Facultatea de Matematică şi Informatică
Universitatea Babeş-Bolyai
Cluj-Napoca, România

Augusta Raţiu

Condiţii de optim şi aproximarea problemelor de optimizare

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător de doctorat
Prof. Univ. Dr. Dorel Duca

Cluj-Napoca
2013

Cuprins

Introducere

Optimizarea matematică (alternativ, programarea matematică sau optimizarea) reprezintă un domeniu vast de cercetare în matematică, constând în maximizarea sau minimizarea unei funcţii obiectiv în anumite condiţii, numite restricţii. Programarea semi-infinită (PSI) este o subclasă a optimizării şi probabil, una dintre cele mai vechi ramuri ale programării matematice. Acesta conţine probleme de optimizare convexe şi nonconvexe.

În 1924, găsim prima descriere a programării semi-infinite ca şi aproximaţie Chebyshev, dar numele a fost inventat în 1962 de către Charnes, Cooper şi Kortanek, în articolele (vezi, [14], [15], [16]), despre programarea liniară semi-infinită.

Programarea semi-infinită este o problemă de optimizare caracterizată printr-un număr finit de variabile şi un număr infinit de restricţii, sau un număr infinit de variabile şi un număr finit de restricţii, de aici şi numele de semi-infinit. În ultimele decenii, acest domeniu al programării semi-infinite s-a dezvoltat foarte repede existând atât rezultate teoretice cât şi practice. Menţionăm ca o introducere în (PSI), articolul scris de Hettich şi Kortanek [35], pentru optimizarea liniară semi-infinită şi algoritmi (vezi, [31], [61]), pentru metode numerice [36] iar pentru programarea semi-infinită standard şi generalizată (vezi, [33], [79]). În 1973, Kortanek şi Gustafson, dezvoltă primele metode numerice pentru (PSI) în [34]. Alţi autori care au studiat aplicaţii ale problemelor de aproximare şi metode numerice au fost: Hettich şi Zencke [36], Fiacco şi Kortanek [27], Tichatschke [81], Glashoff şi Gustafson [30].

Acest domeniu al programării semi-infinite are multe aplicaţii în diferite domenii ale matematicii, ingineriei şi economiei, cum ar fi: controlul poluării aerului [83] utilizând metode de discretizare (vezi, [37], [38], [73]), aproximarea Chebyshev inversă [40], problema portofoliului [51], controlul minim de timp (vezi, [47], [49]), statistică [19], sistem şi control [31], identificarea modelelor de regresie, optimizarea robustă (vezi, [5], [82]), probleme de transport, mulţimi fuzzy, jocuri de cooperare (vezi, [35], [62]), taierea pietrelor preţioase [48].

Noţiunea de dualitate în programarea semi-infinită îşi are rădăcinile în teoria aproximării uniforme ale funcţiilor, în teoria clasică a momentelor şi în teoria sistemelor de inegalităţi liniare. Există o literatură vastă în abordarea dualităţii problemelor convexe semi-infinite. Putem menţiona aici: o abordare bazată pe dualitatea conjugată [77], problema duală Mond-Weir pentru problemele de programare neliniară semi-infintă folosind conceptele de tip generalizat semilocal I a funcţiilor preinvexe [43], multiplicatorii Lagrange generalizaţi [76] sau alte abordări (vezi, [3], [4], [7], [8], [10], [28]).

Alte rezultate în abordarea problemelor de optimizare semi-infinită se gasesc în: [13], [21], [29], [41].

Această teză conţine cinci capitole, fiind prezentate pe scurt în cele ce urmează.

Capitolul 1, intitulat Noţiuni preliminarii şi rezultate, conţin câteva definiţii şi rezultate din analiza convexă şi optimizarea vectorială.

Capitolul 2, este dedicat unei probleme de optimizare semi-infinită convex-concavă, a cărei funcţie obiectiv este convexă în timp ce restricţia este convex-concavă. În acest capitol, pentru a rezolva problema de optimizare, vom ataşăm o problemă duală care ne va furniza informaţii despre soluţia optimă a problemei originale. Considerăm patru probleme duale pentru problema de optimizare semi-infinită şi stabilim relaţii de dualitate între acestea. În cazul dualităţii slabe, valoarea optimă a problemei originale este mai mare sau egală decât valorile optime ale problemelor duale considerate. Dualitatea tare are loc atunci cand valoarea optimă a problemei originale este egală cu valoarea optimă a problemei duale, aceasta având loc în diferite ipoteze de convexitate şi condiţii de regularitate deseori numite restricţii.

În Secţiunea 2.1, introducem o nouă duală numită (D_1). Stabilim relaţii între această duală şi celelalte trei probleme duale care sunt cunoscute în literatură. Dualitatea slabă este de asemenea stabilită. Pentru a studia dualitatea tare, problemele duale (D_2), (D_3) sunt reformulate şi obţinem trei duale $(\widetilde{D_2})$, $(\widetilde{D_3})$, $(\widetilde{D_4})$.

În Secţiunea 2.2, vom prezenta câteva rezultate numerice pentru partea teoretică, folosind şi programul Matlab pentru a găsi valoarea optimă a unei probleme.

Contribuţiile originale ale autorului sunt prezentate dupa cum urmează: Propoziţii: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.5, 2.1.6, 2.1.9, 2.1.10, Exemple: 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3. Observaţii: 2.1.7, 2.1.8.

Rezultatele acestui domeniu de cercetare sunt incluse în următorul articol: [71].

În **Capitolul 3**, considerăm o problemă de optimizare semi-infinită, căreia îi ataşăm problema aproximantă-η de optimizare semi-infinită obţinând astfel informaţii despre soluţiile optime ale problemei originale.

Ideea de η-aproximare a unei probleme de programare matematică nonlineară a apărut în articolele (vezi, [1], [22]), în cazul în care mulţimile indicilor T şi S sunt finite. Această metodă a fost construită de către Antczak şi a fost numită metoda de aproximare-η. Noutatea rezultatelor obţinute în acest capitol constă în faptul că mulţimile indicilor T şi S nu trebuie să fie compacte.

În Secţiunea 3.1, construim pentru o problemă de optimizare semi-infinită, trei probleme aproximante-η de ordinul întâi. Apoi stabilim conexiuni între soluţiile admisibile ale problemei originale şi soluţiile admisibile ale problemei aproximante-$\eta - (0,1)$ şi soluţiile admisibile ale problemei originale şi soluţiile admisibile ale problemei aproximante-$\eta - (1,1)$. Câteva exemple ilustrează noţiunile teoretice prezentate. În următoarele trei subsecţiuni, conexiunile studiate se referă la soluţiile optime ale problemelor aproximante-$\eta - (1,0)$, $\eta - (0,1)$, $\eta - (1,1)$ şi soluţiile optime ale problemei originale. Noi rezultate şi exemple sunt prezentate pentru a stabili condiţiile când o valoare optimă a problemei originale este " $\leq$ " sau " $\geq$ " decât valoarea optimă a Problemei $(P_{1,1})$. În ultima parte a acestei secţiuni, sunt formulate conexiunile între soluţiile optime ale problemei aproximante-η de ordinul întâi.

În Secţiunea 3.2, considerăm aceeaşi problemă de optimizare şi construim cinci probleme aproximante-η de ordinul doi. Alte noi conexiuni între: soluţiile admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul doi şi soluţiile admisibile ale problemei originale, soluţiile admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul întâi şi soluţiile admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul doi, sunt prezentate. Unele teoreme asigură, în ipoteze diferite că orice soluţie optimă a problemei originale de optimizare este soluţie optimă pentru problemele aproximante-η şi vice-versa.

Vom studia, apoi conexiunile între soluţiile optime ale problemelor aproximante-η de ordinul doi. Ultima subsecţiune ne va furniza conexiunile între soluţiile optime ale problemelor aproximante-η de ordinul întâi şi ordinul doi.

Contribuţiile originale ale autorului sunt prezentate dupa cum urmează: Teoreme: 3.1.1, 3.1.3, 3.1.6, 3.1.7, 3.1.8, 3.1.9, 3.1.10, 3.1.11, 3.1.12, 3.1.14, 3.1.17, 3.1.18, 3.1.19, 3.1.20, 3.1.21, 3.1.22, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.6, 3.2.7, 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10, 3.2.11, 3.2.12, 3.2.13, 3.2.14, 3.2.15, 3.2.16, 3.2.17, 3.2.18, 3.2.19, 3.2.20, 3.2.21, 3.2.22, 3.2.23, 3.2.24, 3.2.25, 3.2.26, 3.2.27, 3.2.28, 3.2.29, 3.2.30, 3.2.31, 3.2.32, 3.2.33, 3.2.34, 3.2.35, 3.2.36, 3.2.37, 3.2.38, 3.2.39, 3.2.40, 3.2.41, 3.2.42, 3.2.43, 3.2.44, 3.2.45, 3.2.46, 3.2.47, 3.2.48, 3.2.49, 3.2.50, 3.2.51, 3.2.52, 3.2.53, 3.2.54, 3.2.55, 3.2.56, 3.2.57, 3.2.58, 3.2.59, 3.2.60, 3.2.61, 3.2.62, 3.2.63, 3.2.64. Exemple: 3.1.2, 3.1.4, 3.1.5, 3.1.13, 3.1.15, 3.1.16.

Rezultatele acestui domeniu de cercetare sunt incluse în următoarele articole: [65], [66], [67], [68], [69].

Capitolul 4, conţine studiul unei probleme de optimizare vectorială.

În Section 4.1, vom studia conexiunile între soluţia eficientă a unei problemei de optimizare vectorială şi soluţia eficientă a problemei aproximante-η de ordinul întâi.

Secţiunea 4.2, este dedicată aplicaţiilor în rezolvarea unei probleme de optimizare vectorială. Propunem două metode: metoda ponderilor şi metoda restricţiilor. Dupa un scurt rezumat cu privire la noţiuni, condiţii ca un punct să fie soluţie eficientă şi algoritmii pentru cele două metode, vom da câteva exemple numerice. Am arătat că mulţimea valorilor minime a unei probleme nu este în general o mulţime cu un singur element şi că putem avea de asemenea şi o submulţime a soluţiilor minime sau o parte reprezentativă a ei. Pentru fiecare exemplu, am construit un tabel cu rezultate şi o reprezentare grafică, folosind programul Matlab şi programul RStudio .

Contribuţiile originale ale autorului sunt prezentate dupa cum urmează: Teoreme: 4.1.2, 4.1.3, 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7. Observaţia: 4.1.8. Exemple: 4.2.3, 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6, 4.2.7, 4.2.8, 4.2.10, 4.2.11, 4.2.12, 4.2.13, 4.2.14, 4.2.15.

Rezultatele acestui domeniu de cercetare sunt incluse în capitolul [53] şi articolul [70].

Capitolul 5, este dedicat rezolvării problemelor de optimizare folosind inegalitatea lui Jensen, inegalitatea lui Radon, inegalitatea lui Hölder, inegalitatea Liapunov şi unele margini pentru indicatori din statistică. Acest capitol este împarţit în două secţiuni.

În Secţiunea 5.1, datorită rezultatelor teoretice recente din teoria inegalităţilor şi existenţa unui numar mare de aplicaţii ale acestora, vom rezolva diferite probleme de optimizare folosind inegalităţi.

