UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA, ROMANIA
UNIVERSITATEA PERPIGNAN VIA DOMITIA, FRANȚA

Teză de doctorat

Pentru obținerea titlului de
DOCTOR A UNIVERSITĂȚII BABES-BOLYAI
&
DOCTOR A UNIVERSITĂȚII PERPIGNAN VIA DOMITIA

Disciplina: Matematică aplicată

prezentată de

Anca FARCAȘ

15 Noiembrie 2013

Operatori Liniari și Pozitivi și Operatori de Memorie în Mecanica de Contact

Coordonatori științifici: Professor Octavian AGRATINI
Professor Mircea SOFONEA

Susţinerea publică va avea loc în data de 15 Noiembrie 2013 în sala Tiberiu Popoviciu.

Preşedintele comisiei: Prof. Dr. Radu Precup

Membrii comisiei:

Conf. Dr. Mikaël Barboteu (Universitatea Perpignan Via Domitia)

Prof. Dr. Mircea Ivan (Universitatea Tehncică Cluj-Napoca)

Prof. Dr. Sanda Ţigoiu (Universitatea Bucureşti)

Coordonatori ştiinţifici:

Prof. Dr. Octavian Agratini

Prof. Dr. Mircea Sofonea

Mulţumiri

Aceasta teză a fost realizată în co-tutelă, la Universitatea Babeş - Bolyai, Cluj-Napoca (România) şi la Universitatea din Perpignan Via Domitia (Franţa), sub îndrumarea profesorilor O. Agratini (Cluj - Napoca) şi M. Sofonea (Perpignan). Autorul îşi exprimă recunoştinţa faţă de cei doi îndrumători, pentru sprijinul acordat în scrierea acestui manuscris. De asemenea, sunt adresate mulţumiri speciale tuturor membrilor *Laboratorului de Matematică şi Fizică de la Universitatea din Perpignan* şi în aceeaşi măsură membrilor *Departamentului de Matematică* a *Universităţii Babeş-Bolyai*. În acelaşi timp autorul este recunoscator membrilor *Departamentului de Matematica şi Informatică de la Universitatea de Medicină şi Farmacie* din Cluj - Napoca, dar şi colegilor cu care a lucrat, atât în Perpignan cât şi în Cluj - Napoca. Mulţumiri speciale sunt extinse către Joëlle Sulian care a pregătit toate documentele necesare pe parcursul şederii mele în Franţa şi nu în ultimul rând către toţi cei dragi, pentru sprijinul moral şi înţelegerea de care au dat dovadă pe parcursul elaborării acestei teze .

Autorul recunoaşte că sprijinul financiar al acestei teze a fost furnizat de Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane, Contract POSDRU 105/1.5/S/76841 - “ Studii doctorale inovatoare într-o societate bazata pe cunoaştere ” (Universitatea Babeş- Bolyai).

Cluj - Napoca Noiembrie 2013

Contents

Introducere

Teoria clasică a aproximării reprezintă un subiect mai vechi al analizei matematice care ramâne încă o zona cu implicaţii active în prezent. Unul dintre capitolele cele mai moderne ale teoriei aproximării se referă la aproxmarea funcţiilor prin operatori liniari şi pozitivi, care reprezintă primul nostru interes în acest manuscris. Pe lângă aspectele referitoare la teoria aproximării, al doilea interes în această teză este modelarea şi analiza diferitelor probleme care apar în Mecanica de Contact. Fenomenele de contact care implică corpuri deformabile sunt întâlnite adesea în industrie şi în viaţa de zi cu zi. Din acest motiv, literatura de specialitate dedicată acestui domeniu este vastă, având în vedere că s-au făcut eforturi considerabile pentru modelarea şi analiza acestor fenomene. De exemplu interacţiunea dintre asfalt şi anvelope, plăcuţe de frână şi roţi, implanturi de şold, articulaţiilor artificiale ale genunchiului sau analiza de impact la automobile reprezintă doar câteva probleme reale acoperite de teoria mecanicii de contact.

Scopul acestei teze este de a prezenta unele rezultate în ceea ce priveşte atât operatorii liniari şi pozitivi cât şi operatorii memorie. Prima parte a lucrării este dedicată studiului aproximării funcţiilor prin operatori liniari şi pozitivi, în timp ce partea a doua este centratp̆e operatorii de memorie şi aplicaţiile lor în Mecanica de Contact.

Teza este structurată pe două parţi şi şase capitole care sunt enumerate mai jos.

Part I conţine Capitolele 1–2 şi reprezintă o scurtă introducere în studiul aproximării funcţiilor prin operatori liniari şi pozitivi. Mai exact, vom prezenta aici un studiu al diferitelor proprietăţi de convergenţă pentru astfel de operatori.

Part II conţine Capitolele 3–6 şi prezintă rezultatele fundamentale obţinute în modelarea problemelor de contact, precum şi noi rezultatele obţinute în analiza problemelor de contact cu sau fără frecare. Mai precis, vom studia trei probleme de contact pentru care vom obţine rezultate de existenţă, unicitate şi convergenţă. Trăsătura comună a acestor probleme apare în faptul că toate sunt guvernate de operatori de memorie care apar fie în legea constitutivă, fie în condiţiile de contact.

O descriere detaliată a capitolelor este după cum urmează.

Capitolul 1 prezintă cadrul specific pentru problemele pe care le studiem în Capitolul 2. Cu alte cuvinte, vom da noţiuni reprezentative în ceea ce priveşte operatorii liniari şi pozitivi, module de continuitate şi diferite tipuri de convergenţă. În cele din urmă, vom prezenta câteva teoreme de tip Voronovskaja.

Capitolul 2 găzduieşte principalele rezultate obţinute în prima parte a tezei. În acest capitol vom sublinia condiţiile necesare pentru un anumit tip de operatori liniari si pozitivi în vederea îndeplinirii unei teoreme de tip Korovkin. Rezultatele din acest capitol au fost publicat în lucrările [46], [47] şi [48].

Capitolul 3 este dedicat materialelor preliminare folosite în a doua parte a manuscrisului. Mai precis, în prima parte a acestui capitol vom începe cu un studiu a proprietăţilor de bază a spaţiului Banach şi Hilbert. Apoi, vom introduce noţiunea de operator de memorie, vom oferi câteva exemple şi vom evidenţia un rezultat de existenţă şi unicitate pentru inegalităţile variaţionale care implică operatori de memorie. În plus, vom insista asupra unor spaţii de funcţii de care avem nevoie în studiul problemelor de contact pe abordate în restul manuscrisului. Cea de a doua parte din acest capitol reprezintă o introducere în modelarea problemelor de contact care sunt prezentate în urmatoarele capitole. Pentru a face faţă acestui tip de probleme, vom prezenta legile constitutive pe care le folosim, vom descrie condiţiile de contact şi, în cele din urmă, vom evidenţia condiţiile de frecare, inclusiv legea lui Coulomb bine cunoscută sub numele de lege de frecare uscată.

Capitolul 4 este dedicat studiului cvasistatic a unei probleme de contact cu frecare în care comportamentul materialului este modelat cu o lege constitutivă vâscoelastică cu memorie lunga. u ajutorul complianţei normale, termenului de memorie şi legii lui Coulomb de frecare uscată. Pentru această problema se prezintă atât formularea clasică, cât şi formularea variaţională. Rezultatul principal al acestui capitol este Teorema II.4.1 care prevede solvabilitatea unică, slabă a problemei. Demonstraţia se bazează pe argumente privind inegalităţile variaţionale care implică operatori de memorie. Al doilea rezultat principal al capitolului este Teorema II.4.4. Acesta susţine dependenţa continuă a soluţiei în raport cu datele. Materialul prezentat în acest capitol a făcut obiectul lucrării [117].

Capitolul 5 tratează un model matematic care descrie contactul dintre un corp vâscoplastic şi o fundaţie. În acest caz, contactul este fără frecare şi este modelat cu ajutorul complianţei normale, a unei legi unilaterale şi termenului de memorie. Noutatea din acest capitol se regăseşte în condiţia de contact. Ca şi în capitolul precedent, am obţinut o formulare variaţională a problemei şi am demonstrat solvabilitatea slabă unică a problemei (Teorema II.5.1). Demonstraţia teoremei II.5.1 se bazează pe un argument de punct fix, Banach combinat cu argumente privind inegalităţile variaţionale care implică operatori de memorie. De asemenea, prezentăm un rezultat care prevede existenta si unicitatea solutiei unei probleme penalizate (Teorema II.5.4). Această teoremă, garantează că soluţia problemei penalizate converge la soluţia problemei cu inegalităţi variationale atunci când parametrul de penalizare converge la zero. Conţinutul acestui capitol a fost scris ca urmare a lucrărilor [49] and [100].

Capitolul 6 prezintă o problemă de contact fără frecare în care, la fel ca în Capitolul 5, contactul este modelat cu ajutorul complianţei normale, constrângere unilaterală şi termen de memorie. Noutatea acestui capitol apare în faptul că aici comportamentul materialului este modelat cu lege constitutivă care implică variabilă internă de stare. Ca de obicei, vom prezenta formularea clasică şi formularea variaţională a problemei, împreună cu două rezultate principale privind existenţa şi unicitatea soluţiei problemei şi respectiv convergenţa sa. Teorema II.6.1 reprezintă primul rezultat principal din acest capitol. Demonstraţia acestuia se bazează pe argumente privind inegalităţile variaţionale care implică operatori de memorie. Teorema II.6.4 garantează dependenţa continuă a soluţiei în raport datele. Acest capitol urmează lucrarea noastră [122].

Manuscrisul se încheie cu o listă de referinţe în care se pot găsi diverse detalii, comentarii şi informaţii suplimentare relativ la temele legate de materialul din această teză.

Rezulatele originale prezentate în această teză au fost distribuite în Capitolele 2, 4, 5 şi 6 după cum urmează.

În Secţiunea 2.1: Lema I.2.2 şi Teorema I.2.3 pe care le găsim în lucrarea [47].

Secţiunea 2.2: Lema I.2.6, Lema I.2.7, Lema I.2.8, Lema I.2.9 şi Teorema I.2.10 publicate în [46].

Secţiunea 2.3: Lema I.2.11, Teorema I.2.12 şi Teorema I.2.14 care urmează lucrarea noastră [48].

Secţiunea 4.2: Teorema II.4.1, Lema II.4.2, Lema II.4.3. Section 4.3: Teorema II.4.4. Toate aceste rezultate au fost publicate în [117].

Secţiunea 5.2: Teorema II.5.1, Lema II.5.2, Lema II.5.3, publicate în [49].

Secţiunea 5.3: Teorema II.5.4, Lema II.5.5, Lemma II.5.6, Lema II.5.7, Lema II.5.8, Lema II.5.9, toate publicate în [100].

Secţiunea 6.2 and 6.3: Teoremele II.6.1, Lema II.6.2, Lema II.6.3 şi II.6.4, care urmează lucrarea noastră [122].

Cu alte cuvinte, contribuţia autorului poate fi considerată ca fiind parte din lucrările:

A. Farcaş, An asymptotic formula for Jain's operators, *Studia Univ. Babes - Bolyai, Mathematica*, **57**(4)(2012), 511-517 (MR3034099).

A. Farcaş, On some fuzzy positive and linear operators, Proceedings of the Second International Conference "*Modelling and Development of Intelligent Systems*", September 29-October 02, 2011, Sibiu, Romania, ed. Dana Simian, Lucian Blaga Univ. Press, 45-52.

A. Farcaş, An approximation property of the generalized Jain's operators of two variables (accepted in *Mathematical Sciences & Applications E-Notes (MSAEN)*.

A. Farcaş, F. Pătrulescu and M. Sofonea, A history-dependent contact problem with unilateral constraint, Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. 4, no. **1** (2012), 90-96 (MR2959899).

F. Pătrulescu, **A. Farcaş**, A. Ramadan, On a penalized viscoplastic contact problem with unilateral constraint, *Ann. Univ. Buchar. Math. Ser*, 4 (**LXII**) (2013), 213-227.

M. Sofonea and **A. Farcaş**, Analysis of a History-dependent Frictional Contact Problem, *Applicable Analysis*, DOI: 10.1080/00036811.2013.778981 (IF. 0.849).

M. Sofonea, F. Pătrulescu, **A. Farcaş**, A viscoplastic contact problem with normal compliance, unilateral constraint and memory term, *Applied Mathematics and Optimization*, DOI: 10.1007/s00245- 013-9216-2 (IF 0.859).

