UNIVERSITATEA ”BABEŞ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA

ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Contribuţii la studiul problemei de punct fix cuplat

Rezumatul Tezei de Doctorat

Conducător Ştiinţific:

Prof. Dr. Adrian Olimpiu PETRUŞEL

Student Doctorand:

Cristina Lavinia URS

Cluj-Napoca

2013

Cuprins

Introducere

Aplicarea teoriei punctului fix este importantă în multe domenii: în matematică, statistică, chimie, biologie, informatică, inginerie şi în economie privind problemele legate de teoria aproximării, teoria potenţialului, teoria jocului, economie matematică, teoria ecuaţiilor diferenţiale, teoria ecuaţiilor integrale, teoria ecuaţiilor matriciale etc. (a se vedea K. C. Border [20], A. Cataldo, E. A. Lee, X. Liu, E. D. Matsikoudis, H. Zheng [24], Y. Guo [52], A. Hyvärinen [59], A. Noumsi, S. Derrien, P. Quinton [89], A. Yantir şi S. Gulsan Topal [161]). Teoremele de punct fix sunt folosite pentru a demonstra existenţa diverselor tipuri de echilibru Nash (K. C. Border [20]) în economie, dar şi pentru a demonstra existenţa soluţiilor slab periodice pentru un model care descrie căldura electrică a unui conductor considerând şi efectul Joule-Thomson (a se vedea M. Badii [12]).

Principiul clasic al lui Banach este surprinzător prin simplitatea sa şi este probabil cel mai aplicat aplicat principiu în toata analiza matematică. Aceasta se întamplă, deoarece condiţia de contracţie asupra operatorului este uşor de verificat şi cere doar structura unui spaţiu metric complet (a se vedea S. Banach [11]). Diverşi matematicieni s-au ocupat de dezvoltarea şi generalizarea acestui principiu (a se vedea A. M. Ostrowski [96], M. A. Krasnoselskii, P. P. Zabreiko [74], J. Jachymski [61], E. Rakotch [117], D. W. Boyd şi J. S. W. Wong [21], J. Matkowski [81], F. E. Browder [22], A. Meir şi E. Keeler [82], M. Geraghty [47], J. Jachymski [62], A. D. Arvanitakis [8], C. Mongkolkeha, W. Sintunavarat, P. Kumam [84], W. Sintunavarat, P. Kumam [144], W. Sintunavarat, P. Kumam [143]). Principiul clasic al lui Banach este foarte utilizat în analiza neliniară, având multe aplicaţii la ecuaţiile operatoriale, teoria fractalilor, teoria optimizării şi alte domenii.

A. C. M. Ran şi M. C. B. Reurings au studiat în [118] existenţa punctelor fixe ale unor operatori neliniari care satisfac condiţia de contracţie în spaţii metrice ordonate şi au prezentat cateva aplicaţii la ecuaţiile matriciale. Ulterior, numeroşi autori au studiat problema existenţei şi unicităţii punctului fix, al unui operator care satisface condiţia de contracţie pe mulţimi ordonate (R. P. Agarwal, M. A. El-Gebeily şi D. O'Regan [4], L. Ćirić, M. Cakić, J. S.Rajović şi J. S. Ume [34], H. K. Nashine, B. Samet, C. Vetro [86], J. J. Nieto şi R. R. López [87], [88], Y. J. Cho, R. Saadati şi S. Wang [26], E. Graily, S. M. Vaezpour, R. Saadati, Y. J. Cho [50], W. Sintunavarat, Y. J. Cho şi P. Kumam [145]).

Existenţa punctelor fixe, ale unor operatori multivoci de tip contracţie a fost studiată de către mulţi autori, utilizând condiţii diferite, în urmatoarele lucrări: N. L. Ćirić [32], [33], N. Mizoguchi, W. Takahashi [83], B. E. Rhoades [125]. În 1969, S. B. Nadler [85] a extins pricipiul lui Banach de la cazul operatorilor univoci la cel al operatorilor multivoci.

Teorema lui Nadler a fost modificată şi generalizată de către mulţi autori în teoria punctului fix. Aceste generalizări au slăbit condiţia de contracţie asupra operatorului, dar s-au adăugat condiţii suplimentare, ca de exemplu operatorul să ia valori compacte. Pentru rezultate de punct fix în cazul operatorilor multivoci de tip contracţie generalizată, a se vedea Reich [120], L. Ćirić [32], V. M Sehgal şi R. E. Smithson [142] si N. Mizoguchi, W. Takahashi [83].

Y. Feng şi S. Liu au definit în Y. Feng şi S. Liu [42] un alt tip de contractivitate pentru operatori multivoci, care concentrează condiţiile asupra unor orbite ale operatorului considerat. Cel mai important rezultat de punct fix prezentat în Y. Feng şi S. Liu [42] este o generalizare a teoremei lui Nadler. Y. Feng si S. Liu au obţinut teoreme de punct fix şi pentru operatori multivoci de tip Caristi.

În 2007, D. Klim şi D. Wardowski [72] inspiraţi de rezultatele obţinute de către Mizoguchi-Takahashi şi Feng-Liu au obţinut o generalizare a rezultatelor de punct fix prezentate anterior de către Y. Feng şi S. Liu [42], N. Mizoguchi, W. Takahashi [83] şi S. Reich [120].

O. Kada, T. Suzuki şi W. Takahashi [64] au introdus în 1996 conceptul de ω-distanţă pe un spaţiu metric şi folosind această noţiune au obţinut o dezvoltare a teoremei de optimizare neconvexă a lui Takahashi şi generalizări ale teoremei de punct fix a lui J. Caristi si principiului variaţional al lui I. Ekeland. Ei au obţinut de asemenea, teoreme de punct fix pentru operatori univoci de tip (ω-) contractiv.

În 2009 J. G. Falset, L. Guran şi E. Llorens-Fuster [41] au obţinut o generalizare a rezultatelor de punct fix prezentate de către D. Klim şi D. Wardowski (Theorem 2.1 [72]), pentru operatori univoci de tip contracţie în spatii metrice complete, folosind conceptul de ω-distanţă.

Unul dintre obiectivele noastre este obţinerea rezultatelor de punct fix pentru operatori multivoci în spaţii con-metrice pentru a generaliza rezultatele obţinute de către J. G. Falset, L. Guran şi E. Llorens-Fuster [41]. În urmatoarele paragrafe vom prezenta câteva aspecte importante privind spaţiile con-metrice.

În 1905, M. Fréchet [44], [45] a introdus conceptul de spaţiu metric. În 1934, studentul său D. Kurepa [76] a prezentat o noţiune de spaţiu metric, mai abstractă, în care metrica ia valori într-un spaţiu vectorial ordonat. În literatura de specialitate, spaţiile metrice înzestrate cu metrica vectorială sunt cunoscute sub diverse denumiri: spaţii pseudometrice D. Kurepa [76], L. Collatz [35], K-spaţii metrice J. Eisenfeld [39], P. P. Zabrejko [162], I. A. Rus, A. Petruşel, M. A. Şerban [134], spaţii metrice generalizate B. Rzepecki [137], spaţii metrice în care metrica ia valori vectoriale I. D. Arandelović, D. J. Kečkić [7], spaţii metrice în care metrica ia valori într-un con K. J. Chung [30], [31], spaţii con-metrice L. G. Huang, X. Zhang [58], S. Janković, Z. Kadelburg şi S. Radenović [63].

Spaţiile con-metrice şi spaţiile con-metrice normate au aplicaţii multiple în analiza numerică şi teoria punctului fix. Câteva dintre aplicaţiile spaţiilor con-metrice au fost prezentate în lucrările lui L. Collatz [35] şi P. P. Zabrejko [162]. J. Schröder [140], [141] a fost primul care a arătat importanţa spaţiilor metrice generalizate în analiza numerică.

Începând cu anul 2007, mulţi autori au studiat spaţiile con-metrice peste spaţii Banach, obţinând teoreme de punct fix (a se vedea L. G. Huang, X. Zhang [58], S. Rezapour, R. Hamlbarani [124], D. Wardowski [160], H. K. Pathak, N. Shahzad [97], I. Şahin, M. Telsi [150], A. Amini-Harandi, M. Fakhar [6], A. Sönmez [149], A. Latif, F. Y. Shaddad [78], D. Turkoglu, M. Abuloha [154], M. A. Khamsi [69], S. Radenović, Z. Kadelburg [116], M. Khani, M. Pourmahdian [71], M. Asadi, S. M. Vaezpour, H. Soleimani [9] etc.).

Principiul clasic al lui Banach a fost extins pentru cazul contracţiilor univoce în spaţii metrice vectoriale de către A. I. Perov [98], A. I. Perov şi A.V. Kibenko [99] şi J. Ortega şi W. Rheinboldt [95]. Alte contribuţii privind acest aspect au fost prezentate în lucrările lui A. Bucur, L. Guran şi A. Petruşel [23], R.P. Agarwal [3], A. D. Filip şi A. Petruşel

[43], D. O'Regan, N. Shahzad, R. P. Agarwal [94], R. Precup, A. Viorel [112], R. Precup, A. Viorel [113], R. Precup [111], etc. Cazul contracţiilor multivoce în spaţii vectoriale a fost abordat de către A. Petruşel [104], I. R. Petre, A. Petruşel [101], Sh. Rezapour, P. Amiri [123], etc.

În studiul punctului fix al unui operator, este mai constructiv în unele cazuri să considerăm un concept mai general, şi anume conceptul de punct fix cuplat. Acest concept de punct fix cuplat pentru operatori neliniari a fost introdus şi studiat de către Opoitsev (V.I. Opoitsev [90]-[92]) şi mai târziu în 1987, de către D. Guo şi V. Lakshmikantham [53] în conexiune cu cvasisoluţiile cuplate ale unei probleme cu condiţii iniţiale pentru ecuaţii diferenţiale ordinare.

O nouă direcţie de cercetare a fost introdusă de către T. Gnana Bhaskar şi V. Lakshmikantham în [48] şi V. Lakshmikantham and L. Ćirić în [77]. În [48] T. Gnana Bhaskar şi V. Lakshmikantham au prezentat noţiunea de operator care are proprietatea de mixt-monotonie. Ei au obţinut rezultate de punct fix cuplat pentru operatori care satisfac proprietatea de mixt-monotonie şi au prezentat ca şi aplicaţie, o teorema de existenţă şi unicitate a soluţiei unei probleme cu condiţii periodice la limită. Abordarea lor se bazează pe condiţii de tip contracţie impuse asupra operatorului.

În ultimele decenii problema punctului fix cuplat a atras interesul multor matematicieni, deoarece aceasta are un rol important în studiul ecuaţiilor diferenţiale neliniare, ecuaţii integrale neliniare şi incluziuni diferenţiale. Alte rezultate privind teoria punctului fix cuplat se pot găsi în lucrările lui T. Gnana Bhaskar şi V. Lakshmikantham [48], D. Guo, Y. J. Cho şi J. Zhu [54], S. Hong [57], V. Lakshmikantham şi L. Ćirić [77], M. D. Rus [135], V. Berinde [14], M. Berzig [17], W. Sintunavarat, P. Kumam şi Y. J. Cho [147], M. Abbas, W. Sintunavarat, P. Kumam [2], Y. J. Cho, G. He, N. J. Huang [25], Y. J. Cho, M. H. Shah, N. Hussain [27], Y. J. Cho, B. E. Rhoades, R. Saadati, B. Samet, W. Shantawi [28], M. E. Gordji, Y. J. Cho, H. Baghani [49], B. Samet, C. Vetro [139], W. Sintunavarat, Y. J. Cho şi P. Kumam [146], W. Sintunavarat, A. Petruşel, P. Kumam [148], B. Samet [138].

În această lucrare prezentăm un studiu detaliat şi unitar privind existenţa, unicitatea, dependenţa de date, stabilitatea punctului fix şi punctului fix cuplat pentru operatori univoci şi multivoci considerând proprietăţile de mixt-monotonie şi de umbrire la limită. Acest studiu este susţinut şi de prezentarea unor aplicaţii.

Această lucrare este împărţită în patru capitole, fiecare capitol conţinând câteva secţiuni.

Capitolul 1: Preliminarii

În acest capitol scopul este de a puncta noţiunile de bază pe care le vom folosi în urmatoarele capitole ale acestei lucrări şi care ne permit să prezentăm rezultatele acestui studiu. Acest capitol conţine urmatoarele secţiuni:

În **prima secţiune** introducem conceptele de spaţiu metric vectorial şi matrici convergente la zero.

În a **doua secţiune** amintim câteva din teoremele de bază în teoria punctului fix pentru operatori univoci şi multivoci.

În cea de-a **treia secţiune** prezentăm câteva probleme deschise privind punctele fixe şi punctele fixe stricte.

Cea de-a **patra secţiune** cuprinde lema clasică a lui Cauchy şi o generalizare a acesteia.

Capitolul 2: Teoreme de punct fix în spaţii metrice generalizate

În acest capitol prezentăm câteva rezultate de punct fix pentru operatori univoci şi multivoci în spaţii metrice cu metrica luând valori vectoriale şi în spaţii con-metrice. Studiul nostru se bazează pe teorema de punct fix al lui Perov în spaţii metrice vectoriale. În continuare am investigat stabilitatea Ulam-Hyers şi proprietatea de umbrire la limită a problemei de punct fix. Acest capitol cuprinde trei secţiuni.

În **prima secţiune** prezentăm câteva rezultate de existenţă, unicitate şi stabilitate pentru problema de punct fix în cazul operatorilor univoci în $\mathbb{R}^m_+$ spaţii metrice generalizate.

Contribuţiile proprii în această secţiune sunt următoarele rezultate: Teorema 2.1.1 este o extensie a teoremei lui Perov şi dezvoltă în acelaşi timp câteva rezultate prezentate de către V. Berinde [13], S. Reich [119] şi G. E. Hardy, T. D. Rogers [55]; Teorema 2.1.2 este un rezultat privind stabilitatea Ulam-Hyers a unei ecuaţii de punct fix.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în urmatoarele lucrări: A. Petruşel, G. Petruşel şi C. Urs [108], A. Petruşel, C. Urs şi O. Mleşniţe [109].

În cea de-a **doua secţiune** am obţinut rezultate de existenţă şi stabilitate pentru o problemă de punct fix în cazul operatorilor multivoci în $\mathbb{R}^m_+$ spaţii metrice generalizate. Proprietatea de umbrire este de asemenea studiată.

Rezulatele proprii în această secţiune sunt următoarele: Teorema 2.2.1 este o extensie a teoremei lui Nadler de punct fix într-un spaţiu metric vectorial, reprezintă o versiune multivocă a Teoremei 2.1.1, care a fost prezentată în prima secţiune a acestui capitol şi este de asemenea o generalizare a unor rezultate prezentate de către M. Berinde, V. Berinde [15]; Teorema 2.2.4 este un rezultat privind stabilitatea Ulam-Hyers a unei incluziuni de punct fix şi proprietatea de umbrire la limită a unei contracţii multivoce; Teorema 2.2.5 reprezintă un rezultat referitor la stabilitatea Ulam-Hyers a unei incluziuni de punct fix pentru un operator multivoc.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt cuprinse în următoarele lucrări: A. Petruşel, G. Petruşel şi C. Urs [108] şi A. Petruşel, C. Urs şi O. Mleşniţe [109].

În cea de-a **treia secţiune** am obţinut un rezultat de punct fix pentru un operator multivoc, folosind conceptul de c-distanţă în spaţii con-metrice. Conceptul de c-distanţă a fost introdus de către Y. J. Cho, R. Saadati şi S. Wang [26], şi reprezintă o generalizare a ω-distanţei, introdusă de O. Kada, T. Suzuki şi W. Takahashi [64].

Cea mai importantă contribuţie proprie în această secţiune este Teorema 2.3.8, care reprezintă un rezultat de punct fix pentru operatori multivoci în spaţii con-metrice înzestrate cu o c-distanţă. Această teoremă este o generalizare a Teoremei 3.3 prezentată de către J. G. Falset, L. Guran şi E. Llorens-Fuster în [41].

Rezultatul pe care l-am obţinut în spaţii con-metrice este cuprins în urmatoarea lucrare E. Llorens-Fuster, C. Urs [79].

Capitolul 3: Teoreme de punct fix cuplat

În acest capitol prezint cateva rezultate de existenţă, unicitate şi stabilitate a punctului fix cuplat pentru o pereche de operatori univoci şi multivoci de tip contracţie în spaţii metrice complete. Abordarea noastră se bazează pe teorema de punct fix a lui Perov pentru contracţii în spaţii metrice vectoriale. Acest capitol este structurat pe trei secţiuni.

În **prima secţiune** prezentăm un rezultat de existenţă, unicitate, dependenţă de date şi stabilitate Ulam-Hyers a punctului fix cuplat pentru o pereche de operatori univoci de tip contracţie în spaţii metrice vectoriale.

Contribuţia proprie în această secţiune este Teorema 3.1.2, reprezentând un rezultat de existenţă, unicitate, dependenţă de date şi stabilitate Ulam-Hyers a unui punct fix cuplat pentru o pereche de operatori univoci.

Acest rezultat este inclus în lucrarea C. Urs [155].