În Secţiunea 5.2, vom rezolva câteva probleme de optimizare pentru următoarele margini folosite în statistică: dispersia (variaţia), deviaţia standard şi coeficientul de variaţie.

Contribuţiile originale ale autorului sunt prezentate dupa cum urmează: Teoreme: 5.1.3, 5.1.4, 5.1.9, 5.1.10, 5.1.11, 5.1.13, 5.1.14, 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3. Observaţia: 5.2.4.

Rezultatele acestui domeniu de cercetare sunt incluse în următoarele articole: [57], [72].

Cuvinte-cheie

probleme de optimizare semi-infinită, conjugata funcţiei, soluţie eficientă, problema aproximantă-η de optimizare semi-infinită, funcţia invexă, soluţie optimă, metoda ponderilor, metoda restricţiilor, funcţia concav-convexă, problema de optimizare vectorială, inegalitatea lui Radon, inegalitatea lui Jensen, inegalitatea lui Hölder, inegalitatea Liapunov, variaţia, deviaţia standard, coeficientul de variaţie.

Mulţumiri

Mulţumiri deosebite profesorului meu îndrumător, Prof. Univ. Dr. Dorel Duca, pentru sprijinul continuu, încurajarea şi orientarea în timpul studiilor mele de doctorat.

Mulţumiri Prof. Dinh The Luc, pentru ajutorul, discuţiile şi sprijinul acordat în timpul stagiului de cercetare de la Université D'Avignon et des Pays de Vaucluse, Avignon, Franţa. În special pentru ajutorul în pregătirea Capitolului 2.

Mulţumiri Prof. Michel Volle, de la Université D'Avignon et des Pays de Vaucluse, Avignon, Franţa, pentru sugestiile şi discuţiile în realizarea Capitolului 2.

Aş dori să mulţumesc domnului Lect. Univ. Dr. Nicuşor Minculete, pentru discuţiile şi ajutorul în pregătirea articolelor.

Mulţumiri membrilor comisiei de îndrumare, Prof. Univ. Dr. Liana Lupşa, Conf. Univ. Dr. Nicolae Popovici, Conf. Univ. Dr. Adrian Diaconu pentru sprijinul şi sugestiile utile .

De asemenea, mulţumiri pentru sprijinul financiar acordat de către Institutul de Studii Doctorale (proiectul POSDRU/107/1.5/S/76841).

Doresc sa le mulţumesc tuturor colegilor mei de la Université D'Avignon et des Pays de Vaucluse, Franţa, şi celor de la Facultatea de Matematică şi Informatică, Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca pentru ajutorul acordat.

Nu în ultimul rând, aş dori să mulţumesc familiei mele pentru încurajări, ajutor şi înţelegere.

Capitolul 1

Noţiuni preliminarii şi rezultate

În acest capitol vom prezenta câteva concepte de bază şi notaţii convenţionale din analiza convexă şi optimizarea vectorială, care vor fi utilizate în această lucrare. Aceste noţiuni pot fi găsite în următoarele publicaţii: [11], [23], [39], [44], [54], [58], [74].

1.1 Concepte de bază

În această secţiune vom reaminti noţiuni care apar în analiza convexă sau în teoria optimizării vectoriale (funcţie invexă, soluţie eficientă).

1.2 Rezultate

În această parte a capitolului sunt prezentate câteva condiţii necesare şi suficiente pentru ca un punct să fie soluţia unei probleme de optimizare semi-infinită.

Capitolul 2

Problema de optimizare semi-infinită convex-concavă

Scopul acestui capitol este de a studia problemele duale ale unei probleme de optimizare semi-infinită convex-concavă. Pentru aceasta considerăm patru probleme duale pentru o problemă de optimizare semi-infinită şi vom stabili relaţii între valorile optime ale acestor probleme duale. Mai mult decât atât, în anumite condiţii de suficienţă, vom studia dualitatea tare între problema primală şi problemele duale, respectiv dualitatea slabă.

Există o literatură vastă pe partea de dualitate şi condiţii de optim în optimizarea convexă (vezi, [31], [35], [51]). În [78] Shapiro şi în [26] Fang, Li, Ng, au dat rezultate pe dualitatea Lagrange în programarea convexă semi-infinită. Mishra, Jaiswal şi Thi Hoai An au formulat în [59] pentru o problemă nenetedă dualele Wolfe şi Mond-Weir stabilind dualitatea slabă, tare şi strict inversă.

Problema de optimizare a fost studiată sub forme diferite de restricţii impuse funcţiei g_t, $(t \in T)$. De exemplu: funcţiile f (funcţia obiectiv), g_t sunt semicontinue inferior în articolele (vezi, [20], [32]), sau continue în articolul [9]. În cazul nostru funcţia obiectiv f este convexă, în timp ce restricţia g_t, $(t \in T)$ este convex-concavă.

Acest capitol este format din doua secţiuni. În prima secţiune considerăm patru probleme duale, unde duala (D_1) este nou construită, iar celelalte sunt cunoscute în literatura de specialitate. Vom demonstra dualitatea slabă şi stabilim relaţiile între valorile optime ale problemelor duale considerate. Pentru a dovedi dualitatea tare, rescriem dualele (D_2) şi (D_3), obţinând trei probleme duale. Pentru dualitatea tare vom aplica teorema lui Sion (vezi, [80]).

În a doua secţiune vom considera trei exemple numerice pentru a justifica partea teoretică prezentată în prima secţiune.

2.1 Rezultate teoretice

În aceasta secţiune, considerăm C o submulţime nevidă a spaţiului topologic local convex Hausdorff X, T o mulţime nevidă a indicilor (posibil infinită) şi f, $g_t : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $(t \in T)$ funcţii proprii convexe.

Considerăm problema de optimizare

$$\begin{array}{ll} \inf & f(x) \\ \text{în condiţiile} & x \in C \\ & g_t(x) \leqq 0, \ (t \in T). \end{array} \tag{P}$$

Ataşăm Problemei (P), următoarele patru probleme duale:
Prima duala este

$$\sup\{\inf\{f(x) + \sum_{t \in \text{supp}(\lambda)} \lambda_t g_t(x) : x \in C\} : \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}\}. \tag{D}$$

A doua duală

$$\sup\{\inf\{f_C(x) + \lambda g_t(x) : x \in X\} : \lambda \in \mathbb{R}_+, \ t \in T\}, \tag{D$_1$}$$

unde $f_C : X \to \overline{\mathbb{R}}$ este definită astfel

$$f_C(x) := f(x) + \delta_C(x), \text{ for all } x \in X.$$

A treia duală este

$$\sup\{-(f_C^*(-x^*) + (\lambda g_t)^*(x^*)) : \lambda \in \mathbb{R}_+, \ x^* \in X^*, \ t \in T\}. \tag{D$_2$}$$

A patra duală este

$$\sup\{-(f^*(-x^* - u^*) + \delta_C^*(u^*) + (\lambda g_t)^*(x^*)) : \lambda \in \mathbb{R}_+, \ x^* \in X^*, \ u^* \in X^*, \ t \in T\}. \tag{D$_3$}$$

Propoziţia 2.1.1 (**A. Raţiu** [71]) Următoarea inegalitate

$$\inf(P) \geqq \max\{\sup(D), \ \sup(D_1), \ \sup(D_2), \ \sup(D_3)\},$$

are loc.

În cele ce urmeză, sunt prezentate relaţiile între valorile optime ale problemelor duale introduse anterior.

Propoziţia 2.1.2 (**A. Raţiu** [71]) Următoarele inegalităţi au loc:
(i) $\sup(D_1) \geqq \max\{\sup(D_2), \ \sup(D_3)\}$,
(ii) $\sup(D_2) \geqq \sup(D_3)$.

Pentru a demonstra dualitatea tare, rescriem dualele (D_2) şi (D_3) şi obţinem următoarele probleme duale:

$$\sup\{-(f_C + \lambda g_t)^*(0) : \lambda \in \mathbb{R}_+, \ t \in T\}, \tag{$\widetilde{D_2}$}$$

$$\sup\{-(f_C^* \square (\lambda g_t)^*)(0) : \lambda \in \mathbb{R}_+, \ t \in T\}, \tag{$\widetilde{D_3}$}$$

$$\sup\{-(f^* \square \delta_C^* \square (\lambda g_t)^*)(0) : \lambda \in \mathbb{R}_+, \ t \in T\}. \tag{$\widetilde{D_4}$}$$

Propoziţia 2.1.5 (**A. Raţiu** [71]) Următoarea inegalitate

$$\inf(P) \geqq \max\{\sup(D),\ \sup(D_1),\ \sup(\widetilde{D_2})\},$$

are loc.

Propoziţia 2.1.6 (**A. Raţiu** [71]) Dacă $\square$ este exact, atunci următoarea inegalitate

$$\inf(P) \geqq \max\{\sup(\widetilde{D_3}),\ \sup(\widetilde{D_4})\},$$

are loc.

Observaţia 2.1.7 (**A. Raţiu** [71]) Duala $(\widetilde{D_4})$ poate fi considerată ca un alt mod de scriere a dualei $(\widetilde{D_3})$.

Observaţia 2.1.8 (**A. Raţiu** [71]) Dacă $\square$ este exact atunci următoarea inegalitate

$$\inf(P) \geqq \max\{\sup(D),\ \sup(D_1),\ \sup(\widetilde{D_2}),\ \sup(\widetilde{D_3}),\ \sup(\widetilde{D_4})\},$$

are loc.

Propoziţia 2.1.9 (**A. Raţiu** [71]) Dacă $\square$ este exact atunci următoarea relaţie

$$\sup(D_1) = \sup(\widetilde{D_2}) = \sup(\widetilde{D_3}) = \sup(\widetilde{D_4}),$$

are loc.

Propoziţia 2.1.10 (**A. Raţiu** [71]) Dacă mulţimea T este convexă, compactă, iar funcţiile f, $g_t : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $(t \in T)$ sunt convexe, continue şi $g_t(x)$ sunt concave în t pentru fiecare punct fixat $x \in X$, atunci avem

$$\inf(P) = \max\{\sup(D),\ \sup(D_1),\ \sup(\widetilde{D_2}),\ \sup(\widetilde{D_3}),\ \sup(\widetilde{D_4})\}.$$

2.2 Rezultate numerice

Pentru a demonstra relaţiile

$$\inf(P) \geqq \sup(D),$$

şi

$$\inf(P) \geqq \sup(D_1) \geqq \sup(D_2) \geqq \sup(D_3),$$

sunt prezentate câteva exemple. Considerăm funcţia g_t convexă în x şi concavă în t iar T este o mulţime convexă compactă. Pentru a determina valoarea optimă a Problemei (P) şi a problemelor duale, vom folosi funcţii definite în Matlab, pornindu-se de la o estimare iniţială.

Capitolul 3

Probleme de optimizare aproximante-η semi-infinite

În acest capitol considerăm o problemă de optimizare semi-infinită (P) cu restricţii sub formă de egalităţi şi inegalităţi. O abordare pentru a obţine condiţii de optim suficiente pentru o problemă de optimizare şi dualele ei a fost introdusă de către Antczak în lucrarea [1]. El a construit o problemă aproximantă-η echivalentă cu problema originală şi a studiat legăturile dintre soluţiile optime a celor două probleme. Alţi autori care au utilizat această metodă de aproximare sunt: Duca and Duca [22], Boncea and Duca [6], Cioban and Duca [17], Pop and Duca [63].