Autoarea a participat la următoarele conferinţe internaţionale:

Second International Conference "Modelling and Development of Intelligent Systems", September 29–October 02, 2011, Sibiu, Romania, cu lucrarea *On some fuzzy positive and linear operators.*

The Second Conference of PhD Students in Mathematics, 28-30 June, Szeged, Hungary, cu lucrarea *On some modified Szàsz-Mirakjan operators.*

XIme Colloque Franco Roumain de Mathmatiques Appliques, Bucarest, 24-30 Aot 2012, cu lucrarea *Analyse dun problme de contact viscoplastique sans frottement.*

21eme Séminaire Franco-Polonais de Méchaniqueé, 13-15 Juin 2013, Perpignan, France, cu lucrarea *A frictional contact problem involving history-dependent operators.*

Cuvinte cheie: operatori liniari şi pozitivi, teoreme de tip Voronovskaja, teoreme de tip Korovkin, inegalităţi variaţionale, operatori de memorie, lege constitutivă, materiale vâscoelastice, materiale vâscoplastice, legea de frecare uscată a lui Coulomb.

Part I

Operatori liniari şi pozitivi

1
Asupra operatorilor liniari şi pozitivi

În acest capitol vom prezenta câteva noţiuni importante referitoare la operatori liniari şi pozitivi, module de continuitate şi aspecte privind diferite tipuri de convergenţă, precum şi teoreme de tip Voronovskaja pentru operatori liniari şi pozitivi. Toate aceste noţiuni vor fi folosite mai târziu în capitolul 2.

1.1 Noţiuni de bază

Aceasta secţiune este dedicată atât proprietăţilor operatorilor liniari şi pozitivi cât şi descrierii metodelor de sumare. În primul rând vom introduce conceptul de operator liniar şi pozitiv.

1.2 Viteza de convergenţă

În această secţiune prezentăm două tipuri de convergenţă şi ne referim la cadrul general pentru viteza de convergenţă a operatorilor liniari şi pozitivi cu privire la o metodă asimptotică de tip Voronovskaja.

1.3 Consideraţii fuzzy asupra operatorilor liniari şi pozitivi

În această secţiune vom colecta o serie de elemente de bază în ceea ce priveşte operatorii liniari şi pozitivi de tip fuzzy.

2

Noi rezultate pentru diferite clase de operatori liniari şi pozitivi

În acest capitol vom prezenta rezultatele proprii obţinute pentru prima parte a acestei teze. Prima secţiune îşi propune să prezinte un rezultat referitor la versiunea fuzzy a unei clase de operatori liniari şi pozitivi, în timp ce a doua secţiune se referă la o formulă asimptotică pentru o clasă de operatori liniari şi pozitivi definiţi pe un interval nemărginit. În cele din urmă, ultima parte a acestui capitol se referă la o proprietate de aproximare pentru o generalizare a operatorilor prezentaţi în a doua secţiune a prezentului capitol. Rezultatele prezentate în acest capitol se bazează pe lucrările [46], [47] and [48].

2.1 Asupra unor operatori liniari şi pozitivi de tip fuzzy

În această secţiune vom demonstra ca operatorii fuzzy de tip Bernstein-Stancu satisfac o versiune A-statistică teoremei Korovkin de tip fuzzy şi vom oferi un exemplu care se încadrează în acest caz.

Definition I.2.1 *Fie* $f \in C([0,1], \mathbb{R}_{\mathcal{F}}),\ m \in \mathbb{N},\ 0 \le \alpha \le \beta$. *Definim*

$$({}^{\mathcal{F}}L_m^{\alpha,\beta} f)(x) = \sum_{k=0}^{m}{}^{*}\, p_{m,k}(x) \odot f\left(\frac{k+\alpha}{m+\beta}\right), \quad x \in [0,1], \qquad \text{(I.2.1)}$$

unde $p_{m,k}(x) = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{m-k}$.

În acest caz $\mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ reprezintă mulţimea numerelor reale fuzzy şi $\sum^*$ este folosită pentru a desemna sumarea fuzzy.

Lemma I.2.2 *Operatorii fuzzy Bernstein-Stancu definiţi prin* (I.2.1) *sunt liniari şi pozitivi.*

Theorem I.2.3 *Dacă şirul de operatori* $({}^{\mathcal{F}}L_m^{(\alpha,\beta)}f)_{m\in\mathbb{N}}$ *definiţi prin* (I.2.1) *satisface condiţiile*

$$st_A - \lim_m \|\widetilde{L_m}^{(\alpha,\beta)}(e_i) - e_i\| = 0,\ \ i = 0, 1, 2, \tag{I.2.2}$$

atunci

$$st_A - \lim_m D^*({}^{\mathcal{F}}L_m^{(\alpha,\beta)}, f) = 0. \tag{I.2.3}$$

2.2 O formula asimptotică pentru operatorii de tip Jain

În această secţiune vom demonstra un rezultat de tip Voronovskaja pentru o clasă de operatori liniari şi pozitivi de tip discret, care depind de un parametru real.

Lemma I.2.4 ([70]) *Pentru* $0 < \alpha < \infty$, $|\beta| < 1$, *fie*

$$\omega_\beta(k, \alpha) = \alpha(\alpha + k\beta)^{k-1} e^{-(\alpha+k\beta)}/k!\ ;\ \ k \in \mathbb{N}_0. \tag{I.2.4}$$

atunci

$$\sum_{k=0}^{\infty} \omega_\beta(k, \alpha) = 1. \tag{I.2.5}$$

Lemma I.2.5 ([70]) *Fie*

$$S(r, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + \beta k)^{k+r-1} e^{-(\alpha+\beta k)}/k!,\ \ r = 0, 1, 2, ... \tag{I.2.6}$$

şi

$$\alpha S(0, \alpha, \beta) = 1. \tag{I.2.7}$$

Atunci

$$S(r, \alpha, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k (\alpha + k\beta) S(r - 1, \alpha + k\beta, \beta). \tag{I.2.8}$$

Lemma I.2.6 *Fie S funcţia definită în Lema I.*2.5. *Atunci avem*

(i) $$S(3, \alpha, \beta) = \frac{\alpha^3}{(1-\beta)^3} + \frac{3\alpha\beta^2}{(1-\beta)^4} + \frac{\beta^3 + 2\beta^4}{(1-\beta)^5},$$

(ii) $$S(4, \alpha, \beta) = \frac{\alpha^3}{(1-\beta)^4} + \frac{6\alpha^2\beta^2}{(1-\beta)^5} + \frac{\alpha\beta^3(11\beta + 4)}{(1-\beta)^6} + \frac{6\beta^6 + 8\beta^5 + \beta^4}{(1-\beta)^7}.$$

Operatorii definiţi de către Jain sunt daţi de relaţia

$$(P_n^{[\beta]}f)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_\beta(k, nx) \cdot f\left(\frac{k}{n}\right), \quad f \in C[0,\infty), \tag{I.2.9}$$

Lemma I.2.7 *Opratorii definiţi prin (I.2.9) verifică următoarele identităţi.*

(i) $(P_n^{[\beta]}e_3)(x) = \dfrac{x^3}{(1-\beta)^3} + \dfrac{3x^2}{n(1-\beta)^4} - \dfrac{x(6\beta^4 - 6\beta^3 - 2\beta - 1)}{n^2(1-\beta)^5}.$

(ii) $(P_n^{[\beta]}e_4)(x) = \dfrac{x^4}{(1-\beta)^4} + \dfrac{6x^3}{n(1-\beta)^5} - \dfrac{x^2(36\beta^4 - 72\beta^3 + 36\beta^2 - 8\beta - 7)}{n^2(1-\beta)^6} + \dfrac{x(105\beta^5 - 14\beta^4 - 2\beta^3 + 12\beta^2 + 8\beta + 1)}{n^3(1-\beta)^7}.$

Lemma I.2.8 *Fie operatorul $P_n^{[\beta_n]}$ definit prin relaţia (I.2.9) şi fie φ_x dat de*

$$\varphi_x \in C_2[0,\infty),\ \varphi_x(t) = t - x. \tag{I.2.10}$$

Atunci

(i)
$$(P_n^{[\beta_n]}\varphi_x^3)(x) = \frac{x^3}{(1-\beta_n)^3} - \frac{3x^3}{(1-\beta_n)^2} + \frac{3x^3}{1-\beta_n} - x^3 + \frac{3x^2}{n(1-\beta_n)^4} - \frac{3x^2}{n(1-\beta_n)^3} - \frac{x(6\beta_n^4 - 6\beta_n^3 - 2\beta_n - 1)}{n^2(1-\beta_n)^5}.$$

(ii)
$$\begin{aligned}(P_n^{[\beta_n]}\varphi_x^4)(x) = {} & \frac{x^4}{(1-\beta_n)^4} - \frac{4x^4}{(1-\beta_n)^3} + \frac{6x^4}{(1-\beta_n)^2} - \frac{4x^4}{1-\beta_n} + x^4 \\ & + \frac{6x^3}{n(1-\beta_n)^5} - \frac{12x^3}{n(1-\beta_n)^4} + \frac{6x^3}{n(1-\beta_n)^3} \\ & - \frac{x^2(36\beta_n^4 - 72\beta_n^3 + 36\beta_n^2 - 8\beta_n - 7)}{n^2(1-\beta_n)^6} \\ & + \frac{4x^2(6\beta_n^4 - 6\beta_n^3 - 2\beta_n - 1)}{n^2(1-\beta_n)^5} \\ & + \frac{x(105\beta_n^5 - 14\beta_n^4 - 2\beta_n^3 + 12\beta_n^2 + 8\beta_n + 1)}{n^3(1-\beta_n)^7}.\end{aligned}$$

Lemma I.2.9 *Fie $P_n^{[\beta_n]}$ operatorii de tip Jain şi φ_x definit prin (I.2.8). Mai mult, dacă are loc*

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0, \tag{I.2.11}$$

atunci

$$P_n^{[\beta_n]}\varphi_x^4 \le \frac{12x^3}{n(1-\beta_n)^5} + \frac{24x^2}{n^2(1-\beta_n)^5} + \frac{106x}{n^3(1-\beta_n)^7}.$$

Theorem I.2.10 *Fie $f \in C_2([0,\infty))$ şi fie operatorul $P_n^{[\beta_n]}$ definit ca în relaţia (I.2.9). Dacă are loc (I.2.9), atunci*

$$\lim_{n\to\infty} n\Big(P_n^{[\beta_n]}(f;x) - f(x)\Big) = \frac{x}{2} f''(x), \quad \forall x > 0.$$

2.3 O proprietate de aproximare pentru operatorii de tip Jain bidimensionali

Scopul acestei secţiuni este de a introduce o nouă clasă de operatori liniari si pozitivi, bidimensionali care depind de un parametru real, β. Pentru aceşti operatori vom demonstra o teoremă de tip Korovkin şi vom prezenta câteva proprietăţi de convergenţă.

În continuare se introduce o noua clasă de operatori şi anume o generalizare a operatorilor de tip Jain pe nodurile $\Big(\dfrac{k_1+\alpha_1}{m+\gamma_1}, \dfrac{k_2+\alpha_2}{m+\gamma_2}\Big)$.

$$^{[\beta]}\mathcal{J}_{m,n}^{\alpha,\gamma} = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \omega_\beta^1(k_1, mx)\omega_\beta^2(k_2, ny) f\Big(\frac{k_1+\alpha_1}{m+\gamma_1}, \frac{k_2+\alpha_2}{n+\gamma_2}\Big) \quad \text{(I.2.12)}$$

unde $(x,y) \in D, f \in C(D)$ şi $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2),\ \gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$.