În cea de-a **doua secţiune** prezint câteva rezultate în contextul spaţiilor metrice ordonate pentru problema de punct fix cuplat a unor operatori care au proprietatea de mixt-monotonie.

Contribuţia proprie în această sectiune este Teorema 3.2.2, o teoremă de tipul Gnana Bhaskar-Lakshmikantham pentru problema de punct fix cuplat al unei perechi de operatori univoci, care satisfac proprietea de mixt-monotonie.

Rezultatul obţinut în această secţiune este inclus în lucrarea A. Petruşel, G. Petruşel şi C. Urs [108].

În cea de-a **treia secţiune** am investigat existenţa, unicitatea, dependenţa de date şi stabilitatea Ulam-Hyers a punctului fix cuplat pentru o pereche de operatori multivoci în spaţii metrice vectoriale.

Contribuţiile proprii în această secţiune sunt următoarele: Teorema 3.3.3, un rezultat de stabilitate Ulam-Hyers a unei incluziuni de punct fix pentru un operator multivoc cu valori proximinale într-un spaţiu metric generalizat; Teorema 3.3.4, un rezultat de existenţă, unicitate şi stabilitate Ulam-Hyers ale unei incluziuni de punct fix pentru un operator multivoc; Teorema 3.3.6, un rezultat de existenţă si stabilitate ale unui sistem de incluziuni operatoriale pentru operatori multivoci, care au valori proximinale; Teorema 3.3.7, un rezultat de existenţă, unicitate şi stabilitate ale unui sistem de incluziuni operatoriale pentru operatori multivoci.

Rezultatele prezentate în această secţiune sunt cuprinse în lucrarea: C. Urs [155].

Capitolul 4: Aplicaţii

În acest capitol prezentăm câteva aplicaţii la sistemele de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu condiţii periodice la limită şi la sistemele de ecuaţii finctional-integrale, cu scopul de a valida rezultatele prezentate anterior. Rezultatele obţinute în acest capitol sunt aplicaţii ale problemelor de punct fix cuplat pentru operatori univoci si multivoci de tip contracţie în spaţii metrice vectoriale. Acest capitol cuprinde doua secţiuni.

În **prima secţiune** prezentăm o aplicaţie la ecuaţii integrale şi la o problemă cu condiţii periodice la limită.

Contribuţia proprie în această secţiune este Teorema 4.1.3, reprezentând un rezultat de existenţă, unicitate şi stabilitate Ulam-Hyers ale unei soluţii pentru o problemă cu condiţii periodice la limită şi este o aplicaţie a Teoremei 3.1.2 de punct fix cuplat, prezentată în Capitolul 3.

Rezultatul prezentat în această secţiune este cuprins în lucrarea C. Urs [156].

În cea de-a **doua secţiune** prezentăm câteva aplicaţii la un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu condiţii periodice la limită, considerând de asemenea proprietatea de mixt-monotonie şi câteva aplicaţii la sisteme de ecuaţii funcţional-integrale.

Prima contribuţie proprie în aceasta secţiune este Teorema 4.2.2, care include investigarea existenţei şi unicităţii soluţiei unei probleme cu condiţii periodice la limită. Această teoremă este o aplicaţie a Teoremei 3.2.2 de punct fix cuplat, prezentată in Capitolul 3. Teorema 4.2.2 a fost obţinută pentru cazul operatorilor univoci cu proprietatea de mixt-monotonie în spaţii metrice ordonate.

Cea de-a doua contribuţie proprie este Teorema 4.2.3, o aplicaţie a Teoremei 3.2.3 de punct fix cuplat prezentată în Capitolul 3. Această aplicaţie este un rezultat de existenţă şi unicitate pentru un sistem de ecuaţii funcţional-integrale, care apare în modele fluxului de trafic.

Cel de-al treilea rezultat propriu este Teorema 4.2.4, o aplicaţie a Teoremei 3.2.3 şi reprezintă un rezultat de existenţă şi unicitate pentru un sistem de ecuaţii funcţional-integrale. În acest caz am aplicat teorema de punct fix cuplat la un sistem echivalent de ecuaţii operatoriale. Ca şi o consecinţă a rezultatelor anterioare, prezentate în această secţiune, am obţinut o aplicaţie, Teorema 4.2.10, care este un rezultat de existenţă şi unicitate pentru un sistem multivoc de ordinul intâi cu condiţii periodice la limită.

Primul rezultat din aceasta secţiune, Teorema 4.2.2 este cuprinsă în lucrarea C. Urs [157].

Contribuţiile proprii, prezentate în aceasta teză sunt cuprinse în următoarele lucrări ştiinţifice:

[155] C. Urs, *Ulam-Hyers stability for coupled fixed points of contractive type operators*, J. Nonlinear Sci. Appl., 6 (2013), 124-136, (MR 3017896).

[156] C. Urs, *Coupled fixed point theorems and applications to periodic boundary value problems*, Miskolc Mathematical Notes, 14 (2013), no. 1, 323-333, (MR 3070711), (IF: 0,304).

[108] A. Petruşel, G. Petruşel, and C. Urs, *Vector-valued metrics, fixed points and coupled fixed points for nonlinear operators*, Fixed Point Theory and Appl., (2013), 2013:218 doi:10.1186/1687-1812-2013-218, (MR 3108266), (IF: 1,87).

[109] A. Petruşel, C. Urs and O. Mleşniţe, *Vector-valued Metrics in Fixed Point Theory*, Contemporary Math. Series, Amer. Math. Soc., 2013, to appear.

[157] C. Urs, *Coupled fixed point theorems for mixed monotone operators and applications*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 2013, to appear.

[79] E. Llorens-Fuster, C. Urs, *Fixed point results for multivalued operators with respect to a c-distance*, submitted.

O mare parte din aceste contribuţii proprii au fost prezentate în cadrul următoarelor conferinţe:

- International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications (ICNODEA), July 5^{th}–8^{th}, 2011, Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca, Romania;
- The 5^{th} International Workshop- 2012, Constructive Methods for Non-Linear Boundary Value Problems, June 28^{th}-July 1^{st}, 2012, Tokaj, Hungary;
- 6^{th} European Congress of Mathematics, July 2^{nd}-7^{th}, 2012, Krakow, Poland;
- The 10^{th} International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, July 9^{th}-15^{th}, 2012, Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca, Romania;
- Workshop on Metric Fixed Point Theory, November 15^{th}-17^{th}, 2012, University of Valencia, Spain.
- The Fourtheenth International Conference on Applied Mathematics and Computer Science (Theodor Angheluţă Seminar), August 29^{th}-31^{st}, 2013, Cluj-Napoca, Romania.

Cuvinte cheie: punct fix; contracţie; operator univoc; operator multivoc; metrică vectorială; matrice convergentă la zero; spaţiu metric ordonat; punct fix cuplat; stabilitate Ulam-Hyers; proprietatea de umbrire la limită; proprietatea de mixt-monotonie; spaţii con-metrice; problemă cu condiţii periodice la limită; ecuaţie diferenţială; sistem de ecuaţii funcţional-integrale.

Capitolul 1

Preliminarii

Scopul acestui capitol este de a prezenta conceptele de bază pe care le folosim în următoarele capitole şi care ne permit prezentarea rezultatelor obţinute în cadrul acestei teze. În prima secţiune a acestui capitol amintim noţiunile de spaţiu metric generalizat şi matrici convergente la zero. În cea de-a doua secţiune prezentăm câteva teoreme de punct fix, care reprezintă baza studiului realizat în această lucrare. În secţiunea a treia expunem câteva probleme deschise privind punctele fixe şi punctele fixe stricte. În cea de-a patra secţiune amintim lema clasică a lui Cauchy şi prezentăm o generalizare a sa.

Referinţele de bază pentru acest capitol sunt următoarele: W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen [80]; I. A. Rus [126]; A. C. Zaanen [163]; P. P. Zabrejko [162]; R. S. Varga [158]; R. Precup [110]; A. Granas, J. Dugundji [51]; L.-G. Huang, X. Zhang [58]; G. Allaire şi S. M. Kaber [5]; I. A Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel [131].

1.1 Metrici vectoriale şi matrici convergente la zero

În această secţiune introducem noţiunile pe care le utilizăm în această lucrare. Conceptele de spaţiu metric generalizat şi matrici convergente la zero sunt prezentate în ceea ce urmează.

Fie X o multime nevidă. Un operator $d : X \times X \to \mathbb{R}^m$ se numeşte metrică vectorială pe X daca următoarele proprietăţi sunt satisfacute:

(a) $d(x, y) \geq O$ pentru orice $x, y \in X$; dacă $d(x, y) = O$, atunci $x = y$; (unde $O := \underbrace{(0, 0, \cdots, 0)}_{m-times}$)

(b) $d(x, y) = d(y, x)$ pentru orice $x, y \in X$;

(c) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ pentru orice $x, y \in X$.

O mulţime nevidă X cu o metrică vectorială d se numeste un $\mathbb{R}^m_+$ spaţiu metric generalizat şi se va nota cu (X, d). Noţiunile de şir convergent, şir Cauchy, completitudine, submulţime deschisă şi închisă, bila deschisă şi închisă, etc. sunt similare celor din cazul spaţiilor metrice obişnuite.

Notăm cu $M_{mm}(\mathbb{R}_+)$ mulţimea tuturor matricilor $m \times m$ cu elemente pozitive şi cu I matricea identitate $m \times m$. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^m$, $x = (x_1, ..., x_m)$ şi $y = (y_1, ..., y_m)$, atunci, prin definiţie:

$$x \leq y \text{ dacă şi numai dacă } x_i \leq y_i \text{ pentru } i \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Remarcăm faptul că pe parcursul acestei lucrări o să facem o identificare a liniei cu coloana unui vector în $\mathbb{R}^m$.

Definiţia 1.1.1 *O matrice pătratică $A \in M_{mm}(\mathbb{R}_+)$ se numeşte convergentă la zero dacă şi numai dacă*

$$A^n \to 0 \text{ când } n \to \infty$$

Un rezultat clasic în analiza matricială este următoarea teoremă (a se vedea G. Allaire şi S. M. Kaber [5], R. S. Varga [158]):

Teorema 1.1.2 *Fie $A \in M_{mm}(\mathbb{R}_+)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) A este o matrice convergentă la zero;
(ii) Valorile proprii ale lui A sunt în discul unitate deschis, adică, $|\lambda| < 1$, pentru orice $\lambda \in \mathbb{C}$ cu $\det(A - \lambda I) = 0$;
(iii) Matricea $(I - A)$ este nesingulară şi

$$(I - A)^{-1} = I + A + ... + A^n + ...; \tag{1.1}$$

(iv) Matricea $(I - A)$ este nesingulară şi $(I - A)^{-1}$ are elemente nenegative;
(v) $A^n q \to 0$ şi $qA^n \to 0$ când $n \to \infty$, pentru orice $q \in \mathbb{R}^m$;
(vi) Matricile qA şi Aq sunt convergente la zero, pentru orice $q \in (1, Q)$, unde $Q := \frac{1}{\rho(A)}$.

Alte rezultate privind matricile convergente la zero, se pot gasi în următoarele lucrări: I. A. Rus [126], A. I. Perov [98], M. Turinici [152], R. Precup [111].

Definiţia 1.1.3 *Un operator $T : X \to X$ se numeşte A-contracţie (în raport cu metrica vectorială d din X) dacă există o matrice A, convergentă la zero astfel încât*

$$d(T(u), T(v)) \leq Ad(u, v)$$

pentru orice $u, v \in X$.

1.2 Teoreme de punct fix pentru operatori univoci şi multivoci

În această secţiune prezentăm câteva teoreme de punct fix bine cunoscute, pe care se bazează această investigare.

În continuare amintim teorema de punct fix a lui Perov (a se vedea A. I. Perov [98], A. I. Perov, A. V. Kibenko [99], J. Ortega şi W. Rheinboldt [95]). Această teoremă este o extensie a principiului contracţiilor al lui Banach, pentru cazul contracţiei univoce în spaţii înzestrate cu metrici vectoriale.

Teorema 1.2.1 (Perov) *Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat complet şi operatorul $f : X \to X$ o A-contracţie atunci:*
(i) $Fix(f) = \{x^*\}$;
(ii) şirul aproximaţiilor succesive $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = f^n(x_0)$ este convergent şi are limita x^*, pentru orice $x_0 \in X$;

(iii) avem următoarea estimare

$$d(x_n, x^*) \leq A^n (I - A)^{-1} d(x_0, x_1); \tag{1.2}$$

(iv) dacă $g : X \to X$ este un operator, astfel încât să existe $y^* \in Fix(g)$ şi $\eta \in \left(\mathbb{R}_+^m\right)^*$ cu $d(f(x), g(x)) \leq \eta$, pentru orice $x \in X$, atunci

$$d(x^*, y^*) \leq (I - A)^{-1} \eta;$$

(v) dacă $g : X \to X$ este un operator şi există $\eta \in \left(\mathbb{R}_+^m\right)^*$ astfel încât $d(f(x), g(x)) \leq \eta$, pentru orice $x \in X$, atunci pentru şirul $y_n := g^n(x_0)$ avem următoarea estimare

$$d(y_n, x^*) \leq (I - A)^{-1} \eta + A^n (I - A)^{-1} d(x_o, x_1). \tag{1.3}$$

1.3 Puncte fixe şi puncte fixe stricte

Studiul următoarelor probleme deschise reprezintă un interes în teoria punctului fix, vezi A. Petruşel, I. A. Rus şi M. A. Şerban [107].

Problem 1.3.1 *Care sunt condiţiile metrice impuse asupra lui T care implică*

$$Fix(T) = SFix(T) \neq \emptyset \ ?$$

Problem 1.3.2 *Care sunt condiţiile metrice impuse asupra lui T care implică*

$$SFix(T) = \{x^*\}?$$

Problem 1.3.3 *Care sunt condiţiile metrice impuse asupra lui T care implică*

$$Fix(T) = SFix(T) = \{x^*\} \ ?$$

Problem 1.3.4 *În ce condiţii metrice impuse asupra lui T are loc următoarea implicaţie:*

$$SFix(T) \neq \emptyset \implies Fix(T) = SFix(T) = \{x^*\} \ ?$$

Investigarea Problemei 1.3.1, Problemei 1.3.2, Problemei 1.3.3 şi Problemei 1.3.4 în spaţii metrice generalizate reprezintă un aspect interesant de studiat.

1.4 Leme de tip Cauchy

În aceasta secţiune prezentăm lema clasică a lui Cauchy şi un rezultat obţinut de către I. A. Rus [128] pe baza căruia, am obţinut rezultate de stabilitate (stabilitatea Ulam-Hyers şi proprietatea de umbrire la limită) pentru operatori multivoci în spaţii metrice generalizate. În continuare, am expus o generalizare a lemei lui Cauchy (a se vedea I. A. Rus şi M. A. Şerban în [133]).

Capitolul 2

Teoreme de punct fix în spaţii metrice generalizate

În acest capitol prezentăm câteva rezultate de punct fix pentru operatori univoci şi multivoci în spaţii înzestrate cu $\mathbb{R}^m_+$ metrici şi în spaţii con-metrice. Abordarea noastră se bazează pe teorema de punct fix a lui Perov în spaţii metrice, în care metrica ia valori vectoriale. Stabilitatea Ulam-Hyers şi proprietatea de umbrire la limită a problemei de punct fix sunt de asemenea studiate.

Referinţele folosite pentru a dezvolta acest capitol sunt următoarele: A. I. Perov [98]; S. B. Nadler [85]; H. Covitz şi S. B. Nadler [36]; R. P. Agarwal [3]; O. Kada, T. Suzuki şi W. Takahashi [64]; I. A. Rus, A. Petruşel, A. Sîntămărian [132]; A. Petruşel [104]; Y. Feng şi S. Liu [42]; D. Klim şi D. Wardowski [72]; L. G. Huang, X. Zhang [58]; M. Berinde şi V. Berinde [15], R. Precup şi A. Viorel [112]; I. A. Rus [129], [130]; R. Precup [111], A. Bucur, L. Guran şi A. Petruşel [23]; J. G. Falset, L. Guran şi E. Llorens-Fuster [41]; D. Wardowski [160]; S. Radenović şi B. E. Rhoades [115]; A. Petruşel şi I. A. Rus [106], A. D. Filip şi A. Petruşel [43], M. Bota şi A. Petruşel [19], P. T. Petru, A. Petruşel şi J. C. Yao [102], Y. J. Cho, R. Saadati şi S. Wang [26].

2.1 Teoreme de punct fix pentru operatori univoci în spaţii metrice vectoriale

Scopul în această secţiune este de a prezenta câteva rezultate de existenţă, unicitate şi stabilitate pentru ecuaţii de punct fix în $\mathbb{R}^m_+$ spaţii metrice generalizate. Abordarea în această secţiune se bazează pe o teoremă abstractă de punct fix în spaţii metrice complet ordonate. Rezultatele obţinute în această secţiune sunt legate de alte rezultate de existenţă şi stabilitate pentru problema de punct fix cuplat în cazul operatorilor univoci, care au fost demonstrate în lucrarea C. Urs [155], având ca şi bază teorema de punct fix al lui Perov.