Pentru a determina natura Problemei (P) avem următoarele cazuri: dacă mulţimile de indici T şi S sunt finite, atunci Problem (P) este o problemă clasică de optimizare iar dacă mulţimile indicilor T şi\ sau S sunt infinite atunci vom avea o problemă de optimizare semi-infinită.

Pentru a obţine soluţiile optime ale unei probleme de optimizare semi-infinită, vom ataşa probleme de optimizare aproximante-η de ordinul întâi şi doi. Vom analiza relaţiile între Problema (P) şi opt probleme aproximante. Sub diferite ipoteze ale funcţiilor obiectiv şi ale restricţiilor vom arăta că orice soluţie optimă a Problemei (P) este o soluţie optimă pentru problemele aproximante şi vice-versa. Apoi vom studia conexiunile între soluţiile optime ale problemei de optimizare originale şi soluţiile optime ale problemelor aproximante-η de ordinul întâi şi doi. Sunt stabilite conexiuni între mulţimea soluţiilor admisibile ale Problemei (P) şi mulţimea soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul întâi şi doi. În ultima secţiune a acestui capitol vom studia legăturile între soluţiile optime ale problemelor aproximante-η semi-infinite.

3.1 Problemele de optimizare aproximante-η semi-infinite de ordinul întâi

În această secţiune considerăm X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, T şi S mulţimile indicilor, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ o funcţie şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ diferenţiabile în x^0.

Considerăm problema de optimizare

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{în condiţiile} & \\ & x \in X \\ & g_t(x) \leqq 0,\ (t \in T) \\ & h_s(x) = 0,\ (s \in S). \end{array} \tag{P}$$

Fie

$$\mathcal{F}(P) := \{x \in X :\ g_t(x) \leqq 0,\ \ (t \in T)\,,\ h_s(x) = 0,\ \ (s \in S)\}\,,$$

mulţimea soluţiilor admisibile pentru Problema (P) şi

$$v\,(P) := \inf\{f(x) : x \in \mathcal{F}\,(P)\},$$

este valoarea optimă pentru Problema (P).

Un mod de a rezolva Problema (P) este să îi ataşăm o alta problemă de optimizare, a cărei soluţii ne va da informaţii despre soluţiile optime ale problemei iniţiale (P).

Ataşăm Problemei (P), problemele $(P_{j,k})$, $((j,k) \in \{(1,0),(0,1),(1,1)\})$,

$$\begin{array}{ll} \min & F^{\langle j\rangle}\,(x) \\ \text{în condiţiile} & \\ & x \in X \\ & G_t^{\langle k\rangle}\,(x) \leqq 0,\ (t \in T) \\ & H_s^{\langle k\rangle}\,(x) = 0,\ (s \in S), \end{array} \tag{P$_{j,k}$}$$

numită problema de optimizare aproxiamantă-$\eta-(j,k)$ semi-infinită, unde $F^{\langle 1\rangle}, G_t^{\langle 1\rangle}, H_s^{\langle 1\rangle} : X \to \mathbb{R}$ $(t \in T,\ s \in S)$ sunt definite astfel:

$$F^{\langle 1\rangle}\,(x) := f(x^0) + \left[\nabla f(x^0)\right]\left(\eta(x,x^0)\right),$$

$$G_t^{\langle 1\rangle}\,(x) := g_t(x^0) + \left[\nabla g_t(x^0)\right]\left(\eta(x,x^0)\right),\ \ (t \in T)\,,$$

$$H_s^{\langle 1\rangle}\,(x) := h_s(x^0) + \left[\nabla h_s(x^0)\right]\left(\eta(x,x^0)\right),\ \ (s \in S)\,,$$

pentru toti $x \in X$, şi $F^{\langle 0\rangle} = f$, $G_t^{\langle 0\rangle} = g_t$, $H_s^{\langle 0\rangle} = h_s$, $(t \in T,\ s \in S)$.

În cele ce urmează vom nota cu:

$$\mathcal{F}_0 := \left\{x \in X : G_t^{\langle 0\rangle}(x) \leqq 0,\ \ (t \in T)\,,\ H_s^{\langle 0\rangle}(x) = 0,\ \ (s \in S)\right\},$$

şi

$$\mathcal{F}_1 := \left\{x \in X :\ G_t^{\langle 1\rangle}\,(x) \leqq 0,\ (t \in T),\ H_s^{\langle 1\rangle}\,(x) = 0,\ (s \in S)\right\}.$$

Observăm că dacă $\mathcal{F}(P)$ este mulţimea soluţiilor admisibile pentru Problema (P), atunci $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(P) = \mathcal{F}(P_{1,0})$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(P_{0,1}) = \mathcal{F}(P_{1,1})$.

3.1.1 Conexiuni între mulţimile soluţiilor admisibile ale Problemei (P) şi problemele aproximante-η de ordinul întâi

În cele ce urmează două teoreme stabilesc legăturile între mulţimile soluţiilor admisibile ale Problemei (P) şi problemele $(P_{0,1})$, $(P_{1,1})$.

Teorema 3.1.1 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

atunci

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1.$$

Următorul exemplu ne arată că incluziunea $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1$ poate fi strictă.

Exemplul 3.1.2 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [67]) Fie $g_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(k \in \mathbb{N})$, funcţia definită prin

$$g_k(x) = \begin{cases} x_1^2 - x_2, & k = 1 \\ x_1 + x_2 - 2, & k = 2 \\ (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 - 17 - \frac{1}{k}, & k \in \mathbb{N}, k \geqq 3, \end{cases}$$

Observăm că

$$\mathcal{F}_0 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2 \leqq 0,\ x_1 + x_2 \leqq 2, (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 - 17 \leqq 0\}.$$

Pentru punctul $x^0 = (-2, 4)$, funcţia $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin $\eta(x, y) = x - y$, pentru toţi $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, avem

$$G_1^{\langle 1 \rangle}(x) := g_1(x^0) + \left[\nabla g_1(x^0)\right](\eta(x, x^0)) = -4x_1 - x_2 - 4,$$

$$G_2^{\langle 1 \rangle}(x) := g_2(x^0) + \left[\nabla g_2(x^0)\right](\eta(x, x^0)) = x_1 + x_2 - 2,$$

$$G_k^{\langle 1 \rangle}(x) := g_k(x^0) + \left[\nabla g_k(x^0)\right](\eta(x, x^0)) = -8x_1 - 2x_2 - 8 - \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}, k \geqq 3,$$

pentru toţi $x \in X$.

Apoi,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 = \ & \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -4x_1 - x_2 \leqq 4, \\ & x_1 + x_2 \leqq 2,\ -8x_1 - 2x_2 \leqq 8 + \tfrac{1}{k}; k \in \mathbb{N}, k \geqq 3\}, \end{aligned}$$

prin urmare,

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1,$$

şi

$$\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_0,$$

deoarece,

$$(0, 0) \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_0.$$

Teorema 3.1.3 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Dacă:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

atunci

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_0.$$

Următoarele două exemple ne arată că incluziunea $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_0$ poate fi strictă.

Exemplul 3.1.4 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [65]) Fie $g_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(k \in \mathbb{N})$ funcţia definită prin

$$g_k(x) = \begin{cases} -x_1, & k = 1 \\ -x_2, & k = 2 \\ x_1 x_2 - \frac{1}{k}, & k \in \mathbb{N}, k \geqq 3. \end{cases}$$

Observăm că

$$\mathcal{F}_0 = (\{0\} \times [0, +\infty[) \cup ([0, +\infty[\times \{0\}).$$

Pentru punctul $x^0 = (1, 0)$, funcţia $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin $\eta(x, y) = x - y$, pentru toţi $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, avem

$$G_1^{\langle 1 \rangle}(x) := g_1(x^0) + \left[\nabla g_1(x^0)\right] \left(\eta(x, x^0)\right) = -x_1,$$

$$G_2^{\langle 1 \rangle}(x) := g_2(x^0) + \left[\nabla g_2(x^0)\right] \left(\eta(x, x^0)\right) = -x_2,$$

$$G_k^{\langle 1 \rangle}(x) := g_k(x^0) + \left[\nabla g_k(x^0)\right] \left(\eta(x, x^0)\right) = x_2 - \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N}, k \geqq 3,$$

pentru toţi $x \in X$.

Apoi,

$$\mathcal{F}_1 = [0, +\infty[\times \{0\}.$$

Observăm că

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_0.$$

Mai mult,

$$\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_0,$$

deoarece $(0, 1) \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathcal{F}_1$.

Exemplul 3.1.5 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [65]) Fie $g_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(k \in \mathbb{N})$, funcţia definită prin

$$g_k(x) = \begin{cases} -x_2, & k = 1 \\ -(x_1 - 2)^2 - (x_2 - 1)^2 + 1, & k = 2 \\ -x_1 - x_2 + \frac{k+1}{k+2}, & k \in \mathbb{N}, k \geqq 3 \end{cases}$$

Pentru punctul $x^0 = (1, 0)$, funcţia $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin $\eta(x, y) = x - y$, pentru toţi $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, avem

$$G_1^{\langle 1 \rangle}(x) := g_1(x^0) + \left[\nabla g_1(x^0)\right] \left(\eta(x, x^0)\right) = -x_2,$$

$$G_2^{\langle 1 \rangle}(x) := g_2(x^0) + \left[\nabla g_2(x^0)\right] \left(\eta(x, x^0)\right) = 2x_1 + 2x_2 - 3,$$

$$G_k^{\langle 1\rangle}(x) := g_k(x^0) + \left[\nabla g_k(x^0)\right]\left(\eta(x,x^0)\right) = -x_1 - x_2 + \frac{k+1}{k+2},\ k \in \mathbb{N}, k \geqq 3,$$

pentru toţi $x \in X$.

Avem

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_0,$$

şi

$$\mathcal{F}_1 \neq \mathcal{F}_0,$$

deoarece $(2,2) \in \mathcal{F}_0 \setminus \mathcal{F}_1$.

3.1.2 Problema aproximantă $(P_{1,0})$

Scopul acestei secţiuni este de a stabili legături între soluţiile optime ale Problemei (P) şi soluţiile optime ale problemei aproximante $(P_{1,0})$.

Următoarea teoremă ne arată că, în anumite ipoteze, orice soluţie optimă pentru Problema $(P_{1,0})$ este soluţie optimă pentru Problema (P).

Teorema 3.1.6 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi pseudoinvexă în x^0 în raport cu η,

(b) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,0})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P).

Următoarea teoremă ne spune când o soluţie optimă pentru Problema (P) este soluţie optimă pentru problema aproximantă $(P_{1,0})$.

Teorema 3.1.7 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi cvasiincavă în x^0 în raport cu η,

(b) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P), atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,0})$.

3.1.3 Problema aproximantă $(P_{0,1})$

Scopul acestei secţiuni este de a stabili legături între soluţiile optime ale Problemei (P) şi soluţiile optime ale problemei aproximante $(P_{0,1})$.

Următoarea teoremă arată când o soluţie optimă pentru Problema $(P_{0,1})$ este soluţie optimă pentru Problema (P).

Teorema 3.1.8 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(c) $x^0 \in \mathcal{F}(P)$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P).

În cele ce urmează următoarea teoremă ne arată când soluţia optimă pentru Problema (P) este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$.

Teorema 3.1.9 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(c) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{0,1})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P), atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$.