Lemma I.2.11 *Fie $(x,y) \in C(D)$ şi $f_{00}(x,y) = 1, f_{10}(x,y) = x, f_{01}(x,y) = y, f_{20}(x,y) = x^2, f_{02}(x,y) = y^2$. Atunci, pentru operatorii de tip Jain bidimensionali, descrişi de relaţia* (I.2.12) *avem:*

$$^{[\beta]}\mathcal{J}_{m,n}^{\alpha,\gamma}(f_{0,0};x,y) = 1 \tag{I.2.13}$$

$$^{[\beta]}\mathcal{J}_{m,n}^{\alpha,\gamma}(f_{1,0};x,y) = \frac{mx}{(m+\gamma_1)(1-\beta)} + \frac{\alpha_1}{m+\gamma_1} \tag{I.2.14}$$

$$^{[\beta]}\mathcal{J}_{m,n}^{\alpha,\gamma}(f_{0,1};x,y) = \frac{ny}{(n+\gamma_2)(1-\beta)} + \frac{\alpha_2}{n+\gamma_2} \tag{I.2.15}$$

$$\begin{aligned} ^{[\beta]}\mathcal{J}_{m,n}^{\alpha,\gamma}(f_{2,0}+f_{0,2};x,y) &= \frac{mx^2}{(m+\gamma_1)^2(1-\beta)^2} \\ &+\frac{mx}{(m+\gamma_1)^2}\left[\frac{1}{(1-\beta^3)}+\frac{2\alpha_1}{1-\beta}\right]+\frac{\alpha_1^2}{(m+\gamma_1)^2} \\ &+\frac{ny^2}{(n+\gamma_2)^2(1-\beta)^2}+\frac{ny}{(n+\gamma_2)^2}\left[\frac{1}{(1-\beta^3)}+\frac{2\alpha_2}{1-\beta}\right] \\ &+\frac{\alpha_2^2}{(n+\gamma_2)^2}. \end{aligned} \tag{I.2.16}$$

Theorem I.2.12 *Se consideră $f \in C(D)$. Fie $\beta_n \to 0$ când $n \to \infty$. Atunci şirul $^{[\beta_n]}\{\mathcal{J}_{m,n}^{\alpha,\gamma}(f;x,y)\}$ converge uniform către $f(x,y)$ on $K \subset D$, unde $K = [0,A] \times [0,A]$, $0 < A < \infty$, deci avem că*

$$\lim_{m,n\to\infty} \left\| {}^{[\beta_n]}\mathcal{J}_{m,n}^{\alpha,\gamma}(f;x,y) - f(x,y) \right\|_K = 0.$$

Theorem I.2.13 [34] *Fie $A = (a_{j,k,m,n})$ o metodă matricială de sumare RH-regulară, nenegativă. Fie $\{L_{m,n}\}$ un şir de operatori liniari şi pozitivi bidimensionali care acţioneazaă pe $C(D)$. Atunci pentru orice $f \in C(D)$ are loc,*

$$st_A^2 - \lim_{m,n} \|L_{m,n}f - f\|_{C(D)} = 0$$

dacă şi numai dacă

$$st_A^2 - \lim_{m,n} \|L_{m,n}f_i - f_i\|_{C(D)} = 0, (i = 0,1,2,3), \tag{I.2.17}$$

unde $f_0(x,y) = 1, f_1(x,y) = x, f_2(x,y) = y$ and $f_3(x,y) = x^2 + y^2$.

Theorem I.2.14 *Fie $^{[\beta]}\mathcal{J}_{m,n}^{\alpha,\gamma}$ operatorii definiţi prin relaţia* (I.2.12). *Mai mult, considerăm $\beta = \beta_n$ şi $\alpha = \alpha_n, \gamma = \gamma_n$ cu proprietăţile*

$$\beta_n \to 0, n \to \infty \tag{I.2.18}$$

şi respectiv

$$\alpha_n \to 0, n \to \infty, \gamma_n \to 0, n \to \infty. \tag{I.2.19}$$

Atunci, avem că

$$\left| {}^{[\beta_n]}\mathcal{J}_{m,n}^{\alpha_n,\gamma_n}(f;x,y) - f(x,y) \right| \leq \omega(f;\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta^2}(2x^2 + 2y^2)\right\}. \quad \text{(I.2.20)}$$

Part II

Operatori de Memorie în Mecanica de Contact

3
Preliminarii

În acest capitol am adunat atât materiale preliminare care vor fi folosite mai târziu în studiul problemelor pe frontieră prezentate în Capitolele 4–6 cât şi materiale preliminare necesare în modelarea problemelor la limita prezentate în Capitolele 4–6 a tezei de doctorat. Prezentul capitol este împărţit în două secţiuni principale. Prima secţiune este dedicată rezultatelor fundamentale din analiza funcţională, în timp ce a doua secţiune îşi propune să prezinte unele rezultate preliminare privind modelarea problemelor de contact.

3.1 Noţiuni fundamentale de analiză funcţională

În această secţiune reamintim în primul rând noţiuni importante în ceea ce priveşte convergenţa pe spatii normate şi unele detalii referitoare la spaţii Hilbert. Apoi, introducem conceptul de operatori de memorie. Pentru aceşti operatori, descriem proprietăţile lor şi prezentăm un rezultat de existenţă şi unicitate pentru inegalităţile variaţionale care implică operatori de memorie. Continuăm apoi cu o scurtă descriere a spaţiilor de funcţii de care avem nevoie în studiul problemelor de contact. Cele mai multe dintre rezultatele prezentate în această secţiune sunt date fără demonstraţie deoarece ele sunt rezultate standard şi pot fi gasite în multe alte referinţe, în timp ce pentru rezultatele care sunt frecvent utilizate în acest manuscris sunt oferite şi demonstraţiile.

3.1.1 Noţiuni de bază

În această subsecţiune se pot găsi informaţii privind spaţiile Hilbert şi câteva teoreme care se folosesc mai târziu în acest manuscris.

3.1.2 Operatori de memorie

În subsecţiunea de faţă vom prezenta definiţia şi câteva exemple pentru operatorii de memorie precum şi rezultatele de punct fix utilizate mai târziu în lucrare. În cele din urmă, vom prezenta un rezultat de existenţă şi unicitate referitor la o clasa de inegalităţi variaţionale implicând termen de memorie.

3.1.3 Spaţii de funcţii utilizate în Mecanica de Contact

Pentru a introduce un model matematic care descrie un proces de contact, este nevoie să descriem mai întâi spaţiile cărora le aparţin datele şi necunoscutele .

3.2 Modelarea problemelor de contact

Începem această secţiune prin prezentarea cadrului fizic a proceselor de contact. Continuăm apoi cu o trecere în revistă a legilor constitutive utilizate în literatură, inclusiv legile constitutive vâscoelastică şi respectiv vâscoplastică. Tot în această secţiune prezentăm si condiţiile de contact, iar în cele din urmă, abordăm descrierea condiţiilor de contact cu sau fără frecare, inclusiv legea lui Coulomb pentru frecare uscată. Mai multe detalii pe teme legate de materialul prezentat în acest capitol pot fi gasite în [8, 35, 39, 42, 54, 59, 61, 73, 86, 101, 114, 118, 128].

3.2.1 Cadrul fizic

Considerăm cadrul fizic general prezentat în Figura 3.1 şi îl descriem în cele ce urmează. Un corp deformabil ocupă într-un domeniu de referinţă o mulţime deschisă şi mărginită $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ cu frontiera Γ, compusă din trei părţi: $\overline{\Gamma}_1$, $\overline{\Gamma}_2$ şi$\overline{\Gamma}_3$, cu mulţimile deschise, relativ disjuncte Γ_1, Γ_2 şi Γ_3. Corpul este fix pe Γ_1. Forţele de tracţiune de densitate $\boldsymbol{f}_2$ acţionează pe Γ_2 iar forţele volumice de densitate $\boldsymbol{f}_0$ acţionează în Ω. În configuraţia de referinţă, pe Γ_3, corpul se află în contact cu un obstacol, aşa numita *fundaţie*.

Suntem interesaţi de modele matematice care descriu echilibrul stării mecanice a corpului, aflat în configuraţia fizică descrisă mai sus, în cadrul teoriei deformărilor mici. În acest scop, notăm cu $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\sigma}$ şi $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$

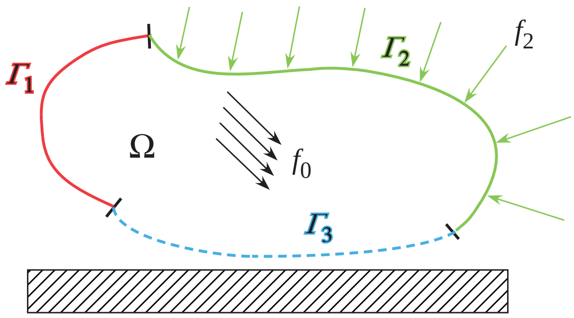

FIGURE 3.1. The physical setting; Γ_3 is the contact surface

vectorul deplasare, tensorul tensiunilor, şi, respectiv, tensorul liniarizat al deformărilor. Acestea sunt funcţii care depind de variabila spaţială $\boldsymbol{x}$ şi de variabila de timp t. Cu toate acestea, în cele ce urmează nu vom indica în mod explicit dependenţa de aceste cantităţi adică, de exemplu, vom scrie $\boldsymbol{\sigma}$ în loc de $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x}, t)$. De asemenea, reamintim faptul că, componentele tensorului liniarizat al deformărilor $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u})$ sunt date de

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}))_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \qquad \text{(II.3.1)}$$

unde $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$. În cele din urmă trebuie să reţinem că, aici şi mai jos, se presupune ca toate variabilele au grad suficient de netezime în concordanţă cu evoluţiile în care sunt implicate. Pentru a prezenta un model matematic pentru un anumit proces de contact, trebuie să se precizeze legea constitutivă, ecuaţia de echilibru, condiţiile la limită, condiţiile de contact şi, în cele din urmă, condiţiile iniţiale.

3.2.2 Legi constitutive

O lege constitutivă reprezintă o relaţie între tensiunile $\boldsymbol{\sigma}$, deformările $\boldsymbol{\varepsilon}$ şi derivaţele acestora, care caracterizează un anumit material. Deşi legile constitutive trebuie sa îndeplinească anumite axiome şi principii invarianţă, acestea provin în mare parte din experimente.

3.2.3 Condiţii de contact

Pentru a prezenta un model matematic aferent unui anumit proces de contact, pe lângă descrierea legii constitutive trebuie să descriem ecuaţia de echilibru, condiţiile la limită şi condiţiile de contact.

Vom descrie aici ecuaţiile de bază şi condiţiile la limită care sunt utilizate în studiul problemelor de contact implicând materiale de consistenţă vâscoelastică şi vâscoplastică. În cele ce urmează presupunem că datele şi necunoscutele depind de variabila timp şi studiem procesul de contact pe un interval de timp nemărginit, $\mathbb{R}_+$.

3.2.4 Legi de frecare

Prezentăm acum unele condiţii în direcţii tangenţiale, numite şi *condiţii de frecare* sau *legi de frecare*. Cea mai simplă dintre acestea este aşa numita condiţie *fără frecare* în cadrul căreia partea tangenţială a tensiunii (denumită *forţă de frecare*) se anulează, adică

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau = \mathbf{0}. \tag{II.3.2}$$

4

O problemă de contact cu frecare, implicând operatori de memorie

În acest capitol vom considera un model matematic care descrie contactul dintre un corp vâscoelastic şi o fundaţie. Contactul are loc, cu frecare şi este modelat cu ajutorul complianţei normale, termenului de memorie şi legii lui Coulomb de frecare uscată. Pentru acest tip de problemă se obţine o formulare variaţională, sub forma unei inegalităţi variaţionale pentru domeniul deplasare sau, echivalent, în forma unei inegalităţi variaţionale implicând termen de memorie pentru câmpul de viteze. Principalele noastre rezultate din acest capitol sunt Teorema II.4.1 and II.4.4. Teorema II.4.1 postulează solvabilitatea unică problemei şi se obţine în mai multe etape, în funcţie de argumentele prezentate în secţunea 3.1.2. Teorema II.4.4 arată dependenţa continuă a soluţiei în raport cu datele. Se obţine folosind diferite estimări şi argumente de monotonie. Materialul prezentat în acest capitol a făcut obiectul articolului [117].

4.1 Formularea problemei

Formularea clasică a problemei este următoarea.

