UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ SI INFORMATICĂ

Oana Crişan

CONTRIBUŢII LA TEORIA GEOMETRICĂ A FUNCŢIILOR DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

Rezumatul tezei de doctorat

Conducători de doctorat:
Prof. Univ. Dr. Grigore Ştefan Sălăgean
Prof. Univ. Dr. Hab. Stanisława Kanas

Cluj-Napoca
2013

Cuprins

Introducere

Cu o istorie ce datează din secolul al XVIII-lea, analiza complexă este un domeniu vast şi bogat în aplicaţii, nu doar în alte ramuri ale analizei matematice, cât şi în alte domenii ale matematicii şi ştiinţei în general.

Teoria geometrică a funcţiilor de o variabilă complexă îsi are originile la începutul secolului al XX-lea, primele lucrări semnificative care au atras atenţia asupra acestui subiect aparţinând lui P. Koebe [37], I.W. Alexander [3] sau L. Bieberbach [8]. Koebe a iniţiat în 1907 studiul funcţiilor univalente, în timp ce Bieberbach prezenta în 1916 ceea ce în curând avea să devină o conjectură faimoasă. Un element fundamental în dezvoltarea ulterioară a domeniului, conjectura lui Bieberbach afirmă că coeficienţii dezvoltării în serie de puteri a oricărei funcţii aparţinând clasei $\mathcal{S}$ a funcţiilor normate şi univalente în discul unitate al planului complex satisfac inegalitatea $|a_n| \leq n$.

Demonstrată abia în 1985 de către L. de Branges [22], problema propusă de Bieberbach a impulsionat cercetările din acest domeniu, determinând apariţia unor noi metode de cercetare precum metoda parametrică a a lui L. Löwner, metodele variaţionale introduse de M. Schiffer şi G.M. Goluzin, metoda punctelor extremale datorată lui L. Brickman, etc.

Chiar dacă conjectura s-a dovedit greu de demonstrat pentru funcţiile clasei $\mathcal{S}$, estimări exacte ale coeficienţilor pentru funcţiile din diferite subclase de funcţii univalente au fost adesea mai uşor de obţinut. A început astfel studiul diverselor clase de funcţii analitice, univalente sau meromorfe, rămânând până în prezent un subiect de mare interes.

Un alt domeniu cu numeroase aplicaţii în teoria geometrică a funcţiilor este acela al subordonărilor diferenţiale, care îsi regăseşte punctul de plecare într-un articol din 1981 al lui P.T. Mocanu şi S.S. Miller [53], o lucrare ce stă astăzi la baza a sute de articole pe această temă.

Dintre numeroasele tratate şi monografii consacrate teoriei geometrice a funcţiilor le menţionăm pe cele ale lui L.V. Ahlfors [2], C. Pommerenke [68], J.B. Conway [13], A.W. Goodman [27], P.L. Duren [23], D.J. Hallenbeck şi T.H MacGregor [32], S.S. Miller şi P.T. Mocanu [52] sau P.T. Mocanu, T. Bulboacă şi G.Ş. Sălăgean [62].

Această teză urmăreşte atât studiul unor clase de funcţii analitice şi de funcţii meromorfe, cât şi prezentarea unor rezultate referitoare la subordonări diferenţiale.

Primul capitol al tezei începe cu o serie de notaţii, noţiuni şi rezultate fundamentale ale teoriei geometrice a funcţiilor. Sunt prezentate apoi anumite subclase de funcţii analitice şi meromorfe. Un alt subiect tratat în acest capitol introductiv este metodei subordonărilor diferenţiale (numită şi metoda funcţiilor admisibile). Secţiunea finală a Capitolului 1 se opreşte asupra unor operatori diferenţiali şi integrali. Paragrafele 2.1 şi 2.1 ale celui de-al doilea capitol conţin rezultate originale utilizând un operator diferenţial nou introdus, $D^n_{\lambda,\delta}$, respectiv operatorul integral Sălăgean I^n. Rezultatele sunt obţinute folosind metoda subordonărilor diferenţiale. În paragraful 2.3 se studiază problema estimării coeficienţilor unor subclase de funcţii bi-univalente în discul unitate.

Capitolul 3 este dedicat studiului funcţiilor meromorfe. În paragrafele 3.1 şi 3.2 sunt introduse prin subordonare şi studiate noi clase de funcţii meromorfe, pentru care sunt date, printre alte rezultate, estimări ale coeficienţilor, relaţii de incluziune, proprietăţi de conservare şi de convoluţie. Paragraful 3.3 conţine o serie de condiţii suficiente pentru aproape convexitatea funcţiilor meromorfe multivalente.

În Capitolul 4 se urmăreşte obţinerea unor rezultate privind anumite subordonări diferenţiale în a căror expresie se utilizează o combinaţie a mediilor aritmetice şi geometrice. Cu excepţia Lemei 4.1.1, şi rezultatele incluse în acest capitol sunt originale.

În cele ce urmează, am selectat cele mai relevante rezultate, cu precădere contribuţiile originale. În final este inclusă întreaga bibliografie.

Aceast lucrare a fost posibilă prin sprijinul financiar oferit prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, cofinanţat prin Fondul Social European, în cadrul proiectului POSDRU/107/1.5/S/76841, cu titlul “Studii doctorale moderne: internaţionalizare şi interdisciplinaritate”.

Aş dori în încheiere să le mulţumesc d-lui Prof. Univ. Dr. Grigore Ştefan Sălăgean şi d-nei Prof. Univ. Dr. Hab. Stanisława Kanas pentru îndrumarea acordată, observaţiile valoroase şi încurajările lor pe întreg parcursul elaborării acestei lucrări.

Cuvinte cheie: funcţii univalente, stelaritate, convexitate, aproape convexitate, funcţii spiralate, funcţii cu partea reală pozitivă, subordonări diferenţiale, operator diferenţial Ruscheweyh, operator diferenţial Al-Oboudi, operator integral Sălăgean, operator integral Bernardi, funcţii biunivalente, funcţii meromorfe.

Capitolul 1

Rezultate preliminare

1.1 Notaţii, definiţii şi rezultate elementare din teoria funcţiilor univalente

În cele ce urmează, notăm cu $\mathbb{C}$ planul complex şi cu $\mathcal{U}(z_0, r)$ discul deschis centrat în $z_0 \in \mathbb{C}$ şi de rază $r > 0$,

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Discul $\mathcal{U}(0, r)$ va fi notat prin $\mathcal{U}_r$, iar discul unitate $\mathcal{U}_1$ prin $\mathcal{U}$. Vom folosi de asemenea notaţia $\mathcal{U}^* \equiv \mathcal{U} \backslash \{0\}$. Frontiera unei mulţimi G va fi notată cu ∂G.