În lucrările lui R. Precup [111] şi de asemenea A. Bucur, L. Guran şi A. Petruşel [23], A. D. Filip şi A. Petruşel [43] şi R. Precup, A. Viorel [112] sunt prezentate avantajele utilizării metricilor vectoriale în comparaţie cu metricile scalare obişnuite.

Există o literatură vastă privind această abordare cu metrici vectoriale, a se vedea R. P. Agarwal [3], D. O'Regan, N. Shahzad, R. P. Agarwal [94], A. Petruşel, I. A. Rus [106], R. Precup, A. Viorel [113], R. Precup [111], etc.

În continuare ne vom concetra atenţia asupra următorului sistem de ecuaţii operatoriale:

$$\begin{cases} x = T_1(x,y) \\ y = T_2(x,y) \end{cases}$$

unde $T_1, T_2 : X \times X \to X$ sunt doi operatori daţi.

Prin definiţie, o soluţie $(x,y) \in X \times X$ a sistemului de mai sus se numeşte punct fix pentru operatorii T_1 şi T_2. Observăm că, dacă $S : X \times X \to X$ este un operator şi definim:

$$T_1(x,y) := S(x,y) \text{ şi } T_2(x,y) := S(y,x),$$

atunci obţinem conceptul clasic de punct fix cuplat pentru operatorul S, introdus de către V. I. Opoitsev şi apoi intensiv studiat în lucrările lui D. Guo şi V. Lakshmikantham [53], T. Gnana Bhaskar şi V. Lakshmikantham [48], V. Lakshmikantham şi L. Ćirić [77], etc.

Cazul incluziunii operatoriale este definit în mod similar, folosind simbolul $\in$ în loc de $=$.

Următorul rezultat este o extensie a teoremei lui Perov.

Teorema 2.1.1 *Fie (X,d) un spaţiu metric complet generalizat şi fie $f : X \to X$ o (A,B,C,D,E)-contracţie, adică, $A,B,C,D,E \in M_{mm}(\mathbb{R}_+)$ astfel încât matricile E şi $C+E$ sau matricile D şi $B+D$ converg la zero şi matricea $M := (I-C-E)^{-1}(A+C+D)$ sau matricea $N := (I-B-D)^{-1}(A+B+E)$ converge la zero şi*

$$d(f(x), f(y)) \leq Ad(x,y) + Bd(y,f(x)) + Cd(x,f(y)) + Dd(x,f(x)) + Ed(y,f(y)), \quad (2.1)$$

pentru orice $x, y \in X$.
Atunci următoarele concluzii au loc:

1. f are cel puţin un puct fix şi pentru orice $x_0 \in X$, $x_n := f^n(x_0)$, şirul aproximaţiilor succesive pentru f, pornind din x_0 converge la $x^*(x_0) \in Fix(f)$ când $n \to \infty$;

2. Pentru orice $x_0 \in X$ avem

$$d(x_n, x^*(x_0)) \leq M^n(I-M)^{-1}d(x_0, f(x_0)), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

sau

$$d(x_n, x^*(x_0)) \leq N^n(I-N)^{-1}d(x_0, f(x_0)), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

3. Dacă, suplimentar matricea $A+B+C$ converge la zero, atunci f are un punct fix unic în X.

În continuare, amintim două concepte abstracte importante: operator slab Picard şi operator ψ-slab Picard (vezi I. A. Rus [129], [130]).

Pentru demonstrarea următoarelor teoreme, avem nevoie de noţiunea de stabilitate Ulam-Hyers în sens generalizat a ecuaţiei de punct fix, care a fost introdusă de către I. A. Rus în [130] (I. A. Rus [127]). Acest concept este adaptat după definiţia dată de către S. Reich şi A. J. Zaslawski în [121], într-un spaţiu metric.

Următorul rezultat abstract se referă la stabilitatea Ulam-Hyers a unei ecuaţii de punct fix (I. A. Rus [130]).

Teorema 2.1.2 *Fie (X,d) un spaţiu metric generalizat şi $f : X \to X$ un operator ψ-slab Picard. Atunci ecuaţia de punct fix $x = f(x)$ este stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat.*

2.2 Teoreme de punct fix pentru operatori multivoci în spaţii metrice vectoriale

Scopul în această secţiune este de a prezenta câteva rezultate de existenţă şi stabilitate pentru incluziuni de punct fix în $\mathbb{R}_+^m$ spaţii metrice generalizate.

În continuare prezentăm o extensie a teoremei de punct fix a lui Nadler în spaţii metrice vectoriale, care este o versiune multivocă a teoremei lui Perov. Următorul rezultat este o generalizare a unor rezultate prezentate de către M. Berinde, V. Berinde [15].

Teorema 2.2.1 *Fie (X,d) un spaţiu metric complet generalizat şi fie $S : X \to P_{cl}(X)$ o (A,B,C)-contracţie multivocă, adică, $A,B,C \in M_{mm}(\mathbb{R}_+)$ astfel încât matricea $M := A + C$ converge la zero şi*

$$H(S(x), S(y)) \leq Ad(x,y) + BD(y,S(x)) + CD(x,S(x)), \text{ pentru orice } x,y \in X. \quad (2.2)$$

Atunci:

(i) $Fix(S) \neq \emptyset$;

(ii) pentru orice $(x,y) \in Graph(S)$ există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (cu $x_0 = x$, $x_1 = y$ şi $x_{n+1} \in S(x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$) astfel încât $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent la un punct fix $x^* := x^*(x,y)$ al lui S şi următoarele relaţii au loc

$$d(x_n, x^*) \leq M^n(I-M)^{-1}d(x_0,x_1), \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*$$

şi

$$d(x,x^*) \leq (I-M)^{-1}d(x,y).$$

Dacă în rezultatul anterior matricea $C = O_m$, atunci obţinem o teoremă de punct fix pentru o aproape contracţie multivocă în spaţii metrice complete generalizate.

Amintim în continuare noţiunile de operator multivoc slab Picard şi operator multivoc ψ-slab Picard (a se vedea I. A. Rus, A. Petruşel, A. Sîntămărian [132] şi A. Petruşel [104]).

Două concepte de stabilitate sunt prezentate mai jos:

Definiţia 2.2.2 *Fie (X,d) un spaţiu metric generalizat şi $F : X \to P(X)$ un operator multivoc. Incluziunea de punct fix*

$$x \in F(x), \; x \in X \quad (2.3)$$

se numeşte stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat, dacă şi numai dacă există $\psi : \mathbb{R}_+^m \to \mathbb{R}_+^m$ crescătoare, continuă în O cu $\psi(O) = O$ astfel încât pentru orice $\varepsilon := (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$ (cu $\varepsilon_i > 0$ pentru $i \in \{1,...,m\}$) şi pentru orice ε-soluţie $y^* \in X$ a incluziunii (2.3), adică,

$$D(y^*, F(y^*)) \leq \varepsilon, \quad (2.4)$$

există o soluţie x^* a incluziunii de punct fix (2.3), astfel încât

$$d(y^*, x^*) \leq \psi(\varepsilon).$$

Dacă $\psi(t) = C \cdot t$, pentru orice $t \in \mathbb{R}_+^m$ (unde $C \in M_{mm}(\mathbb{R}_+)$), atunci incluziunea de punct fix (2.3) este stabilă Ulam-Hyers.

Definiţia 2.2.3 *Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat şi $F : X \to P(X)$ un operator multivoc. Atunci operatorul multivoc F are proprietatea de umbrire la limită dacă pentru orice şir $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ din X astfel încât $D(y_{n+1}, F(y_n)) \to O$ când $n \to +\infty$, există $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul aproximaţiilor succesive pentru F astfel încât $d(x_n, y_n) \to O$, când $n \to +\infty$.*

Folosind următorul rezultat auxiliar (I. A. Rus [128]) obţinem rezultate de stabilitate (stabilitate Ulam-Hyers şi proprietatea de umbrire la limită) pentru A-contracţii multivoce.

Lemă de tip Cauchy. Fie $A \in M_{mm}(\mathbb{R}_+)$ *o matrice convergentă la zero şi* $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^m_+$ *un şir, astfel încât* $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = O_m$. *Atunci*

$$\lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=0}^{n} A^{n-k} B_k) = O_m.$$

În continuare demonstrăm stabilitatea Ulam-Hyers a incluziunii de punct fix (2.3) pentru cazul A-contracţiei multivoce, care are cel puţin un punct fix strict. Proprietatea de umbrire la limită este de asemenea stabilită.

Teorema 2.2.4 *Fie (X, d) un spaţiu metric complet generalizat şi fie $F : X \to P_{cl}(X)$ o A-contracţie multivocă. Presupunem că $SFix(F) \neq \emptyset$, adică, există $x^* \in X$ astfel încât $\{x^*\} = F(x^*)$. Atunci:*

(a) $Fix(F) = SFix(F) = \{x^*\}$;

(b) incluziunea de punct fix (2.3) este stabilă Ulam-Hyers;

(c) operatorul multivoc F are proprietatea de umbrire la limită.

Avem urmatorul rezultat abstract privind stabilitatea Ulam-Hyers a incluziunii de punct fix (2.3) pentru operatori multivoci.

Teorema 2.2.5 *Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat şi $F : X \to P_{cl}(X)$ un operator multivoc ψ-slab Picard. Presupunem că există o matrice $C \in \mathbb{M}_{mm}(\mathbb{R}_+)$ astfel încât pentru orice $\varepsilon := (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m)$ (cu $\varepsilon_i > 0$ pentru $i \in \{1, ..., m\}$) şi orice $z \in X$ cu $D(z, F(z)) \leq \varepsilon$ există $u \in F(z)$ astfel încât $d(z, u) \leq C\varepsilon$. Atunci, incluziunea de punct fix (2.3) este stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat.*

Pentru exemple şi alte rezultate privind stabilitatea Ulam-Hyers şi proprietatea de umbrire la limită a ecuaţiilor şi incluziunilor operatoriale vezi I. A. Rus [130], [129], [127], A. Petruşel şi I. A. Rus [106], M. Bota şi A. Petruşel [19], P. T. Petru, A. Petruşel şi J. C. Yao [102].

2.3 Teoreme de punct fix în spaţii con-metrice înzestrate cu o c-distanţă

Scopul în această secţiune este de a prezenta un rezultat de punct fix pentru un operator multivoc, în spaţii con-metrice folosind conceptul de c-distanţă.

În această secţiune expunem noţiunile de bază în spaţiile con-metrice şi dăm câteva exemple de astfel de spaţii şi c-distanţe. Pentru conceptele şi rezultatele de bază în spaţiile con-metrice a se vedea lucrarea lui P. P. Zabrejko [162].

Teoria punctului fix în spaţii con-metrice a fost reformulată de către L. G. Huang, X. Zhang [58] în 2007 şi a devenit subiect de interes pentru mulţi matematicieni. Spaţiile con-metrice sunt generalizări ale spaţiilor metrice, unde metrica este înlocuită de un operator care ia valori într-un con, dintr-un spaţiu Banach.

Y. J. Cho, R. Saadati şi S. Wang [26] au introdus în 2011 un concept nou, de c-distanţă în spaţii con-metrice, care este o versiune pe con a ω-distanţei, obţinută de O. Kada, T. Suzuki şi W. Takahashi [64]. Ei au demonstrat în [26] câteva teoreme de punct fix pentru operatori de tip contracţie în spaţii con-metrice ordonate, folosind c-distanţa.

În această investigare, o să utilizăm c-distanţa pentru a obţine o teoremă de punct fix în cazul operatorilor multivoci, care ne permite să prezentăm o generalizare a Teoremei 3.3, expusă de către J. G. Falset, L. Guran şi E. Llorens-Fuster în [41].

În continuare amintesc noţiunile pe care le folosesc în această secţiune.

Fie E un spaţiu Banach real şi θ elementul nul din E. Fie P o submulţime a lui E cu int $P \neq \emptyset$, unde int P reprezintă interiorul lui P. Atunci P se numeşte con dacă următoarele condiţii sunt satisfăcute:

(i) P este închis şi $P \neq \{\theta\}$;

(ii) dacă a, b sunt numere reale nenegative şi $x, y \in P$, atunci $ax + by \in P$,

(iii) $x \in P \cap (-P) = \{\theta\}$ implică $x = \theta$.

Pentru orice con $P \subset E$, relaţia de ordine $\preceq$ în raport cu P este astfel definită $x \preceq y$ dacă şi numai dacă $y - x \in P$. Notaţia $x \prec y$ înseamnă că $x \preceq y$, dar $x \neq y$. Folosim de asemenea $x \ll y$ pentru a indica faptul că $y - x \in$ int P, când int $P \neq \emptyset$. Un con P se numeşte *normal* dacă există un numar $K > 0$ astfel încât

$$\theta \preceq x \preceq y \Longrightarrow \|x\| \leq K \|y\|,$$

pentru orice $x, y \in E$. Cel mai mic număr pozitiv K, care satisface condiţia de mai sus se numeşte constanta normală a lui P.

Conul P se numeşte regulat dacă orice şir crescător care este mărginit superior, este convergent. Adică, dacă $\{x_n\}$ este şir astfel încât

$$x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq ... \leq y$$

pentru un $y \in E$, atunci există $x \in E$, astfel încât $\|x_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$. În mod echivalent conul P este regulat dacă şi numai dacă orice şir descrescător care este mărgimit inferior, este convergent. Orice con regulat este un con normal.

Presupunem în continuare că E este un spaţiu Banach real şi P este un con în E cu int $P \neq \emptyset$. Amintim de asemenea noţiunile con-metrică şi spaţiu con-metric (a se vedea de exemplu L.-G. Huang, X. Zhang [58]).

Exemplul 2.3.1 *Fie* $E = \mathbb{R}^3$, $P = \{(z_1, z_2, z_3) \in E \mid z_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$, $X = \mathbb{R}^2$ *şi* $d : X \times X \to E$ *astfel încât*

$$d(x, y) = (d_\infty(x, y), d_2(x, y), d_1(x, y)).$$

Atunci (X, d) *este un spaţiu con-metric.*

În exemplul de mai sus folosesc metrica Chebyshev, metrica euclidiană şi metrica Minkowski.

Pentru alte definiţii şi proprietăţi ale spaţiilor con-metrice, a se vedea L. G. Huang, X. Zhang [58], S. Radenović şi B. E. Rhoades [115].

Conceptul de c-distanţă într-un spaţiu con-metric (X, d), care a fost introdus de Y. J. Cho, R. Saadati şi S. Wang [26], este o generalizare a ω-distanţei.

Definiţia 2.3.2 *(Y. J. Cho, R. Saadati şi S. Wang [26]) Fie (X, d) un spaţiu con-metric. Atunci o funcţie $q : X \times X \to E$ se numeşte c-distanţă pe X, dacă următoarele afirmaţii sunt satisfacute:*

(q1) $\theta \preceq q(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$;

(q2) $q(x, z) \preceq q(x, y) + q(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in X$;

(q3) pentru orice $x \in X$, există $u = u_x \in P$ astfel încât $q(x, y_n) \preceq u$ pentru orice $n \geq 1$, atunci $q(x, y) \preceq u$ când (y_n) este un şir în X, care converge la un punct $y \in X$;

(q4) pentru orice $c \in E$ cu $\theta \ll c$, există $e \in E$ cu $\theta \ll e$ astfel încât $q(z, x) \ll e$ şi $q(z, y) \ll e$ implică $d(x, y) \ll c$.

În continuare, prezentăm câteva exemple de c-distanţe, unde d este con-metrica considerată în Exemplul 2.3.1.

Exemplul 2.3.3 *Fie (X, d) un spaţiu con-metric şi P un con normal. Fie $q : X \times X \to E$, astfel definit $q(x, y) = d(x, y)$, pentru orice $x, y \in X$. Atunci q este o c-distanţă. (q1) şi (q2) (Definiţia 2.3.2) sunt evidente şi (q3) (Definiţia 2.3.2) este satisfacută. Fie $c := (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ cu $(0, 0, 0) \ll (c_1, c_2, c_3)$ există $e := (e_1, e_2, e_3) = (\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}, \frac{c_3}{2}) \in \mathbb{R}^3$ cu $(0, 0, 0) \ll (e_1, e_2, e_3)$, astfel încât $q(z, x) \ll e$ şi $q(z, y) \ll e$. Atunci $q(x, y) \preceq q(x, z) + q(z, y) \ll (e_1, e_2, e_3) + (e_1, e_2, e_3) = c$. Deci (q4) (Definiţia 2.3.2) este satisfacută. Astfel q este o c-distanţă.*

Exemplul 2.3.4 *Fie (X, d) un spaţiu con-metric şi P un con normal. Fie F o submulţime marginită şi închisă a lui X. Presupunem că F are cel puţin două elemente şi c este de forma $c := (c_1, c_2, c_3) \succeq (\sup\{d_\infty(x, y)\}, \sup\{d_2(x, y)\}, \sup\{d_1(x, y)\}) = diamF$, unde $diamF$ este diametrul lui F. Atunci $q : X \times X \to E$, astfel definit*

$$q(x, y) = \begin{cases} d(x, y), \ \text{dacă } x, y \in F \\ c, \ \text{dacă } x \notin F \text{ sau } y \notin F \end{cases},$$

este o c-distanţă.

O mulţime $A \subset X$ se numeşte *închisă* dacă pentru orice sir $\{x_n\} \subset A$ convergent la x, avem $x \in A$.