Problema $\mathcal{P}$. *Găsiţi un câmp de deplasări* $\boldsymbol{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ *şi un câmp de tensiuni* $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{S}^d$ *astfel încât*

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{K}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\, ds, \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{II.4.1}$$

$$\operatorname{Div} \boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \mathbf{0} \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{II.4.2}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{0} \quad \text{pe} \quad \Gamma_1, \tag{II.4.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \quad \text{pe} \quad \Gamma_2, \tag{II.4.4}$$

$$-\sigma_\nu(t) = p(u_\nu(t)) + \int_0^t b(t-s)u_\nu^+(s)\, ds \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{II.4.5}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|\boldsymbol{\sigma}_\tau(t)\| \leq \mu\, |\sigma_\nu(t)|, \\ -\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mu\, |\sigma_\nu(t)| \frac{\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)}{\|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|} \ \text{ dacă } \ \dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t) \neq \mathbf{0} \end{array}\right\} \quad \text{pe} \quad \Gamma_3 \tag{II.4.6}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$ şi, mai mult,

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0 \qquad \text{în} \quad \Omega. \tag{II.4.7}$$

4.2 Existenţă şi Unicitate

În primul rând presupunem că operatorul de vâscozitate satisface condiţia

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{A} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Există } L_\mathcal{A} > 0 \text{ astfel încât} \\ \quad \|\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_\mathcal{A}\|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \quad\quad \forall\, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Există } m_\mathcal{A} > 0 \text{ astfel încât} \\ \quad (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq m_\mathcal{A}\, \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|^2 \\ \quad\quad \forall\, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\ \text{(d) Funcţia } \ \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ este măsurabilă pe } \Omega, \\ \quad \text{pentru orice } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}_d}) \text{ aparţine lui } Q. \end{array}\right\} \tag{II.4.8}$$

De asemenea, operatorul de elasticitate şi cel de relaxare satisfac următoarele condiţii.

$$\left.\begin{array}{l}\text{(a) } \mathcal{B} : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) Există } L_{\mathcal{B}} > 0 \text{ astfel încât} \\ \qquad \|\mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\| \leq L_{\mathcal{B}} \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| \\ \qquad\quad \forall\, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \ \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\ \text{(c) Funcţia } \ \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ este măsurabilă pe } \Omega, \\ \qquad \text{pentru orice } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d. \\ \text{(e) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{B}(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}_d}) \text{ aparţine lui } Q. \end{array}\right\} \tag{II.4.9}$$

$$\mathcal{K} \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{Q}_\infty). \tag{II.4.10}$$

Densităţile forţelor corpului şi funcţiile de tracţiune ale suprafeţei sunt astfel încât

$$\boldsymbol{f}_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d), \quad \boldsymbol{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d) \tag{II.4.11}$$

iar funcţia complianţă normală p satisface

$$\left.\begin{array}{l}\text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Există } L_p > 0 \text{ astfel încât} \\ \qquad |p(\boldsymbol{x}, r_1) - p(\boldsymbol{x}, r_2)| \leq L_p\, |r_1 - r_2| \\ \qquad\quad \forall\, r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}, \ \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \\ \text{(c) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto p(\boldsymbol{x}, r) \text{ este măsurabilă pe } \Gamma_3, \\ \qquad \text{pentru orice } r \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } p(\boldsymbol{x}, r) = 0 \text{ pentru orice } r \leq 0, \ \text{a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \end{array}\right\} \tag{II.4.12}$$

În final, funcţia de memorie, coeficientul de frecare şi datele iniţiale verifică

$$b \in C(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Gamma_3)), \quad b(t, \boldsymbol{x}) \geq 0 \tag{II.4.13}$$
$$\text{pentru orice } t \in \mathbb{R}_+, \ \text{a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3,$$

$$\mu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \mu(\boldsymbol{x}) \geq 0 \quad \text{a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \tag{II.4.14}$$

$$\boldsymbol{u}_0 \in V. \tag{II.4.15}$$

Problema $\mathcal{P}^V$. *Găsiţi un câmp de deplasare* $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}_+ \to V$ *astfel încât* $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$ *şi inegaliatea următoare are loc, pentru orice* $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\Big)_Q \qquad \text{(II.4.16)}\\
&\quad + \Big(\int_0^t \mathcal{K}(t-s)\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\,ds, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t))\Big)_Q\\
&\quad + \Big(p(u_\nu(t)) + \int_0^t b(t-s)\,u_\nu^+(s)\,ds, v_\nu - \dot{u}_\nu(t)\Big)_{L^2(\Gamma_3)}\\
&\quad + \Big(\mu\big(p(u_\nu(t)) + \int_0^t b(t-s)\,u_\nu^+(s)\,ds\big), \|\boldsymbol{v}_\tau\| - \|\dot{\boldsymbol{u}}_\tau(t)\|\Big)_{L^2(\Gamma_3)}\\
&\qquad \geq (\boldsymbol{f}_0(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))_{L^2(\Omega)^d} + (\boldsymbol{f}_2(t), \boldsymbol{v} - \dot{\boldsymbol{u}}(t))_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.
\end{aligned}$$

Un cuplu de funcţii $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma})$ care satisface (II.4.1) şi (II.4.16) este numit *soluţie slabă* pentru problema de contact cu frecare, $\mathcal{P}$.

Avem următorul rezultat de existenţă şi unicitate.

Theorem II.4.1 *Se presupune că au loc* (II.4.8)–(II.4.15). *Atunci, Problema* $\mathcal{P}^V$ *are o soluţie unică ce satisface*

$$\boldsymbol{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; V). \qquad \text{(II.4.17)}$$

Problema $\mathcal{Q}^V$. *Găsiţi un câmp de viteze* $\boldsymbol{w} : \mathbb{R}_+ \to V$ *astfel încât inegaliatea următoare să aibă loc pentru orice* $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{w}(t)))_Q \qquad \text{(II.4.18)}\\
&\quad + \varphi(\mathcal{R}\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{v}) - \varphi(\mathcal{R}\boldsymbol{w}(t), \boldsymbol{w}(t)))\\
&\qquad \geq (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}(t))_Q \quad \forall \boldsymbol{v} \in V.
\end{aligned}$$

Lemma II.4.2 *Fie* $\boldsymbol{u} \in C^1(\mathbb{R}_+; V)$ *şi* $\boldsymbol{w} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ *funcţii date astfel încât* $\boldsymbol{u} = \mathcal{S}\boldsymbol{w}$. *Atunci* $\boldsymbol{u}$ *este soluţie pentru Problema* $\mathcal{P}^V$ *dacă şi numai dacă* $\boldsymbol{w}$ *este soluţie pentru Problema* $\mathcal{Q}^V$.

Lemma II.4.3 *Există o soluţie unică* $\boldsymbol{w}$ *pentru Problema* $\mathcal{Q}^V$ *şi, mai mult, aceasta satisface* $\boldsymbol{w} \in C(\mathbb{R}_+; V)$.

4.3 Un rezultat de convergenţă

Se consideră următoarele asumpţii:

$$\mathcal{K}_\rho \to \mathcal{K} \qquad \text{in} \;\; C(\mathbb{R}_+; \mathbf{Q}_\infty) \quad \text{as} \quad \rho \to 0. \tag{II.4.19}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Există } F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ and } L_0 \geq 0 \text{ astfel încât} \\ \text{(a) } |p_\rho(\boldsymbol{x}, r) - p(\boldsymbol{x}, r)| \leq F(\rho)(|r| + 1) \\ \qquad \forall\, r \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \text{ pentru fiecare } \rho > 0. \\ \text{(b) } F(\rho) \to 0 \quad \text{când} \quad \rho \to 0. \\ \text{(c) } L_\rho \leq L_0 \quad \text{când} \quad \rho \to 0. \end{array}\right\} \tag{II.4.20}$$

$$b_\rho \to b \qquad \text{în} \;\; C(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Gamma_3)) \quad \text{când} \quad \rho \to 0. \tag{II.4.21}$$

$$\boldsymbol{f}_{0\rho} \to \boldsymbol{f}_0 \quad \text{în} \;\; C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d) \quad \text{când} \quad \rho \to 0. \tag{II.4.22}$$

$$\boldsymbol{f}_{2\rho} \to \boldsymbol{f}_2 \quad \text{în} \;\; C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d) \quad \text{când} \quad \rho \to 0. \tag{II.4.23}$$

Theorem II.4.4 *Presupunem că au loc* (II.4.19)–(II.4.23). *Atunci, soluţia* $\boldsymbol{u}_\rho$ *a Problemei* $\mathcal{P}_\rho^V$ *converge către soluţia* $\boldsymbol{u}$ *a Problemei* $\mathcal{P}^V$*, adică*

$$\boldsymbol{u}_\rho \to \boldsymbol{u} \quad \text{în} \quad C^1(\mathbb{R}_+; V) \tag{II.4.24}$$

când $\rho \to 0$.

5

O problemă de contact fără frecare implicând operatori de memorie

În acest capitol vom considera în primul rând un model matematic ce descrie contactul qvasistatic dintre un corp cu consistenţă vâscoplastică şi o fundaţie. Contactul are loc fără frecare şi este modelat cu ajutorul complianţei normale, a unei constrângeri unilaterale şi efectelor de memorie. Se obţine o formulare variaţională a problemei, şi apoi se demonstrează solvabilitatea unică slabă. Cele două teoreme principale care asigură solvabilitatea unică şi rezultatul de convergenţă în acest capitol sunt Teorema II.5.1 şi respectiv, Teorema II.5.4. Rezultatele obţinute în acest capitol au fost publicate în [49] şi [100].

5.1 Formularea problemei

Formularea clasică a problemei este următoarea.

Problem $\mathcal{M}$. *Găsiţi un câmp de deplasări* $\boldsymbol{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ *şi un câmp de tensiuni* $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{S}^d$ *astfel încât*

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t))) \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{II.5.1}$$

$$\operatorname{Div}\boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{II.5.2}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{pe} \quad \Gamma_1, \tag{II.5.3}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \quad \text{pe} \quad \Gamma_2, \tag{II.5.4}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$*, există* $\xi : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *care satisface*

$$\left.\begin{aligned}
&u_\nu(t) \le g,\ \ \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t) \le 0,\\
&(u_\nu(t) - g)\big(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t) + \xi(t)\big) = 0,\\
&0 \le \xi(t) \le \int_0^t b(t-s)\, u_\nu^+(s)\, ds,\\
&\xi(t) = 0 \ \text{ dacă } \ u_\nu(t) < 0,\\
&\xi(t) = \int_0^t b(t-s)\, u_\nu^+(s)\, ds \ \text{ dacă } \ u_\nu(t) > 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \qquad \text{(II.5.5)}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$ şi, mai mult,

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \mathbf{0} \qquad \text{pe} \quad \Gamma_3, \qquad \text{(II.5.6)}$$

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0 \qquad \text{în} \quad \Omega. \qquad \text{(II.5.7)}$$

5.2 Existenţă şi Unicitate

În studiul Problemei $\mathcal{M}$ presupunem că tensorul de elasticitate $\mathcal{E}$ şi funcţia constitutivă neliniară $\mathcal{G}$ satisfac următoarele condiţii.

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(a) } \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d.\\
&\text{(b) } \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{klij} = \mathcal{E}_{jikl} \in L^\infty(\Omega),\ \ 1 \le i,j,k,l \le d.\\
&\text{(c) Există } m_\mathcal{E} > 0 \ \text{ astfel încât}\\
&\qquad \mathcal{E}\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\tau} \ge m_\mathcal{E}\|\boldsymbol{\tau}\|^2 \ \ \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d,\ \text{ a.p.t. in } \Omega.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.5.8)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(a) } \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d.\\
&\text{(b) Există } L_\mathcal{G} > 0 \text{ astfel încât}\\
&\qquad \|\mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1) - \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2)\|\\
&\qquad\qquad \le L_\mathcal{G}\,(\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\|)\\
&\qquad\quad \forall\, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d,\ \text{ a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Omega.\\
&\text{(c) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}) \text{ este măsurabilă pe } \Omega,\\
&\qquad \text{pentru orice } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d.\\
&\text{(d) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}, \mathbf{0}_{\mathbb{S}^d}) \text{ aparţine lui } Q.
\end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.5.9)}$$

De asemenea, funcţia complianţă normală p satisface

$$\left.\begin{array}{l}
\text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+.\\
\text{(b) Există } L_p > 0 \text{ astfel încât}\\
\qquad |p(\boldsymbol{x}, r_1) - p(\boldsymbol{x}, r_2)| \le L_p\, |r_1 - r_2|\\
\qquad\qquad \forall\, r_1,\ r_2 \in \mathbb{R},\ \text{ a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3.\\
\text{(c) } (p(\boldsymbol{x}, r_1) - p(\boldsymbol{x}, r_2))(r_1 - r_2) \ge 0\\
\qquad\qquad \forall\, r_1,\ r_2 \in \mathbb{R},\ \text{ a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3.\\
\text{(d) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto p(\boldsymbol{x}, r) \text{ este măsurabilă pe } \Gamma_3,\\
\qquad \text{pentru orice } r \in \mathbb{R}.\\
\text{(e) } p(\boldsymbol{x}, r) = 0 \text{ for all } r \le 0,\ \text{ a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3.
\end{array}\right\} \tag{II.5.10}$$

În final, densităţile forţelor corpului, funcţiile de tracţiune ale suprafeţei, funcţia memorie şi datele iniţiale îndeplinesc următoarele condiţii:

$$\boldsymbol{f}_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d), \qquad \boldsymbol{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d), \tag{II.5.11}$$

$$b \in C(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Gamma_3)), \qquad b(t, \boldsymbol{x}) \ge 0 \quad \text{a.e. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \tag{II.5.12}$$

$$\boldsymbol{u}_0 \in V, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 \in Q. \tag{II.5.13}$$

Se consideră submulţimea $U \subset V$, operatorii $P : V \to V$, $\mathcal{B} : C(\mathbb{R}_+; V) \to C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ şi funcţia $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}_+ \to V$ definite prin

$$U = \{\, \boldsymbol{v} \in V : v_\nu \le g \text{ on } \Gamma_3 \,\}, \tag{II.5.14}$$

$$(P\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = \int_{\Gamma_3} p(u_\nu) v_\nu \, da \quad \forall\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in V, \tag{II.5.15}$$

$$(\mathcal{B}\boldsymbol{u}(t), \xi)_{L^2(\Gamma_3)} = \Big(\int_0^t b(t-s)\, u_\nu^+(s)\, ds, \xi \Big)_{L^2(\Gamma_3)} \tag{II.5.16}$$

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in C(\mathbb{R}_+; V),\ \xi \in L^2(\Gamma_3),\ t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v})_V = \int_\Omega \boldsymbol{f}_0(t) \cdot \boldsymbol{v}\, dx + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_2(t) \cdot \boldsymbol{v}\, da \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V,\ t \in \mathbb{R}_+. \tag{II.5.17}$$

Problema $\mathcal{M}^V$. *Găsiţi un câmp de deplasare* $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}_+ \to U$ *şi un câmp de tensiuni* $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}_+ \to Q$ *astfel încât, pentru orice* $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)))\, ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_0), \quad \text{(II.5.18)}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)))_Q + (P\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V \quad \text{(II.5.19)}$$
$$+(\mathcal{B}\boldsymbol{u}(t), v_\nu^+ - u_\nu^+(t))_{L^2(\Gamma_3)} \geq (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in U.$$

Un cuplu $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma})$ care satisface (II.5.1) şi (II.5.19) se numeşte *soluţie slabă* pentru problema de contact fără frecare, $\mathcal{M}$.