Dacă G este o submulţime deschisă a lui $\mathbb{C}$, notăm cu $\mathcal{H}(G)$ mulţimea funcţiilor analitice pe G cu valori în $\mathbb{C}$.

Pentru n număr natural şi $a \in \mathbb{C}$, vom considera de asemenea mulţimile

$$\mathcal{H}[a, n] = \{f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) \ : \ f(z) = a + a_n z^n + \cdots, \ z \in \mathcal{U}\}$$

şi

$$\mathcal{A}_n = \left\{f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}) \ : \ f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots, \ z \in \mathcal{U}\right\},$$

iar

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}_1.$$

Definiţia 1.1.1. Fie D un domeniu în $\mathbb{C}$. O funcţie $f : D \to \mathbb{C}$ se numeşte *univalentă* dacă este analitică şi injectivă pe D. Notăm cu $\mathcal{H}_u(D)$ mulţimea tuturor funcţiilor univalente pe D şi cu $\mathcal{S}$ clasa funcţiilor $f \in \mathcal{H}_u(\mathcal{U})$ normate cu condiţia $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

Conjectura lui Bieberbach. Dacă funcţia $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ aparţine clasei $\mathcal{S}$, atunci

$$|a_n| \leq n, \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{1.1}$$

Egalitatea $|a_n| = n$ pentru un $n \geq 2$ dat are loc dacă şi numai dacă f este o rotaţie a funcţiei lui Koebe.

Conjectura lui Bieberbach a fost demonstrată abia în 1985 de către de Branges [22], prin metoda lanţurilor Löwner.

1.2 Clasa Carathéodory. Subordonare. Principiul subordonării

În acest paragraf expunem proprietăţile de bază ale funcţiilor cu partea reală pozitivă în discul unitate. Vom prezenta de asemenea conceptul de subordonare în planul complex.

Definiţia 1.2.1. Clasa Carathéodory, notată cu $\mathcal{P}$, este mulţimea tuturor funcţiilor p analitice în $\mathcal{U}$ cu $p(0) = 1$ şi care îndeplinesc condiţia $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $z \in \mathcal{U}$.

Definiţia 1.2.2 ([62], [68])**.** Fie f şi g două funcţii analitice în $\mathcal{U}$. Spunem că f *este subordonată lui* g, şi notăm

$$f \prec g \quad \text{sau} \quad f(z) \prec g(z),$$

dacă există w o funcţie analitică în $\mathcal{U}$ cu $w(0) = 0$ şi $|w(z)| < 1$, $z \in \mathcal{U}$ astfel încât să avem

$$f(z) = g(w(z)), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Proprietatea 1.2.3 ([62])**.** *Fie $f, g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. Dacă $f \prec g$ au loc următoarele:*

(i) $f(\overline{\mathcal{U}_r}) \subseteq g(\overline{\mathcal{U}_r})$, *pentru orice* $r \in (0,1)$;

(ii) $\max\{|f(z)| : |z| < r\} \leq \max\{|g(z)| : |z| < r\}$, *pentru orice* $r \in (0,1)$;

(iii) $|f'(0)| \leq |g'(0)|$.

Egalităţile se obţin dacă şi numai dacă $f(z) = g(\lambda z)$, *unde* $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$.

În cazul în care funcţia g este univalentă, avem următoarea caracterizare a subordonării:

Teorema 1.2.4 ([62], [68])**.** *Fiec f o funcţie analitică şi g o funcţie univalentă în $\mathcal{U}$. Atunci $f \prec g$ dacă şi numai dacă $f(0) = g(0)$ şi $f(\mathcal{U}) \subseteq g(\mathcal{U})$.*

1.3 Funcţii stelate şi funcţii convexe

Introducem acum două clase importante de funcţii univalente, clasa funcţiilor stelate şi clasa funcţiilor convexe, definite prin proprietăţi geometrice, dar care pot fi în acelaşi timp complet caracterizare analitic, prin inegalităţi simple.

Definiţia 1.3.1. Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ cu $f(0) = 0$. Spunem că f este *stelată în raport cu originea în* $\mathcal{U}$ (sau, pe scurt, *stelată*) dacă f este univalentă şi imaginea $f(\mathcal{U})$ este un domeniu stelat în raport cu originea.

Teorema 1.3.2 ([62])**.** *Fie $f \in \mathcal{H}(U)$ cu $f(0) = 0$. Funcţia f este stelată dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Definiţia 1.3.3 ([62])**.** Notăm cu $\mathcal{S}^*$ clasa funcţiilor stelate şi normate în $\mathcal{U}$, adică

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0, \ z \in \mathcal{U} \right\}.$$

Definiţia 1.3.4. Fie $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. Spunem că funcţia f este *convexă în* $\mathcal{U}$ (sau, pe scurt, *convexă*) dacă f este univalentă în $\mathcal{U}$ şi imaginea $f(\mathcal{U})$ este un domeniu convex.

Teorema 1.3.5 ([62])**.** *O funcţie $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ este convexă dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0\,, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 1.3.6 ([3], Teorema de dualitate a lui Alexander)**.** *O funcţie f este convexă în $\mathcal{U}$ dacă şi numai dacă funcţia g definită prin $g(z) = zf'(z)$, $z \in \mathcal{U}$, este stelată în $\mathcal{U}$.*

Definiţia 1.3.7 ([62])**.** Notăm cu $\mathcal{K}$ clasa funcţiilor convexe şi normate în $\mathcal{U}$, adică

$$\mathcal{K} = \left\{ f \in \mathcal{A} \,:\, \operatorname{Re} \frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0\,,\ z \in \mathcal{U} \right\}.$$

Avem incluziunile $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$. Teorema de dualitate a lui Alexander se poate rescrie, utilizând clasele $\mathcal{S}^*$ şi $\mathcal{K}$, astfel:

$$f(z) \in \mathcal{K} \Leftrightarrow zf'(z) \in \mathcal{S}^*.$$

1.4 Subclase de funcţii stelate sau convexe

Prezentăm pentru început câteva subclase ale familiilor de funcţii stelate şi convexe în $\mathcal{U}$. Considerăm mai întât clasa funcţiilor $\alpha-$convexe. Noţiunea de $\alpha-$convexitate a fost introdusă de Mocanu în 1969 [59], cu scopul creării unei treceri continue de la clasa funcţiilor stelate la cea a funcţiilor convexe.

