathematical Analysis and Applications", L. Toth and Th. M. Rassias, Eds., Springer, 2014, to appear.

[17] **T. Chirilă**, *Extreme points associated with certain extension operators*, in preparation.

[18] **T. Chirilă**, H. Hamada, G. Kohr, *Extreme points and support points for mappings with g-parametric representation in* $\mathbb{C}^n$, submitted.

[19] M. Chuaqui, *Applications of subordination chains to starlike mappings in* $\mathbb{C}^n$, Pacif. J. Math., **168** (1995), 33–48.

[20] J.B. Conway, *Functions of One Complex Variable II*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[21] M. Cristea, *Univalence criteria starting from the method of Loewner chains*, Complex Anal. Oper. Theory, **5** (2011), 863–880.

[22] P. Curt, *A Marx-Strohhäcker theorem in several complex variables*, Mathematica (Cluj), **39 (62)** (1997), 59–70.

[23] P. Curt, *Capitole Speciale de Teoria Geometrică a Funcţiilor de mai multe Variabile Complexe*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2001.

[24] P. Curt, G. Kohr, *Subordination chains and Loewner differential equation in several complex variables*, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect. A, **57** (2003), 35–43.

[25] P. Curt, N. Pascu, *Loewner chains and univalence criteria for holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Bull. Malaysian Math. Soc., **18** (1995), 45–48.

[26] P. Duren, *Univalent Functions*, Springer, New York, 1983.

[27] P. Duren, I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Solutions for the generalized Loewner differential equation in several complex variables*, Math. Ann., **347** (2010), 411–435.

[28] P. Duren, H. Hamada, G. Kohr, *Two-point distortion theorems for harmonic and pluriharmonic mappings*, Trans. Amer. Math. Soc., **363** (2011), 6197–6218.

[29] P.L. Duren, W. Rudin, *Distortion in several variables*, Complex Variables, **5** (1986), 323–326.

[30] M. Elin, *Extension operators via semigroups*, J. Math. Anal. Appl., **377** (2011), 239–250.

[31] C.H. FitzGerald, C. Thomas, *Some bounds on convex mappings in several complex variables*, Pacif. J. Math., **165** (1994), 295–320.

[32] S. Gong, *Convex and Starlike Mappings in Several Complex Variables*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998.

[33] S. Gong, *The Bieberbach Conjecture*, Amer. Math. Soc. Intern. Press, Providence, R.I., 1999.

[34] S. Gong, T. Liu, *On the Roper-Suffridge extension operator*, J. Anal. Math., **88** (2002), 397–404.

[35] S. Gong, T. Liu, *The generalized Roper-Suffridge extension operator*, J. Math. Anal. Appl., **284** (2003), 425–434.

[36] S. Gong, S. Wang, Q. Yu, *Biholomorphic convex mappings of ball in* $\mathbb{C}^n$, Pacif. J. Math., **161** (1993), 287–306.

[37] A.W. Goodman, *Univalent Functions*, Mariner Publ. Comp., Tampa, Florida, 1983.

[38] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Parametric representation of univalent mappings in several complex variables*, Canadian J. Math., **54** (2002), 324–351.

[39] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, *Extension operators and subordination chains*, J. Math. Anal. Appl., **386** (2012), 278–289.

[40] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Asymptotically spirallike mappings in several complex variables*, J. Anal. Math., **105** (2008), 267–302.

[41] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Extreme points, support points and the Loewner variation in several complex variables*, Sci. China Math., **55** (2012), 1353–1366.

[42] I. Graham, H. Hamada, G. Kohr, T.J. Suffridge, *Extension operators for locally univalent mappings*, Michigan Math. J., **50** (2002), 37–55.

[43] I. Graham, G. Kohr, *Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator*, J. Analyse Math., **81** (2000), 331–342.

[44] I. Graham, G. Kohr, *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[45] I. Graham, G. Kohr, *The Roper-Suffridge extension operator and classes of biholomorphic mappings*, Science in China Series A-Math., **49** (2006), 1539–1552.

[46] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, *Loewner chains and the Roper-Suffridge Extension Operator*, J. Math. Anal. Appl., **247** (2000), 448–465.

[47] I. Graham, G. Kohr, M. Kohr, *Loewner chains and parametric representation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., **281** (2003), 425–438.

[48] I. Graham, G. Kohr, J.A. Pfaltzgraff, *Parametric representation and linear functionals associated with extension operators for biholomorphic mappings*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **52** (2007), 47–68.

[49] K. Gurganus, *Φ-like holomorphic functions in $\mathbb{C}^n$ and Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **205** (1975), 389–406.