3.1.4 Problema aproximantă $(P_{1,1})$

În această secţiune se vor stabili legături între soluţia optimă a Problemei (P) şi soluţia optimă a problemei aproximante $(P_{1,1})$.

Următoarea teoremă arată când soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,1})$ este soluţie optimă pentru Problema (P).

Teorema 3.1.10 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi pseudoinvexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P)$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P).

În cele ce urmează următoarea teoremă ne arată când o soluţie optimă pentru Problema (P) este soluţie optimă pentru Problema $(P_{1,1})$.

Teorema 3.1.11 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi cvasiincavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{1,1})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P), atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,1})$.

Următoarea teoremă, ne furnizează condiţii suficiente pentru ca valoarea optimă a Problemei $(P_{1,1})$ să fie mai mică sau egală decât valoarea optimă a Problemei (P).

Teorema 3.1.12 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [67]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Dacă:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

atunci

$$\inf(P_{1,1}) \leqq \inf(P).$$

Următorul exemplu ilustrează relaţia $\inf(P_{1,1}) < \inf(P)$.

Exemplul 3.1.13 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [67]) Considerăm problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) := (x_1+3)^2 + x_2^2 \\ \text{în condiţiile} & \\ & x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ & g_1(x) := x_1^2 - x_2 \leqq 0 \\ & g_2(x) = x_1 + x_2 - 2 \leqq 0 \\ & g_k(x) = (x_1-2)^2 + (x_2-5)^2 - 17 - \frac{1}{k} \leqq 0,\ k \in \mathbb{N}, k \geqq 3, \end{array} \qquad (\widetilde{P})$$

şi funcţia $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definită prin $\eta(x,y) = x - y$, pentru toţi $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Pentru punctul $x^0 = (-2, 4)$, avem

$$F^{\langle 1 \rangle}(x) := f(x^0) + \left[\nabla f(x^0)\right]\left(\eta(x,x^0)\right) = 2x_1 + 8x_2 - 11,$$

pentru toţi $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Atunci, problema de optimizare aproximantă-$\eta-$ este

$$\begin{array}{ll} \min & 2x_1 + 8x_2 - 11 \\ \text{în condiţiile} & \\ & x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ & -4x_1 - x_2 \leqq 4 \\ & x_1 + x_2 \leqq 2 \\ & -8x_1 - 2x_2 \leqq 8 + \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N},\ k \geqq 3, \end{array} \qquad (\widetilde{P_{1,1}})$$

şi deci

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1.$$

Mai mult,

$$\inf(\widetilde{P_{1,1}}) = -\infty < 17 = \inf(\widetilde{P}).$$

Următoarea teoremă, ne furnizează condiţii suficiente pentru ca valoarea optimă a Problemei $(P_{1,1})$ să fie mai mare sau egală decât valoarea optimă a Problemei (P).

Teorema 3.1.14 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [65]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Dacă:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η, atunci

$$\inf(P_{1,1}) \geqq \inf(P).$$

Următoarele două exemple ne arată că relaţia $v(P) = v(P_{1,1})$ poate avea loc.

Exemplul 3.1.15 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [65]) Cosiderăm problema

$$\begin{array}{ll} \min & f\left(x\right) := -\left(x_1 - 9\right)^2 - \left(x_2 - 10\right)^2 \\ \text{în condiţiile} & \\ & x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ & g_1\left(x\right) := -x_1 \leqq 0 \\ & g_2\left(x\right) := -x_2 \leqq 0 \\ & g_3(x) := -\left(x_1 - 2\right)^2 - \left(x_2 - 1\right)^2 + 1 \leqq 0 \\ & g_4\left(x\right) := x_1 + x_2 - 5 \leqq 0 \\ & g_k\left(x\right) := -x_1 - x_2 + \frac{k+1}{k+2} \leqq 0,\ k \in \mathbb{N}, k \geqq 5. \end{array} \qquad (\widehat{P})$$

Pentru punctul $x^0 = (1, 0)$ funcţia $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definită prin $\eta(x, y) = x - y$, pentru toţi $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, avem

$$F^{\langle 1 \rangle}(x) := f(x^0) + \left[\nabla f(x^0)\right] \left(\eta(x, x^0)\right) = 16x_1 + 20x_2 - 180,$$

pentru toţi $x \in \mathbb{R}^2$.

Atunci, problema de optimizare aproximantă-η este

$$\begin{array}{ll} \min & 16x_1 + 20x_2 - 180 \\ \text{în condiţiile} & \\ & x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ & -x_1 \leqq 0 \\ & -x_2 \leqq 0 \\ & 2x_1 + 2x_2 - 3 \leqq 0 \\ & x_1 + x_2 - 5 \leqq 0 \\ & -x_1 - x_2 + \frac{k+1}{k+2} \leqq 0,\ k \in \mathbb{N},\ k \geqq 5. \end{array} \qquad (\widehat{P_{1,1}})$$

Avem

$$v(\widehat{P}) = v(\widehat{P_{1,1}}).$$

Exemplul 3.1.16 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [67]) Considerăm problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) := (x_1 + 6)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \text{în condiţiile} & \\ & x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ & g_1(x) := x_1^2 - x_2 \leqq 0 \\ & g_2(x) = x_1 + x_2 - 2 \leqq 0 \\ & g_k(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 5)^2 - 17 - \frac{1}{k} \leqq 0,\ k \in \mathbb{N}, k \geqq 3, \end{array} \qquad (\widehat{P})$$

şi funcţia $\eta : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definită prin $\eta(x, y) = x - y$, pentru toţi $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

Pentru punctul $x^0 = (-2, 4)$, avem

$$F^{\langle 1\rangle}(x) := f(x^0) + \left[\nabla f(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right) = 8x_1 - 2x_2 + 41,$$

pentru toţi $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Atunci, problema de optimizare aproximantă-η este

$$\begin{array}{ll} \min & 8x_1 - 2x_2 + 41 \\ \text{în condiţiile} & \\ & x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ & -4x_1 - x_2 \leqq 4 \\ & x_1 + x_2 \leqq 2 \\ & -8x_1 - 2x_2 \leqq 8 + \frac{1}{k},\ k \in \mathbb{N},\ k \geqq 3. \end{array} \qquad (\widehat{P_{1,1}})$$

şi deci

$$v(\widehat{P}) = 17 = v(\widehat{P_{1,1}}).$$

3.1.5 Conexiuni între soluţiile optime ale problemelor $(P_{1,0})$, $(P_{0,1})$ şi $(P_{1,1})$

În această secţiune se vor stabili conexiuni între soluţiile optime ale problemelor de optimizare aproximante-η semi-infinite de ordinul întâi.

Următoarea teoremă ne arată că în anumite ipoteze, soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$ este soluţie optimă pentru Problema $(P_{1,1})$.

Teorema 3.1.17 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi cvasiincavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0,

(d) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,1})$.

Teorema 3.1.18 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi pseudoinvexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0,

(d) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$.

Teorema 3.1.19 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{1,0})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,0})$.

Următorul rezultat ne arată când soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,0})$, este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,1})$.

Teorema 3.1.20 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η.

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{1,1})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,0})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,1})$.

Teorema 3.1.21 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi pseudoinvexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{0,1})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,0})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$.

Teorema 3.1.22 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [66]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi cvasiincavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{1,0})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,0})$.

3.2 Probleme de optimizare aproximante-η semi-infinite de ordinul doi

În această secţiune considerăm X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, T şi S mulţimile indicilor, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ o funcţie şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ diferenţiabile de două ori în x^0.

Considerăm problema de optimizare

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{în condiţiile} & \\ & x \in X \\ & g_t(x) \leqq 0, \ (t \in T) \\ & h_s(x) = 0, \ (s \in S). \end{array} \tag{P}$$

Notăm cu $F^{\langle 1 \rangle}, G_t^{\langle 1 \rangle}, H_s^{\langle 1 \rangle}, F^{\langle 2 \rangle}, G_t^{\langle 2 \rangle}, H_s^{\langle 2 \rangle} : X \to \mathbb{R}$ $(t \in T, \ s \in S)$ funcţia definită prin:

$$F^{\langle 1 \rangle}(x) := f(x^0) + \left[\nabla f(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right),$$

$$G_t^{\langle 1 \rangle}(x) := g_t(x^0) + \left[\nabla g_t(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right), \ (t \in T),$$

$$H_s^{\langle 1 \rangle}(x) := h_s(x^0) + \left[\nabla h_s(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right), \ (s \in S),$$

$$\begin{aligned} F^{\langle 2 \rangle}(x) \ &:= f(x^0) + \left[\nabla f(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left\langle \eta(x, x^0), \left[\nabla^2 f(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right)\right\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_t^{\langle 2 \rangle}(x) \ &:= g_t(x^0) + \left[\nabla g_t(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left\langle \eta(x, x^0), \left[\nabla^2 g_t(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right)\right\rangle, \ (t \in T), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_s^{\langle 2 \rangle}(x) \ &:= h_s(x^0) + \left[\nabla h_s(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right) + \\ &+ \tfrac{1}{2}\left\langle \eta(x, x^0), \left[\nabla^2 h_s(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right)\right\rangle, \ (s \in S), \end{aligned}$$

pentru toţi $x \in X$, şi $F^{\langle 0 \rangle} = f$, $G_t^{\langle 0 \rangle} = g_t$, $H_s^{\langle 0 \rangle} = h_s$, $(t \in T, \ s \in S)$.

În cele ce urmează ataşăm Problemei (P), problemele: $(P_{j,k})$, $((j,k) \in \{(2,0), (0,2), (1,2), (2,1), (2,2), (1,0), (0,1), (1,1)\})$,

$$\begin{array}{ll} \min & F^{\langle j \rangle}(x) \\ \text{în condiţiile} & \\ & x \in X \\ & G_t^{\langle k \rangle}(x) \leqq 0, \ (t \in T) \\ & H_s^{\langle k \rangle}(x) = 0, \ (s \in S), \end{array} \tag{P$_{j,k}$}$$

numită problema de optimizare aproximantă-$\eta - (j,k)$ semi-infinită.

Notăm cu:

$$\mathcal{F}_2 := \{x \in X : G_t^{\langle 2 \rangle}(x) \leqq 0, \ (t \in T), \ H_s^{\langle 2 \rangle}(x) = 0, \ (s \in S)\}.$$

Observăm că dacă $\mathcal{F}(P)$ este mulţimea soluţiilor admisibile pentru Problem (P), atunci $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(P) = \mathcal{F}(P_{1,0}) = \mathcal{F}(P_{2,0})$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(P_{0,1}) = \mathcal{F}(P_{1,1}) = \mathcal{F}(P_{2,1})$ şi $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(P_{0,2}) = \mathcal{F}(P_{1,2}) = \mathcal{F}(P_{2,2})$.

3.2.1 Conexiuni între soluţiile admisibile ale Problemei (P) şi problemele aproximante-η de ordinul doi

În această secţiune, vom stabili legături între mulţimea soluţiilor admisibile ale Problemei (P) şi mulţimea soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul doi.

Teorema următoare ne spune în ce condiţii mulţimea soluţiilor admisibile ale Problemei P este inclusă în mulţimea soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul doi.

Teorema 3.2.1 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Dacă:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

atunci

$$\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_2.$$

Teorema următoare ne spune în ce condiţii mulţimea soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul doi este inclusă în mulţimea soluţiilor admisibile ale Problemei (P).