Definiţia 1.4.1. Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $f \in \mathcal{A}$ astfel încât $\dfrac{f(z)f'(z)}{z} \neq 0$, $z \in \mathcal{U}$. Fie de asemenea

$$J(\alpha, f; z) = (1-\alpha)\frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right).$$

Spunem că f este *$\alpha-$convexă în $\mathcal{U}$* dacă

$$\operatorname{Re} J(\alpha, f; z) > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Notăm cu $\mathcal{M}_\alpha$ clasa funcţiilor $\alpha-$convexe în $\mathcal{U}$. Este evident că $\mathcal{M}_0 = \mathcal{S}^*$ şi $\mathcal{M}_1 = \mathcal{K}$.

Teorema 1.4.2 ([59], [57])**.** *Dacă $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{M}_\alpha \subseteq \mathcal{S}^*$. Mai mult, pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ cu $0 \leq \alpha/\beta < 1$, avem incluziunea $\mathcal{M}_\beta \subset \mathcal{M}_\alpha$.*

Într-o manieră similară dar utilizând media geometrică, Lewandowski et al. [42] au definit clasa funcţiilor $\gamma-$stelate după cum urmează:

Definiţia 1.4.3 ([42])**.** Fie $\gamma \in \mathbb{R}$ şi $f \in \mathcal{A}$. Considerăm de asemenea

$$L(\gamma, f; z) = \left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)^{1-\gamma}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)^{\gamma}.$$

Spunem că funcţia f este *$\gamma-$stelată în $\mathcal{U}$* dacă

$$L(\gamma, f; z) > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Vom nota cu $\mathcal{L}_\gamma$ clasa funcţiilor $\gamma-$stelate în $\mathcal{U}$. În mod evident avem că $\mathcal{L}_0 = \mathcal{S}^*$ şi $\mathcal{L}_1 = \mathcal{K}$.

Teorema 1.4.4 ([42], [43]). *Fie $\gamma \in \mathbb{R}$. Atunci $\mathcal{L}_\gamma \subset \mathcal{S}^*$.*

Definiţia 1.4.5. Fie $\alpha \in [0,1)$ şi f o funcţie analitică în $\mathcal{U}$. Spunem că f este *stelată de ordin α în $\mathcal{U}$* dacă $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$ şi

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \alpha, \quad z \in \mathcal{U}.$$

De asemenea, spunem că f este *convexă de ordin α în $\mathcal{U}$* dacă $f'(0)\neq 0$ şi

$$\operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > \alpha, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Notăm cu $\mathcal{S}^*(\alpha)$ şi $\mathcal{K}(\alpha)$ clasa funcţiilor stelate de ordin α, respectiv clasa funcţiilor convexe de ordin α în $\mathcal{U}$.

Definiţia 1.4.6. Fie $\gamma \in (0,1]$. O funcţie $f \in \mathcal{A}$ se numeşte *tare stelată de ordin γ* dacă satisface inegalitatea

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\gamma, \quad z \in \mathcal{U}.$$

De asemenea, spunem că $f \in \mathcal{A}$ este *tare convexă de ordin γ* dacă are loc

$$\left|\arg\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\gamma, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Vom nota cu $\mathcal{SS}^*(\gamma)$ şi $\mathcal{SK}(\gamma)$ clasa funcţiilor tare stelate de ordin γ, respectiv clasa funcţiilor tare convexe de ordin γ.

Utilizând condiţia ca $zf'(z)/f(z)$ sau $1+zf''(z)/f'(z)$ să fie subordonată unei funcţii mai generale φ, Ma şi Minda au realizat o generalizare a diverselor subclase de funcţii stelate şi respectiv convexe.

Definiţia 1.4.7 ([49]). Fie ϕ o funcţie analitică cu partea reală pozitivă în $\mathcal{U}$, cu $\phi(0)=1$, $\phi'(0)>0$ şi având proprietatea că $\phi(\mathcal{U})$ e o mulţime stelată în raport cu 1 şi simetrică în raport cu axa reală. Vom spune că funcţia $f \in \mathcal{A}$ aparţine clase $\mathcal{S}^*(\phi)$ a funcţiilor *stelate de tip Ma-Minda*, dacă ea satisface subordonarea

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \phi(z).$$

De asemenea, spunem că $f \in \mathcal{A}$ aparţine clasei $\mathcal{K}(\phi)$ a funcţiilor *convexe de tip Ma-Minda* dacă verifică subordonarea

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \phi(z).$$

Prezentăm în continuare clasa funcţiilor stelate în raport cu puncte simetrice, notată cu $\mathcal{S}_s^*$, care a fost introdusă şi studiată de către Sakaguchi în [77], precum şi clasa funcţiilor convexe în raport cu puncte simetrice, introdusă de Wang et al. [88].

Definiţia 1.4.8 ([77]). Spunem că o funcţie $f \in \mathcal{S}$ este *stelată în raport cu puncte simetrice în $\mathcal{U}$* dacă are loc inegalitatea

$$\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)-f(-z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Definiţia 1.4.9 ([88])**.** Spunem că $f \in \mathcal{S}$ este *convexă în raport cu puncte simetrice în* $\mathcal{U}$ dacă are loc inegaliatatea

$$\mathrm{Re}\frac{(zf'(z))'}{f'(z)+f'(-z)} > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

În stilul lui Ma şi Minda, Ravichandran [69] generalizează clasele $\mathcal{S}_s^*$ şi $\mathcal{K}_s$ utilizând subordonări, introducând clasele $\mathcal{S}_s^*(\phi)$ cu $\mathcal{K}_s(\phi)$, cu ϕ definit precum în Definiţia 1.4.7:

Definiţia 1.4.10 ([69])**.** O funcţie $f \in \mathcal{A}$ aparţine clasei $\mathcal{S}_s^*(\phi)$ dacă verifică subordonarea

$$\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)} \prec \phi(z).$$

Definiţia 1.4.11 ([69])**.** O funcţie $f \in \mathcal{A}$ aparţine clasei $\mathcal{K}_s(\phi)$ dacă are loc

$$\frac{2(zf'(z))'}{f'(z)+f'(-z)} \prec \phi(z).$$

În finalul paragrafului prezentăm noţiunea de funcţie prestelată, datorată lui Ruscheweyh.

Definiţia 1.4.12 ([74])**.** Fie $f \in \mathcal{A}$ şi $\gamma < 1$. Spunem că f este *prestelată de ordin* γ *în* $\mathcal{U}$ dacă

$$f(z) * \frac{z}{(1-z)^{2-2\gamma}} \in \mathcal{S}^*(\gamma).$$

Vom nota cu $\mathcal{R}(\gamma)$ clasa funcţiilor prestelate de ordin γ în $\mathcal{U}$. Clasa $\mathcal{R}(1)$ se defineşte ca mulţimea funcţiilor $f \in \mathcal{A}$ care satisfac inegalitatea $\mathrm{Re}(f(z)/z) > 1/2$, $z \in \mathcal{U}$.