O mulţime $A \subset X$ se numeşte secvenţial compactă dacă pentru orice şir $\{x_n\} \subset A$, există un subşir $\{x_{n_k}\}$ al lui $\{x_n\}$, astfel încât $\{x_{n_k}\}$ este convergent la un element din mulţimea A.

Notăm cu $N(X)$ mulţimea tuturor submulţimilor nevide ale lui X, cu $C(X)$ mulţimea tuturor submulţimilor închise nevide ale lui X şi cu $K(X)$ mulţimea tuturor submulţimilor secvenţial compacte ale lui X.

Y. Feng şi S. Liu [42] au obţinut o extindere a teoremei lui Nadler de punct fix în spaţii metrice complete, în următoarele condiţii:

Fie $T : X \to N(X)$ un operator multivoc. Funcţia f este astfel definită $f : X \to \mathbb{R}$, unde $f(x) = d(x, T(x))$.

Pentru o constantă pozitivă b ($b \in (0,1)$), definim următoarea mulţime $I_b^x \subset X$ astfel

$$I_b^x = \{y \in T(x) : bd(x,y) \leq d(x, T(x))\}.$$

Teorema 2.3.5 *(Y. Feng şi S. Liu [42]) Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to C(X)$ un operator multivoc. Dacă există o constantă $c \in (0,1)$ astfel încât pentru orice $x \in X$, există $y \in I_b^x$ care satisface următoarea condiţie*

$$d(y, T(y)) \leq cd(x,y),$$

atunci T are un punct fix în X, cu condiţia ca $c < b$ şi f este semi-continuu inferior.

D. Wardowski [160], bazîndu-se pe lucrarea lui Y. Feng şi S. Liu [42] a introdus conceptul de contracţii multivoce în spaţii con-metrice şi a obţinut o teorema de punct fix, considerând distanţa dintre un punct şi o mulţime astfel:

Fie (M,d) un spaţiu con-metric şi fie $T : M \to C(M)$. Pentru $x \in M$, notăm

$$\begin{aligned} D(x,Tx) &= \{d(x,z) : z \in Tx\}, \\ S(x,Tx) &= \{u \in D(x,Tx) : \|u\| = \inf\{\|v\| : v \in D(x,Tx)\}\}. \end{aligned}$$

Un operator $f : X \to \mathbb{R}$ se numeşte semi-continuu inferior la x, în raport cu d, dacă pentru orice şir (x_n) din X şi $x \in X$ cu $x_n \to x$, inegalitatea $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n)$ are loc.

Fie $T : X \to K(X)$, $b \in (0,1]$ şi $x \in X$. În această abordare, o să considerăm urmatoarea mulţime:

$$I_b^x := \{y \in T(x) : bd(x,y) \leq S(x, T(x))\},$$

În continuare, prezentăm următoarea definiţie:

Definiţia 2.3.6 *Fie $T : X \to K(X)$ un operator multivoc şi fie q o c-distanţă pe X. Definim funcţia $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x) := D_q(x, T(x))$, unde $D_q(x,T(x)) = \inf_{y \in T(x)} \|q(x,y)\|$. Pentru orice $b \in [0,1]$ definim mulţimea $I_{b,q}^x := \{y \in T(x) : b\|q(x,y)\| \leq D_q(x,T(x))\}$.*

Remark 2.3.7 *Dacă $T : X \to K(X)$ este un operator multivoc si $0 < b < 1$, observăm faptul că, pentru orice $x \in X$, mulţimea $I_{b,q}^x$ este nevidă.*

Prezentăm acum o teoremă de punct fix pentru operatori multivoci în spaţii con-metrice înzestrate cu o c-distanţă.

Teorema 2.3.8 *Fie (X,d) un spaţiu con-metric complet, P un con regulat, q o c-distanţă pe X şi fie $T : X \to K(X)$ un operator multivoc. Presupunem că $g : X \to \mathbb{R}$ astfel definită $g(x) = \inf_{y \in T(x)} \|q(x,y)\|$, $x \in X$ este semi-continuă inferior. Dacă următoarele condiţii au loc:*

1. Există $b \in (0,1)$ şi $\varphi : [0,\infty[\to [0,b[$ astfel încât

(1i) pentru orice $t \in [0,\infty[$,

$$\lim_{r\to t^+} \sup \varphi(r) < b;$$

(1ii) pentru orice $x \in X$, există $y \in I_{b,q}^x$ astfel încât

$$D_q(y, T(y)) \leq \varphi(\|q(x,y)\|) \, \|q(x,y)\| \, ;$$

2. pentru orice $y \in X$, cu $y \notin T(y)$

$$\inf\{\|q(x,y)\| + D_q(x, T(x)) : x \in X\} > 0$$

Atunci T are un punct fix.

Capitolul 3

Teoreme de punct fix cuplat

În acest capitol prezentăm câteva rezultate de punct fix cuplat pentru operatori univoci şi multivoci de tip contracţie în spaţii metrice vectoriale. Abordarea noastră se bazează pe teorema de punct fix a lui Perov în spaţii metrice vectoriale. Alte rezultate legate de teorema de punct fix a lui Perov, generalizări şi aplicaţii se pot găsi în lucrările lui A. Bucur, L. Guran şi A. Petruşel [23], A. D. Filip şi A. Petruşel [43], R. Precup [111].

În vederea realizării acestui capitol au fost studiate următoarele referinţe bibliografice: D. Guo şi V. Lakshmikantham [53]; D. Guo, Y. J. Cho şi J. Zhu [54]; J. J. Nieto şi R. R. López [87]; T. Gnana Bhaskar şi V. Lakshmikantham [48]; J. J. Nieto şi R. R. López [88]; S. Hong [57]; R. P. Agarwal, M. A. El-Gebeily şi D. O'Regan [4]; L. Ćirić, M. Cakić, J. S. Rajović şi J. S. Ume [34]; I. A. Rus [130], R. Precup [111]; V. Lakshmikantham şi L. Ćirić [77]; M. D. Rus [135]; M. Bota şi A. Petruşel [19], P. T. Petru, A. Petruşel şi J. C. Yao [102].

3.1 Teoreme de punct fix cuplat pentru operatori univoci

În această secţiune scopul este de a prezenta un rezultat de existenţă, unicitate, dependenţă de date şi stabilitate Ulam-Hyers pentru punctul fix cuplat al unei perechi de operatori univoci de tip contracţie în spaţii metrice vectoriale.

Fie (X, d) un spaţiu metric. În continuare ne concentrăm asupra următorului sistem de ecuaţii operatoriale:

$$\begin{cases} x = T_1(x, y) \\ y = T_2(x, y) \end{cases}$$

unde $T_1, T_2 : X \times X \to X$ sunt doi operatori daţi.

Prin definiţie o soluţie $(x, y) \in X \times X$ a sistemului de mai sus se numeşte punct fix pentru perechea (T_1, T_2). Într-un mod similar, poate fi considerat cazul incluziunii operatorile (folosind simbolul $\in$ în loc de $=$).

Pentru demonstarea următorului rezultat avem nevoie de noţiunea de stabilitate Ulam-Hyers a sistemului de ecuaţii operatoriale (I. A. Rus [130]).

Definiţia 3.1.1 *Fie (X, d) un spaţiu metric şi fie $T_1, T_2 : X \times X \to X$ doi operatori. Atunci sistemul de ecuaţii operatoriale*

$$\begin{cases} x = T_1(x, y) \\ y = T_2(x, y) \end{cases} \tag{3.1}$$

este stabil Ulam-Hyers, dacă există $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ *astfel încât pentru orice* $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ *şi orice pereche* $(u^*, v^*) \in X \times X$ *relaţiile au loc*

$$\begin{aligned} d\left(u^*, T_1\left(u^*, v^*\right)\right) &\leq \varepsilon_1 \\ d\left(v^*, T_2\left(u^*, v^*\right)\right) &\leq \varepsilon_2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

există o soluţie $(x^*, y^*) \in X \times X$ *a sistemului (3.1) astfel încât*

$$\begin{aligned} d\left(u^*, x^*\right) &\leq c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 \\ d\left(v^*, y^*\right) &\leq c_3\varepsilon_1 + c_4\varepsilon_2\ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Pentru exemple şi alte rezultate privind stabilitatea Ulam-Hyers în sens generalizat pentru ecuaţii şi incluziuni operatoriale, a se vedea I. A. Rus [130], M. Bota şi A. Petruşel [19], P. T. Petru, A. Petruşel şi J. C. Yao [102].

Rezultatul de bază în această secţiune este următoarea teoremă de existenţă, unicitate, dependenţă de date şi stabilitate Ulam-Hyers pentru punctul fix cuplat al unei perechi de operatori univoci (T_1, T_2).

Teorema 3.1.2 *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* $T_1, T_2 : X \times X \to X$ *doi operatori astfel încât*

$$\begin{aligned} d\left(T_1\left(x,y\right), T_1\left(u,v\right)\right) &\leq k_1 d\left(x,u\right) + k_2 d\left(y,v\right) \\ d\left(T_2\left(x,y\right), T_2\left(u,v\right)\right) &\leq k_3 d\left(x,u\right) + k_4 d\left(y,v\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

pentru orice $(x,y), (u,v) \in X \times X$, *(unde* $k_i \in \mathbb{R}_+$, *pentru* $i \in \{1,2,3,4\}$*). Presupunem că* $A := \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}$ *este o matrice convergentă la zero. Atunci:*
(i) există un unic element $(x^*, y^*) \in X \times X$ *astfel încât*

$$\begin{cases} x^* = T_1\left(x^*, y^*\right) \\ y^* = T_2(x^*, y^*) \end{cases} \tag{3.5}$$

(ii) şirul $\left(T_1^n\left(x,y\right), T_2^n\left(x,y\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge la* (x^*, y^*) *când* $n \to \infty$, *unde*

$$\begin{aligned} T_1^{n+1}\left(x,y\right) &:= T_1^n\left(T_1\left(x,y\right), T_2\left(x,y\right)\right) \\ T_2^{n+1}\left(x,y\right) &:= T_2^n\left(T_1\left(x,y\right), T_2\left(x,y\right)\right), \end{aligned} \tag{3.6}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
(iii) avem următoarea estimare:

$$\begin{pmatrix} d\left(T_1^n\left(x_0,y_0\right), x^*\right) \\ d\left(T_2^n\left(x_0,y_0\right), y^*\right) \end{pmatrix} \leq A^n\left(I-A\right)^{-1} \begin{pmatrix} d\left(x_0, T_1\left(x_0,y_0\right)\right) \\ d\left(y_0, T_2\left(x_0,y_0\right)\right) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

(iv) fie $F_1, F_2 : X \times X \to X$ *doi operatori astfel încât, există* $\eta_1, \eta_2 > 0$ *cu*

$$\begin{aligned} d\left(T_1\left(x,y\right), F_1\left(x,y\right)\right) &\leq \eta_1 \\ d\left(T_2\left(x,y\right), F_2\left(x,y\right)\right) &\leq \eta_2 \end{aligned}$$

pentru orice $(x,y) \in X \times X$. *Dacă* $(a^*, b^*) \in X \times X$ *astfel încât*

$$\begin{cases} a^* = F_1(a^*, b^*) \\ b^* = F_2(a^*, b^*) \end{cases} \tag{3.8}$$

atunci

$$\begin{pmatrix} d(a^*, x^*) \\ d(b^*, y^*) \end{pmatrix} \leq (I - A)^{-1} \eta, \tag{3.9}$$

unde $\eta := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$.

(v) fie $F_1, F_2 : X \times X \to X$ *doi operatori astfel încât, există* $\eta_1, \eta_2 > 0$ *cu*

$$\begin{matrix} d(T_1(x,y), F_1(x,y)) \leq \eta_1 \\ d(T_2(x,y), F_2(x,y)) \leq \eta_2 \end{matrix} \tag{3.10}$$

pentru orice $(x,y) \in X \times X$. *Dacă considerăm şirul* $(F_1^n(x,y), F_2^n(x,y))_{n\in\mathbb{N}}$, *astfel*

$$\begin{matrix} F_1^{n+1}(x,y) := F_1^n(F_1(x,y), F_2(x,y)) \\ F_2^{n+1}(x,y) := F_2^n(F_1(x,y), F_2(x,y)), \end{matrix} \tag{3.11}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ *şi* $\eta := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$, *atunci*

$$\begin{pmatrix} d(F_1^n(x_0,y_0), x^*) \\ d(F_2^n(x_0,y_0), y^*) \end{pmatrix} \leq (I - A)^{-1} \eta + A^n (I - A)^{-1} \begin{pmatrix} d(x_0, T_1(x_0,y_0)) \\ d(y_0, T_2(x_0,y_0)) \end{pmatrix}$$

(vi) sistemul de ecuaţii operatoriale

$$\begin{cases} x = T_1(x,y) \\ y = T_2(x,y) \end{cases} \tag{3.12}$$

este stabil Ulam-Hyers.

3.2 Teoreme de punct fix cuplat pentru operatori univoci de tip mixt-monoton

În această secţiune scopul este de a prezenta într-un spaţiu metric ordonat o teoremă de tipul Gnana Bhaskar-Lakshmikantham pentru problema de punct fix cuplat asociată unei perechi de operatori univoci, care satisfac condiţia de mixt-monotonie generalizată.

Fie X o mulţime nevidă înzestrată cu o relaţie de ordine, notată astfel $\leq$. Atunci notăm

$$X_{\leq} := \{(x_1, x_2) \in X \times X \ : \ x_1 \leq x_2 \text{ sau } x_2 \leq x_1\}.$$

Dacă $f : X \to X$ este un operator, atunci notăm produsul cartezian al lui f cu el însuşi astfel:

$$f \times f : X \times X \to X \times X, \ (f \times f)(x_1, x_2) := (f(x_1), f(x_2)).$$

Următorul rezultat este unul important în abordarea noastră.

Teorema 3.2.1 *Fie $(X, d, \leq)$ un spaţiu metric ordonat generalizat şi fie $f : X \to X$ un operator. Presupunem că:*

(1) pentru orice $(x, y) \notin X_{\leq}$ există $z(x, y) := z \in X$, astfel încât $(x, z), (y, z) \in X_{\leq}$;

(2) $X_{\leq} \in I(f \times f)$;

(3) $f : (X, d) \to (X, d)$ este continuu;

(4) metrica d este completă;

(5) există $x_0 \in X$ astfel încât $(x_0, f(x_0)) \in X_{\leq}$;

(6) există o matrice $A \in M_{mm}(\mathbb{R}_+)$ care converge la zero, astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq Ad(x, y), \text{ pentru orice } (x, y) \in X_{\leq}.$$

Atunci $f : (X, d) \to (X, d)$ este un operator Picard.

Aplicăm rezultatul de mai sus la problema de punct fix cuplat, generată de doi operatori.

Fie X o mulţime nevidă înzestrată cu o relaţie de ordine notată astfel $\leq$. Dacă considerăm $z := (x, y), w := (u, v)$ două elemente arbitrare din $Z := X \times X$, atunci, prin definiţie

$$z \preceq w \text{ dacă şi numai dacă } (x \geq u \text{ şi } y \leq v).$$

Remarcăm faptul că $\preceq$ este o relaţie de ordine pe Z.

Notăm

$$Z_{\preceq} = \{(z, w) := ((x, y), (u, v)) \in Z \times Z \ : \ z \preceq w \text{ sau } w \preceq z\}.$$

Fie $T : Z \to Z$ un operator astfel definit

$$T(x, y) := \begin{pmatrix} T_1(x, y) \\ T_2(x, y) \end{pmatrix} = (T_1(x, y), T_2(x, y)) \tag{3.13}$$

Produsul cartezian al lui T şi T îl notăm cu $T \times T$ şi este definit astfel

$$T \times T : Z \times Z \to Z \times Z, \quad (T \times T)(z, w) := (T(z), T(w)).$$

Rezultatul principal în această secţiune este următoarea teoremă.