Teorema 3.2.2 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ sunt funcţii. Dacă

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

atunci

$$\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_0.$$

3.2.2 Conexiuni între mulţimile soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul întâi şi doi

În această secţiuni se vor stabili legături între mulţimea soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul întâi şi mulţimea soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul doi.

Teorema următoare ne arată când mulţimea soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul întâi este inclusă în mulţimea soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul doi.

Teorema 3.2.3 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ sunt funcţii. Dacă:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi

$$\left\langle \eta(x, x^0), \left[\nabla^2 g_t(x^0)\right] \left(\eta(x, x^0)\right) \right\rangle \leqq 0, \text{ pentru toţi } x \in X,$$

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi

$$\left\langle \eta(x, x^0), [\nabla^2 h_s(x^0)] \left(\eta(x, x^0)\right) \right\rangle = 0, \text{ pentru toţi } x \in X,$$

atunci

$$\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2.$$

Următoare teoremă ne arată când în mulţimea soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul doi este inclusă în mulţimea soluţiilor admisibile ale problemelor aproximante-η de ordinul întâi.

Teorema 3.2.4 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ sunt funcţii. Dacă:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi

$$\left\langle \eta(x,x^0), \left[\nabla^2 g_t(x^0)\right] \left(\eta(x,x^0)\right)\right\rangle \geqq 0, \text{ pentru toţi } x \in X,$$

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi

$$\left\langle \eta(x,x^0), [\nabla^2 h_s(x^0)] \left(\eta(x,x^0)\right)\right\rangle = 0, \text{ pentru toţi } x \in X,$$

atunci

$$\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1.$$

3.2.3 Problema aproximantă $(P_{0,2})$

Scopul acestei secţiuni este de a stabili legături între soluţiile optime pentru problema (P) şi soluţiile optime pentru problema aproximantă $(P_{0,2})$.

Teorema 3.2.5 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) $x^0 \in \mathcal{F}(P)$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P).

Teorema 3.2.6 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{0,2})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P), atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$.

3.2.4 Problema aproximantă $(P_{2,0})$

În secţiunea aceasta se stabilesc legături între soluţiile optime pentru problema (P) şi soluţiile optime pentru problema aproximantă $(P_{2,0})$.

Teorema 3.2.7 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi pseudoinvexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P).

Teorema 3.2.8 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi cvasiincavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P), atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$.

3.2.5 Problema aproximantă $(P_{1,2})$

Scopul acestei secţiuni este de a stabili legături între soluţiile optime pentru problema (P) şi soluţiile optime pentru problema aproximantă $(P_{1,2})$.

Teorema 3.2.9 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi pseudoinvexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P)$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P).

Teorema 3.2.10 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi cvasiincavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{1,2})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P), atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$.

3.2.6 Problema aproximantă $(P_{2,1})$

În secţiunea aceasta se stabilesc legături între soluţiile optime pentru problema (P) şi soluţiile optime pentru problema aproximantă $(P_{2,1})$.

Teorema 3.2.11 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi pseudoinvexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P)$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P).

Teorema 3.2.12 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi cvasiincavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{2,1})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P), atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,1})$.

3.2.7 Problema aproximantă $(P_{2,2})$

Scopul acestei secţiuni este de a stabili legături între soluţiile optime pentru Problema (P) şi soluţiile optime pentru problema aproximantă $(P_{2,2})$.

Teorema 3.2.13 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi pseudoinvexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $\eta(x^0, x^0) = 0$,

(e) $x^0 \in \mathcal{F}(P)$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P).

Teorema 3.2.14 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi cvasiincavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $\eta(x^0, x^0) = 0$,

(e) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{2,2})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema (P), atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,2})$.

3.2.8 Conexiuni între soluţiile optime ale problemelor $(P_{0,2})$, $(P_{2,0})$, $(P_{1,2})$, $(P_{2,1})$ şi $(P_{2,2})$

Următoarele rezultate se referă la conexiunile între soluţiile optime ale problemelor aproximante-η semi-infinite de ordinul doi.

Teorema 3.2.15 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0, pseudoinvexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η şi cvasiincavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi înx^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{1,2})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$.

Teorema 3.2.16 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0, cvasiincavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η şi pseudoinvexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P)$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$.

Teorema 3.2.17 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0, pseudoinvexă în x^0 în raport cu η şi cvasiincavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0, incavă în x^0 în raport cu η şi invexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0, incavă în x^0 în raport cu η şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(P_{2,1})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,1})$.

Teorema 3.2.18 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0, pseudoinvexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η şi cvasiincavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η şi invexă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η and avex at x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(P_{1,2})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$.

Teorema 3.2.19 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{2,0})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$.

Teorema 3.2.20 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{2,1})$,

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,1})$.

Teorema 3.2.21 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi cvasiincavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(d) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$.

Teorema 3.2.22 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi pseudoinvexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(d) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$.

Teorema 3.2.23 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi cvasiincavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P)$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$.

Teorema 3.2.24 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi pseudoinvexă de ordinul doi în at x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{0,2})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$.

Teorema 3.2.25 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi cvasiincavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(P_{2,1})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,1})$.

Teorema 3.2.26 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi pseudoinvexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0, avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0, şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(P_{0,2})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$.

Teorema 3.2.27 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavaă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(d) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,2})$.

Teorema 3.2.28 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(d) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$.

Teorema 3.2.29 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(d) $\left\langle \eta(x, x^0), \left[\nabla^2 f(x^0)\right] \left(\eta(x, x^0)\right) \right\rangle \geqq \left\langle \eta(x^0, x^0), \left[\nabla^2 f(x^0)\right] \left(\eta(x^0, x^0)\right) \right\rangle$, pentru toţi $x \in \mathcal{F}(P_{1,2})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,2})$.

Teorema 3.2.30 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(d) $\left\langle \eta(x, x^0), \left[\nabla^2 f(x^0)\right] \left(\eta(x, x^0)\right) \right\rangle \leqq \left\langle \eta(x^0, x^0), \left[\nabla^2 f(x^0)\right] \left(\eta(x^0, x^0)\right) \right\rangle$, pentru toţi $x \in \mathcal{F}(P_{1,2})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$.

Teorema 3.2.31 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{2,0})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$.

Teorema 3.2.32 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{2,2})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,2})$.

Teorema 3.2.33 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Let X be a nonempty subset of $\mathbb{R}^n$, x^0 be an interior point of X, $\eta : X \times X \to X$ and f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ such that:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi

$$\left\langle \eta(x,x^0), \left[\nabla^2 g_t(x^0)\right] \left(\eta(x,x^0)\right) \right\rangle \geqq 0,$$

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi

$$\left\langle \eta(x,x^0), [\nabla^2 h_s(x^0)] \left(\eta(x,x^0)\right) \right\rangle = 0,$$

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{2,2})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,2})$.

Teorema 3.2.34 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [68]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$ astfel încât:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi

$$\left\langle \eta(x,x^0), \left[\nabla^2 g_t(x^0)\right] \left(\eta(x,x^0)\right) \right\rangle \leqq 0,$$

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi

$$\left\langle \eta(x,x^0), [\nabla^2 h_s(x^0)] \left(\eta(x,x^0)\right) \right\rangle = 0, \text{ pentru toţi } x \in X.$$

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{2,1})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,1})$.

3.2.9 Conexiuni între soluţiile optime ale problemelor $(P_{1,0})$, $(P_{0,1})$, $(P_{1,1})$ şi $(P_{0,2})$, $(P_{2,0})$, $(P_{1,2})$, $(P_{2,1})$, $(P_{2,2})$

În această secţiune vom stabili conexiuni între soluţiile optime ale problemelor aproximante-η de ordinul întâi şi doi.

Teorema 3.2.35 (**A. Raţiu**, D.I. Duca) [69]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este invexă în x^0, diferenţiabilă de două ori în x^0 şi incavă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) $x^0 \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(P_{0,2})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$.

Teorema 3.2.36 (**A. Raţiu**, D.I. Duca) [69]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este incavă în x^0, diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(c) $x^0 \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(P_{0,1})$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,2})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$.

Teorema 3.2.37 (**A. Raţiu**, D.I. Duca) [69]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0, şi cvasiincavă de ordinul doi în x^0 and invex at x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(c) $x^0 \in \mathcal{F}(P)$,

(d) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$.

Teorema 3.2.38 (**A. Raţiu**, D.I. Duca) [69]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă de două ori în x^0, incavă în x^0 şi pseudoinvexă de ordinul doi în at x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(c) $x^0 \in \mathcal{F}(P_{0,1})$,

(d) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{2,0})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$.

Teorema 3.2.39 (**A. Raţiu**, D.I. Duca) [69]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi f, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi cvasiincavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă de două ori în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă de două ori în x^0, incavă de ordinul doi în x^0 şi avexă de ordinul doi în x^0 în raport cu η,

(d) $x^0 \in \mathcal{F}(P) \cap \mathcal{F}(P_{1,2})$,

(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{0,1})$, atunci x^0 este soluţia optimă pentru Problema $(P_{1,2})$.

Celelalte teoreme care stabilesc relaţii între soluţiile optime ale problemelor $(P_{1,0})$, $(P_{0,1})$, $(P_{1,1})$ şi $(P_{0,2})$, $(P_{2,0})$, $(P_{1,2})$, $(P_{2,1})$, $(P_{2,2})$ sunt prezentate în articolul [69].

Capitolul 4

Probleme de optimizare vectorială

Optimizarea vectorială (programarea multi-obiectiv sau optimizarea Pareto) este un domeniu de cercetare în care sunt considerate criterii multiple în luarea deciziilor. Găsim aplicaţii în diferite domenii cum ar fi: economie, logistică (control optim) şi inginerie (design optim), unde deciziile optime trebuie să fie luate nu numai pentru un criteriu, ci pentru mai mult, de multe ori aflate în contradicţie unele cu altele. În literatura de specialitate există mai multe abordări pentru a rezolva o problemă de optimizare vectorială neliniară cu restricţii (vezi, [2], [43], [45], [52]). Una din ele ar fi utilizarea criteriului punctelor şa (vezi, [18], [24], [50]). În [2], Antczak introduce metoda aproximării-η pentru o problemă de optimizare vectorială cu funcţii invexe. El inlocuieşte problema originală cu o altă problemă de optimizare vectorială echivalentă, modificând funcţiile obiectiv şi restricţiile în problema vectorială originală într-un punct admisibil arbitrar dar fixat $\overline{x}$. În [75] găsim unele scalarizări pentru o problemă de optimizare vectorială în infinit dimensional.

Acest capitol cuprinde două secţiuni. Prima secţiune conţine studiul unei probleme de optimizare vectorială. Pentru a obţine informaţii despre soluţiile eficiente ale aceastei probleme, vom ataşa trei probleme aproximante-η. Sunt prezentate unele conexiuni între soluţiile eficiente ale problemei originale şi problema aproximantă. În ultima secţiune sunt descrise două metode: metoda ponderilor şi metoda restricţiilor pentru rezolvarea unei probleme de optimizare vectorială. Pentru fiecare metodă este prezentat algoritmul şi exemple numerice. Pentru a ilustra mulţimea cu un singur element sau o submulţime a soluţiilor minime, vom şi reprezentările grafice. Acestea sunt interesante din punct de vedere matematic şi practic.