Solvabilitatea unică a Problemei $\mathcal{M}^V$ este dată de următorul rezultat.

Theorem II.5.1 *Presupunem că au loc* (II.5.8)–(II.5.13). *Atunci Problema* $\mathcal{M}^V$ *are soluţie unică ce satisface* $\boldsymbol{u} \in C(\mathbb{R}_+; U)$ *şi* $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$.

Lemma II.5.2 *Pentru fiecare funcţie* $\boldsymbol{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ *există o funcţie unică* $\mathcal{S}\boldsymbol{u} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$ *astfel încât*

$$\mathcal{S}\boldsymbol{u}(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\mathcal{S}\boldsymbol{u}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)))\, ds \quad \text{(II.5.20)}$$
$$+\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_0) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+.$$

Mai mult, operatorul $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \to C(\mathbb{R}_+; Q)$ *este un operator de memorie, adică satisface proprietatea: pentru orice* $n \in \mathbb{N}$ *există* $s_n > 0$ *astfel încât*

$$\|\mathcal{S}\boldsymbol{u}_1(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{u}_2(t)\|_Q \leq s_n \int_0^t \|\boldsymbol{u}_1(s) - \boldsymbol{u}_2(s)\|_V\, ds \quad \text{(II.5.21)}$$
$$\forall\, \boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_2 \in C(\mathbb{R}_+; V),\ \forall\, t \in [0, n].$$

Lemma II.5.3 *Fie cuplul de funcţii* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma})$ *astfel încât* $\boldsymbol{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$, $\boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q)$. *Atunci,* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma})$ *este soluţie pentru Problema* $\mathcal{M}^V$ *dacă şi numai dacă au loc:*

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \mathcal{S}\boldsymbol{u}(t) \quad \forall\, t \in \mathbb{R}_+, \quad \text{(II.5.22)}$$

$$(\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)))_Q + (\mathcal{S}\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)))_Q \quad \text{(II.5.23)}$$
$$+(\mathcal{B}\boldsymbol{u}(t), v_\nu^+ - u_\nu^+(t))_{L^2(\Gamma_3)} + (P\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V$$
$$\geq (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in U,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+$$

.

5.3 Un rezultat de convergenţă

În această secţiune demonstrăm un rezultat de convergenţă în studiul Problemei $\mathcal{M}^V$. În acest scop, peste tot în această secţiune vom face referire doar la cazul omogen şi anume vom presupune că funcţia p nu depinde de $\boldsymbol{x} \in \Gamma_3$. Mai mult, vom presupune că p satisface

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Există } L_p > 0 \text{ astfel încât} \\ \qquad |p(r_1) - p(r_2)| \le L_p|r_1 - r_2| \quad \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } (p(r_1) - p(r_2))(r_1 - r_2) \ge 0 \quad \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } p(r) = 0 \ \text{ pentru orice } r < 0. \end{array}\right\} \tag{II.5.24}$$

Fie q o funcţie ce satisface

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } q :\ [g, +\infty[\to \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Există } L_q > 0 \text{ astfel încât} \\ \qquad |q(r_1) - q(r_2)| \le L_q|r_1 - r_2| \quad \forall\, r_1,\, r_2 \ge g. \\ \text{(c) } (q(r_1) - q(r_2))(r_1 - r_2) > 0 \quad \forall\, r_1,\, r_2 \ge g,\, r_1 \ne r_2. \\ \text{(d) } q(g) = 0. \end{array}\right\} \tag{II.5.25}$$

Fie $\mu > 0$ şi se consideră p_μ definit prin

$$p_\mu(r) = \begin{cases} p(r) & \text{dacă} \quad r \le g, \\ \frac{1}{\mu}\, q(r) + p(g) & \text{dacă} \quad r > g. \end{cases} \tag{II.5.26}$$

Folosind asumpţiile (II.5.25) rezultă că funcţia p_μ satisface condiţia (II.5.24), adică

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } p_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+. \\ \text{(b) Există } L_{p_\mu} > 0 \text{ astfel încât} \\ \qquad |p_\mu(r_1) - p_\mu(r_2)| \le L_{p_\mu}|r_1 - r_2| \quad \forall r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}. \\ \text{(c) } (p_\mu(r_1) - p_\mu(r_2))(r_1 - r_2) \ge 0 \quad \forall r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}. \\ \text{(d) } p_\mu(r) = 0 \ \text{ pentru orice } r < 0. \end{array}\right\} \tag{II.5.27}$$

Aceasta ne permite să considerăm operatorul $P_\mu : V \to V$ definit prin

$$(P_\mu \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = \int_{\Gamma_3} p_\mu(u_\nu) v_\nu \, da \quad \forall\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in V \tag{II.5.28}$$

şi, mai mult, observăm că P_μ este un operator monoton, continuu şi Lipschitz.

Cu aceste notaţii considerăm următoarea problemă de contact

Problem $\mathcal{M}_\mu$. *Găsiţi un câmp de deplasare $\boldsymbol{u}_\mu : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ şi un câmp de tensiuni $\boldsymbol{\sigma}_\mu : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{S}^d$ astfel încât*

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}_\mu(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}_\mu(t)) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_\mu(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mu(t))) \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{II.5.29}$$

$$\mathrm{Div}\, \boldsymbol{\sigma}_\mu(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{II.5.30}$$

$$\boldsymbol{u}_\mu(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{pe} \quad \Gamma_1, \tag{II.5.31}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\mu(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \quad \text{pe} \quad \Gamma_2, \tag{II.5.32}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$, există $\xi : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ care satisface

$$\left.\begin{array}{l}
\sigma_{\mu\nu}(t) + p_\mu(u_{\mu\nu}(t)) + \xi(t) = 0, \\
0 \le \xi(t) \le \displaystyle\int_0^t b(t-s)\, u_{\mu\nu}^+(s)\, ds, \\
\xi(t) = 0 \ \text{ if } \ u_{\mu\nu}(t) < 0, \\
\xi(t) = \displaystyle\int_0^t b(t-s)\, u_{\mu\nu}^+(s)\, ds \ \text{ if } \ u_{\mu\nu}(t) > 0
\end{array}\right\} \quad \text{on} \quad \Gamma_3, \tag{II.5.33}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$ şi, mai mult

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mu\tau}(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{II.5.34}$$

$$\boldsymbol{u}_\mu(0) = \boldsymbol{u}_0,\ \boldsymbol{\sigma}_\mu(0) = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{în} \quad \Omega. \tag{II.5.35}$$

Problema $\mathcal{M}_\mu^V$. *Găsiţi un câmp de deplasare $\boldsymbol{u}_\mu : \mathbb{R}_+ \to U$ şi un câmp de tensiuni $\boldsymbol{\sigma}_\mu : \mathbb{R}_+ \to Q$ astfel încât pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$,*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_\mu(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mu(t)) + \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_\mu(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mu(s)))\, ds \\ + \boldsymbol{\sigma}_{0\mu} - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{0\mu}),\end{aligned} \tag{II.5.36}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}_\mu(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\mu(t)))_Q + (P\boldsymbol{u}_\mu(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\mu(t))_V \\ + (\mathcal{B}\boldsymbol{u}_\mu(t), v_\nu^+ - u_{\mu\nu}^+(t))_{L^2(\Gamma_3)} \ge (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\mu(t))_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in U.\end{aligned} \tag{II.5.37}$$

Avem următorul rezultat de existenţă, unicitate şi convergenţă.

Theorem II.5.4 *Presupunem că au loc* (II.5.24), (II.5.11), (II.5.13) *şi* (II.5.25). *Atunci:*

a) Pentru fiecare $\mu > 0$ *există o unică soluţie* $\boldsymbol{u}_\mu \in C(\mathbb{R}_+; V)$ *pentru Problema* $\mathcal{M}_\mu^V$.

b) Soluţia u_μ *a Problemei* $\mathcal{M}_\mu^V$ *converge tare către soluţia* u *a Problemei* $\mathcal{M}^V$, *ceea ce înseamnă că*

$$\|\boldsymbol{u}_\mu(t) - \boldsymbol{u}(t)\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_\mu(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_Q \to 0 \tag{II.5.38}$$

când $\mu \to 0$, *pentru orice* $t \in \mathbb{R}_+$.

Lemma II.5.5 *Există o soluţie unică* $\boldsymbol{u}_\mu \in C(\mathbb{R}_+; V)$ *pentru Problema* $\mathcal{M}_\mu^V$.

Pentru a reda demonstraţia teoremei principale, considerăm problema auxiliaraă a găsirii unui câmp de deplasare $\widetilde{\boldsymbol{u}}_\mu : \mathbb{R}_+ \to V$ astfel încât, pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\widetilde{\boldsymbol{u}}_\mu(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\widetilde{\boldsymbol{u}}_\mu(t)))_Q + (\mathcal{S}\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\widetilde{\boldsymbol{u}}_\mu(t)))_Q \\ +(P_\mu \widetilde{\boldsymbol{u}}_\mu(t), \boldsymbol{v} - \widetilde{\boldsymbol{u}}_\mu(t)))_V + (\mathcal{B}\boldsymbol{u}(t), v_\nu^+ - \widetilde{u}_{\mu\nu}^+(t))_{L^2(\Gamma_3)} \\ \geq (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} - \widetilde{\boldsymbol{u}}_\mu(t)))_V \ \ \forall \boldsymbol{v} \in V.\end{aligned} \tag{II.5.39}$$

Lemma II.5.6 *Există o funcţie unică* $\widetilde{\boldsymbol{u}}_\mu \in C(\mathbb{R}_+; V)$ *care satisface* (II.5.39), *pentru orice* $t \in \mathbb{R}_+$.

Lemma II.5.7 *Atunci când* $\mu \to 0$,

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_\mu(t) \rightharpoonup \boldsymbol{u}(t) \quad in \;\; V,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

Lemma II.5.8 *Atunci când* $\mu \to 0$,

$$\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_\mu(t) - \boldsymbol{u}(t)\|_V \to 0,$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

Lemma II.5.9 *Are loc următoarea convergenţă.*

$$\|\boldsymbol{u}_\mu(t) - \boldsymbol{u}(t)\|_V + \|\boldsymbol{\sigma}_\mu(t) - \boldsymbol{\sigma}(t)\|_Q \to 0 \text{ as } \mu \to 0 \text{ for all } t \in \mathbb{R}_+.$$

6

O problema de contact fără frecare implicând operatori de memorie şi variabilă internă de stare

În acest capitol vom considera un al doilea model matematic care descrie contactul qvasistatic dintre un corp cu consistenţă vâscoplastică şi o fundaţe. Spre deosebire de problema studiată în capitolul anterior, aici comportamentul materialului este modelat cu o lege constitutivă care implică variabilă internă de stare. Contactul are loc fără frecare şi este modelat cu ajutorul complianţei normale, a unei constrângeri unilaterale şi termenului de memorie. Se prezintă formularea clasică a problemei, asumpţiile privind datele şi se obţine o formulare variaţională a modelului. Apoi, în Teorema II.6.1 se demonstrează solvabilitatea unică slabă a problemei. De asemenea se studiază dependenţa continuă a soluţiei în raport cu datele şi se demonstrează un rezultat de convergenţă, Teorema II.6.4. Conţinutul acestui capitol se bazează pe lucrarea [122].

6.1 Formularea problemei

Formularea clasică a problemei este următoarea.