Teorema 1.4.13 ([74])**.** *Fie* $\gamma \leq 1$, $f \in \mathcal{R}(\gamma)$ *şi* $g \in \mathcal{S}^*(\gamma)$. *Atunci*

$$\frac{f * gF}{f * g}(\mathcal{U}) \subset \overline{\mathrm{co}}(F(\mathcal{U})),$$

unde F *e o funcţie analitică în* $\mathcal{U}$, *iar* $\overline{\mathrm{co}}(F(\mathcal{U}))$ *reprezintă închiderea înveliторii convexe a lui* $F(\mathcal{U})$.

1.5 Funcţii aproape convexe, funcţii qvasi-convexe şi funcţii spiralate

Definiţia 1.5.1. Fie $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$. Spunem că f este *aproape convexă în* $\mathcal{U}$ dacă există o funcţie g, convexă în $\mathcal{U}$, astfel încât

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.2}$$

Observaţia 1.5.2. Pe baza Teoremei de dualitate a lui Alexander 1.3.6, condiţia (1.2) poate fi înclocuită cu cerinţa

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U},$$

unde g e stelată în $\mathcal{U}$. Deducem de aici că dacă f este stelată în $\mathcal{U}$, atunci f este de asemenea aproape convexă.

Definiţia 1.5.3. Notăm cu $\mathcal{C}$ clasa funcţiilor normate şi aproape convexe în $\mathcal{U}$, i.e.

$$\mathcal{C} = \left\{ f \in \mathcal{A} \, : \, \mathrm{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) > 0, \ g \text{ convexă}, \ z \in \mathcal{U} \right\}.$$

Observaţia 1.5.4. Au loc incluziunile

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S}.$$

Definiţia 1.5.5 ([64])**.** Spunem că o funcţie $f \in \mathcal{A}$ este *qvasi-convexă în* $\mathcal{U}$ dacă există $g \in \mathcal{K}$ astfel încât

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(zf'(z))'}{g'(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.3}$$

Vom nota cu $\mathcal{Q}$ clasa funcţiilor qvasi-convexe în $\mathcal{U}$, i.e.

$$\mathcal{Q} = \left\{ f \in \mathcal{A} \, : \, \mathrm{Re}\left(\frac{(zf'(z))'}{g'(z)}\right) > 0, \ g \in \mathcal{K}, \ z \in \mathcal{U} \right\}.$$

Definiţia 1.5.6. Dacă $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi D este un domeniu în $\mathbb{C}$ astfel încât $0 \in D$, atunci spunem că D este λ-*spiralat* dacă oricare ar fi $w \in D$, arcul de λ-spirală ce uneşte punctul w cu originea este inclus în D.

Fie $f \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ cu $f(0) = 0$. Spunem că f este λ-*spiralată* dacă f e univalentă în $\mathcal{U}$ şi domeniul $f(\mathcal{U})$ este $\lambda-$spiralat. Spunem că f este *spiralată* dacă există un număr real $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ astfel încât f să fie $\lambda-$spiralată.

Notăm cu $\hat{\mathcal{S}}_\lambda$ clasa funcţiilor normate şi $\lambda-$spiralate. Se observă că $\hat{\mathcal{S}}_0 = \mathcal{S}^*$.

Teorema 1.5.7 ([81])**.** *Fie funcţia $f \in \mathcal{H}(U)$ cu $f(0) = 0$ şi $f'(0) \neq 0$, şi fie $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$. Atunci f este $\lambda-$spiralată dacă şi numai dacă*

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\lambda}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Definiţia 1.5.8 ([45])**.** Fie $0 \le \alpha < 1$ şi $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$. Spunem că funcţia $f \in \mathcal{A}$ este λ-*spiralată de ordin* α în $\mathcal{U}$ dacă

$$\mathrm{Re}\left(e^{i\lambda}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\cos\lambda\,, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.4}$$

Definiţia 1.5.9 ([12])**.** Fie $0 \le \alpha < 1$ şi $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$. O funcţie $f \in \mathcal{A}$ aparţine clasei $\mathcal{F}^\lambda(\alpha)$ dacă ea satisface inegalitatea

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\lambda}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right] > \alpha\cos\lambda\,, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.5}$$

1.6 Subordonări diferenţiale

Metoda subordonărilor diferenţiale (sau metoda funcţiilor admisibile) este una din cele mai frecvent folosite metode în teoreia geometrică a funcţiilor analitice, facilitând atât demonstrarea mai simpă a unor rezultate deja cunoscute, cât şi obţinerea multor altor rezultate noi. Bazele teoriei au fost puse de către Miller şi Mocanu în articolele [53] şi [54], iar metoda a fost apoi dezvoltată, analizată şi folosită în numeroase alte lucrări.

Definiţia 1.6.1 ([53])**.** Fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ şi fie h o funcţie univalentă în $\mathcal{U}$. Dacă $p \in \mathcal{H}[a,n]$ verifică *subordonarea diferenţială*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z), \quad z \in \mathcal{U}, \tag{1.6}$$

atunci funcţia p se numeşte (a,n)-*soluţie* (sau, pe scrut, *soluţie*) a subordonării diferenţiale (1.6).

O funcţie univalentă q se numeşte (a,n)-*dominantă* (sau pe scurt, *dominantă*) a subordonării diferenţiale (1.6) dacă $p(z) \prec q(z)$, oricare ar fi funcţia p soluţie pentru (1.6).

O dominantă $\widetilde{q}$ astfel încât $\widetilde{q} \prec q$ oricare ar fi dominanta q pentru (1.6) se numeşte *cea mai bună* (a,n)-*dominantă* (sau, pe scurt, *cea mai bună dominantă*) a subordonării diferenţiale (1.6).

Metoda subordonărilor diferenţiale se bazează pe următoarele leme fundamentale:

Lema 1.6.2 ([54])**.** *Fie $z_0 = r_0e^{i\theta_0}$, $0 < r_0 < 1$, şi fie $f(z) = a_nz^n + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+2}z^{n+2} + \cdots$, $(n \geq 1)$ continuă pe $\overline{\mathcal{U}}_{r_0}$ şi analitică în $\mathcal{U}_{r_0} \cup \{z_0\}$, cu $f(z) \not\equiv 0$. Dacă*

$$|f(z_0)| = \max\left\{|f(z)| \,:\, z \in \overline{\mathcal{U}_{r_0}}\right\},$$

atunci există un număr real $m \geq n$ astfel încât

(i) $\dfrac{z_0f'(z_0)}{f(z_0)} = m$

şi

(ii) $\mathrm{Re}\,\dfrac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 \geq m.$

Definiţia 1.6.3. Notăm cu Q mulţimea funcţiilor q univalente în $\overline{\mathcal{U}}\backslash E(q)$, unde

$$E(q) = \left\{\zeta \in \partial\mathcal{U} \,:\, \lim_{z\to\zeta} q(z) = \infty\right\},$$

şi care îndeplinesc condiţia $q'(\zeta) \neq 0$, $\zeta \in \partial\mathcal{U}\backslash E(q)$.