Teorema 3.2.2 *Fie $(X, d, \leq)$ un spaţiu metric ordonat şi complet, şi fie $T_1, T_2 : X \times X \to X$ doi operatori. Presupunem:*

(i) pentru orice $z = (x, y), w = (u, v) \in X \times X$ care nu sunt comparabile în raport cu relaţia de ordine $\preceq$ pe $X \times X$, există $t := (t_1, t_2) \in X \times X$ (care pot depinde de (x, y) şi (u, v)) astfel încât t este comparabil (în raport cu relaţia de ordine $\preceq$) cu z şi w, adică,

$$((x \geq t_1 \text{ şi } y \leq t_2) \text{ sau } (x \leq t_1 \text{ şi } y \geq t_2)) \text{ şi } ((u \geq t_1 \text{ şi } v \leq t_2) \text{ sau } (u \leq t_1 \text{ şi } v \geq t_2));$$

(ii) pentru orice $(x \geq u$ şi $y \leq v)$ sau $(u \geq x$ şi $v \leq y)$ avem

$$\begin{cases} T_1(x, y) \geq T_1(u, v) \\ T_2(x, y) \leq T_2(u, v) \end{cases} \text{sau} \begin{cases} T_1(u, v) \geq T_1(x, y) \\ T_2(u, v) \leq T_2(x, y) \end{cases}$$

(iii) $T_1, T_2 : X \times X \to X$ sunt continui;

(iv) există $z_0 := (z_0^1, z_0^2) \in X \times X$ *astfel încât*

$$\begin{cases} z_0^1 \geq T_1(z_0^1, z_0^2) \\ z_0^2 \leq T_2(z_0^1, z_0^2) \end{cases} \text{sau} \begin{cases} T_1(z_0^1, z_0^2) \geq z_0^1 \\ T_2(z_0^1, z_0^2) \leq z_0^2 \end{cases}$$

(v) există o matrice $A = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}_+)$ *convergentă la zero astfel încât*

$$\begin{aligned} d(T_1(x,y), T_1(u,v)) &\leq k_1 d(x,u) + k_2 d(y,v) \\ d(T_2(x,y), T_2(u,v)) &\leq k_3 d(x,u) + k_4 d(y,v) \end{aligned}$$

pentru orice $(x \geq u$ *şi* $y \leq v)$ *sau* $(u \geq x$ *şi* $v \leq y)$.
Atunci există un unic element $(x^*, y^*) \in X \times X$, *astfel încât*

$$x^* = T_1(x^*, y^*) \text{ şi } y^* = T_2(x^*, y^*)$$

şi şirul aproximaţiilor succesive $(T_1^n(w_0^1, w_0^2), T_2^n(w_0^1, w_0^2))$ *converge la* (x^*, y^*), *când* $n \to \infty$, *pentru orice* $w_0 = (w_0^1, w_0^2) \in X \times X$.

Pentru cazul particular al problemelor clasice de punct fix cuplat (adică, $T_1(x,y) := S(x,y)$ şi $T_2(x,y) := S(y,x)$, unde $S : X \times X \to X$ este un operator dat) obţinem următoarea generalizare a teoremei Gnana Bhaskar-Lakshmikantham, prezentată în [48].

Teorema 3.2.3 *Fie* $(X, d, \leq)$ *un spaţiu metric ordonat şi complet, şi fie* $S : X \times X \to X$ *un operator. Presupunem:*

(i) pentru orice $z = (x,y), w = (u,v) \in X \times X$ *care nu sunt comparabile în raport cu relaţia de ordine* $\preceq$ *pe* $X \times X$, *există* $t := (t_1, t_2) \in X \times X$ *(care poate depinde de* (x,y) *şi* (u,v)*) astfel încât* t *este comparabil (în raport cu relaţia de ordine* $\preceq$*) cu* z *şi* w*;*

(ii) pentru orice $(x \geq u$ *şi* $y \leq v)$ *sau* $(u \geq x$ *şi* $v \leq y)$ *avem*

$$\begin{cases} S(x,y) \geq S(u,v) \\ S(y,x) \leq S(v,u) \end{cases} \text{sau} \begin{cases} S(u,v) \geq S(x,y) \\ S(v,u) \leq S(y,x) \end{cases}$$

(iii) $S : X \times X \to X$ *este continuu;*
(iv) există $z_0 := (z_0^1, z_0^2) \in X \times X$ *astfel încât*

$$\begin{cases} z_0^1 \geq S(z_0^1, z_0^2) \\ z_0^2 \leq S(z_0^2, z_0^1) \end{cases} \text{sau} \begin{cases} S(z_0^1, z_0^2) \geq z_0^1 \\ S(z_0^2, z_0^1) \leq z_0^2 \end{cases}$$

(v) există $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ *cu* $k_1 + k_2 < 1$ *astfel încât*

$$d(S(x,y), S(u,v)) \leq k_1 d(x,u) + k_2 d(y,v)$$

pentru orice $(x \geq u$ *şi* $y \leq v)$ *sau* $(u \geq x$ *şi* $v \leq y)$.
Atunci există un unic element $(x^*, y^*) \in X \times X$ *astfel încât*

$$x^* = S(x^*, y^*) \text{ şi } y^* = S(y^*, x^*),$$

şi şirul aproximaţiilor succesive $(S^n(w_0^1, w_0^2), S^n(w_0^2, w_0^1))$ *converge la* (x^*, y^*), *când* $n \to \infty$, *pentru orice* $w_0 = (w_0^1, w_0^2) \in X \times X$.

Pentru alte rezultate de punct fix pentru operatori mixti-monotoni în spaţii metrice ordonate a se vedea următoarele lucrări: R. P. Agarwal, M. A. El-Gebeily şi D. O'Regan [4], L. Ćirić, M. Cakić, J. S. Rajović şi J. S. Ume [34], T. Gnana Bhaskar şi V. Lakshmikantham [48], V. Lakshmikantham şi L. Ćirić [77], J. J. Nieto şi R. R. López [87], [88].

3.3 Teoreme de punct fix cuplat pentru operatori multivoci

În această secţiune vom prezenta un rezultat de existenţă, unicitate, dependenţă de date şi stabilitate Ulam-Hyers pentru punctul fix cuplat al unei perechi de operatori multivoci în spaţii metrice complete.

Dacă (X, d) este un spaţiu metric şi $S : X \times X \to P(X)$ este un operator multivoc, atunci prin definiţie, un punct fix cuplat pentru S este o pereche $(x^*, y^*) \in X \times X$ care satisface relaţiile

$$\begin{cases} x^* \in S(x^*, y^*) \\ y^* \in S(y^*, x^*). \end{cases} \tag{3.14}$$

Considerăm acum cazul operatorilor multivoci.

Rezultatul principal în această secţiune este o teoremă de existenţă, unicitate, dependenţă de date şi stabilitate Ulam-Hyers pentru punctul fix cuplat al unei perechi de operatori multivoci (T_1, T_2). Pentru demonstrarea acestuia, utilizăm următorul rezultat.

Teorema 3.3.1 *Fie (X, d) un spaţiu metric complet generalizat şi fie $T : X \to P_{cl}(X)$ o A-contracţie multivocă, adică, există $A \in M_{mm}(\mathbb{R}_+)$ care converge la zero când $n \to \infty$ şi pentru orice $x, y \in X$ şi orice $u \in T(x)$ există $v \in T(y)$ astfel încât $d(u, v) \le A \cdot d(x, y)$. Atunci T este un MWP-operator, adică, $FixT \neq \emptyset$ şi pentru orice $(x, y) \in Graph(T)$ există un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ al aproximaţiilor succesive pentru T pornind din (x, y) care converge la un punct fix x^*al lui T. În plus $d(x, x^*) \le (I - A)^{-1} d(x, y)$, pentru orice $(x, y) \in Graph(T)$.*

Definiţia 3.3.2 *Fie (X, d) spaţiu metric generalizat şi $F : X \to P(X)$. Incluziunea de punct fix*

$$x \in F(x), x \in X \tag{3.15}$$

se numeşte stabilă Ulam-Hyers în sens generalizat dacă şi numai dacă există $\psi : \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}^m_+$ crescătoare, continuă în 0 cu $\psi(0) = 0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon := (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_m) > 0$ şi pentru orice ε-soluţie y^*a incluziunii (3.15), adică,

$$D_d(y^*, F(y^*)) \le \varepsilon$$

există o soluţie x^*a incluziunii de punct fix (3.15) astfel încât

$$d(y^*, x^*) \le \psi(\varepsilon).$$

Dacă $\psi(t) = C \cdot t$, pentru orice $t \in \mathbb{R}^m_+$ (unde $C \in M_{mm}(\mathbb{R}_+)$), atunci (3.15) este stabilă Ulam-Hyers.

Teorema 3.3.3 *Fie (X, d) un spaţiu metric complet generalizat şi fie $T : X \to P_{cl}(X)$ o A-contracţie multivocă cu valori proximinale. Atunci, incluziunea de punct fix (3.15) este stabilă Ulam-Hyers.*

Teorema 3.3.4 *Fie (X,d) un spaţiu metric complet generalizat şi fie $T : X \to P_{cl}(X)$ o A-contracţie multivocă astfel încât există $x^* \in X$ cu $T(x^*) = \{x^*\}$. Atunci incluziunea de punct fix (3.15) este stabilă Ulam-Hyers.*

Fie (X,d) un spaţiu metric. Ne concentrăm atenţia în continuare asupra următorului sistem de incluziuni operatoriale:

$$\begin{cases} x \in T_1(x,y) \\ y \in T_2(x,y) \end{cases} \tag{3.16}$$

unde $T_1, T_2 : X \times X \to P(X)$ sunt doi operatori multivoci daţi.

Prin definiţie, o soluţie $(x,y) \in X \times X$ a sistemului de mai sus se numeste punct fix cuplat pentru perechea (T_1, T_2).

Definiţia 3.3.5 *Fie (X,d) un spaţiu metric şi fie $T_1, T_2 : X \times X \to P(X)$ doi operatori multivoci. Atunci sistemul de incluziuni operatoriale (3.16) este stabil Ulam-Hyers dacă există $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, astfel încât pentru orice $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ şi orice pereche $(u^*, v^*) \in X \times X$ care satisface relaţiile*

$$\begin{aligned} d\left(u^*, w\right) &\leq \varepsilon_1 \text{ , } \textit{for all } w \in T_1\left(u^*, v^*\right) \\ d\left(v^*, z\right) &\leq \varepsilon_2 \text{ , } \textit{for all } z \in T_2\left(u^*, v^*\right), \end{aligned} \tag{3.17}$$

există o soluţie $(x^*, y^*) \in X \times X$ a sistemului (3.16) astfel încât

$$\begin{aligned} d\left(u^*, x^*\right) &\leq c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 \\ d\left(v^*, y^*\right) &\leq c_3\varepsilon_1 + c_4\varepsilon_2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Rezultatul principal în această secţiune este următoarea teoremă.

Teorema 3.3.6 *Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi fie $T_1, T_2 : X \times X \to P_{cl}(X)$ doi operatori multivoci. Presupunem că T_1 are valori proximinale în raport cu prima variabilă şi T_2 în raport cu a doua. Pentru orice $(x,y), (u,v) \in X \times X$ şi orice $z_1 \in T_1(x,y)$, $z_2 \in T_2(x,y)$ există $w_1 \in T_1(u,v)$, $w_2 \in T_2(u,v)$ care satisfac relaţiile*

$$\begin{aligned} d(z_1, w_1) &\leq k_1 d(x,u) + k_2 d(y,v) \\ d(z_2, w_2) &\leq k_3 d(x,u) + k_4 d(y,v), \end{aligned}$$

unde $k_i \in \mathbb{R}_+$, pentru $i \in \{1,2,3,4\}$. Presupunem că $A := \begin{pmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{pmatrix}$ converge la zero. Atunci:

(i) există $(x^*, y^*) \in X \times X$ o soluţie a sistemului (3.16).

(ii) sistemul operatorial (3.16) este stabil Ulam-Hyers.

Teorema 3.3.7 *Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi fie $T_1, T_2 : X \times X \to P_{cl}(X)$ doi operatori multivoci. Presupunem că există $x^*, y^* \in X$ astfel încât*

$$T_1(x^*, y^*) = \{x^*\}, \quad T_2(x^*, y^*) = \{y^*\}. \tag{3.19}$$

Pentru orice $(x,y),(u,v)\in X\times X$ *şi orice* $z_1\in T_1(x,y)$, $z_2\in T_2(x,y)$ *există* $w_1\in T_1(u,v)$, $w_2\in T_2(u,v)$ *care satisfac relaţiile*

$$\begin{aligned} d(z_1,w_1) &\leq k_1 d(x,u)+k_2 d(y,v)\\ d(z_2,w_2) &\leq k_3 d(x,u)+k_4 d(y,v), \end{aligned}$$

unde $k_i\in\mathbb{R}_+$, *pentru* $i\in\{1,2,3,4\}$. *Presupunem că* $A:=\begin{pmatrix} k_1 & k_2\\ k_3 & k_4\end{pmatrix}$ *converge la zero. Atunci:*

(i) există $(x^*,y^*)\in X\times X$ *o soluţie a sistemului (3.16),*

(ii) sistemul operatorial (3.16) este stabil Ulam-Hyers.

Capitolul 4

Aplicaţii

În acest capitol prezentăm câteva aplicaţii la sisteme cu condiţii periodice la limită şi la sisteme de ecuaţii funcţional-integrale. Aceste aplicaţii ale rezultatelor de punct fix cuplat pentru operatori univoci şi multivoci de tip contracţie în spaţii metrice vectoriale au fost obţinute cu scopul de a valida rezultatele precedente.

În vederea realizării acestui capitol au fost studiate următoarele referinţe bibliografice : A. C. M. Ran, M. C. B. Reurings [118]; T. Gnana Bhaskar şi V. Lakshmikantham [48], J. J. Nieto şi R. R. López [88]; V. Lakshmikantham şi L. Ćirić [77]; V. Berinde, M. Borcut [16]; W. Sintunavarat, P. Kumam, şi Y. J. Cho [143]; M. D. Rus [136].

4.1 Aplicaţie la o problema cu condiţii periodice la limită

În această secţiune studiem existenţa, unicitatea şi stabilitatea Ulam-Hyers soluţiei unei probleme cu condiţii periodice la limită, ca şi o aplicaţie a Teoremei 3.1.2 de punct fix cuplat, prezentată în Capitolul 3. Abordarea noastră se bazează pe aplicaţia prezentată de T. Gnana Bhaskar şi V. Lakshmikantham în lucrarea [48].

Pentru alte aplicaţii a se vedea următoarele lucrări: V. Lakshmikantham şi L. Ćirić [77], W. Sintunavarat, P. Kumam şi Y. J. Cho [143], J. J. Nieto şi R. R. López [88], A. C. M. Ran, M. C. B. Reurings [118].

Considerăm acum următoarea problemă cu condiţii periodice la limită:

$$\begin{cases} u' = f(t,u) + g(t,v) \\ v' = f(t,v) + g(t,u) \\ u(0) = u(T) \\ v(0) = v(T) \end{cases} \tag{4.1}$$

presupunând că f, g sunt funcţii continue şi satisfac anumite ipoteze, pe care le vom prezenta mai târziu.

În general, o problemă de acest tip nu are soluţie. Considerăm, de exemplu următoarea problemă

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \\ x(0) = x(T). \end{cases}$$

Ca şi o consecinţă, remarcăm că sistemul cu condiţii periodice la limită (4.1) nu are în general soluţii.

Atunci, pentru a obţine rezultate de existenţă rescriem sistemul (4.1) în următoarea formă şi studiem existenţa soluţiei acestuia:

$$\begin{cases} u' + \lambda_1 u - \lambda_2 v = f(t,u) + g(t,v) + \lambda_1 u - \lambda_2 v, \\ v' + \lambda_1 v - \lambda_2 u = f(t,v) + g(t,u) + \lambda_1 v - \lambda_2 u, \end{cases} \tag{4.2}$$

împreuna cu condiţiile de periodicitate,

$$\begin{cases} u(0) = u(T) \\ v(0) = v(T). \end{cases} \tag{4.3}$$

Această problemă este echivalentă cu următorul sistem de ecuaţii integrale:

$$\begin{cases} u(t) = \int_0^T G_1(t,s)[f(s,u) + g(s,v) + \lambda_1 u - \lambda_2 v] \\ \quad +G_2(t,s)[f(s,v) + g(s,u) + \lambda_1 v - \lambda_2 u]ds \\ \\ v(t) = \int_0^T G_1(t,s)[f(s,v) + g(s,u) + \lambda_1 v - \lambda_2 u] \\ \quad +G_2(t,s)[f(s,u) + g(s,v) + \lambda_1 u - \lambda_2 v]ds \end{cases}$$

unde

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\sigma_1(t-s)}}{1-e^{\sigma_1 T}} + \frac{e^{\sigma_2(t-s)}}{1-e^{\sigma_2 T}}\right] & 0 \le s < t \le T \\ \\ \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\sigma_1(t+T-s)}}{1-e^{\sigma_1 T}} + \frac{e^{\sigma_2(t+T-s)}}{1-e^{\sigma_2 T}}\right] & 0 \le t < s \le T \end{cases}$$

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\sigma_2(t-s)}}{1-e^{\sigma_2 T}} - \frac{e^{\sigma_1(t-s)}}{1-e^{\sigma_1 T}}\right] & 0 \le s < t \le T \\ \\ \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\sigma_2(t+T-s)}}{1-e^{\sigma_2 T}} - \frac{e^{\sigma_1(t+T-s)}}{1-e^{\sigma_1 T}}\right] & 0 \le t < s \le T. \end{cases}$$

Aici, $\sigma_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ şi $\sigma_2 = (\lambda_2 - \lambda_1)$.

Trebuie să garantăm faptul că $G_1(t,s) \ge 0$, $0 \le t,\ s \le T$, si $G_2(t,s) \le 0$, $0 \le t, s \le T$, alegând λ_1, λ_2 convenabil.

În continuare, dăm următoarea ipoteză:

Ipoteză Există $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ şi $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$, astfel încât pentru orice $u, v \in \mathbb{R}$, $v \le u$,

$$0 \le (f(t,u) + \lambda_1 u) - (f(t,v) + \lambda_1 v) \le \mu_1(u - v) \tag{4.4}$$

$$-\mu_2(u - v) \le (g(t,u) - \lambda_2 u) - (g(t,v) - \lambda_2 v) \le 0, \tag{4.5}$$

unde $S := \begin{pmatrix} \frac{\mu_1}{\lambda_1+\lambda_2} & \frac{\mu_2}{\lambda_1+\lambda_2} \\ \frac{\mu_2}{\lambda_1+\lambda_2} & \frac{\mu_1}{\lambda_1+\lambda_2} \end{pmatrix}$ este o matrice convergentã la zero.