Problem $\mathcal{N}$. *Găsiţi un câmp de deplasări* $\boldsymbol{u} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$, *un câmp de tensiuni* $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{S}^d$ *şi o variabilă internă de stare* $\boldsymbol{\kappa} : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m$

astfel încât

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\boldsymbol{u}}(t)) + \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\kappa}(t)) \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{II.6.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}(t) = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\kappa}(t)) \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{II.6.2}$$

$$\mathrm{Div}\,\boldsymbol{\sigma}(t) + \boldsymbol{f}_0(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{II.6.3}$$

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{pe} \quad \Gamma_1, \tag{II.6.4}$$

$$\boldsymbol{\sigma}(t)\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{f}_2(t) \quad \text{pe} \quad \Gamma_2, \tag{II.6.5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\tau(t) = \boldsymbol{0} \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{II.6.6}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$, *există* $\xi : \Gamma_3 \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *care satisface*

$$\left.\begin{array}{l} u_\nu(t) \le g,\ \sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t) \le 0, \\ (u_\nu(t) - g)\big(\sigma_\nu(t) + p(u_\nu(t)) + \xi(t)\big) = 0, \\ 0 \le \xi(t) \le \displaystyle\int_0^t b(t-s)\, u_\nu^+(s)\, ds, \\ \xi(t) = 0 \ \text{ if } \ u_\nu(t) < 0, \\ \xi(t) = \displaystyle\int_0^t b(t-s)\, u_\nu^+(s)\, ds \ \text{ dacă } \ u_\nu(t) > 0 \end{array}\right\} \quad \text{pe} \quad \Gamma_3, \tag{II.6.7}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$ *şi, mai mult,*

$$\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0, \quad \boldsymbol{\kappa}(0) = \boldsymbol{\kappa}_0 \qquad \text{în} \quad \Omega. \tag{II.6.8}$$

6.2 Existenţă şi Unicitate

În această secţiune vom enumera ipotezele asupra datelor, vom obţine formularea variaţională a problemei $\mathcal{N}$ după care vom demonstra solvabilitatea unică slabă a problemei. În acest scop, vom presupune că tensorul elasticitate $\mathcal{E}$ satisface

$$\left.\begin{array}{l} \text{(a) } \mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ijkl}) : \Omega \times \mathbb{S}^d \to \mathbb{S}^d. \\ \text{(b) } \mathcal{E}_{ijkl} = \mathcal{E}_{klij} = \mathcal{E}_{jikl} \in L^\infty(\Omega),\ 1 \le i,j,k,l \le d. \\ \text{(c) Există } m_\mathcal{E} > 0 \ \text{ astfel încât} \\ \qquad \mathcal{E}\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \ge m_\mathcal{E} \|\boldsymbol{\tau}\|^2 \ \ \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{S}^d,\ \text{a.p.t în } \Omega. \end{array}\right\} \tag{II.6.9}$$

iar funcţiile constitutive $\mathcal{G}$ şi $\boldsymbol{G}$ satisfac următoarele condiţii.

$$\left.\begin{array}{l}
\text{(a) } \mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{S}^d. \\
\text{(b) Există } L_{\mathcal{G}} > 0 \text{astfel încât} \\
\qquad \|\mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\kappa}_1) - \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\kappa}_2)\| \\
\qquad\quad \le L_{\mathcal{G}}(\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| + \|\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2\|) \\
\qquad\qquad \forall\, \boldsymbol{\sigma}_1,\, \boldsymbol{\sigma}_2,\, \boldsymbol{\varepsilon}_1,\, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d, \boldsymbol{\kappa}_1,\, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\
\text{(c) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) \text{ este măsurabilă pe } \Omega, \\
\qquad \text{for any } \boldsymbol{\sigma},\, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ and } \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^m. \\
\text{(d) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto \mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}_{\mathbb{S}^d}, \boldsymbol{0}_{\mathbb{S}^d}, \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^m}) \text{ aparţine } \textit{lui } Q.
\end{array}\right\} \qquad \text{(II.6.10)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{(a) } \boldsymbol{G} : \Omega \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m. \\
\text{(b) Există} L_{G} > 0 \text{astfel încât} \\
\qquad \|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\kappa}_1) - \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\kappa}_2)\| \\
\qquad\quad \le L_{G}(\|\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2\| + \|\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2\| + \|\boldsymbol{\kappa}_1 - \boldsymbol{\kappa}_2\|) \\
\qquad\qquad \forall\, \boldsymbol{\sigma}_1,\, \boldsymbol{\sigma}_2,\, \boldsymbol{\varepsilon}_1,\, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathbb{S}^d,\, \boldsymbol{\kappa}_1,\, \boldsymbol{\kappa}_2 \in \mathbb{R}^m, \text{ a.e. } \boldsymbol{x} \in \Omega. \\
\text{(c) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\kappa}) \text{ este măsurabilă pe } \Omega, \\
\qquad \text{for any } \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{S}^d \text{ and } \boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^m. \\
\text{(d) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}_{\mathbb{S}^d}, \boldsymbol{0}_{\mathbb{S}^d}, \boldsymbol{0}_{\mathbb{R}^m}) \\
\qquad \text{aparţine } \textit{lui } L^2(\Omega)^m.
\end{array}\right\} \qquad \text{(II.6.11)}$$

densităţile forţelor corpului şi funcţiile de tracţiune ale suprafeţei îndeplinesc condiţiile

$$\boldsymbol{f}_0 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d), \quad \boldsymbol{f}_2 \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d) \qquad \text{(II.6.12)}$$

iar funcţia complianţă normală p satisface

$$\left.\begin{array}{l}
\text{(a) } p : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+. \\
\text{(b) Există } L_p > 0 \text{ astfel încât} \\
\qquad |p(\boldsymbol{x}, r_1) - p(\boldsymbol{x}, r_2)| \le L_p\, |r_1 - r_2| \\
\qquad\quad \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \\
\text{(c) } (p(\boldsymbol{x}, r_1) - p(\boldsymbol{x}, r_2))(r_1 - r_2) \ge 0 \\
\qquad \forall\, r_1,\, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3. \\
\text{(d) Funcţia } \boldsymbol{x} \mapsto p(\boldsymbol{x}, r) \text{ este măsurabilă pe } \Gamma_3, \\
\qquad \text{pentru orice } r \in \mathbb{R}. \\
\text{(e) } p(\boldsymbol{x}, r) = 0 \text{ pentru orice } r \le 0, \text{ a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3.
\end{array}\right\} \qquad \text{(II.6.13)}$$

De asemenea, funcţia de memorie şi datele iniţiale sunt supuse unor condiţii de forma

$$b \in C(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Gamma_3)), \quad b(t, \boldsymbol{x}) \geq 0 \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}_+, \text{ a.p.t } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3, \tag{II.6.14}$$

$$\boldsymbol{u}_0 \in V, \quad \boldsymbol{\sigma}_0 \in Q, \quad \boldsymbol{\kappa}_0 \in L^2(\Omega)^m. \tag{II.6.15}$$

Problem $\mathcal{N}^V$. *Găsiţi un câmp de deplasare* $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}_+ \to U$, *un câmp de tensiuni* $\boldsymbol{\sigma} : \mathbb{R}_+ \to Q$ *şi o variabilă internă de stare* $\boldsymbol{\kappa} : \mathbb{R}_+ \to L^2(\Omega)^m$ *astfel încât pentru orice* $t \in \mathbb{R}_+$, să avem

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \boldsymbol{\kappa}(s))\, ds + \boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_0) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)),$$

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \int_0^t \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma}(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \boldsymbol{\kappa}(s))\, ds + \boldsymbol{\kappa}_0,$$

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)))_Q + (P\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V \\ &\quad + \Big(\mathcal{B}\boldsymbol{u}(t), v_\nu^+ - u_\nu^+(t)\Big)_{L^2(\Gamma_3)} \geq (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V \quad \forall \boldsymbol{v} \in U.\end{aligned}$$

În studiul Problemei $\mathcal{N}^V$ avem următorul rezultat de existenţă şi unicitate

Theorem II.6.1 *Presupunem că au loc condiţiile* (II.6.9)–(II.6.15). *Atunci, Problema* $\mathcal{N}^V$ *are o soluţie unuică ce satisface*

$$\boldsymbol{u} \in C(\mathbb{R}_+; U), \quad \boldsymbol{\sigma} \in C(\mathbb{R}_+; Q) \quad \textit{şi} \quad \boldsymbol{\kappa} \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^m). \tag{II.6.16}$$

Lemma II.6.2 *Pentru fiecare* $\boldsymbol{u} \in C(\mathbb{R}_+; V)$ *există o funcţie unică* $\mathcal{S}\boldsymbol{u} = (\mathcal{S}_1\boldsymbol{u}, \mathcal{S}_2\boldsymbol{u}) \in C(\mathbb{R}_+; Q \times L^2(\Omega)^m)$ *astfel încât*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1\boldsymbol{u}(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\mathcal{S}_1\boldsymbol{u}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \mathcal{S}_2\boldsymbol{u}(s))\, ds \\ +\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_0),\end{aligned} \tag{II.6.17}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_2\boldsymbol{u}(t) = \int_0^t \boldsymbol{G}(\mathcal{S}_1\boldsymbol{u}(s) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(s)), \mathcal{S}_2\boldsymbol{u}(s))\, ds \\ +\boldsymbol{\kappa}_0\end{aligned} \tag{II.6.18}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$. *Mai mult, operatorul* $\mathcal{S} : C(\mathbb{R}_+; V) \to C(\mathbb{R}_+; Q \times L^2(\Omega)^m)$ *este un operator de memorie, adică satisface proprietatea: pentru orice* $n \in \mathbb{N}^*$ *există* $s_n > 0$ *care depinde numai den,* d, $\mathcal{G}$, $\boldsymbol{G}$ *and* $\mathcal{E}$, *astfel încât*

$$\|\mathcal{S}\boldsymbol{u}(t) - \mathcal{S}\boldsymbol{v}(t)\|_{Q\times L^2(\Omega)^m} \leq s_n \int_0^t \|\boldsymbol{u}(s) - \boldsymbol{v}(s)\|_V \, ds \quad \text{(II.6.19)}$$

$$\forall\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in C(\mathbb{R}_+; V) \quad \forall\, t \in [0, n].$$

Lemma II.6.3 *Fie* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ *un triplet de funcţii care satisface* (II.6.16). *Atunci* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ *este o soluţie a problemei* $\mathcal{N}^V$ *dacă şi numai dacă*

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)) + \mathcal{S}_1(\boldsymbol{u}(t)), \quad \text{(II.6.20)}$$

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \mathcal{S}_2\boldsymbol{u}(t), \quad \text{(II.6.21)}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)))_Q + (\mathcal{S}_1\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}(t)))_Q \quad \text{(II.6.22)}\\ +(P\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V + (\mathcal{B}\boldsymbol{u}(t)\,, v_\nu^+ - u_\nu^+(t))_{L^2(\Gamma_3)}\\ \geq (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}(t))_V, \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in U,\end{aligned}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

6.3 Un rezultat de convergenţă

Studiem acum dependenţa soluţiei problemei $\mathcal{N}^V$ în raport cu perturbaţiile asupra datelor. În acest scop, presupunem că au loc condiţiile (II.6.9)–(II.6.15) şi notăm prin $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ soluţia Problemei $\mathcal{N}^V$ obţinută în Teorema II.6.1. Pentru fiecare $\rho > 0$ fie p_ρ, b_ρ, $\boldsymbol{f}_{0\rho}$, $\boldsymbol{f}_{2\rho}$, $\boldsymbol{u}_{0\rho}$, $\boldsymbol{\sigma}_{0\rho}$ şi$\boldsymbol{\kappa}_{0\rho}$ reprezentând perturbaţiile lui p, b, $\boldsymbol{f}_0$, $\boldsymbol{f}_2$, $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_0$ şi, respectiv, $\boldsymbol{\kappa}_0$, care satisfac condiţiile (II.6.12)–(II.6.15). În plus pentru orice $\rho > 0$ definim operatorii $P_\rho : V \to V$, $\mathcal{B}_\rho : C(\mathbb{R}_+; V) \to C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_3))$ şi funcţia $\boldsymbol{f}_\rho : \mathbb{R}_+ \to V$, prin egalităţile

$$(P_\rho\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = \int_{\Gamma_3} p_\rho(u_\nu)v_\nu \, da \quad \forall\, \boldsymbol{u},\, \boldsymbol{v} \in V, \quad \text{(II.6.23)}$$

$$(\mathcal{B}_\rho\boldsymbol{u}(t), \xi)_{L^2(\Gamma_3)} = \Big(\int_0^t b_\rho(t-s)\, u_\nu^+(s)\, ds, \xi\Big)_{L^2(\Gamma_3)} \quad \text{(II.6.24)}$$

$$\forall\, \boldsymbol{u} \in C(\mathbb{R}_+; V),\ \xi \in L^2(\Gamma_3),\ t \in \mathbb{R}_+,$$

$$(\boldsymbol{f}_\rho(t), \boldsymbol{v})_V = \int_\Omega \boldsymbol{f}_{0\rho}(t) \cdot \boldsymbol{v} \, dx + \int_{\Gamma_2} \boldsymbol{f}_{2\rho}(t) \cdot \boldsymbol{v} \, da \quad \text{(II.6.25)}$$

$$\forall\, \boldsymbol{v} \in V,\ t \in \mathbb{R}_+.$$

Cu aceste notaţii, se consideră următoarea perturbaţie pentru Problema $\mathcal{N}^V$.