4.1 Aproximări ale problemelor de optimizare vectorială semi-infinite

În această secţiune, considerăm X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, T şi S sunt mulţimea indicilor, $\eta : X \times X \to X$ este o funcţie, x^0 este un punct interior a lui X şi $f : X \to \mathbb{R}^k$, $g_t : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T)$ şi $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(s \in S)$ sunt diferenţiabile în x^0.

Considerăm problema de optimizare vectorială:

$$\begin{array}{lll} \min & f(x) = (f_1, f_2, ..., f_k)(x) & \\ \text{în condiţiile} & & \\ & x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X & \text{(PV)} \\ & g_t(x) \leqq 0,\ (t \in T) & \\ & h_s(x) = 0,\ (s \in S). & \end{array}$$

Ataşăm Problemei (PV), problemele $(PV_{j,k})$, $((j,k) \in \{(1,0),(0,1),(1,1)\})$,

$$\begin{array}{lll} \min & F^{\langle j \rangle}(x) & \\ \text{în condiţiile:} & & \\ & x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X & (\text{PV}_{j,k}) \\ & G_t^{\langle k \rangle}(x) \leqq 0,\ (t \in T) & \\ & H_s^{\langle k \rangle}(x) = 0,\ (s \in S), & \end{array}$$

numită problema de optimizare vectorială aproximantă-$\eta - (j,k)$, unde $F^{\langle 1 \rangle} : X \to \mathbb{R}^k$, $G_t^{\langle 1 \rangle}$, $H_s^{\langle 1 \rangle} : X \to \mathbb{R}$ $(t \in T,\ s \in S)$ sunt definite

$$F^{\langle 1 \rangle}(x) := f(x^0) + \left[\nabla f(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right),$$

$$G_t^{\langle 1 \rangle}(x) := g_t(x^0) + \left[\nabla g_t(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right), \ (t \in T),$$

$$H_s^{\langle 1 \rangle}(x) := h_s(x^0) + \left[\nabla h_s(x^0)\right]\left(\eta(x, x^0)\right), \ (s \in S),$$

pentru toţi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X$, şi $F^{\langle 0 \rangle} = f$, $G_t^{\langle 0 \rangle} = g_t$, $(t \in T)$, $H_s^{\langle 0 \rangle} = h_s$, $(s \in S)$.

Definiţie *Spunem că $x^0 \in \mathcal{F}(PV)$ este o soluţie eficientă pentru Problem (PV) dacă nu există $x \in \mathcal{F}(PV)$ astfel încât*

$$f(x) \leq f(x^0).$$

sau echivalent,

$$f(x^0) - f(x) \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}.$$

4.1.1 Problema aproximantă $(PV_{1,0})$

Scopul acestei secţiuni este de a stabili legături între soluţiile eficiente ale Problema (PV) şi soluţiile eficiente ale problemei aproximante $(PV_{1,0})$.

Următoarea teoremă ne arată că în anumite ipoteze, o soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{1,0})$ este o soluţie eficientă pentru Problema (PV).

Teorema 4.1.2 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [70]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi $f : X \to \mathbb{R}^k$, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă înî x^0 şi invexă în x^0 in raport cu η,

(b) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{1,0})$, atunci x^0 este soluţie eficientă pentru Problema (PV).

Teorema 4.1.3, ne arată când o soluţie eficientă pentru Problema (PV) este o soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{1,0})$.

Teorema 4.1.3 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [70]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi $f : X \to \mathbb{R}^k$, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(b) $\eta(x^0, x^0) = 0$.

Dacă x^0 este soluţie eficientă pentru Problema (PV), atunci x^0 este soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{1,0})$.

4.1.2 Problema aproximantă $(PV_{0,1})$

Scopul acestei secţiuni este de a stabili legături între soluţiile eficiente pentru Problema (PV) şi soluţiile eficiente pentru problema aproximantă $(PV_{0,1})$.

În cele ce urmează următoarea teoremă ne arată când o soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{0,1})$ este soluţie eficientă pentru Problema (PV).

Teorema 4.1.4 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [70]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi $f : X \to \mathbb{R}^k$, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(c) $x^0 \in \mathcal{F}(PV)$.

Dacă x^0 este soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{0,1})$, atunci x^0 este soluţie eficientă pentru Problema (PV).

Relaţia dintre soluţia eficientă pentru Problema (PV) şi soluţia eficientă pentru Problema $(PV_{0,1})$ este stabilită în conformitate cu următoarele ipoteze.

Teorema 4.1.5 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [70]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi $f : X \to \mathbb{R}^k$, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,

(c) $x^0 \in \mathcal{F}(PV_{0,1})$.

Dacă x^0 este soluţie eficientă pentru Problema (PV), atunci x^0 este soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{0,1})$.

4.1.3 Problema aproximantă $(PV_{1,1})$

Scopul acestei secţiuni este de a stabili legături între soluţiile eficiente pentru Problema (PV) şi soluţiile eficiente pentru problema aproximantă $(PV_{1,1})$.

Următoarea teoremă ne arată că în unele ipoteze, o soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{1,1})$ este soluţie eficientă pentru Problema (PV).

Teorema 4.1.6 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [70]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi $f : X \to \mathbb{R}^k$, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:

(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,

(b) pentru fiecare $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi invexă în x^0 în raport cu η,
(c) pentru fiecare $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,
(d) $x^0 \in \mathcal{F}(PV)$,
(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.
Dacă x^0 este soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{1,1})$, atunci x^0 este soluţie eficientă pentru Problema (PV).

Teorema următoare ne arată când o soluţie eficientă pentru Problema (PV) este soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{1,1})$.

Teorema 4.1.7 (**A. Raţiu**, D.I. Duca [70]) Fie X o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}^n$, x^0 un punct interior a lui X, $\eta : X \times X \to X$ şi $f : X \to \mathbb{R}^k$, g_t, $h_s : X \to \mathbb{R}$, $(t \in T,\ s \in S)$. Presupunem că:
(a) funcţia f este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,
(b) for each $t \in T$, funcţia g_t este diferenţiabilă în x^0 şi incavă în x^0 în raport cu η,
(c) for each $s \in S$, funcţia h_s este diferenţiabilă în x^0 şi avexă în x^0 în raport cu η,
(d) $x^0 \in \mathcal{F}(PV_{1,1})$,
(e) $\eta(x^0, x^0) = 0$.
Dacă x^0 este soluţie eficientă pentru Problema (PV), atunci x^0 este soluţie eficientă pentru Problema $(PV_{1,1})$.

Observaţia 4.1.8 Problemele aproximante-η de optimizare vectorială de ordinul doi pot fi abordate într-o manieră similară cu problemele prezentate în capitolul anterior.

4.2 Metode de rezolvarea a problemelor de optimizare vectorială

În această secţiune vom considera două metode pentru rezolvarea următoarei probleme de optimizare vectorială

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{în condiţiile} & \\ & x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X, \end{array} \qquad (\widetilde{PV})$$

unde X este o mulţime nevidă în $\mathbb{R}^n$, $f = (f_1, f_2, ..., f_k) : X \to \mathbb{R}^k$.

4.2.1 Metoda ponderilor

În această metodă, vom alege ponderile vectoriale $p = (p_1, ..., p_k) \geq 0$, a căror coordonate nu sunt toate zero şi rezolvăm problema scalară corespunzătoare

$$\begin{array}{ll} \min & \sum\limits_{i=1}^{k} p_i f_i(x) \\ \text{în condiţiile} & \\ & x \in X, \end{array} \qquad (PS_p)$$

care va genera mulţimea soluţiilor minime şi mulţimea valorilor minime pentru Problema $(\widetilde{PV})$.

În reprezentarea grafică, punctele negre marcate reprezintă valorile eficiente ale problemei.

Exemplul 4.2.4 (**A. Raţiu** [53]) Considerăm problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = (x_1^2 + x_2 - 2,\ 5x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 3) \\ \text{în condiţiile} & x \in X, \end{array}$$

unde

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 2\}.$$

Pentru fiecare $m \geq 1$, obţinem o soluţie eficientă $x = (0,0)$ cu valoarea $f(x) = (-2, 3)$.

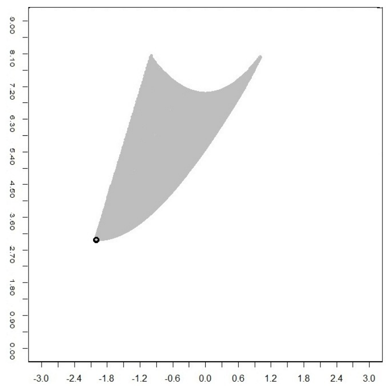

Figura pentru Exemplul 4.2.4 , pentru $m \geq 1$

4.2.2 Metoda restricţiilor

În această metodă, alegem $\ell \in \{1, ..., k\}, L_j \in \mathbb{R}, j \in \{1, ..., k\}, j \neq \ell$, şi rezolvăm problema scalară corespunzătoare

$$\begin{array}{ll} \min & f_\ell(x) \\ \text{în condiţiile} & \\ & f_j(x) \geq L_j, j = 1, ..., k, j \neq \ell \\ & x \in X, \end{array} \qquad (PS_{e^\ell})$$

unde $e^\ell = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^k$.

Exemplul 4.2.12 (**A. Raţiu** [53]) Considerăm problema

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = (-1 + x_1^2 + x_2^2,\ \ -300x_1 - 400x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2) \\ \text{în condiţiile} & x \in X, \end{array}$$

unde

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_1 \leq 1,\ 0 \leq x_2 \leq 2\}.$$

Valorile eficiente obţinute pentru $r = 4$, sunt reprezentate în figura următoare:

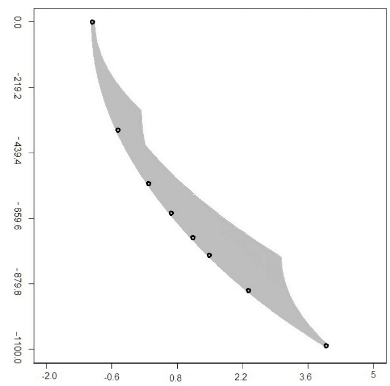

Figura pentru Exemplul 4.2.12, pentru $r = 4$

Capitolul 5

Rezolvarea unor probleme de optimizare. Aplicaţii în statistică

În acest capitol vom rezolva probleme de optimizare folosind teoria inegalităţilor. Inegalitatea lui Jensen, inegalitatea lui Radon, inegalitatea lui Hölder, inegalitatea Liapunov sunt utilizate. De asemenea noi inegalităţi din articolul [72] sunt utilizate, inegalităţi care ne aparţin. În ultima secţiune sunt obţinute noi margini pentru dispersie, deviaţia standard şi coeficientul de variaţie.

5.1 Rezolvarea unor probleme de optimizare folosind inegalităţi

Considerăm expresia

$$\Delta^{[p]}(x;y) := \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{y_i^{p-1}} - \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^p}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^{p-1}}, \tag{5.1}$$

unde $x = (x_1, ..., x_n) \geqq 0, y = (y_1, ..., y_n) > 0$, $p > 1$.

În [64], Radon a formulat următorul rezultat:

Teorema 5.1.1 Pentru toţi $x = (x_1, ..., x_n) \geqq 0, y = (y_1, ..., y_n) > 0$ şi $p > 1$, următoarea inegalitate

$$\Delta^{[p]}(x;y) \geqq 0, \tag{5.2}$$

are loc. Dacă există un număr real $\lambda \geqq 0$ astfel încât $x = \lambda y$, atunci inegalitatea (5.2) (cunoscută sub numele de inegalitatea lui Radon) devine egalitate.