Următoarea lemă răspunde la problema de mai sus, privind garantarea anumitor condiţii pentru $G_1(t,s)$ şi $G_2(t,s)$.

Lema 4.1.1 *(T. Gnana Bhaskar and V. Lakshmikantham [48]) Dacă*

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{2e-1}{e}\right) &\leq (\lambda_2-\lambda_1)T && (4.6)\\ (\lambda_1+\lambda_2)T &\leq 1 && (4.7)\end{aligned}$$

atunci $G_1(t,s)\geq 0$ *pentru* $0\leq t,s\leq T$, *şi* $G_2(t,s)\leq 0$ *pentru* $0\leq t,s\leq T$.

Fie $X=C(I,\mathbb{R})$ spaţiul metric al funcţiilor continue $u:I\to\mathbb{R}$, înzestrat cu metrica $d(u,v)=\sup\limits_{t\in I}|u(t)-v(t)|$, pentru $u,v\in X$.

Pentru $x,y,u,v\in X$, notăm $\widetilde{d}((x,y),(u,v)):=\begin{pmatrix} d(x,u)\\ d(y,v)\end{pmatrix}$.

Definim $A:X\times X\to X$ pentru $t\in I$, astfel

$$\begin{aligned} A(u,v)(t) &= \int_0^T G_1(t,s)[f(s,u)+g(s,v)+\lambda_1u-\lambda_2v]\\ &\quad +G_2(t,s)[f(s,v)+g(s,u)+\lambda_1v-\lambda_2u]ds\end{aligned}$$

Observam faptul că, dacă $(u,v)\in X\times X$ este un punct fix cuplat al lui A, atunci avem

$$u(t)=A(u,v)(t) \text{ si } v(t)=A(v,u)(t), \text{ pentru orice } t\in I.$$

Astfel, (u,v) este o soluţie a sistemului (4.2)- (4.3).

Pentru demonstarea rezultatului principal din această secţiune avem nevoie de următoarea noţiune.

Definiţia 4.1.2 *Sistemul*

$$\begin{cases} u(t)=\displaystyle\int_0^T G_1(t,s)[f(s,u)+g(s,v)+\lambda_1u-\lambda_2v]\\ \qquad +G_2(t,s)[f(s,v)+g(s,u)+\lambda_1v-\lambda_2u]ds\\ v(t)=\displaystyle\int_0^T G_1(t,s)[f(s,v)+g(s,u)+\lambda_1v-\lambda_2u]\\ \qquad +G_2(t,s)[f(s,u)+g(s,v)+\lambda_1u-\lambda_2v]ds\end{cases} \tag{4.8}$$

este stabil Ulam-Hyers dacă există $c_1,c_2>0$ *astfel încât pentru orice* $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ *şi orice soluţie* (x^*,y^*) *a următorului sistem de inecuaţii*

$$\begin{cases} \mid x^*(t)-\displaystyle\int_0^T G_1(t,s)[f(s,x^*)+g(s,y^*)+\lambda_1x^*-\lambda_2y^*]\\ \quad +G_2(t,s)[f(s,y^*)+g(s,x^*)+\lambda_1y^*-\lambda_2x^*]ds \mid\leq \varepsilon_1\\ \mid y^*(t)-\displaystyle\int_0^T G_1(t,s)[f(s,y^*)+g(s,x^*)+\lambda_1y^*-\lambda_2x^*]\\ \quad +G_2(t,s)[f(s,x^*)+g(s,y^*)+\lambda_1x^*-\lambda_2y^*]ds \mid\leq \varepsilon_2\end{cases} \tag{4.9}$$

există o soluţie (u^*,v^*) *a sistemului (4.8) astfel încât*

$$\begin{aligned} |u^*(t)-x^*(t)| &\leq c_1\varepsilon_1+c_2\varepsilon_2\\ |v^*(t)-y^*(t)| &\leq c_3\varepsilon_1+c_4\varepsilon_2.\end{aligned}$$

Rezultatul principal în această secţiune este următoarea teoremă de existenţă, unicitate şi stabilitate Ulam-Hyers ale soluţiei unei probleme cu condiţii periodice la limită.

Teorema 4.1.3 *Considerăm problema (4.1) cu $f, g \in C(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ şi presupunem că* ***Ipoteza*** *de mai sus este satisfacută. Dacă (4.6) şi (4.7) sunt îndeplinite, atunci:*
(i) există o soluţie unică (u^*, v^*) a problemei cu condiţii periodice la limită (4.1);
(ii) fie $f_1, g_1 \in C(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, astfel încât, există $\eta_1, \eta_2 > 0$ cu

$$\begin{cases} |f(t,u) - f_1(t,u)| \leq \eta_1 \\ |g(t,u) - g_1(t,u)| \leq \eta_2, \end{cases}$$

pentru orice $(t, u) \in I \times \mathbb{R}$. Fie $(a^*, b^*) \in X \times X$ o soluţie a problemei (4.1), unde f este înlocuit de f_1 şi g de g_1. Atunci

$$\widetilde{d}((u^*, v^*), (a^*, b^*)) = \begin{pmatrix} d(a^*, u^*) \\ d(b^*, v^*) \end{pmatrix} \leq (I - S)^{-1}\eta,$$

unde $\eta := \begin{pmatrix} (\eta_1 + \eta_2)\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ (\eta_1 + \eta_2)\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{pmatrix}$;
(iii) sistemul (4.8) este stabil Ulam-Hyers.

4.2 Aplicaţii la sisteme de ecuaţiii diferenţiale şi funcţional-integrale

În această secţiune prezentăm câteva aplicaţii la sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu condiţii periodice la limită considerând proprietatea de mixt-monotonie şi câteva aplicaţii la sisteme de ecuaţii funcţional-integrale. În prima parte a acestei secţiuni investigăm existenţa şi unicitatea soluţiei unei probleme cu condiţii periodice la limită ca o aplicaţie a Teoremei 3.2.2 de punct fix cuplat pentru operatori univoci mixt-monotoni. În cea de-a doua parte a acestei secţiuni prezentăm două aplicaţii ale Teoremei 3.2.3, care sunt rezultate de existenţă şi unicitate pentru sistemele de ecuaţii funcţional-integrale care apar în modelele de fluxului de trafic. Ultima aplicaţie pe care o prezentăm în această secţiune este un rezultat de existenţă şi unicitate pentru un sistem multivoc de ordinul întâi cu condiţii periodice la limită.

Studiem în continuare existenţa şi unicitatea soluţiei unui sistem cu condiţii periodice la limită, ca o aplicaţie la Teorema 3.2.2 de punct fix cuplat pentru operatori univoci mixt-monotoni în spaţii metrice ordonate.

Notăm relaţia de ordine astfel $\preceq$ pe $C(I) \times C(I)$. Dacă considerăm $z := (x, y)$ şi $w := (u, w)$ două elemente arbitrare din $C(I) \times C(I)$, atunci prin definiţie

$$z \preceq w \text{ dacă şi numai dacă } (x \geq u \text{ şi } y \leq v),$$

unde $x \geq u$ se referă la $x(t) \geq u(t)$, pentru orice $t \in I$.

Considerăm sistemul de ordinul întâi cu condiţii periodice la limită:

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \\ \quad x(0) = x(T) \\ \quad y(0) = y(T) \end{cases} \quad \text{pentru orice } t \in I := [0, T] \tag{4.10}$$

unde $T > 0$ şi $f_1, f_2 : I \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfac urmatoarele condiţii:
(a1) f_1, f_2 sunt continue;
(a2) există $\lambda > 0$ şi $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 > 0$ astfel încât

$$0 \leq f_1(t, x, y) - f_1(t, u, v) + \lambda(x - u) \leq \lambda[\mu_1(x - u) + \mu_2(y - v)]$$

$$-\lambda\,[\mu_3(x - u) + \mu_4(y - v)] \leq f_2(t, x, y) - f_2(t, u, v) + \lambda(y - v) \leq 0,$$

pentru orice $t \in I$ şi $x, y, u, v \in \mathbb{R}$.
(a3) pentru orice $z := (x, y), w := (u, w) \in C(I) \times C(I)$ care nu sunt comparabile în raport cu relaţia de ordine $\preceq$ pe $C(I) \times C(I)$ există $p := (p_1, p_2) \in C(I) \times C(I)$ astfel încât p este comparabil (în raport cu relaţia de ordine $\preceq$) cu z şi w, adică,

$$\begin{aligned} ((x &\geq p_1 \text{ şi } y \leq p_2) \text{ sau } (x \leq p_1 \text{ şi } y \leq p_2)) \text{ şi} \\ (u &\geq p_1 \text{ şi } v \leq p_2) \text{ sau } (u \leq p_1 \text{ şi } v \leq p_2)). \end{aligned}$$

(a4) pentru orice ($x \geq u$ şi $y \leq v$) sau ($u \geq x$ şi $v \leq y$) avem

$$\begin{cases} f_1(t, x, y) \geq f_1(t, u, v) \\ f_2(t, x, y) \leq f_1(t, u, v) \end{cases} \text{sau} \begin{cases} f_1(t, u, v) \geq f_1(t, x, y) \\ f_2(t, u, v) \leq f_2(t, x, y) \end{cases}.$$

(a5) există $z_0 := (z_0^1, z_0^2) \in C(I) \times C(I)$ astfel încât următoarele relaţii au loc:

(a5')

$$\begin{cases} z_0^1(t) \geq f_1(t, z_0^1(t), z_0^2(t)) \\ z_0^2(t) \geq f_2(t, z_0^1(t), z_0^2(t)) \end{cases} \text{sau} \begin{cases} f_1(t, z_0^1(t), z_0^2(t)) \geq z_0^1(t) \\ f_2(t, z_0^1(t), z_0^2(t)) \leq z_0^2(t) \end{cases}$$

(a5")

$$\begin{aligned} (1 + \lambda) \int_0^T G_\lambda(t, s) z_0^1(s) ds &\geq z_0^1(t) \\ (1 + \lambda) \int_0^T G_\lambda(t, s) z_0^2(s) ds &\leq z_0^2(t) \end{aligned}$$

pentru orice $t \in I$.
(a6) matricea $S := \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}$ este convergentă la zero.

Lema 4.2.1 *Fie $x \in C^1(I)$ astfel încât să satisfacă problema cu condiţii periodice la limită*

$$\begin{cases} x'(t) = h(t) \\ x(0) = x(T) \end{cases} \quad t \in I,$$

cu $h \in C(I)$. Atunci pentru un $\lambda \neq 0$ problema de mai sus este echivalentă cu

$$x(t) = \int_0^T G_\lambda(t,s)(h(s) + \lambda x(s))ds, \text{ pentru orice } t \in I,$$

unde

$$G_\lambda(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}, \text{ dacă } 0 \leq s < t \leq T \\ \\ \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1}, \text{ dacă } 0 \leq t < s \leq T \end{cases}.$$

Problema (4.10) este echivalentă cu problema de punct fix cuplat $\begin{cases} x = F_1(x,y) \\ y = F_2(x,y) \end{cases}$, unde $X = C(I)$ si $F_1, F_2 : X^2 \to X$ sunt astfel definiţi

$$\begin{aligned} F_1(x,y)(t) &= \int_0^T G_\lambda(t,s)\left[f_1(s,x(s),y(s)) + \lambda x(s)\right]ds \\ F_2(x,y)(t) &= \int_0^T G_\lambda(t,s)\left[f_2(s,x(s),y(s)) + \lambda y(s)\right]ds \end{aligned}$$

Considerăm metrica completă d indusă de norma sup pe X,

$$d(x,y) = \sup_{t\in I}|x(t) - y(t)|, \text{ pentru } x, y \in C(I).$$

Pentru $x, y, u, v \in X$, notăm $\widetilde{d}((x,y),(u,v)) := \begin{pmatrix} d(x,u) \\ d(y,v) \end{pmatrix}$.
Remarcăm faptul că, dacă $(x,y) \in X \times X$ este punct fix cuplat pentru F, atunci avem

$$x(t) = F_1(x,y)(t) \text{ si } y(t) = F_2(x,y)(t) \text{ pentru orice } t \in I,$$

unde $F(x,y)(t) := (F_1(x,y)(t), F_2(x,y)(t))$.

Teorema 4.2.2 *Considerăm problema (4.10) cu, condiţiile (a1)-(a6). Atunci există o soluţie unică (x^*, y^*) a problemei de ordinul întâi cu condiţii periodice la limită (4.10).*

Ca şi aplicaţie la Teorema 3.2.3, prezentăm un rezultat de existenţă şi unicitate pentru un sistem de ecuaţii funcţional-integrale care apare în modelele fluxului de trafic.

$$\begin{cases} x(t) = f\left(t, x(t), \int_0^T k(t,s,x(s),y(s))ds\right) \\ y(t) = f\left(t, y(t), \int_0^T k(t,s,x(s),y(s))ds\right) \end{cases} \tag{4.11}$$

Printr-o soluţie a sistemului (4.11) întelegem perechea $(x,y) \in C[0,T] \times C[0,T]$ care satisface sistemul pentru orice $t \in [0,T]$.
Considerăm din nou pe $X := C[0,T]$ următoarea relaţie de ordine

$$x \leq_C y \text{ dacă şi numai dacă } x(t) \leq y(t), \text{ pentru orice } t \in [0,T]$$

şi norma max

$$\|x\|_C := \max_{t\in[0,T]}|x(t)|.$$

Punctăm faptul că relaţia de ordine $\leq_C$generează pe $X \times X$ relaţia de ordine $\preceq_C$.
Dacă definim

$$S : X \times X \to X, \quad (x, y) \longmapsto S(x, y), \text{ unde } S(x, y)(t) := f(t, x(t), \int_0^T k(t, s, x(s), y(s))ds),$$

atunci, sistemul de mai sus poate fi reprezentat ca şi o problemă de punct fix cuplat:

$$\begin{cases} x = S(x, y) \\ y = S(y, x) \end{cases}$$

Un rezultat de existenţă şi unicitate pentru sistemul (4.11) este următoarea teoremă.

Teorema 4.2.3 *Fie* $k : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *si* $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *doi operatori continui. Presupunem că:*

(i) există $z_0 := (z_0^1, z_0^2) \in C[0, T] \times C[0, T]$ *astfel încât*

$$\begin{cases} z_0^1(t) \geq f(t, z_0^1(t), \int_0^T k(t, s, z_0^1(t), z_0^2(t))ds) \\ z_0^2(t) \leq f(t, z_0^2(t), \int_0^T k(t, s, z_0^2(t), z_0^1(t))ds) \end{cases} \text{sau} \begin{cases} z_0^1(t) \leq f(t, z_0^1(t), \int_0^T k(t, s, z_0^1(t), z_0^2(t))ds) \\ z_0^2(t) \geq f(t, z_0^2(t), \int_0^T k(t, s, z_0^2(t), z_0^1(t))ds) \end{cases};$$

(ii) (a) $f(t, \cdot, z)$ *este crescător, pentru orice* $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}$ *şi* $k(t, s, \cdot, z)$ *crescător,* $k(t, s, w, \cdot)$ *este descrescător şi* $f(t, w, \cdot)$ *crescător, pentru orice* $t, s \in [0, T]$, $w, z \in \mathbb{R}$

sau

(b) $f(t, \cdot, z)$ *este decrescător, pentru orice* $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}$ *şi* $k(t, s, \cdot, z)$ *descrescător,* $k(t, s, w, \cdot)$ *este crescător şi* $f(t, w, \cdot)$ *descrescător, pentru orice* $t, s \in [0, T]$, $w, z \in \mathbb{R}$;

(iii) există $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât*

$$|f(t, w_1, z_1) - f(t, w_2, z_2)| \leq k_1|w_1 - w_2| + k_2|z_1 - z_2|,$$

pentru orice $t \in [0, T]$ *şi* $w_1, w_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$;

(iv) există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ *astfel încât, pentru orice* $t, s \in [0, T]$ *şi* $w_1, w_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ *avem*

$$|k(t, s, w_1, z_1) - k(t, s, w_2, z_2)| \leq \alpha|w_1 - w_2| + \beta|z_1 - z_2|;$$

(v) $k_1 + k_2T(\alpha + \beta) < 1$.

Atunci, există o soluţie unică (x^*, y^*) *a sistemului (4.11).*

Prezentăm în continuare o altă aplicaţie la Teorema 3.2.3, un rezultat de existenţă şi unicitate pentru un sistem de ecuaţii funcţional-integrale. Aplicăm o teoremă de punct fix cuplat la un sistem echivalent de ecuaţii operatoriale

$$\begin{cases} x(t) = f\left(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s), y(s))ds\right) \\ y(t) = f\left(t, y(t), \int_0^t k(t, s, x(s), y(s))ds\right). \end{cases} \tag{4.12}$$

Printr-o soluţie a sistemului (4.12) înţelegem perechea $(x, y) \in C[0, T] \times C[0, T]$ care satisface sistemul pentru orice $t \in [0, T]$.