[50] D.J. Hallenbeck, T.H. MacGregor, *Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory*, Pitman, Boston, 1984.

[51] H. Hamada, *Polynomially bounded solutions to the Loewner differential equation in several complex variables*, J. Math. Anal. Appl., **381** (2011), 179–186.

[52] H. Hamada, T. Honda, *Sharp growth theorems and coefficient bounds for starlike mappings in several complex variables*, Chinese Ann. Math., Ser.B, **29** (2008), 353–368.

[53] H. Hamada, T. Honda, G. Kohr, *Parabolic starlike mappings in several complex variables*, Manuscripta Math., **123** (2007), 301–324.

[54] H. Hamada, G. Kohr, *Subordination chains and the growth theorem of spirallike mappings*, Mathematica (Cluj), **42 (65)** (2000), 153–161.

[55] H. Hamada, G. Kohr, *Φ-like and convex mappings in infinite dimensional spaces*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., **47** (2002), 315–328.

[56] H. Hamada, G. Kohr, M. Kohr, *Parametric representation and extension operators for biholomorphic mappings on some Reinhardt domains*, Complex Variables, **50** (2005), 507–519.

[57] P. Hamburg, P. Mocanu, N. Negoescu, *Analiză Matematică* (*Funcţii Complexe*), Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

[58] W.K. Hayman, *Multivalent Functions* (second edition), Cambridge Univ. Press, 1994.

[59] W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J., **2** (1952), 169–185.

[60] K. Kikuchi, *Starlike and convex mappings in several complex variables*, Pacif. J. Math., **44** (1973), 569–580.

[61] W.E. Kirwan, *Extremal properties of slit conformal mappings.* In: Brannan, D., Clunie, J. (eds.) Aspects of Contemporary Complex Analysis, 439–449, Academic Press, London-New York, 1980.

[62] W.E. Kirwan, G. Schober, *New inequalities from old ones*, Math. Z., **180** (1982), 19–40.

[63] G. Kohr, *Basic Topics in Holomorphic Functions of Several Complex Variables*, Cluj University Press, 2003.

[64] G. Kohr, *Certain partial differential inequalities and applications for holomorphic mappings defined on the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Ann. Univ. Mariae Curie-Skl. Sect. A, **50** (1996), 87–94.

[65] G. Kohr, *On some best bounds for coefficients of subclasses of biholomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Complex Variables, **36** (1998), 261–284.

[66] G. Kohr, P.T. Mocanu, *Capitole Speciale de Analiză Complexă*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2005.

[67] G. Kohr, *Loewner chains and a modification of the Roper-Suffridge extension operator*, Mathematica (Cluj), **48 (71)** (2006), 41–48.

[68] S.G. Krantz, *Handbook of Complex Variables*, Birkhäuser, 1999.

[69] S.G. Krantz, *Function Theory of Several Complex Variables*, Reprint of the 1992 Edition, AMS Chelsea Publishing, Providence, R.I., 2001.

[70] D. Kraus, O. Roth, *Weighted distortion in conformal mapping in Euclidean, hyperbolic and elliptic geometry*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., **31** (2006), 111–130.

[71] E. Kubicka, T. Poreda, *On the parametric representation of starlike maps of the unit ball in* $\mathbb{C}^n$ *into* $\mathbb{C}^n$, Demonstratio Math., **21** (1988), 345–355.

[72] P. Liczberski, V. Starkov, *On two conjectures for convex biholomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, J. Math. Anal. Appl., **94** (2004), 377–383.

[73] M.-S. Liu, Y.-C. Zhu, *On the generalized Roper-Suffridge extension operator in Banach spaces*, Int. J. Math. Math. Sci., **8** (2005), 1171–1187.

[74] T. Liu, *The growth theorems and covering theorems for biholomorphic mappings on classical domains*, Doctoral Thesis, Univ. Sci. Tech. China, 1989.

[75] X. Liu, *The generalized Roper-Suffridge extension operator for some biholomorphic mappings*, J. Math. Anal. Appl., **324** (2006), 604–614.

[76] X. Liu, T. Liu, *The generalized Roper-Suffridge extension operator for locally biholomorphic mappings*, Chin. Quart. J. Math., **18** (2003), 221–229.

[77] X.-S. Liu, T.-S. Liu, *The generalized Roper-Suffridge extension operator for spirallike mappings of type* β *and order* α, Chin. Ann. Math. Ser. A., **27** (2006), 789–798.

[78] K. Loewner, *Untersuchungen über schlichte Abbildungen des Einheitskkreises*, Math. Ann., **89** (1923), 103–121.