Lema 1.6.4 ([53])**.** *Fie funcţia $p(z) = a + a_nz^n + \cdots$ analitică în $\mathcal{U}$ cu $p(z) \not\equiv a$ şi $n \geq 1$, şi fie $q \in Q$, $q(0) = a$. Dacă există punctele $z_0 = r_0e^{i\theta_0} \in \mathcal{U}$ şi $\zeta_0 \in \partial\mathcal{U}\backslash E(q)$ astfel încât $p(z_0) = q(\zeta_0)$ şi $p(\mathcal{U}_{r_0}) \subset q(\mathcal{U})$, atunci există un număr real $m \geq n \geq 1$ pentru care avem*

(i) $z_0p'(z_0) = m\zeta_0q'(\zeta_0)$

şi

(ii) $\mathrm{Re}\,\dfrac{z_0f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 \geq m\mathrm{Re}\left[\dfrac{\zeta_0q''(\zeta_0)}{q'(\zeta_0)} + 1\right].$

Lema 1.6.5 ([52])**.** *Fie $q \in Q$ cu $q(0) = a$ şi fie $p = a + a_nz^n + \cdots$ o funcţie analitică în $\mathcal{U}$ cu $p(z) \not\equiv a$ şi $n \geq 1$. Dacă p nu e subordonată lui q, atunci există punctele $z_0 = r_0e^{\theta_0} \in \mathcal{U}$ şi $\zeta_0 \in \partial\mathcal{U} \setminus E(q)$, şi există un număr real $m \geq n \geq 1$ astfel încât $p(\mathcal{U}_{|z_0|}) \subset q(\mathcal{U})$ şi*

(i) $p(z_0) = q(\zeta_0)$,

(ii) $z_0p'(z_0) = m\zeta_0q'(\zeta_0)$

(iii) $\mathrm{Re}\,\dfrac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)} + 1 \geq m\mathrm{Re}\left[\dfrac{\zeta_0 q''(\zeta_0)}{q'(\zeta_0)} + 1\right].$

Definiţia 1.6.6 ([53]). Fie $\Omega \subset \mathbb{C}$, $q \in Q$ şi $n \in \mathbb{N}^*$. Vom nota cu $\Psi_n[\Omega, q]$ clasa funcţiilor $\psi : \mathbb{C}^3 \times \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţia

$$\psi(r, s, t; z) \notin \Omega \quad \text{atunci când}$$
$$r = q(\zeta),\ s = m\zeta q'(\zeta),\ \mathrm{Re}\left[\frac{t}{s} + 1\right] \geq m\,\mathrm{Re}\left[\frac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)} + 1\right],$$
$$\text{unde } z \in \mathcal{U},\ \zeta \in \partial\mathcal{U}\backslash E(q) \text{ şi } m \geq n.$$

Mulţimea $\Psi_n[\Omega, q]$ se numeşte *clasa funcţiilor admisibile*, iar condiţia de mai sus se numeşte *condiţie de admisibilitate.*

Teorema 1.6.7 ([92]). *Fie funcţia p analitică în $\mathcal{U}$ cu $p(0) = 1$ şi fie h o funcţie stelată în $\mathcal{U}$ cu $h(0) = 0$. Dacă*

$$zp'(z) \prec h(z),$$

atunci

$$p(z) \prec 1 + \int_0^z \frac{h(t)}{t}dt.$$

Teorema 1.6.8 ([56]). *Fie h o funcţie convexă în $\mathcal{U}$ şi P o funcţie analitică, cu $\mathrm{Re}\,P(z) > 0$, $z \in \mathcal{U}$. Dacă p e analitică în $\mathcal{U}$, $p(0) = h(0)$ şi p verifică subordonarea*

$$p(z) + P(z)zp'(z) \prec h(z), \tag{1.7}$$

atunci are loc

$$p(z) \prec h(z).$$

Definiţia 1.6.9 ([52]). Fie h o funcţie univalentă în $\mathcal{U}$ cu $h(0) = a$, şi fie funcţia $p \in \mathcal{H}[a, n]$ şi β, $\gamma \in \mathbb{C}$, $\beta \neq 0$. O subordonare diferenţială de forma

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \prec h(z), \tag{1.8}$$

se numeşte *subordonare diferenţială Briot-Bouquet.*

Teorema 1.6.10 ([24]). *Fie β, $\gamma \in \mathbb{C}$ cu $\beta \neq 0$ şi fie h o funcţie convexă care verifică inegalitatea*

$$\mathrm{Re}\,[\beta h(z) + \gamma] > 0, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă funcţia p este analitică în $\mathcal{U}$, $p(0) = h(0)$, şi satisface subordonarea

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \gamma} \prec h(z)$$

atunci $p(z) \prec h(z)$.

1.7 Subclase de funcţii meromorfe

Fie

$$\varphi = \zeta + a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \cdots , \quad \zeta \in \mathcal{U}^- \tag{1.9}$$

o funcţie meromorfă aparţinând clasei Σ şi fie $E(\varphi) = \mathbb{C} \backslash \varphi(\mathcal{U}^-)$.

Notăm cu Σ_0 subclasa funcţiilor $\varphi \in \Sigma$ care nu se anulează în exteriorul discului unitate, i.e.

$$\Sigma_0 = \left\{ \varphi \in \Sigma \, : \, \varphi(\zeta) \neq 0, \ \zeta \in \mathcal{U}^- \right\}.$$

Definiţia 1.7.1 ([62]). Spunem că funcţia φ având forma (1.9) este *stelată în* $\mathcal{U}^-$ dacă φ este univalentă în $\mathcal{U}^-$ şi mulţimea $E(\varphi)$ este stelată în raport cu originea.

Definiţia 1.7.2 ([62]). Fie

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots , \quad z \in \mathcal{U}^*$$

o funcţie meromorfă în $\mathcal{U}^*$. Spunem că f este *stelată în* $\mathcal{U}^*$ dacă funcţia $\varphi = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, $\zeta \in \mathcal{U}^-$ este stelată în $\mathcal{U}^-$.