Considerăm pe $X := C[0, T]$ următoarea relaţie de ordine

$$x \leq_B y \text{ dacă şi numai dacă } x(t) \leq y(t), \text{ pentru orice } t \in [0, T]$$

şi norma Bielecki
$$\|x\|_B := \max_{t\in[0,T]} \left(|x(t)|e^{-\tau t}\right),$$
pentru un $\tau > 0$, convenabil ales.
Remarcăm faptul că relaţia de ordine $\leq_B$ generează pe $X \times X$ o relaţie de ordine $\preceq_B$.
Dacă definim operatorul

$$S : X \times X \to X, \quad (x, y) \longmapsto S(x, y), \text{ unde } S(x, y)(t) := f(t, x(t), \int_0^t k(t, s, x(s), y(s))ds),$$

atunci sistemul de mai sus (4.12) poate fi reprezentat ca şi o problemă de punct fix cuplat:

$$\begin{cases} x = S(x, y) \\ y = S(y, x) \end{cases}$$

Un rezultat de existenţă şi unicitate pentru sistemul (4.12) este următoarea teoremă.

Teorema 4.2.4 *Fie $k : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ si $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ doi operatori continui. Presupunem că:*
(i) există $z_0 := (z_0^1, z_0^2) \in C[0, T] \times C[0, T]$ astfel încât

$$\begin{cases} z_0^1(t) \geq f(t, z_0^1(t), \int_0^t k(t, s, z_0^1(t), z_0^2(t))ds) \\ z_0^2(t) \leq f(t, z_0^2(t), \int_0^t k(t, s, z_0^2(t), z_0^1(t))ds) \end{cases} \quad sau \quad \begin{cases} z_0^1(t) \leq f(t, z_0^1(t), \int_0^t k(t, s, z_0^1(t), z_0^2(t))ds) \\ z_0^2(t) \geq f(t, z_0^2(t), \int_0^t k(t, s, z_0^2(t), z_0^1(t))ds) \end{cases};$$

(ii) (a) $f(t, \cdot, z)$ este crescător, pentru orice $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}$ şi $k(t, s, \cdot, z)$ crescător, $k(t, s, w, \cdot)$ este descrescător şi $f(t, w, \cdot)$ crescător, pentru orice $t, s \in [0, T]$, $w, z \in \mathbb{R}$
sau
(b) $f(t, \cdot, z)$ este descrescător, pentru orice $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}$ şi $k(t, s, \cdot, z)$ descrescător, $k(t, s, w, \cdot)$ este crescător şi $f(t, w, \cdot)$ descrescător, pentru orice $t, s \in [0, T]$, $w, z \in \mathbb{R}$;
(iii) există $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$|f(t, w_1, z_1) - f(t, w_2, z_2)| \leq k_1|w_1 - w_2| + k_2|z_1 - z_2|,$$

pentru orice $t \in [0, T]$ şi $w_1, w_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$;
(iv) există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ astfel încât, pentru orice $t, s \in [0, T]$ şi $w_1, w_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ avem

$$|k(t, s, w_1, z_1) - k(t, s, w_2, z_2)| \leq \alpha|w_1 - w_2| + \beta|z_1 - z_2|;$$

(v) $k_1 < 1$.
Atunci, există o soluţie unică (x^*, y^*) a sistemului (4.12).

Ca şi o consecinţă a rezultatelor prezentate mai sus, am obţinut un rezultat de existenţă şi unicitate pentru un sistem multivoc de ordinul întâi cu condiţii periodice la limită.

În continuare, considerăm o teoremă de selecţie. Pentru alte rezultate privind selecţiile continue pentru multi-funcţii semicontinue inferior şi superior cu valori convexe a se vedea A. Petruşel [103].

Definiţia 4.2.5 *Fie X, Y două mulţimi nevide şi $F : X \to P(Y)$. Atunci operatorul univoc $f : X \to Y$ se numeşte o selecţie a lui F dacă şi numai dacă $f(x) \in F(x)$, pentru oice $x \in X$.*

Teorema 4.2.6 (Teorema de Selecţie a lui Michael) *Fie (X,d) un spaţiu metric, Y un spaţiu Banach şi $F : X \to P_{cl,cv}(\mathbb{R})$ semicontinuu inferior pe X. Atunci există $f : X \to Y$ o selecţie continuă a lui F.*

Considerăm următorul sistem de ordinul întâi cu condiţii periodice la limită:

$$\begin{cases} x'(t) \in F_1(t,x(t),y(t)) \\ y'(t) \in F_2(t,x(t),y(t)) \\ x(0) = x(T) \\ y(0) = y(T) \end{cases} \quad \text{pentru orice } t \in I := [0,T], \tag{4.13}$$

unde $T > 0$ şi $F_1, F_2 : [0,T] \times \mathbb{R}^2 \to P_{cl,cv}(\mathbb{R})$.
Pentru orice $t \in I$ şi $x, y \in C^1(I)$ considerăm

$$\begin{aligned} G_1 &: [0,T] \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}),\ G_1(t) := F_1(t,x(t),y(t)) \text{ şi} \\ G_2 &: [0,T] \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}),\ G_2(t) := F_2(t,x(t),y(t)). \end{aligned}$$

Remark 4.2.7 *Dacă G_1 şi G_2 sunt semicontinui inferior, atunci G_1, G_2 au (conform Teoremei de Selecţie a lui Michael) selecţii continue.*

Astfel, există

$$\begin{aligned} g_{xy}^{(1)} &: [0,T] \to \mathbb{R}, \\ g_{xy}^{(2)} &: [0,T] \to \mathbb{R}, \end{aligned}$$

selecţii continue pentru G_1 şi G_2 (adică $g_{xy}^{(1)}(t) \in G_1(t) = F_1(t,x(t),y(t))$, $g_{xy}^{(2)}(t) \in G_2(t) = F_2(t,x(t),y(t))$).
Considerăm acum problema cu condiţii periodice la limită:

$$\begin{cases} x'(t) = g_{xy}^{(1)}(t) \\ y'(t) = g_{xy}^{(2)}(t) \\ x(0) = x(T) \\ y(0) = y(T) \end{cases} \quad \text{pentru orice } t \in I := [0,T]. \tag{4.14}$$

Remark 4.2.8 *Orice soluţie pentru sistemul (4.14) este o soluţie pentru sistemul (4.13).*

Remark 4.2.9 *Problema cu condiţii periodice la limită (4.14) este echivalentă cu următorul sistem*

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^T G_\lambda(t,s)\left[g_{xy}^{(1)}(s) + \lambda x(s)\right] ds \\ \\ y(t) = \int_0^T G_\lambda(t,s)\left[g_{xy}^{(2)}(s) + \lambda y(s)\right] ds \end{cases}$$

unde

$$G_\lambda(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda(T+s-t)}}{e^{\lambda T}-1}, \text{ dacă } 0 \le s < t \le T \\ \\ \frac{e^{\lambda(s-t)}}{e^{\lambda T}-1}, \text{ dacă } 0 \le t < s \le T \end{cases}$$

Problema (4.14) este echivalentă cu problema de punct fix cuplat $\begin{cases} x = G_{xy}^{(1)} \\ y = G_{xy}^{(2)} \end{cases}$,

unde $X = C(I)$ şi $G_{xy}^{(1)}, G_{xy}^{(2)} : X^2 \to X$ sunt astfel definiţi

$$\begin{aligned} G_{xy}^{(1)}(t) &= \int_0^T G_\lambda(t,s)\left[g_{xy}^{(1)}(s) + \lambda x(s)\right] ds \\ G_{xy}^{(2)}(t) &= \int_0^T G_\lambda(t,s)\left[g_{xy}^{(2)}(s) + \lambda y(s)\right] ds. \end{aligned}$$

Considerăm metrica completă d, indusă de norma sup pe X,

$$d(x,y) = \sup_{t\in I} |x(t) - y(t)|\,, \text{ pentru } x, y \in C(I).$$

Pentru $x, y, u, v \in X$, notăm $\widetilde{d}((x,y),(u,v)) := \begin{pmatrix} d(x,u) \\ d(y,v) \end{pmatrix}$.

Teorema 4.2.10 *Considerăm problema (4.13) şi presupunem că:*
(i) $G_1 : [0,T] \to P_{cl,cv}(\mathbb{R})$, $G_1(t) := F_1(t, x(t), y(t))$ *este semicontinuu inferior,*

$G_2 : [0,T] \to P_{cl,cv}(\mathbb{R})$, $G_2(t) := F_2(t, x(t), y(t))$ *este semicontinuu inferior,*

pentru orice $x, y \in C[0,T]$,

(ii) pentru orice $g_{xy}^{(1)}$ *şi* $g_{xy}^{(2)}$ *selecţii continue, pentru* G_1*, respectiv* G_2*, există* $\lambda > 0$ *şi* $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 > 0$ *astfel încât*

$$0 \le g_{xy}^{(1)}(t) - g_{uv}^{(1)}(s) + \lambda(x-u) \le \lambda[\mu_1(x-u) + \mu_2(y-v)]$$

$$0 \le g_{xy}^{(2)}(t) - g_{uv}^{(2)}(t) + \lambda(y-v) \le \lambda\left[\mu_3(x-u) + \mu_4(y-v)\right],$$

(iii) matricea $S := \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ \mu_3 & \mu_4 \end{pmatrix}$ *este convergentă la zero*

Atunci există o soluţie unică a problemei de ordinul întâi cu condiţii periodice la limită (4.13).

Bibliografie

[1] M. Abbas, Y. J. Cho and T. Nazir, *Common fixed point theorems for four mappings in TVS-valued cone metric spaces*, J. Math. Ineq., 5 (2011), 287-299.

[2] M. Abbas, W. Sintunavarat, P. Kumam, *Coupled fixed point in partially ordered G-metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., (2012), 2012:31.

[3] R. P. Agarwal, *Contraction and approximate contraction with an application to multi-point boundary value problems*, J. Comput. Applied Math., 9 (1983), 315-325.

[4] R. P. Agarwal, M. A. El-Gebeily and D. O'Regan, *Generalized contractions in partially ordered metric spaces*, Appl. Anal., 87 (2008), 109-116.

[5] G. Allaire and S. M. Kaber, *Numerical Linear Algebra*, Texts in Applied Mathematics, vol. 55, Springer, New York, 2008.

[6] A. Amini-Harandi, M. Fakhar, *Fixed point theory in cone metric spaces obtained via the scalarization method*, Comput. Math Appl., 59 (2010), 3529–3534.

[7] I. D. Arandelović, D. J. Kečkić, *On nonlinear quasi-contractions on TVS-cone metric spaces*, Appl. Math. Lett., 24 (2011), 1209–1213.

[8] A. D. Arvanitakis, *A proof of the generalized Banach contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc., 131 (2003), 3647-3656.

[9] M. Asadi, S. M. Vaezpour, H. Soleimani, *Metrizability of cone metric spaces*, Tehnical report, arXiv:1102.2353v1, (2011), 9 p.

[10] C. E. Aull and R. Lowen, *Handbook of the History of General Topology*, Vol. 3, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[11] S. Banach, Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales, Fundamenta Mathematicae, 3 (1922), 133-181.

[12] M. Badii, *Existence of periodic solutions for the thermistor problem with the Joule-Thomson effect*, Annali dell'Università di Ferrara, 54 (2008), 1-10.

[13] V. Berinde, *Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration*, Nonlinear Analysis Forum, 9 (2004), 43–53.

[14] V. Berinde, *Generalized coupled fixed point theorems for mixed monotone mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., 74 (2011), 7347–7355.

[15] M. Berinde, V. Berinde, *On a general class of multi-valued weakly Picard mappings*, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007), 772–782.

[16] V. Berinde, M. Borcut, *Tripled fixed point theorems for contractive type mappings in partially ordered metric spaces*, Nonlinear Anal., 74 (2011), 4889-4897.

[17] M. Berzig, *Solving a class of matrix equations via the Bhaskar-Lakshmikantham coupled fixed point theorem*, Appl. Math. Lett., (2012), doi:10.1016/j.aml.2012.01.028.

[18] L. M. Blumenthal, *Theory and Applications of Distance Geometry*, Oxford, 1953.

[19] M. Bota and A. Petruşel, *Ulam-Hyers stability for operatorial equations*, Analls of the Alexandru Ioan Cuza University Iaşi, 57 (2011), 65-74.

[20] K. C. Border, *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory, Cambridge* University Press, New York, 1985.

[21] D. W. Boyd and J. S. W. Wong, *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 458-464.

[22] F. E. Browder, *On the convergence of the successive approximations for nonlinear functional equations*, Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A71=Indag. Math., 30 (1968), 27-35.

[23] A. Bucur, L. Guran and A. Petruşel, *Fixed points for multivalued operators on a set endowed with vector-valued metrics and applications*, Fixed Point Theory, 10 (2009), no.1, 19-34.

[24] A. Cataldo, E. A. Lee, X. Liu, E. D. Matsikoudis, H. Zheng, *A constructive Fixed point theorem and the feedback semantics of timed systems*, Tech. Report UCB/EECS-2006-4, EECS Dept., University of California, Berkeley, (2006).

[25] Y. J. Cho, G. He, N. J. Huang, *The existence results of coupled quasi-solutions for a class of operator equations*, Bull. Korean Math. Soc., 47 (2010), 455-465.

[26] Y. J. Cho, R. Saadati and S. Wang, *Common fixed point theorems on generalized distance in ordered cone metric spaces*, Comput. Math. Appl., 61 (2011), 1254-1260.

[27] Y. J. Cho, M. H. Shah, N. Hussain, *Coupled fixed points of weakly F-contractive mappingsin topological spaces*, Appl. Math. Lett. 24 (2011), 1185-1190.

[28] Y. J. Cho, B. E. Rhoades, R. Saadati, B. Samet, W. Shantawi, *Nonlinear coupled fixed point theorems in ordered generalized metric spaces with integral type*, Fixed Point Theory Appl., 2012, 2012:8.

[29] B. S. Choudhury and N. Metiya, *Fixed point of weak contractions in cone metric spaces*, Nonlinear Anal., 72 (2010), 1589-1593.

[30] K. J. Chung, *Nonlinear contractions in abstract spaces*, Kodai Math. J., 4 (1981), 288–292.

[31] K. J. Chung, *Remarks on nonlinear contractions*, Pac. J. Math., 101 (1982), 41–48.

[32] N. L. Ćirić, *Fixed point for* generalized *multi-valued contractions*, Mat. Vesnik, 9 (1972), 265-272.

[33] N. L. Ćirić, *Multivalued nonlinear contraction mappings*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 2716-2723.

[34] L. Ćirić, M. Cakić, J. S. Rajović and J. S. Ume, *Monotone generalized nonlinear contractions in partially ordered metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., (2008), Article ID 131294.

[35] L. Collatz, *Functionalanalysis und Numerische Mathematik*, Springer, Berlin, 1964.

[36] H. Covitz and S. B. Nadler, *Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces*, Israel J. Math., 8 (1970), 5-11.

[37] M. M. Deza, E. Deza, *Encyclopedia of Distances*, Springer, Dordrecht, 2009.

[38] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[39] J. Eisenfeld, V. Lakshmikantham, *Comparison principle and nonlinear contractions in abstract spaces*, J. Math. Anal. Appl., 49 (1975), 504–511.

[40] R. Engelking, *General Topology*, PWN Warszawa, 1977.

[41] J. G. Falset, L. Guran and E. Llorens-Fuster, *Fixed points for multivalued contractions with respect to a ω-distance*, Sci. Math. Japon., e-(2009) 611-619

[42] Y. Feng and S. Liu, *Fixed point theorems for multivalued contractive mappings and multivalued Caristi type mappings*, J. Math. Anal. Appl., 317 (2006), 103-112.

[43] A. D. Filip and A. Petruşel, *Fixed point theorems on spaces endowed with vector-valued metrics*, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2010, Article ID 281381, 15 pages, 2009.

[44] M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel* (Thèse), Rendiconti Circolo Mat. Palermo, 22 (1906), 1–74.

[45] M. Fréchet, *La notion d'écart et le calcul fonctionnel*, C. R. Acad. Sci. Paris, 140 (1905), 772–774.

[46] M. Fréchet, *Les espaces abstraits*, Gauthier-Villars, Paris, 1928.

[47] M. Geraghty, *On contractive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 40 (1973), 604-608.

[48] T. Gnana Bhaskar and V. Lakshmikantham, *Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications*, Nonlinear Anal., 65 (2006), 1379-1393.

[49] M. E. Gordji, Y. J. Cho, H. Baghani, *Coupled fixed point theorems for contractions in intuitionistic fuzzy normed spaces*, Math. Comput. Model., 54 (2011), 1897-1906.

[50] E. Graily, S. M. Vaezpour, R. Saadati, Y. J. Cho, *Generalization of fixed point theorems in ordered metric spaces concerning generalized distance*, Fixed Point Theory Appl., 2011, 2011:30.

[51] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer, New York, 2003.

[52] Y. Guo, *A generalization of Banach's contraction principle for some non-obviously contractive operators in a cone metric space*, Turk. J. Math., 36 (2012), 297-304.