[79] T. Matsuno, *Star-like theorems and convex-like theorems in the complex vector space*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A, **5** (1955), 88–95.

[80] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential Subordinations. Theory and Applications*, Marcel Dekker Inc., New York, 2000.

[81] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G. Sălăgean, *Teoria Geometrică a Funcţiilor Univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2006.

[82] J.R. Muir, *A modification of the Roper-Suffridge extension operator*, Comput. Methods Funct. Theory, **5** (2005), 237–251.

[83] J.R. Muir, *A class of Loewner chain preserving extension operators*, J. Math. Anal. Appl., **337** (2008), 862–879.

[84] J.R. Muir, T.J. Suffridge, *Extreme points for convex mappings of B_n*, J. Anal. Math., **98** (2006), 169–182.

[85] R. Narasimhan, *Several Complex Variables*, The University of Chicago Press, 1971.

[86] Z. Nehari, *Conformal Mappings*, Mc. Graw-Hill Book Comp., New York, 1952.

[87] R. Pell, *Support point functions and the Loewner variation*, Pacific J. Math., **86** (1980), 561–564.

[88] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and univalence of holomorphic mappings in $\mathbb{C}^n$*, Math. Ann., **210** (1974), 55–68.

[89] J.A. Pfaltzgraff, *Subordination chains and quasiconformal extension of holomorphic maps in $\mathbb{C}^n$*, Ann. Acad. Scie. Fenn. Ser. A I Math., **1** (1975), 13–25.

[90] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, *Close-to-starlike holomorphic functions of several variables*, Pacif. J. Math., **57** (1975), 271–279.

[91] J.A. Pfaltzgraff, T.J. Suffridge, *An extension theorem and linear invariant families generated by starlike maps*, Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A, **53** (1999), 193–207.

[92] H. Poincaré, *Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **23** (1907), 185–220.

[93] C. Pommerenke, *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1975.

[94] T. Poreda, *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ which have the parametric representation, I - the geometrical properties*, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect A, **41** (1987), 105–113.

[95] T. Poreda, *On the univalent holomorphic maps of the unit polydisc in $\mathbb{C}^n$ which have the parametric representation, II - necessary and sufficient conditions*, Ann. Univ. Mariae Curie Sklodowska, Sect A, **41** (1987), 114–121.

[96] T. Poreda, *On generalized differential equations in Banach spaces*, Dissertationes Mathematicae, **310** (1991), 1–50.

[97] D.V. Prokhorov, *Bounded univalent functions*, Kühnau R ed. Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, vol. I, New York, Elsevier, 2002, 207–228.

[98] M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[99] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[100] M.S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. Math., **37** (1936), 374–408.

[101] K. Roper, T.J. Suffridge, *Convex mappings on the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, J. Anal. Math., **65** (1995), 333–347.

[102] K. Roper, T.J. Suffridge, *Convexity properties of holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc., **351** (1999), 1803–1833.

[103] M. Rosenblum, J. Rovnyak, *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser Verlag, Boston, 1994.

[104] O. Roth, *Control theory in* $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, Diss. Bayerischen Univ. Wuerzburg, 1998.

[105] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, third edition, McGraw–Hill, New York, 1987.

[106] S. Schleissinger, *On support points of the class* $S^0(B^n)$, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[107] L. Špaček, *Contribution á la theorie des functions univalentes*, Časopia Pěst. Mat., **62** (1932), 12–19.

[108] T.J. Suffridge, *The principle of subordination applied to functions of several variables*, Pacif. J. Math., **33** (1970), 241–248.

[109] T.J. Suffridge, *Starlike and convex maps in Banach spaces*, Pacif. J. Math., **46** (1973), 575–589.

[110] T.J. Suffridge, *Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions*, Lecture Notes in Math., **599** (1976), 146–159, Springer-Verlag, New York.

[111] T.J. Suffridge, *Biholomorphic mappings of the ball onto convex domains*, Abstract of papers presented to AMS, **11 (66)** (1990), 46.

[112] M. Voda, *Loewner theory in several complex variables and related problems*, Ph.D thesis, Univ. Toronto, 2011.

[113] J.F. Wang, T.S. Liu, *A modification of the Roper-Suffridge extension operator for some holomorphic mappings* (in Chinese), Chin. Ann. Math., 2010, **31A (4)**, 487–496.

[114] Q-H. Xu, T-S. Liu, *Löwner chains and a subclass of biholomorphic mappings*, J. Math. Appl., **334** (2007), 1096–1105.

[115] Q-H. Xu, T-S. Liu, *Sharp growth and distortion theorems for a subclass of biholomorphic mappings*, Comput. Math. Appl., **59** (2010), 3778–3784.