Problem $\mathcal{N}_\rho^V$. *Găsiţi un câmp de deplasare* $\boldsymbol{u}_\rho : \mathbb{R}_+ \to U$*, un câmp de tensiuni* $\boldsymbol{\sigma}_\rho : \mathbb{R}_+ \to Q$ *şi o variabilă internă de stare* $\boldsymbol{\kappa}_\rho : \mathbb{R}_+ \to L^2(\Omega)^m$ *astfel încât*

$$\boldsymbol{\sigma}_\rho(t) = \int_0^t \mathcal{G}(\boldsymbol{\sigma}_\rho(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\rho(s)), \boldsymbol{\kappa}_\rho(s))\, ds + \boldsymbol{\sigma}_{0\rho} - \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_{0\rho}) + \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\rho(t)), \tag{II.6.26}$$

$$\boldsymbol{\kappa}_\rho(t) = \int_0^t \boldsymbol{G}(\boldsymbol{\sigma}_\rho(s), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\rho(s)), \boldsymbol{\kappa}_\rho(s))\, ds + \boldsymbol{\kappa}_{0\rho}, \tag{II.6.27}$$

$$(\boldsymbol{\sigma}_\rho(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_\rho(t)))_Q + (P_\rho \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\rho(t))_V + \Big(\mathcal{B}\boldsymbol{u}(t), v_\nu^+ - u_{\rho\nu}^+(t)\Big)_{L^2(\Gamma_3)} \geq (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}_\rho(t))_V \quad \forall\, \boldsymbol{v} \in V, \tag{II.6.28}$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

Rezultă din Teorema II.6.1 că, pentru fiecare $\rho > 0$, Problema $\mathcal{N}_\rho^V$ are soluţie unică $(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{\sigma}_\rho, \boldsymbol{\kappa}_\rho)$ cu regularitatea $\boldsymbol{u}_\rho \in C(\mathbb{R}_+; U)$, $\boldsymbol{\sigma}_\rho \in C(\mathbb{R}_+; Q)$ şi $\boldsymbol{\kappa}_\rho \in C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^m)$. Considerăm următoarele asumpţii:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Există } F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \text{ şi } \alpha \in \mathbb{R}_+ \text{astfel încât} \\ \text{(a) } |p_\rho(\boldsymbol{x}, r) - p(\boldsymbol{x}, r)| \leq F(\rho)(|r| + \alpha) \\ \quad \forall\, r \in \mathbb{R},\ \text{a.p.t. } \boldsymbol{x} \in \Gamma_3,\ \text{pentru fiecare } \rho > 0. \\ \text{(b) } F(\rho) \to 0 \quad \text{când} \quad \rho \to 0. \end{array}\right\} \tag{II.6.29}$$

$$b_\rho \to b \quad \text{în } C(\mathbb{R}_+; L^\infty(\Gamma_3)) \quad \text{as} \quad \rho \to 0. \tag{II.6.30}$$

$$\boldsymbol{f}_{0\rho} \to \boldsymbol{f}_0 \quad \text{în } C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^d) \quad \text{as} \quad \rho \to 0. \tag{II.6.31}$$

$$\boldsymbol{f}_{2\rho} \to \boldsymbol{f}_2 \quad \text{în } C(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_2)^d) \quad \text{as} \quad \rho \to 0. \tag{II.6.32}$$

$$\boldsymbol{u}_{0\rho} \to \boldsymbol{u}_0 \quad \text{în} \quad V \quad \text{as} \quad \rho \to 0. \tag{II.6.33}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{0\rho} \to \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{în} \quad Q \quad \text{as} \quad \rho \to 0. \tag{II.6.34}$$

$$\boldsymbol{\kappa}_{0\rho} \to \boldsymbol{\kappa}_0 \quad \text{în} \quad L^2(\Omega)^m \quad \text{as} \quad \rho \to 0. \tag{II.6.35}$$

Avem următorul rezultat de convergenţă.

Theorem II.6.4 *Presupunem că au loc* (II.6.29)–(II.6.35). *Atunci, soluţia* $(\boldsymbol{u}_\rho, \boldsymbol{\sigma}_\rho, \boldsymbol{\kappa}_\rho)$ *Problemei* $\mathcal{N}_\rho^V$ *converge către soluţia* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa})$ *a Problemei*

$\mathcal{N}^V$, *adică*

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{u}_\rho \to \boldsymbol{u} \quad \hat{\imath}n \quad C(\mathbb{R}_+; V), \\ \boldsymbol{\sigma}_\rho \to \boldsymbol{\sigma} \quad \hat{\imath}n \quad C(\mathbb{R}_+; Q), \\ \boldsymbol{\kappa}_\rho \to \boldsymbol{\kappa} \quad \hat{\imath}n \quad C(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)^m) \end{array}\right\} \qquad \text{(II.6.36)}$$

când $\rho \to 0$.

Referinţe

[1] U. Abel, M. Ivan, X. M. Zeng, *Asymptotic Expansion for Szàsz-Mirakjan Operators*, Proceedings of Numerical Analysis and Applied Mathematics: International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2007.

[2] R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[3] O. Agratini, On a sequence of linear and positive operators, *Facta Universitatis (Niš), Ser. Mat. Inform.* **14** (1999), 41-48.

[4] G. A. Anastassiou, On basic fuzzy Korovkin theory, *Studia Univ. "Babeş - Bolyai" Math.*, **4** 2005, 3–10.

[5] G. A. Anastassiou, $\mathcal{A}$ *- summability and fuzzy Korovkin approximation, in Fuzzy Mathematics:Approximation Theory*, Springer, 2010.

[6] G. A. Anastassiou, *Transfers of real approximations to vectorial and fuzzy setting, in Intelligent Mathematics: Computational Analysis*, Springer, 2011.

[7] G. A. Anastassiou, O. Duman, Statistical fuzzy approximation by fuzzy positive linear operators, *Computers and Mathematics with Applications*, **55** 2008, 573–580.

[8] S.S. Antman, *Nonlinear Problems of Elasticity*, Springer-Verlag, New York, 1995.

[9] K. Atkinson and W. Han, *Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework*, Texts in Applied Mathematics **39**, Springer, New York, 2001.

[10] C. Baiocchi and A. Capelo, *Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free-Boundary Problems*, John Wiley, Chichester, 1984.

[11] H.T. Banks, G.A. Pinter, L.K. Potter, B.C. Munoz and L.C. Yanyo, Estimation and control related issues in smart material structure and fluids, *Optimization Techniques and Applications*, L. Caccetta et al., Eds., Curtain University Press 1998, 19–34.

[12] H.T. Banks, G.A. Pinter, L.K. Potter, J.M. Gaitens and L.C. Yanyo, Modeling of quasistatic and dynamic load responses of filled viesoelastic materials, Chapter 11 in *Mathematical Modeling : Case Studies from Industry*, E. Cumberbatch and A. Fitt, Eds., Cambridge University Press 2011, 229–252.

[13] H.T. Banks, S. Hu and Z.R. Kenz, A brief review of elasticity and viscoelasticity for solids, *Adv. Appl. Math. Mech.* **3** (2011), 1–51.

[14] M. Barboteu, F. Pătrulescu, A. Ramadan and M. Sofonea, History-dependent contact models for viscoplastic materials, *IMA Journal of Applied Mathematics* (submitted).

[15] V. Barbu, *Optimal Control of Variational Inequalities*, Pitman, Boston, 1984.

[16] V. Barbu and T. Precupanu, *Convexity and Optimization in Banach Spaces*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986.

[17] H.H. Bauschke and P.L. Combettes, *Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, CMS Books in Mathematics, Springer, New York, 2011.

[18] S. N. Bernstein, Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul de probabilités, Comm. Kharkov math. Soc. **13**(1912), 1–2.

[19] H. Brézis, Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité, *Ann. Inst. Fourier* **18** (1968), 115–175.

[20] H. Brézis, Problèmes unilatéraux, *J. Math. Pures et Appl.* **51** (1972), 1–168.

[21] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Mathematics Studies, North Holland, Amsterdam, 1973.

[22] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle–Théorie et applications*, Masson, Paris, 1987.

[23] P.G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Volume I: Three Dimensional Elasticity*, Studies in Mathematics and its Applications **20**, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[24] C. Ciulcu, D. Motreanu and M. Sofonea, Analysis of an elastic contact problem with slip dependent coefficient of friction, *Mathematical Inequalities & Applications* **4** (2001), 465–479.

[25] M. Cocu, Existence of solutions of Signorini problems with friction, *Int. J. Engng. Sci.* **22** (1984), 567–581.

[26] M. Cocu, E. Pratt and M. Raous, Existence d'une solution du problème quasistatique de contact unilatéral avec frottement non local, *C. R. Acad. Sci. Paris,* **320**, Série I (1995), 1413–1417.

[27] M. Cocu, E. Pratt and M. Raous, Formulation and approximation of quasistatic frictional contact, *Int. J. Engng. Sci.* **34** (1996), 783–798.

[28] M. Cocu and J.M. Ricaud, Analysis of a class of implicit evolution inequalities associated to dynamic contact problems with friction, *Int. J. Engng. Sci.* **328** (2000), 1534–1549.

[29] Wu Congxin, Z. Gong, On Henstock integral of fuzzy number valued functions, *Fuzzy Sets and Systems*, **3** 2001, 523–532.

[30] Wu Congxin, Ma Ming, On embedding problem of fuzzy number space: Part 1, *Fuzzy Sets and Systems*, **44** 1991, 33–38.

[31] C. Corduneanu, Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra, *Ann. Math. Pure Appl.* **67** (1965), 349–363.

[32] N. Cristescu and I. Suliciu, *Viscoplasticity*, Martinus Nijhoff Publishers, Editura Tehnică Bucharest, 1982.

[33] Z. Denkowski, S. Migórski and A. Ochal, Existence and uniqueness to a dynamic bilateral frictional contact problem in viscoelasticity, *Acta Appl. Math.* **94** (2006), 251–276.

[34] F. Dirik, K. Demirici, Korovkin type approximation theorem for functions of two variables in statistical sense, *Turk J. Math.* **34** (2010), 73–83.

[35] I. Doghri, *Mechanics of Deformable Solids*, Springer, Berlin, 2000.

[36] O. Doğru, Weighted approximation of continuous functions on the all positive axis by modified linear positive operators, *Int. J. Comput. Numerical Anal. Appl.* **1**(2) (2002) 135-147.

[37] O. Doğru, M. A. Özarslan and F. Taşdelen, On positive operators involving a certain class of generating functions, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **41**(4) (2004) 415-429.

[38] S. Drabla and M. Sofonea, Analysis of a Signorini problem with friction, *IMA Journal of Applied Mathematics* **62** (1999), 1–18.

[39] A.D. Drozdov, *Finite Elasticity and Viscoelasticity—A Course in the Nonlinear Mechanics of Solids*, World Scientific, Singapore, 1996.

[40] O. Duman, C. Orhan, Statistical approximation by positive linear operators, *Studia Math.*, **161**(2) (2006), 187–197.

[41] G. Duvaut, Loi de frottement non locale, *J. Méc. Thé. Appl.* Special issue (1982), 73–78.

[42] G. Duvaut and J.-L. Lions, *Inequalities in Mechanics and Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[43] C. Eck, J. Jarušek and M. Krbeč, *Unilateral Contact Problems: Variational Methods and Existence Theorems*, Pure and Applied Mathematics **270**, Chapman/CRC Press, New York, 2005.

[44] I. Ekeland and R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.

[45] E. Erkuş, O. Duman, A Korovkin type approximation theorem in statistical sense, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **43** (2006), 285–294.

[46] **A. Farcaş**, An asymptotic formula for Jain's operators, Studia Univ. Babes - Bolyai, Mathematica, **57**(4)(2012), 511–517.

[47] **A. Farcaş**, On some fuzzy positive and linear operators, *Proceedings of the Second International Conference "Modelling and Development of Intelligent Systems", September 29–October 02, 2011, Sibiu, Romania*, ed. Dana Simian, Lucian Blaga Univ. Press, 45–52.

[48] **A. Farcaş**, An approximation property of the generalized Jain's operators of two variables (accepted in Applied Mathematics, Mathematical Sciences & Applications E-Notes).