[53] D. Guo and V. Lakshmikantham, *Coupled fixed points of nonlinear operators with applications*, Nonlinear Anal., 11 (1987), 623-632.

[54] D. Guo, Y. J. Cho and J. Zhu, *Partial Ordering Methods in Nonlinear Problems*, Nova Science Publishers Inc., Hauppauge, NY, 2004.

[55] G. E. Hardy, T. D. Rogers, *A generalization of a fixed point theorem of Reich*, Canad. Math. Bull., 16 (1973), 201-206.

[56] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[57] S. Hong, *Fixed points for mixed monotone multivalued operators in Banach spaces with applications*, J. Math. Anal. Appl., 337 (2008), 333-342.

[58] L. G. Huang, X. Zhang, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl., 332 (2007), 1468-1476.

[59] A. Hyvärinen, *Fast and Robust Fixed-Point Algorithms for Independent Component Analysis*, IEEE Transactions on Neural Networks, 10 (1999), no:3, 626-634.

[60] D. Ilić and V. Rakočević, *Common fixed points for maps on cone metric space*, J. Math. Anal. Appl., 341 (2008), 876-882.

[61] J. Jachymski, *An extension of A. Ostrowski's theorem on the round-off stability of iterations*, Aeq. Math., 53 (1997), 242-253.

[62] J. Jachymski, *Equivalence of some contractivity properties over metrical structures*, Proc. Amer. Math. Soc., 125 (1997), 2327-2335.

[63] S. Janković, Z. Kadelburg and S. Radenović, *On cone metric spaces: a survey*, Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., 74 (2011), 2591-2601.

[64] O. Kada, T. Suzuki, W. Takahashi, *Nonconvex minimization theorems and fixed point theorems in complete metric spaces*, Math. Japonica, 44 (1996), 381-391.

[65] Z. Kadelburg, M. Pavlović and S. Radenović, *Common fixed point theorems for ordered contractions and quasicontractions in ordered cone metric spaces*, Comp. Math. Appl., 59 (2010), 3148-3159.

[66] L. V. Kantorovich, *Sur la théorie génétate des opérations dans les espaces semi-ordonnés*, C. R. Acad. USSR 1, 10 (1936) 213–286.

[67] L. V. Kantorovich, *The method of successive approximations for functional equations*, Acta Math., 71 (1939) 63–97.

[68] J. Kelley, *General Topology*, van Nostrand, New-York, 1955.

[69] M. A. Khamsi, *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Fixed Point Theory Appl. 2010, Article ID 315398, 7 p.

[70] M. A. Khamsi and W. A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, Wiley-Interscience, New-York, 2001.

[71] M. Khani, M. Pourmahdian, *On the metrizability of cone metric spaces*, Topology Appl., 158 (2011), 190–193.

[72] D. Klim and D. Wardowski, *Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., 334 (2007), 132-139.

[73] R. Kopperman, *All topologies come from generalized metrics*, Amer. Math. Monthly, 95 (1988), 89-97.

[74] M. A. Krasnoselskii, P. P. Zabreiko: Geometrical Methods of Nonlinear Analysis, Springer Verlag Berlin, 1984.

[75] K. Kunen and J. F. Vaugham, *Handbook of Set-Theoretic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[76] D. R. Kurepa, *Tableaux ramifiés d'ensembles. Espaces pseudo-distanciés*, C. R. Acad. Sci. Paris, 198 (1934), 1563–1565.

[77] V. Lakshmikantham and L. Ćirić, *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions in partially ordered metric spaces* , Nonlinear Anal. 70, (2009), 4341-4349.

[78] A. Latif, F. Y. Shaddad, *Fixed point results for multivalued maps in cone metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., 2010, Article ID 941371, 11 p.

[79] E. Llorens-Fuster, **C. Urs**, *Fixed point results for multivalued operators with respect to a c-distance*, submitted.

[80] W. A. J. Luxemburg, A. C. Zaanen, *Riesz Spaces*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Vol. 1, 1971.

[81] J. Matkowski, *Nonlinear contractions in metrically convex spaces*, Publ. Math. Debrecen 45/1-2(1994), 103-114.

[82] A. Meir and E. Keeler, *A theorem on contraction mappings*, J. Math. Anal. Appl., 28 (1969), 326-329.

[83] N. Mizoguchi, W. Takahashi, *Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl., 141 (1989), 177-188.

[84] C. Mongkolkeha, W. Sintunavarat, P. Kumam, *Fixed point theorems for contraction mappings in modular metric spaces*, Fixed Point Theory Appl., 2011, 2011:93.

[85] S.B. Nadler, *Multivalued contraction mappings*, Pacific J. Math., 30 (1969), 475-488.

[86] H. K. Nashine, B. Samet, C. Vetro, *Monotone generalized nonlinear contractions and fixed point theorems in ordered mertic spaces*, Math. Comput. Modelling, 54 (2011), 712-720.

[87] J. J. Nieto and R. R. López, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order 22 (2005), 223-239.

[88] J. J. Nieto and R. R. López, *Existence and uniqueness of fixed point in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Acta Math. Sinica, Engl. Ser. 23 (12) (2007), 2205-2212..

[89] A. Noumsi, S. Derrien, P. Quinton, *Acceleration of a Content Based Image Retrieval Application on the RDISK Cluster*, IEEE International Parallel and Distri-buted Proccesing Symposium, April 2006.

[90] V. I. Opoitsev, *Heterogenic and combined-concave operators*, Syber. Math. J., 16 (1975), 781–792 (in Russian).

[91] V. I. Opoitsev, *Dynamics of collective behavior. III. Heterogenic systems*, Avtomat. i Telemekh., 36 (1975), 124–138 (in Russian).

[92] V. I. Opoitsev, T.A. Khurodze, *Nonlinear operators in spaces with a cone*, Tbilis. Gos. Univ., Tbilisi (1984) 271 (in Russian).

[93] D. O'Regan, R. Precup, *Theorems of Leray-Schauder Type and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 2001.

[94] D. O'Regan, N. Shahzad, R. P. Agarwal, *Fixed point theory for generalized contractive maps on spaces with vector-valued metrics*, Fixed Point Theory and Applications, Vol. 6, Nova Sci. Publ., New York, 2007, 143-149.

[95] J. Ortega and W. Rheinboldt, *On a class of approximate iterative processes*, Arch. Rational Mech. Anal., 23 (1967), 352-365.

[96] A. M. Ostrowski, *The round off stability of iterations*, Z. Angew Math. Mech., 47 (1967), 77-81.

[97] H. K. Pathak, N. Shahzad, *Fixed point results for generalized quasicontraction mappings in abstract spaces*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 6068– 6076.

[98] A. I. Perov, *On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations*, Pviblizhen. Met. Reshen. Differ. Uvavn, 2 (1964), pp. 115-134.

[99] A.I. Perov, A.V. Kibenko, *On a certain general method for investigation of boundary value problems*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 30 (1966), 249-264 (in Russian).

[100] I. R. Petre, *Incluziuni operatoriale prin tehnica punctului fix in spatii metrice vectoriale*, Ph. D. Thesis, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 2012.

[101] I. R. Petre, A. Petruşel, *Krasnoselskii's theorem in generalized Banach spaces and applications*, Electronic J. Qualitative Theory Diff. Equ., 85 (2012), 1-20.

[102] P. T. Petru, A. Petruşel and J. C. Yao, *Ulam-Hyers stability for operatorial equations and inclusions via nonself operators*, Taiwanese J. Math., 15 (2011), no. 5, 2195-2212.

[103] A. Petruşel, *Operatorial Inclusions*, House of the Book of Science, Cluj-Napoca, 2002.

[104] A. Petruşel, *Multivalued weakly Picard operators and applications*, Sci. Math. Japon., 59 (2004), 169-202.

[105] A. Petruşel, I. A. Rus, *Fixed point theorems in ordered L-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 134 (2005), no.2, 411-418.

[106] A. Petruşel, I. A. Rus, *The theory of a metric fixed point theorem for multivalued operators*, Fixed Point Theory and its Applications, Yokohama Publ., 2010, 167-176.

[107] A. Petruşel, I. A. Rus and M. A. Şerban, *Basic problems of the metric fixed point theory and the relevance of a metric fixed point theorem for a multivalued operator*, J. Nonlinear Convex Anal., 2013, to appear.

[108] A. Petruşel, G. Petruşel, and **C. Urs**, *Vector-valued metrics, fixed points and coupled fixed points for nonlinear operators*, Fixed Point Theory and Appl., (2013), 2013:218 doi:10.1186/1687-1812-2013-218, (MR 3108266), (IF: 1,87).

[109] A. Petruşel, **C. Urs** and O. Mleşniţe, *Vector-valued Metrics in Fixed Point Theory*, Contemporary Math. Series, Amer. Math. Soc., 2013, to appear.

[110] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations, Kluwer, Dordrecht, 2002.*

[111] R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Math. Comput. Modell, 49 (2009), 703-708.

[112] R. Precup, A. Viorel, *Existence results for systems of nonlinear evolution equations*, Intern. J. Pure Appl. Math., 47 (2008), no.2, 199-206.

[113] R. Precup, A. Viorel, *Existence results for systems of nonlinear evolution inclusions*, Fixed Point Theory, 11 (2010), no.2, 337-346.

[114] P. D. Proinov, *A unified theory of cone metric spaces and its applications to the fixed point theory*, Fixed Point Theory and Appl., (2013), 2013:103 doi:10.1186/1687-1812-2013-103.

[115] S. Radenović and B. E. Rhoades, *Fixed point theorem for two non-self mappings in cone metric spaces*, Comp. Math. Appl., 57 (2009), 1701-1707.

[116] S. Radenović, Z. Kadelburg, *Quasi-contractions on symmetric and cone symmetric spaces*, Banach J. Math. Anal., 5 (2011), 38–50.

[117] E. Rakotch, *A note on contractive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc., 13 (1962), 459-465.

[118] A. C. M. Ran, M. C. B. Reurings, *A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc., 132 (2004), 1435-1443.

[119] S. Reich, *Fixed point of contractive functions*, Boll. Un. Mat. Ital., 4 (1971), 1-11.

[120] S. Reich, *Fixed point of contractive functions*, Boll. Unione Mat. Ital., 5 (1972), 26-42.

[121] S. Reich and A. J. Zaslavski, *Well-posedness of fixed point problems*, Far East J. Math. Sci., Special Volume (Functional Analysis and its Applications), Part III (2001), 393-401.

[122] I. L Reilly, *On non-Hausdorff spaces*, Topology Appl., 44 (1992), 331-340.

[123] S. Rezapour, P. Amiri, *Some fixed point results for multivalued operators in generalized metric spaces*, Computers and Math. with Appl., 61 (2011), 2661-2666.

[124] S. Rezapour, R. Hamlbarani, *Some notes on the paper "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mapping"*, J. Math. Anal. Appl., 345 (2008), 719–724.

[125] B. E. Rhoades, *A fixed point theorem for a multi-valued non-self mapping*, Comment. Math. Univ. Carolin., 37 (1996), 401-404.

[126] I. A. Rus, *Principles and Applications of the Fixed Point Theory (in Romanian)*, Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[127] I. A. Rus, *Ulam stability of the operatorial equations*, Functional Equations in Mathematical Analysis (T.M. Rassias and J. Brzdek (Eds.)), Springer Optimization and its Applications 52, 2012, Springer, New-York, 287–306.

[128] I. A. Rus, *A fibre generalized contraction theorem and applications*, Mathematica, 41 (1999), No. 1, 85-90.

[129] I. A. Rus, *The theory of a metrical fixed point theorem: theoretical and applicative relevances*, Fixed Point Theory, 9 (2008), no.2, 541-559.

[130] I. A. Rus, *Remarks on Ulam stability of the operatorial equations*, Fixed Point Theory, 10 (2009), no. 2, 305-320.

[131] I. A Rus, A. Petruşel and G. Petruşel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[132] I. A. Rus, A. Petruşel, A. Sîntămărian, *Data dependence of the fixed points set of some multivalued weakly Picard operators*, Nonlinear Anal., 52 (2003), 1947-1959.

[133] I. A. Rus and M. A. Şerban, *Some generalizations of a Cauchy Lemma and Applications, Topics in Mathematics*, Computer Science and Philosophy, Cluj University Press, (2008), 173-181.

[134] I. A. Rus, A. Petruşel, M. A. Şerban, *Weakly Picard operators: Equivalent definitions, applications and open problems*, Fixed Point Theory, 7 (2006), No. 1, 3–22.

[135] M. D. Rus, *The method of monotone iterations for mixed monotone operators*, Ph. D. Thesis, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca, 2010.

[136] M. D. Rus, *The fixed point problem for systems of coordinate-wise uniformly monotone operators and applications*, Med. J. Math., (2013), doi: 10.1007/s00009-013-0306-9.

[137] B. Rzepecki, *On fixed point theorems of Maia type*, Publ. Inst. Math., 28 (1980), 179–186.

[138] B. Samet, *Coupled fixed point theorems for a generalized Meir-Keller contraction in partially ordered metric spaces*, Nonlinear. Anal., 72 (12) (2010), 4508-4517.

[139] B. Samet, C. Vetro, *Coupled fixed point, F-invariant set and fixed point of N-order*, Ann. Funct. Anal., 1 (2010), 46-56.

[140] J. Schröder, *Das Iterationsverfahren bei allgemeinerem Abstandsbegriff*, Math. Z., 66 (1956), 111–116.

[141] J. Schröder, *Nichtlineare Majoranten beim Verfahren der schrittweisen Näherung*, Arch. Math., 7 (1956), 471-484.

[142] V. M. Sehgal, R. E. Smithson, *A fixed point theorem for weak directional contraction multifunctions*, Math. Japonica, 25 (1980), 345-348.

[143] W. Sintunavarat, P. Kumam, *Common fixed point theorems for hybrid generalized multi-valued contraction mappings*, Appl. Math. Lett., 25 (2012), 52-57.

[144] W. Sintunavarat, P. Kumam, *Weak condition for generalized multi-valued (f, α, β)-weak contraction mappings*, Appl. Math. Lett., 24 (2011), 460-465.

[145] W. Sintunavarat, Y. J. Cho and P. Kumam, *Common fixed point theorems for c-distance in ordered cone metric spaces*, Comp. Math. Appl., 62 (2011), 1969-1978.

[146] W. Sintunavarat, Y. J. Cho and P. Kumam, *Coupled fixed-point theorems for contraction mapping induced by cone ball-metric in partially ordered spaces*, Fixed Point Theory Appl. 2012, 2012:128.

[147] W. Sintunavarat, P. Kumam and Y. J. Cho, *Coupled fixed point theorems for nonlinear contractions without mixed monotone property*, Fixed Point Theory Appl., (2012), 2012:170.

[148] W. Sintunavarat, A. Petruşel, P. Kumam, *Common coupled fixed point theorems for ω^*-compatible mappings without mixed monotone property*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, DOI 10.1007/s12215-012-0096-0.

[149] A. Sönmez, *On paracompactness in cone metric spaces*, Appl. Math. Lett., 23 (2010) 494Ű-497.

[150] I. Şahin, M. Telsi, *A theorem on common fixed point of expansion type mapping in cone metric spaces*, An. St. Univ. Ovidius. Constanţa, 18 (2010) 329–356.

[151] M. A. Şerban, *The theory of fixed point for operators defined on cartesian product,* Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2002 (in Romanian).

[152] M. Turinici, *Finite dimensional vector contractions and their fixed points*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 35 (1990), no. 1, 30-42.

[153] D. Turkoglu, M. Abuloha and T. Abdeljawad, *KKM mappings in cone metric spaces and some fixed point theorems*, Nonlinear. Anal. Th. Meth. Appl., 72 (2010), 348-353.

[154] D. Turkoglu, M. Abuloha, *Cone metric spaces and fixed point theorems in diametrically contractive mappings*, Acta Math Sin. (Engl. Ser), 26 (2010), No. 3, 489–496.

[155] **C. Urs**, *Ulam-Hyers stability for coupled fixed points of contractive type operators*, J. Nonlinear Sci. Appl., 6 (2013), 124-136, (MR 3017896).

[156] **C. Urs**, *Coupled fixed point theorems and applications to periodic boundary value problems*, Miskolc Mathematical Notes, 14 (2013), no. 1, 323-333, (MR 3070711), (IF: 0,304).

[157] **C. Urs**, *Coupled fixed point theorems for mixed monotone operators and applications*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 2013, to appear.

[158] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 27, Springer, Berlin, 2000.

[159] D. Wardowski, *On set-valued contractions of Nadler type in cone metric spaces*, Appl. Math. Lett., 24 (2011), 275-278.

[160] D. Wardowski, *Endpoints and fixed points of set-valued contractions in cone metric spaces*, Nonlinear Anal., 71 (2009), 512-516.

[161] A. Yantir and S. Gulsan Topal, *Positive Solutions of Nonlinear m-point BVP on Time Scales*, International Journal of Difference Equations (IJDE). 0973-6069 Volume 3 Number 1 (2008), 179-194.

[162] P. P. Zabrejko, *K-metric and K-normed linear spaces: survey*, Collect. Math., 48 (1997), no. 4-6, 825-859.

[163] A. C. Zaanen, *Riesz Spaces*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Vol. 2, 1983.