Teorema 1.7.3 ([62]). *Fie* $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$, $z \in \mathcal{U}^*$ *o funcţie meromorfă în* $\mathcal{U}^*$ *cu* $f(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$. *Atunci funcţia* f *este stelată în* $\mathcal{U}^*$ *dacă şi numai dacă* f *este univalentă în* $\mathcal{U}^*$ *şi verifică*

$$\operatorname{Re}\left[-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in \mathcal{U}^*.$$

Vom nota cu $\Sigma^*(\alpha)$ clasa funcţiilor meromorfe şi stelate de ordin α $(0 \le \alpha < 1)$ în $\mathcal{U}^*$,

$$\Sigma^*(\alpha) = \left\{ f \text{ meromorfă în } \mathcal{U}^* \, : \, f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots , \ \operatorname{Re}\left[-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha, \ z \in \mathcal{U}^* \right\}. \tag{1.10}$$

Definiţia 1.7.4 ([62]). Spunem că funcţia φ de forma (1.9) este *convexă în* $\mathcal{U}^-$ dacă φ este univalentă în $\mathcal{U}^-$ şi mulţimea $E(\varphi)$ este convexă.

Teorema 1.7.5 ([62]). *Fie* $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$, $z \in \mathcal{U}^*$ *o funcţie meromorfă în* $\mathcal{U}^*$ *cu* $f(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$. *Atunci funcţia* f *este convexă în* $\mathcal{U}^*$ *dacă şi numai dacă* f *este univalentă în* $\mathcal{U}^*$ *şi verifică*

$$\operatorname{Re}\left[-\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right)\right] > 0, \quad z \in \mathcal{U}^*.$$

Definiţia 1.7.6 ([1]). Fie $\varphi \in \Sigma_0$. Spunem că funcţia φ este *aproape convexă în* $\mathcal{U}^-$ dacă există o funcţie $\psi \in \Sigma^*$ astfel încât $\operatorname{Re} \frac{\zeta\varphi'(\zeta)}{\psi(\zeta)} > 0$, $\zeta \in \mathcal{U}^-$.

Definiţia 1.7.7 ([1])**.** Fie

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots, \quad z \in \mathcal{U}^*$$

o funcţie meromorfă în $\mathcal{U}^*$. Spunem că funcţia f este *aproape convexă în* $\mathcal{U}^*$ dacă există o funcţie g, meromorfă şi stelată în $\mathcal{U}^*$, astfel încât $\varphi(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, $\zeta \in \mathcal{U}^-$, este aproape-convexă în $\mathcal{U}^-$ în raport cu funcţia $\psi(\zeta) = g\left(\frac{1}{\zeta}\right)$, $\zeta \in \mathcal{U}^-$ (care este stelată în $\mathcal{U}^-$).

Teorema 1.7.8 ([1])**.** *Fie funcţia* $f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$, $z \in \mathcal{U}^*$ *meromorfă în* $\mathcal{U}^*$ *cu* $f(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$. *Atunci* f *este aproape convexă în* $\mathcal{U}^*$ *dacă şi numai dacă* f *este univalentă în* $\mathcal{U}^*$ *şi există o funcţie* g, *meromorfă şi stelată în* $\mathcal{U}^*$, *astfel încât*

$$\operatorname{Re}\left[-\frac{zf'(z)}{g(z)}\right] > 0, \quad z \in \mathcal{U}^*.$$

1.8 Operatori diferenţiali şi integrali

Prezentăm în aceast paragraf câteva proprietăţi de bază ale unor operatori diferenţiali şi integrali des utilizaţi în teoria geometrică a funcţiilor analitice.

Fie funcţiile $f, g \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$, $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j$, $g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j$. Notăm cu $f * g$ *convoluţia* (sau *produsul Hadamard*) al funcţiilor f şi g, definit prin

$$(f * g)(z) \equiv f(z) * g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j z^j.$$

Definiţia 1.8.1 ([75])**.** Fie $n \in \mathbb{N}$. Operatorul diferenţial Ruscheweyh $R^n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se defineşte prin

$$R^n f(z) = \frac{z}{(1-z)^{n+1}} * f(z), \quad f \in \mathcal{A},\ z \in \mathcal{U}.$$

Observaţia 1.8.2 ([75])**.** Pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $f \in \mathcal{A}$, $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$, $R^n f$ are următoarea dezvoltare în serie de puteri:

$$R^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} C_{n+j-1}^{n} a_j z^j, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.11}$$

Observaţia 1.8.3 ([75])**.** Fie $n \in \mathbb{N}$ şi funcţia $f \in \mathcal{A}$. Are loc relaţia de recurenţă

$$(n+1) R^{n+1} f(z) = n R^n f(z) + z(R^n f(z))', \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.12}$$

Definiţia 1.8.4 ([5])**.** Fie $n \in \mathbb{N}$ şi $\delta \geq 0$. Operatorul diferenţial Al-Oboudi $D_\delta^n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, se defineţe astfel:

$$D^0 f(z) = f(z),$$
$$D^1 f(z) \equiv D_\delta f(z) = zf'(z),$$
$$D_\delta^n f(z) = D_\delta(D_\delta^{n-1} f(z)), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Observaţia 1.8.5 ([5])**.** Dacă $f \in \mathcal{A}$, $f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j$, atunci

$$D_\delta^n f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} [1 + (j-1)\delta]^n a_j z^j, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{1.13}$$

Definiţia 1.8.6 ([79])**.** Fie $n \in \mathbb{N}$. Operatorul integral Sălăgean $I^n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se defineşte prin:

$$I^0 f(z) = f(z),$$

$$I^1 f(z) = If(z) = \int_0^z f(t) t^{-1} dt,$$

şi

$$I^n f(z) = I(I^{n-1} f(z)), \quad f \in \mathcal{A}. \tag{1.14}$$

Definiţia 1.8.7 ([7])**.** Fie $c \in \mathbb{N}$. Operatorul integral Bernardi $L_c : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ este definit prin

$$L_c f(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z f(t) t^{c-1} \mathrm{d}t, \quad f \in \mathcal{A},\ z \in \mathcal{U}. \tag{1.15}$$

Capitolul 2

Noi clase de funcţii analitice

Acest capitol conţine o serie de rezultate originale, incluse în lucrările [16], [21], [17] şi [18], se referă la un nou operator diferenţial, $D^n_{\lambda\delta}f$, construit ulitizând operatorii Al-Oboudi şi Ruscheweyh (în paragraful 2.1), la operatorul integral Sălăgean (în paragragul 2.2), precum şi la câteva noi clase de funcţii bi-univalente (în paragrful 2.3).

2.1 Subordonări diferenţiale obţinute cu ajutorul operatorilor Al-Oboudi şi Ruscheweyh

Introducem în acest paragraf un nou operator diferenţial, $D^n_{\lambda\delta}$ şi, utilizând proprietăţile acestuia, studiem o serie de suboronări diferenţiale.