Teorema 5.1.3 (**A. Raţiu**, N. Minculete [72]) Fie $p \geqq 1$. Problema de optimizare

$$\min \qquad F(x,y) = p\left(\Delta^{[p]}(x;y) - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}\Delta^{[p-1]}(x;y)\right) - \Delta^{[p]}(x;y)$$

în condiţiile

$$x = (x_1, ..., x_n) \geqq 0$$
$$y = (y_1, ..., y_n) > 0,$$

are valoarea optimă 0. O soluţie optimă este orice punct $(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$, care are proprietatea că există $\lambda > 0$ astfel încât $x = \lambda y$.

Teorema 5.1.4 (**A. Raţiu**, N. Minculete [72]) Fie $p \geqq 1$ şi M, m numere reale pozitive. Problema de optimizare

$$\min \qquad F(x,y) = \tfrac{p}{4}(M-m)(M^{p-1} - m^{p-1})\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \Delta^{[p]}(x;y)$$

în condiţiile

$$x = (x_1, ..., x_n) \geqq 0$$
$$y = (y_1, ..., y_n) > 0$$
$$my_i \leqq x_i \leqq My_i,\ i \in \{1, ..., n\},$$

are $F(x, y) \geqq 0$, pentru tote soluţiile admisibile.

Teorema 5.1.9 (**A. Raţiu**, N. Minculete [72]) Fie $p \geqq 1$ şi M, m numere reale pozitive. Problema de optimizare

$$\min \qquad F(x,y) = \Delta^{[p]}(x;y) - \max_{1 \leqq i < j \leqq n}\left[\frac{x_i^p}{y_i^{p-1}} + \frac{x_j^p}{y_j^{p-1}} - \frac{(x_i + x_j)^p}{(y_i + y_j)^{p-1}}\right]$$

în condiţiile

$$x = (x_1, ..., x_n) \geqq 0$$
$$y = (y_1, ..., y_n) > 0$$
$$my_i \leqq x_i \leqq My_i,\ i \in \{1, ..., n\},$$

are valoarea optimă 0. O soluţie optimă este orice punct $(x, y) \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathrm{int}\mathbb{R}^n_+$, care are proprietatea că există $\lambda > 0$ astfel încât $x = \lambda y$.

Teorema 5.1.10 (**A. Raţiu**, N. Minculete [72]) Fie $p \geqq 1$ şi M, m numere reale pozitive. Problema de optimizare

$$\min \qquad F(x,y) = \left[M^p + m^p - \frac{(M+m)^p}{2^{p-1}}\right]\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \Delta^{[p]}(x;y)$$

în condiţiile

$$x = (x_1, ..., x_n) \geqq 0$$
$$y = (y_1, ..., y_n) > 0$$
$$my_i \leqq x_i \leqq My_i,\ i \in \{1, ..., n\},$$

are funcţia obiectiv $F(x,y) \geqq 0$, pentru toate soluţiile admisibile.

Teorema 5.1.11 (**A. Raţiu**, N. Minculete [72]) Fie $p \geqq 1$ şi M, m numere reale pozitive. Problema de optimizare

$$\min\{\frac{\left[(M+m)\sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\right]^p}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^{p-1}} - \frac{(M+m)^p}{2^{p-1}}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^p}{y_i^{p-1}}\right) - \Delta^{[p]}(x;y)\}$$

în condiţiile

$$\begin{aligned} &x = (x_1, ..., x_n) \geqq 0 \\ &y = (y_1, ..., y_n) > 0 \\ &my_i \leqq x_i \leqq My_i,\ \ i \in \{1, ..., n\}, \end{aligned}$$

are funcţia obiectiv nenegativă.

Teorema 5.1.13 (**A. Raţiu**, N. Minculete [72]) Fie $p > 1$ şi $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Problema de optimizare

$$\min \quad \{\sum_{k=1}^{n} z_k v_k + \left(\sum_{k=1}^{n} v_k^q\right)^{\frac{1}{q}} F\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} z_k v_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} v_k^q\right)^{\frac{1}{q}}}, T^{[p]}(zv; v^q), p\right) -$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} v_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\}$$

în condiţiile

$$\begin{aligned} &z = (z_1, ..., z_n) \geqq 0 \\ &v = (v_1, ..., v_n) > 0 \end{aligned}$$

unde

$$T^{[p]}(x;y) := (p-1)\max_{1 \leqq i < j \leqq n} \frac{(x_i + x_j)^{p-2}(x_i y_j - x_j y_i)^2}{y_i y_j (y_i + y_j)^{p-1}},$$

are funcţia obiectiv nenegativă.

Teorema 5.1.14 (**A. Raţiu**, N. Minculete [72]) Fie $r - 1 \geqq s > t > 0$. Problema de optimizare

$$\min \quad \{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^s\right)^{r-t} + \left(\sum_{k=1}^{n} z_k^r\right)^{s-t} \cdot \left[T^{[p]}(z^s; z^r)\right]^{r-s} -$$

$$-\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^t\right)^{r-s}\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^r\right)^{s-t}\}$$

în condiţiile

$$z = (z_1, ..., z_n) > 0,$$

are funcţia obiectiv nenegativă.

5.2 Noi margini pentru indicatori în statistică

În această secţiune considerăm următorii indicatori: dispersia, deviaţia standard şi coeficientul de variaţie.

Teorema 5.2.1 (N. Minculete, N.B. Pipu, **A. Raţiu** [57]) Problemele de optimizare

$$\min \quad \left\{\frac{\left(x_1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2+...+\left(x_n-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}{n}-\right.$$

$$\left.-2\cdot min\{x_1,...,x_n\}\cdot\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}-\sqrt[n]{x_1\cdot...\cdot x_n}\right)\right\}$$

în condiţiile

$$x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}_+^n,$$

şi

$$\min \quad \left\{2\cdot max\{x_1,...,x_n\}\cdot\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}-\sqrt[n]{x_1\cdot...\cdot x_n}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\left(x_1-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2+...+\left(x_n-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)^2}{n}\right\}$$

în condiţiile

$$x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}_+^n,$$

au funcţiile obiectiv nenegative.

Teorema 5.2.2 (N. Minculete, N.B. Pipu, **A. Raţiu** [57]) Pentru $x_1,...,x_n \geqq 0$, avem următoarea egalitate:

$$\left(\max\{x_1,...,x_n\}-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)\cdot\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}-\min\{x_1,...,x_n\}\right)-\sigma_X^2=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\max\{x_1,...,x_n\}-x_i\right)\left(x_i-\min\{x_1,...,x_n\}\right).$$

Teorema 5.2.3 (N. Minculete, N.B. Pipu, **A. Raţiu** [57]) Dacă $M' = \max\{x_i | x_i \neq \max\{x_1, ..., x_n\}\}$ şi $m' = \min\{x_i | x_i \neq \min\{x_1, ..., x_n\}\}$, $i \in \{1, ..., n\}$, atunci problema de optimizare

$$\begin{aligned} &\min \ \{\sigma_{\overline{X}}^2 - \left(\max\{x_1, ..., x_n\} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right) \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \min\{x_1, ..., x_n\} \right) - \\ &- \max\{(m' - \min\{x_1, ..., x_n\}) \cdot \left(\max\{x_1, ..., x_n\} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \right) \\ &(\max\{x_1, ..., x_n\} - M') \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \min\{x_1, ..., x_n\} \right) \} \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

în condiţiile

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_+^n,$$

are funcţia obiectiv nenegativă.

Observaţia 5.2.4 (N. Minculete, N.B. Pipu, **A. Raţiu** [57]) Nenegativitatea funcţiei obiectiv a problemei (5.2.9), ne duce la noi margini pentru variaţie, deviaţia standard şi coeficientul de variaţie:

$$\begin{aligned} 2m\left(\overline{X} - \overline{X}_g\right) \ &\leqq \sigma_{\overline{X}}^2 \leqq \\ &\leqq \left(M - \overline{X}\right)\left(\overline{X} - m\right) - \\ &- \max\left\{(m' - m)\left(M - \overline{X}\right),\ (M - M')\left(\overline{X} - m\right)\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2m\left(\overline{X} - \overline{X}_g\right)} \ &\leqq \sigma_{\overline{X}} \leqq \\ &\leqq \sqrt{\left(M - \overline{X}\right)\left(\overline{X} - m\right) - \max\left\{ \begin{array}{c} (m' - m)\left(M - \overline{X}\right), \\ (M - M')\left(\overline{X} - m\right) \end{array} \right\}}, \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2m\left(\overline{X} - \overline{X}_g\right)}}{\overline{X}} \ &\leqq C_V \leqq \\ &\leqq \frac{\sqrt{\left(M - \overline{X}\right)\left(\overline{X} - m\right) - \max\left\{(m' - m)\left(M - \overline{X}\right),\ (M - M')\left(\overline{X} - m\right)\right\}}}{\overline{X}}, \end{aligned}$$

unde $M = \max\{x_1, ..., x_2\}$, $m = \min\{x_1, ..., x_2\}$.

În Observaţia 5.2.4, avem margini inferioare şi superioare pentru indicatorii statistici: variaţia, deviaţia standard şi coeficientul de variaţie.

Bibliografie

[1] T. Antczak: *An η-approximation approach to nonlinear mathematical programming involving invex functions*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **25**, 423-438, 2004.

[2] T. Antczak: *An η-approximation method in vector optimization*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **63**, 225-236, 2005.

[3] A. Auslender: *Existence of optimal solutions and duality results under weak conditions*, Mathematical Programming, Seria A, **88**, 45-59, 2000.

[4] A. Ben-Tal, E.E. Rosinger, A. Ben-Israel: *A Helly type theorem and semi-infinite programming*, Constructive Approaches to Mathematical Models, 127-135, 1979.

[5] A. Ben-Tal, A. Nemirovski: *Robust solutions of uncertain linear programs*, Operations Research Letters, **25**, 1-13, 1999.

[6] H.V. Boncea, D. Duca: *On the η-(1,2) approximated optimization problems*, Carpathian Journal of Mathematics, **28(1)**, 17-24, 2012.

[7] J.M. Borwein: *Direct theorems in semi-infinite convex programming*, Mathematical Programming, **21**, 301-308, 1981.

[8] R.I. Bot, G. Wanka: *An alternative formulation for a new closed cone constraint qualification*, Nonlinear Analysis, **64**, 1367-1381, 2006.

[9] R.I. Bot, G. Wanka: *Farkas-type results with conjugate functions*, SIAM Journal Optimization, **15**, 540-554, 2005.

[10] R.I. Bot, E.R. Csetnek, G. Wanka: *Regularity conditions via quasi-relative interior in convex programming*, SIAM Journal Optimization, **19**, 217-233, 2008.

[11] R.I. Bot, S.M. Grad, G. Wanka: *Duality in vector optimization*, Springer, 2009.

[12] P.S. Bullen: *Handbook of means and their inequalities*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[13] M.J. Canovas, M.A. López, J. Parra: *Stability in the discretization of a parametric semi-infinite convex inequality system*, Mathematics of Operations Research, **27**, 755-774, 2002.

[14] A. Charnes, W.W. Cooper, K.O. Kortanek: *Duality, Haar programs and finite sequence spaces*, Proceedings of the National Academy of Science, **48**, 783-786, 1962.