[49] **A. Farcaş**, F. Pătrulescu and M. Sofonea, A history-dependent contact problem with unilateral constraint, *Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl.* **4**, no. 1 (2012), 90–96.

[50] J. Favard, Sur les multiplicateurs d'interpolation, Journal de Mathematique Pures et Appliques, **23**(9) (1944), 219–247.

[51] G. Fichera, Problemi elastostatici con vincoli unilaterali. II. Problema di Signorini con ambique condizioni al contorno, *Mem. Accad. Naz. Lincei, S. VIII, Vol. VII, Sez. I*, **5** (1964) 91–140.

[52] J. A. Fridy, On statistical convergence, *Analysis* **5** (1985), 301–313.

[53] S. G. Gal, *Approximation theory in fuzzy setting, in: Handbook of Analytic-Computational Methods in Applied Mathematics*, Chapman and Hall/CRC, 2000.

[54] P. Germain and P. Muller, *Introduction à la mécanique des milieux continus*, Masson, Paris, 1980.

[55] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[56] R. Glowinski, J.-L. Lions and R. Trémolières, *Numerical Analysis of Variational Inequalities*, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[57] R. Goetschel Jr., W. Voxman, Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy Sets and Systems*, **18** 1986, 31–43.

[58] A. Guran, F. Pfeiffer and K. Popp, eds., *Dynamics with Friction: Modeling, Analysis and Experiment, Part I*, World Scientific, Singapore, 1996.

[59] M.E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1981.

[60] H. J. Hamilton, Transformations of multiple sequences, *Duke Math. J.* **2** (1936), 29–60.

[61] W. Han and B.D. Reddy, *Plasticity: Mathematical Theory and Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1999.

[62] W. Han and M. Sofonea, Evolutionary Variational inequalities arising in viscoelastic contact problems, *SIAM Journal of Numerical Analysis* **38** (2000), 556–579.

[63] W. Han and M. Sofonea, Time-dependent variational inequalities for viscoelastic contact problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **136** (2001), 369–387.

[64] J. Haslinger, I. Hlaváček and J. Nečas, Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, *Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV*, P.G. Ciarlet and J.-L. Lions, eds., North-Holland, Amsterdam, 1996, 313–485.

[65] W. Han and M. Sofonea, *Quasistatic Contact Problems in Viscoelasticity and Viscoplasticity*, Studies in Advanced Mathematics **30**, American Mathematical Society–International Press, 2002.

[66] J. Haslinger, I. Hlaváček and J. Nečas, Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics, *Handbook of Numerical Analysis, Vol. IV*, P.G. Ciarlet and J.-L. Lions, eds., North-Holland, Amsterdam, 1996, 313–485.

[67] I. Hlaváček, J. Haslinger, J. Nečas and J. Lovíšek, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[68] I.R. Ionescu and M. Sofonea, *Functional and Numerical Methods in Viscoplasticity*, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[69] N. Ispir, Ç. Atakut , Approximation by modified Szàsz-Mirakjan operators on weighted spaces, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* **112**(4) (2002) 571-578.

[70] G. C. Jain, Approximation of functions by a new class of linear operators, *Journal of Australian Math. Society*, **13**(1972), no.3, 271–276.

[71] J. Jarušek and M. Sofonea, On the solvability of dynamic elastic-visco-plastic contact problems, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* (*ZAMM*) **88** (2008), 3–22.

[72] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[73] A.M. Khludnev and J. Sokolowski, *Modelling and Control in Solid Mechanics*, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1997.

[74] N. Kikuchi and J.T. Oden, *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*, Siam, Philadelphia, 1988.

[75] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An Introduction to Variational Inequalities and their Applications*, Classics in Applied Mathematics **31**, SIAM, Philadelphia, 2000.

[76] A. Klarbring, A. Mikelič and M. Shillor, Frictional contact problems with normal compliance, *Int. J. Engng. Sci.* **26** (1988), 811–832.

[77] A. Klarbring, A. Mikelič and M. Shillor, On friction problems with normal compliance, *Nonlinear Analysis* **13** (1989), 935–955.

[78] E. Kolk, Matrix summability of statistically convergent sequences, *Analysis*, **13** (1993), 77–83.

[79] P.P. Korovkin, *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions* Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) , 90 (1953) 961-964 (In Russian)

[80] P.P. Korovkin, *Linear Operators and Approximation Theory*, Hindustan Publ. Corp., Delhi, India, 1960.

[81] A.J. Kurdila, M. Zabarankin, *Convex Functional Analysis*, Birkhäuser, Basel, 2005.

[82] T.A. Laursen, *Computational Contact and Impact Mechanics*, Springer, Berlin, 2002.

[83] J. Lemaître and J.-L. Chaboche, *Mechanics of Solids Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[84] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthiers-Villars, Paris, 1969.

[85] J.-L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non-homogènes I*, Dunod, Paris, 1968.

[86] L.E. Malvern, *Introduction to the Mechanics of a Continuum Medium*, Princeton-Hall, Inc., New Jersey, 1969.

[87] J.A.C. Martins and M.D.P. Monteiro Marques, eds., *Contact Mechanics*, Kluwer, Dordrecht, 2002.

[88] J.A.C. Martins and J.T. Oden, Existence and uniqueness results for dynamic contact problems with nonlinear normal and friction interface laws, *Nonlinear Analysis TMA* **11** (1987), 407–428.

[89] J. J. Massera and J. J. Schäffer, *Linear Differential Equations and Function Spaces*, Academic Press, New York-London, 1966.

[90] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, Analysis of lumped models with contact and friction, *Journal of Applied Mathematics and Physics* (*ZAMP*) **62** (2011), 99–113.

[91] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, Analysis of a frictional contact problem for viscoelastic materials with long memory, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series B* **15** (2011), 687–705.

[92] S. Migórski, A. Ochal and M. Sofonea, *Nonlinear Inclusions and Hemivariational Inequalities. Models and Analysis of Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics, **26**, Springer, New York, 2012.

[93] G. M. Mirakjan, Approximation of continuous functions with the aid of polynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **31** (1941), 201–205.

[94] D. Motreanu and M. Sofonea, Evolutionary variational inequalities arising in quasistatic frictional contact problems for elastic materials, *Abstract and Applied Analysis* **4** (1999), 255–279.

[95] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Academia, Praha, 1967.

[96] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastico-Plastic Bodies: An Introduction*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, Oxford, New York, 1981.

[97] J.T. Oden and J.A.C. Martins, Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **52** (1985), 527–634.

[98] P.D. Panagiotopoulos, *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1985.

[99] P. D. Panagiotopoulos, *Hemivariational Inequalities, Applications in Mechanics and Engineering*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[100] F. Pătrulescu, **A. Farcaş**, A. Ramadan, On a penalized viscoplastic contact problem with unilateral constraint,*Ann. Univ. Buchar. Math. Ser*, 4 (LXII) (2013), 213-227.

[101] A. C. Pipkin, *Lectures in Viscoelasticity Theory*, Applied Mathematical Sciences **7**, George Allen & Unwin Ltd., London, Springer-Verlag, New York, 1972.

[102] T. Popoviciu, *On the proof of the Weierstrass theorem using interpolation polynomials* Lucr. Ses. Gen. Stiintific. , 2 : 12 (1950) 1664-1667.

[103] A. Pringsheim, Zur theorie der zweifach unendlichen zahlenfolgen, *Math. Ann.* **53** (1900), 289–321.

[104] E. Rabinowicz, *Friction and Wear of Materials*, 2^{nd} edition, Wiley, New York, 1995.

[105] M. Raous, M. Jean and J.J. Moreau, eds., *Contact Mechanics*, Plenum Press, New York, 1995.

[106] B.D. Reddy, *Introductory Functional Analysis with Applications to Boundary Value Problems and Finite Elements*, Springer, New York, 1998.

[107] L. Rempulska, M. Skorupka, The Voronovskaja theorem for some operators of the Szàsz-Mirakjan type, *Le Matematiche*, L(II)(1995), 251–261.

[108] G. M. Robinson, Divergent double sequences and series, *Amer. Math. Soc. Transl.* **28** (1926), 50–73.

[109] A. D. Rodríguez–Aros, M. Sofonea and J. M. Viaño, A class of evolutionary variational inequalities with Volterra-type integral term, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **14** (2004), 555–577.

[110] A. D. Rodríguez–Aros, M. Sofonea and J. M. Viaño, Numerical approximation of a viscoelastic frictional contact problem, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. II Méc.* **334** (2006), 279–284.

[111] A. D. Rodríguez–Aros, M. Sofonea and J. M. Viaño, Numerical analysis of a frictional contact problem for viscoelastic materials with long-term memory, *Numerische Mathematik* **198** (2007), 327–358.

[112] M. Shillor, ed., Recent advances in contact mechanics, Special issue of *Math. Comput. Modelling* **28** (4–8) (1998).

[113] M. Shillor and M. Sofonea, A quasistatic viscoelastic contact problem with friction, *Int. J. Engng. Sci.* **38** (2000), 1517–1533.

[114] M. Shillor, M. Sofonea and J.J. Telega, *Models and Analysis of Quasistatic Contact*, Lecture Notes in Physics **655**, Springer, Berlin, 2004.

[115] A. Signorini, Sopra alcune questioni di elastostatica, *Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze*, 1933.

[116] M. Sofonea, C. Avramescu and A. Matei, A fixed point result with applications in the study of viscoplastic frictionless contact problems, *Communications on Pure and Applied Analysis* **7** (2008), 645–658.

[117] M. Sofonea and **A. Farcaş**, Analysis of a History-dependent Frictional Contact Problem, *Applicable Analysis*, DOI: 10.1080/00036811.2013.778981.

[118] M. Sofonea and A. Matei, *Variational Inequalities with Applications. A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Advances in Mechanics and Mathematics **18**, Springer, New York, 2009.

[119] M. Sofonea and A. Matei, History-dependent quasivariational inequalities arising in Contact Mechanics, *European Journal of Applied Mathematics* **22** (2011), 471–491.

[120] M. Sofonea and A. Matei, *Mathematical Models in Contact Mechanics*, London Mathematical Society Lecture Notes, Cambridge University Press **398**, Cambridge, 2012.

[121] M. Sofonea and F. Pătrulescu, Analysis of a history-dependent frictionless contact problem, *Mathematics and Mechanics of Solids*, **18** (2013), 409-430.

[122] M. Sofonea, F. Pătrulescu, **A. Farcaş**, A viscoplastic contact problem with normal compliance, unilateral constraint and memory term, *Applied Mathematics and Optimization*, DOI: 10.1007/s00245-013-9216-2.

[123] M. Sofonea, A. D. Rodríguez–Aros and J. M. Viaño, A class of integro-differential variational inequalities with applications to viscoelastic contact, *Mathematical and Computer Modelling* **41** (2005), 1355–1369.

[124] D. D. Stancu, *A new class of uniform approximating polynomial operators in two and several variables*, Proceedings of the Conference on the Constructive Theory of Functions (Approximation Theory) (Budapest, 1969) pp. (Budapest: Akadémiai Kiadó) (1972) 443-455.

[125] H. Steinhaus, Sur al convergence ordinaire et la convergence asymptotique, *Colloq. Math.* **2** (1951), 73–74.

[126] O. Szász, Generalization of S. Bernsteins polynomials to the infinite interval, J. of Research of the Nat. Bur. of Standards, 45 (1950), 239-245.

[127] J.J. Telega, Topics on unilateral contact problems of elasticity and inelasticity, in J.J. Moreau and P.D. Panagiotopoulos, eds., *Nonsmooth Mechanics and Applications*, Springer-Verlag, Wien, 1988, 340–461.

[128] R. Temam and A. Miranville, *Mathematical Modeling in Continuum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[129] Yu. I. Volkov, Certain positive linear operators, *Translated from Mathematicheskie Zametki*, **23**(5), 1978, 659–669.

[130] E. V. Voronovskaja, Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des functions par les polynômes de S. Bernstein, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, **A** (1832), 79–85.

[131] Z. Walczak, Approximation of functions of two variables by some linear positive operators, *Acta. Math. Univ. Comenianae* **LXXIV**(1) (2005) 37-48.

[132] P. Wriggers, *Computational Contact Mechanics*, Wiley, Chichester, 2002.

[133] P. Wriggers and U. Nackenhorst, eds., *Analysis and Simulation of Contact Problems*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics **27**, Springer, Berlin, 2006.

[134] P. Wriggers and P.D. Panagiotopoulos, eds., *New Developments in Contact Problems*, Springer-Verlag, Wien, New York, 1999.

[135] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* I*: Fixed-point Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[136] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* III*: Variational Methods and Optimization*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[137] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* IV*: Applications to Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York, 1988.

[138] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications,* II/A*: Linear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[139] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications,* II/B*: Nonlinear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York, 1990.

[140] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications*, Springer-Verlag, New York, 1995.