Definiţia 2.1.1 ([16])**.** Fie $n \in \mathbb{N}$, $\delta \geq 0$ şi $\lambda \geq 0$ astfel încât $\delta \neq (\lambda - 1)/\lambda$. Definim operatorul $D^n_{\lambda\delta} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, astfel

$$D^n_{\lambda\delta}f(z) = \frac{1}{1-\lambda+\lambda\delta}[(1-\lambda)D^n_\delta f(z) + \lambda\delta R^n f(z)], \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.1}$$

unde operatorii $D^n_\delta f$ şi $R^n f$ sunt daţi în Definiţia 1.8.4 şi respectiv Definiţia 1.8.1.

Observaţia 2.1.2 ([16])**.** Dacă $\lambda = 0$ în relaţia (2.1), $D^n_{\lambda\delta}$ se reduce la operatorul Al-Oboudi, iar atunci când $\lambda = 1$ regăsim operatorul diferenţial Ruscheweyh.

Este de asemenea uşor de observat că pentru $n = 0$ avem

$$D^0_{\lambda\delta}f(z) = \frac{1}{1-\lambda+\lambda\delta}[(1-\lambda)D^0_\delta f(z) + \lambda\delta R^0 f(z)] = f(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Observaţia 2.1.3 ([16])**.** Remarcăm că $D^n_{\lambda\delta}$ este un operator liniar, iar pentru $f \in \mathcal{A}$ de forma

$$f(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} a_j z^j,$$

utilizând ecuaţiile (1.13) şi (1.11), obţinem

$$D^n_{\lambda\delta}f(z) = z + \frac{1}{1-\lambda+\lambda\delta}\sum_{j=2}^{\infty}\left[(1-\lambda)\left(1+(j-1)\delta\right)^n + \lambda\delta C^n_{n+j-1}\right] a_j z^j, \; z \in \mathcal{U}. \tag{2.2}$$

Teorema 2.1.4 ([16])**.** *Fie $0 \leq \alpha < 1$ şi $f \in \mathcal{A}_m$. Dacă f satisface relaţia*

$$\mathrm{Re}\left[\left(D_{\lambda\delta}^{n+1} f(z)\right)' + \frac{\lambda\delta z(\delta n + \delta - 1)\left(R^n f(z)\right)''}{(1-\lambda+\lambda\delta)(n+1)}\right] > \alpha, \quad z \in \mathcal{U}, \tag{2.3}$$

atunci are loc inegalitatea

$$\mathrm{Re}\,(D_{\lambda\delta}^n f(z))' > \gamma \quad (z \in \mathcal{U}),$$

unde

$$\gamma = \gamma(\alpha) = 2\alpha - 1 + \frac{2(1-\alpha)}{\delta m}\beta\left(\frac{1}{\delta m}\right)$$

şi

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt\,.$$

Exemplul 2.1.5 ([16])**.** În cazul $f \in \mathcal{A}$, $n = 1$, $\lambda = 1/2$, $\delta = 1$ şi $\alpha = 1/2$, avem că $\gamma(\alpha) = \ln 2$ iar inegalitatea

$$\mathrm{Re}\left[f'(z) + 3zf''(z) + z^2 f'''(z)\right] > \frac{1}{2}, \quad z \in \mathcal{U},$$

implică

$$\mathrm{Re}\left[f'(z) + zf''(z)\right] > \ln 2, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Teorema 2.1.6 ([16])**.** *Fie $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, r o funcţie convexă cu $r(0) = 1$ şi h o funcţie cu proprietatea că*

$$h(z) = r(z) + m\delta z r'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}_m$, atunci subordonarea

$$\left(D_{\lambda\delta}^{n+1} f(z)\right)' + \frac{\lambda\delta z(\delta n + \delta - 1)\left(R^n f(z)\right)''}{(1-\lambda+\lambda\delta)(n+1)} \prec h(z) = r(z) + m\delta z r'(z) \tag{2.4}$$

implică

$$(D_{\lambda\delta}^n f(z))' \prec r(z),$$

iar acest rezultat este exact.

Teorema 2.1.7 ([16])**.** *Fie $m \in \mathbb{N}$, r o funcţie convexă cu $r(0) = 1$ şi h o funţie cu proprietatea*

$$h(z) = r(z) + mzr'(z), \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dacă $f \in \mathcal{A}_m$, atunci subordonarea

$$(D_{\lambda\delta}^n f(z))' \prec h(z) = r(z) + mzr'(z) \tag{2.5}$$

implică

$$\frac{D_{\lambda\delta}^n f(z)}{z} \prec r(z).$$

Rezultatul este exact.

2.2 Subclase de funcţii analitice definite utilizând operatorul integral Sălăgean

Folosind operatorul integral Sălaăgean vom defini două noi clase de funcţii, iar cu ajutorul subordonărilor diferenţiale se vor studia câteva proprietătţi de incluziune şi de conservare a clasei sub operatorul integral Bernardi.

Definiţia 2.2.1 ([21]). Fie $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\alpha \in [0, 1)$. Notăm cu $\mathcal{S}_n^\lambda(\alpha)$ clasa tuturor funcţiilor $f \in \mathcal{A}$ cu proprietatea

$$I^n f \in \mathcal{S}^\lambda(\alpha),$$

unde $\mathcal{S}^\lambda(\alpha)$ reprezintă clasa funcţiilor λ-spiralate de ordin α, dată în Definiţia 1.5.8.

De asemenea, notăm cu $\mathcal{F}_n^\lambda(\alpha)$clasa funcţiilor $f \in \mathcal{A}$ care verifică

$$I^n f \in \mathcal{F}^\lambda(\alpha),$$

unde $\mathcal{F}^\lambda(\alpha)$ e clasa introdusă în Definition 1.5.9.

Observaţia 2.2.2 ([21]). Se verifică imediat că $f(z) \in \mathcal{F}_n^\lambda(\alpha)$ dacă şi numai dacă $zf'(z) \in \mathcal{S}_n^\lambda(\alpha)$. De asemenea avem $\mathcal{S}_0^\lambda(\alpha) = \mathcal{S}^\lambda(\alpha)$ şi $\mathcal{F}_0^\lambda(\alpha) = \mathcal{F}^\lambda(\alpha)$.