[15] A. Charnes, W.W. Cooper, K.O. Kortanek: *Duality in semi-infinite programs and some works of Haar and Caratheodory*, Management Sciences **9**, 209-228, 1963.

[16] A. Charnes, W.W. Cooper, K.O. Kortanek: *On the theory of semi-infinite programming and a generalization of the Kuhn-Tucker saddle point theorem for arbitrary convex functions*, Naval Research Logistics Quarterly **16**, 41-51, 1969.

[17] L. Cioban, D. Duca: *Optimization problems and* $(0,2)$-η *approximated optimization problems*, Carpathian Journal of Mathematics, **28(1)**, 37-46, 2012.

[18] B.D. Craven: *Quasimin and quasisaddlepoint for vector optimization*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **11**, 45-54, 1990.

[19] M. DallAglio: *On some applications of LSIP to probability and statistics,* in M.A. Goberna, M.A. Lopez (Eds.), Semi-Infinite Programming. Recent Advances, Nonconvex Optimization and Its Applications, Kluwer, **57**, 237-254, 2001.

[20] N. Dinh, M.A. Goberna, M.A. Lopez: *From linear to convex systems: consistency, Farkas lemma and applications*, Journal of Convex Analysis, **13**, 279-290, 2006.

[21] N. Dinh, B.S. Mordukhovich, T.T.A. Nghia: *Qualification and optimality conditionsfor convex and DC programs with infinite constraints*, Acta Mathematica Vietnamica, **34**, 123-153, 2009.

[22] D. Duca, E. Duca: *Optimization problems and* η*-approximated optimization problems*, Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica, **54**, 49-62, 2009.

[23] D. Duca: *Multicriteria optimization in complex space*, Casa Cartii de Stiinta, Cluj-Napoca, 2005.

[24] R.R. Egudo, M.A. Hanson: *Multi-objective duality with invexity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **126**, 469-477, 1987.

[25] J.R. Evans: *Statistics, data analysis and decision modeling*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2007.

[26] D.H. Fang, C. Li, K.F. Ng: *Constraint qualifications for extended Farkas's lemmas and Lagrangian dualities in convex infinite programming*, SIAM Journal Optimization, **20**, 1311 -1332, 2009.

[27] A.V. Fiacco, K.O. Kortanek: *Semi-infinite programming and applications*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 215, 1983.

[28] J.B.G. Frenk, G. Kassay: *On classes of generalized convex functions. Gordan-Farkas type theorems and Lagrangian duality*, Journal of Optimization Theory and Applications, **102**, 315-343, 1999.

[29] V. Gaya, M.A. López, V.N. Vera de Serio: *Stability in convex semi-infinite programming and rates of convergence of optimal solutions of discretized finite subproblems*, Optimization, **52**, 693-713, 2003.

[30] K. Glashoff, S.A. Gustafson: *Linear optimization and approximation*, Springer Verlag, Berlin, 1983.

[31] M.A. Goberna, M.A. Lopez: *Linear semi-infinite optimization*, Wiley, Chichester, 1998.

[32] M. A. Goberna, V. Jeyakumar, M.A. Lopez: *Necessary and sufficient conditions for solvability of systems of infinite convex inequalities*, Nonlinear Analysis, **68**, 1184-1194, 2008.

[33] F. Guerra Vázquez, J.J. Rückmann, O. Stein, G. Still: *Generalized semi-infinite programming: a tutorial*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **217**, 394-419, 2008.

[34] S.A. Gustafson, K.O. Kortanek: *Numerical treatment of a class of semi-infinite programming problems*, Naval Research Logistics Quarterly, **20**, 477-504, 1973.

[35] R. Hettich, K.O. Kortanek: *Semi-infinite programming: theory, methods, and applications*, SIAM Review, **35**, 380-429, 1993.

[36] R. Hettich, P. Zencke: *Numerische methoden der approximation und semi-infiniten pptimierung*, Teubner, Stuttgart, 1982.

[37] R. Hettich: *An implementation of a discretization method for semi-infinite programming*, Mathematical Programming, **34(3)**, 354-361, 1986.

[38] R. Hettich, G. Gramlich: *A note on an implementation of a method for quadratic semi-infinite programming*, Mathematical Programming, **46**, 249-254, 1990.

[39] J.B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal: *Convex analysis and minimization algorithms I: Fundamentals*, Springer-Verlang, Berlin, 1999.

[40] A. Hoffmann, R. Reinhardt: *On reverse Chebyshev approximation problems*, Preprint M80/94, Technical University of Ilmenau, 1994.

[41] N.Q. Huy, D.S. Kim: *Lipschitz behavior of solutions to nonconvex semi-infinite vector optimization problems*, Journal of Global Optimization, **56(2)**, 431-448, 2013.

[42] M. Jaiswal, S.K. Mishra, B.A. Shamary: *Optimality conditions and duality for semi-infinite programming involving semilocally type I-preinvex and related functions*, Communication Korean Mathematical Society, **27(2)**, 441-423, 2012.

[43] J. Jahn: *Mathematical vector optimization in partially ordered linear spaces*, Verlag Peter Lang, Frankfurt, 1986.

[44] J. Jahn: *Vector optimization- theory, applications and extensions*, Springer-Verlang, Berlin, 2004.

[45] V. Jeyakumar, B. Mond: *On generalized convex mathematical programming*, Journal of Australian Mathematical Society, Ser.B, **34**, 43-53, 1992.

[46] N. Kanzi: *Lagrange multiplier rules for non-differentiable DC generalized semi-infinite programming problems*, Journal of Global Optimization, **56(2)**, 417-430, 2013.

[47] A. Kaplan, R. Tichatschke: *On a class of terminal variational problems*, in: J. Guddat, H.Th. Jongen, F. Nožička, G. Still, F. Twilt (eds): Parametric Optimization and Related Topics IV, Peter Lang, Frankfurt, 185-199, 1997.

[48] K.H. Kfer, O. Stein, A. Winterfeld: *Semi-infinite optimization meets industry: A deterministic approach to gemstone cutting*, SIAM News, **41(8)**, 2008.

[49] W. Krabs: *On time-minimal heating or cooling of a ball*, International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser, Basel, **81**, 121-131, 1987.

[50] T. Li, Y. Wang, Z. Liang, P.M. Pardalos: *Local saddle point and a class of convexification methods for nonconvex optimization problems*, Journal of Global Optimization, **38**, 405-419, 2007.

[51] M. Lopez, G. Still: *Semi-Infinite Programming*, European Journal of Operational Research, **180(2)**, 491-518, 2007.

[52] D.T. Luc: *Scalarization of vector optimization problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, **55**, 85-102, 1987.

[53] D.T. Luc, **A. Raţiu**: *Fixed Point Theory, Variational Analysis and Optimization, Chapter Vector Optimization: Basic Concepts and Solution Methods*, to appear at Taylor and Francis on March 25, 2014.

[54] D.T. Luc: *Theory of vector optimization*, Springer-Verlang, Berlin, 1989.

[55] A.McD. Mercer: *Bounds for A-G, A-H, G-H, and a family of inequalities of Ky Fan's type, using a general method*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **243(1)**, 163-173, 2000.

[56] D. Mărghidanu: *Generalizations and refinements for Bergstrőm and Radon's inequalities*, Journal of Science and Arts, **8(1)**, 57-62, 2008.

[57] N. Minculete, N.B. Pipu, **A. Raţiu**: *Characterization of some bounds for several statistical indicators*, Jökull Journal, **63(7)**, 271-276, 2013.

[58] S.K. Mishra, G. Giorgi: *Invexity and optimization*, Nonconvex optimization and Its Applications, Springer-Verlag, Berlin, **88**, 2008.

[59] S.K. Mishra, M. Jaiswal, Le Thi Hoai An: *Duality for nonsmooth semi-infinite programming problems*, Optimization Letters, **6(2)**, 261-271, 2012.

[60] C.P. Niculescu, L.E. Persson: *Convex functions and their applications. A contemporary approach*, CMS Books in Mathematics, Springer-Verlang, New York, 23, 2006.

[61] E. Polak: *Optimization. Algorithms and consistent approximations*, Springer, Berlin, 1997.

[62] E. Polak: *On the mathematical foundation of nondifferentiable optimization in engineering design*, SIAM Review, **29**, 21-89, 1987.

[63] E.L. Pop, D. Duca: *Optimization problems, first order approximated optimization problems and their connections*, Carpathian Journal of Mathematics, **28(1)**, 133-141, 2012.

[64] J. Radon: *Theorie und anwendungen der absolut additiven mengenfunktionen*, Wiener Sitzungsber, **122**, 1295-1438, 1913.

[65] **A. Raţiu**, D.I. Duca: *First order approximated semi-infinite optimization problems*, General Mathematics, Special Issue, **20(5)**, 99-106, 2012.

[66] **A. Raţiu**, D.I. Duca: *Semi-infinite optimization problems and their approximations*, Studia Universitatis Babes-Bolyai, Mathematica, **58(3)**, 407-417, 2013.

[67] **A. Raţiu**, D.I. Duca: *Semi-infinite optimization problems and their first order approximated*, Annals of the Tiberiu Popoviciu Seminar of Functional Equations, Approximation and Convexity, **11**, 2013.

[68] **A. Raţiu**, D.I. Duca: *Semi-infinite optimization problems-second order approximated optimization problems*, Jökull Journal, **63(9)**, 2013.

[69] **A. Raţiu**, D.I. Duca: *Connections between the optimal solutions of semi-infinite optimization problem and her approximate*, submitted.

[70] **A. Raţiu**, D.I. Duca: *Approximations of semi-infinite vector optimization problems*, submitted.

[71] **A. Raţiu**: *Convex-concave infinite minimization*, submitted.

[72] **A. Raţiu**, N. Minculete: *Several refinements and counterparts of Radon's inequality*, to appear in Mathematica Bohemica.

[73] R. Reemtsen: *Discretization methods for the solution of semi-infinite programming problems*, Journal of Optimization Theory and Applications, **71(1)**, 5-103, 1991.

[74] R.T. Rockafellar: *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[75] S. Rolewicz: *Suficient condition for Pareto optimization in Banach spaces*, Studia Mathematica, **77**, 111-114, 1981.

[76] J. J. Rückmann, A. Shapiro: *Augmented Lagrangians in semi-infinite programming*, Mathematical Programming, Ser. B, 116:499-512, 2009.

[77] A. Shapiro: *Semi-infinite programming, duality, discretization and optimality conditions*, Optimization, **58(2)**, 133-161, 2009.

[78] A. Shapiro: *On duality theory of convex semi-infinite programming*, Optimization, **54**, 535-543, 2005.

[79] O. Stein: *Bi-level strategies in semi-infinite programming*, Kluwer, Boston, 2003.

[80] F. Terkelsen: *Some minimax theorems*, Mathematica Scandinavica, **31**, 405-413, 1972.

[81] R. Tichatschke: *Lineare semi-infinite optimierungsaufgaben und ihre anwendungen in der approximations theorie*, Karl-Marx-Stadt: Wissenschaftliche Schriftenreihe der Technischen Hochschule, 1981.

[82] R.H. Tütüncü, M. Koenig: *Robust asset allocation*, Annals of Operations Research, **132**, 157-187, 2004.

[83] A.I.F. Vaz, E.C. Ferreira: *Air pollution control with semi-infinite programming*, Applied Mathematical Modelling, **33**, 1957-1969, 2009.