Teorema 2.2.3 ([21]). *Fie $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\alpha \in [0, 1)$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, are loc incluziunea*

$$S_n^\lambda(\alpha) \subset S_{n+1}^\lambda(\alpha).$$

Teorema 2.2.4 ([21]). *Fie $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\alpha \in [0, 1)$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, avem*

$$\mathcal{F}_n^\lambda(\alpha) \subset \mathcal{F}_{n+1}^\lambda(\alpha).$$

Teorema 2.2.5 ([21]). *Fie $c \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\alpha \in [0, 1)$. Dacă $f \in \mathcal{S}_n^\lambda(\alpha)$ atunci $L_c f \in \mathcal{S}_n^\lambda(\alpha)$.*

Teorema 2.2.6 ([21]). *Fie $c \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\alpha \in [0, 1)$. Dacă $f \in \mathcal{F}_n^\lambda(\alpha)$ atunci $L_c f \in \mathcal{F}_n^\lambda(\alpha)$.*

2.3 Subclase de funcţii bi-univalente. Estimări ale coeficienţilor

Studiem în aceast paragraf estimări ale coeficienţilor pentru o serie de subclase de funcţii bi-univalente.

Spunem că o funcţie $f \in \mathcal{A}$ este *bi-univalentă în $\mathcal{U}$* dacă f şi prelungirea analitică a lui f^{-1} la $\mathcal{U}$ sunt ambele univalente în $\mathcal{U}$. Vom nota cu σ clasa funcţiilor bi-univalente în $\mathcal{U}$.

Funcţiile $\frac{z}{1-z}$, $-\log(1-z)$ sau $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ sunt câteva exemple de funcţii aparţinând clasei σ. În schimb, funcţia lui Koebe sau funcţiile $z - \frac{z^2}{2}$ şi $\frac{z}{1-z^2}$ deşi membre în $\mathcal{S}$, nu sunt bi-univalente.

Lewin [44] a fost primul care a studiat această clasa a funcţiilor bi-univalente, arătând că al doilea coeficient al dezvoltării în serie de puteri a unei funcţii din σ verifică $|a_2| < 1.51$. Funcţiile bi-univalente au făcut recent obiectul a numeroase lucrări de cercetare, căutându-se în general a se găsi estimări ale coeficienţilor a_2 şi a_3 pentru diverse subclase ale lui σ (a se vedea, spre exemplu, lucrările [4], [25], [82]).

Pe parcursul acestui paragraf, ϕ este o funcţie analitică cu partea reală pozitivă în $\mathcal{U}$, $\phi(0) = 1$ şi $\phi'(0) > 0$, şi cu proprietatea că $\phi(\mathcal{U})$ este un domeniu stelat în raport cu 1 şi simetric faţă de axa reală. Prin urmare, ϕ are o dezvoltare în serie de puteri de forma

$$\phi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots, \quad B_1 > 0. \tag{2.6}$$

Definiţia 2.3.1 ([17]). Spunem că o funcţie $f \in \sigma$ aparţine clasei $\mathcal{S}^*_{s,\sigma}(\phi)$ dacă f şi f^{-1} aparţin lui $\mathcal{S}^*_s(\phi)$, unde $\mathcal{S}^*_s(\phi)$ este dată în Definiţia 1.4.10.

Definiţia 2.3.2 ([17]). Spunem că o funcţie $f \in \sigma$ aparţine clasei $\mathcal{K}_{s,\sigma}(\phi)$ dacă f şi f^{-1} sunt funcţii din $\mathcal{K}_s(\phi)$, unde $\mathcal{K}_s(\phi)$ este clasa introdusă în Definiţia 1.4.11.

Prezentăm în continuare câteva rezultate de estimare a coeficienţilor pentru clasele definite anterior.

Teorema 2.3.3 ([17]). *Dacă funcţia f, de forma* (3.1), *aparţine clasei $\mathcal{S}^*_{s,\sigma}(\phi)$, atunci avem estimările*

$$|a_2| \le \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{2|B_1^2 + 2B_1 - 2B_2|}} \quad \text{şi} \quad |a_3| \le \frac{1}{2}B_1\left(1 + \frac{1}{2}B_1\right). \tag{2.7}$$

Teorema 2.3.4 ([17]). *Dacă funcţia f, de forma* (3.1), *aparţine clasei $\mathcal{K}_{s,\sigma}(\phi)$, atunci se verifică estimările*

$$|a_2| \le \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{2|3B_1^2 + 8B_1 - 8B_2|}} \quad \text{şi} \quad |a_3| \le \frac{1}{2}B_1\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8}B_1\right). \tag{2.8}$$

Două cazuri particulare interesante, prezentate în corolarele următoare, se obţin atunci când funcţia ϕ e dată de

$$\phi(z) = \frac{1 + (1 - 2\gamma)z}{1 - z} = 1 + 2(1-\gamma)z + 2(1-\gamma)z^2 + \cdots,$$

unde $0 \le \gamma < 1$.

Corolarul 2.3.5 ([17]). *Fie $0 \le \gamma < 1$ şi $f \in \sigma$ de forma (3.1). Dacă au loc inegalităţile*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(-z)}\right) > \gamma, \quad z \in \mathcal{U}$$

şi

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2wg'(w)}{g(w) - g(-w)}\right) > \gamma, \quad w \in \mathcal{U},$$

unde g reprezintă prelungirea analitică lui f^{-1} la $\mathcal{U}$, atunci avem

$$|a_2| \le \sqrt{1-\gamma} \quad \text{şi} \quad |a_3| \le (1-\gamma)(2-\gamma).$$

Corolarul 2.3.6 ([17]). *Fie $0 \le \gamma < 1$ şi $f \in \sigma$ dată de (3.1). Dacă se verifică inegalităţile*

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2(zf'(z))'}{f'(z) + f'(-z)}\right) > \gamma, \quad z \in \mathcal{U}$$

şi

$$\operatorname{Re}\left(\frac{2(wg'(w))'}{g'(w) + g'(-w)}\right) > \gamma, \quad w \in \mathcal{U},$$

unde g reprezintă prelungirea analitică lui f^{-1} la $\mathcal{U}$, atunci avem

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{1-\gamma}{3}} \quad \text{şi} \quad |a_3| \le \frac{(1-\gamma)(7-3\gamma)}{12}.$$

De asemenea, pentru

$$\phi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\gamma} = 1 + 2\gamma + 2\gamma^2 + \cdots \quad (0 < \gamma \leq 1),$$

Teorema 2.3.3 şi Teorema 2.3.4 implică respectiv următoarele două corolare:

Corolarul 2.3.7. *Fie $0 < \gamma \leq 1$ şi $f \in \sigma$ de forma (3.1). Dacă au loc inegalităţile*

$$\left|\arg\left(\frac{2zf'(z)}{f(z) - f(-z)}\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}$$

şi

$$\left|\arg\left(\frac{2wg'(w)}{g(w) - g(-w)}\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad w \in \mathcal{U},$$

unde g reprezintă prelungirea analitică lui f^{-1} la $\mathcal{U}$, atunci avem estimările

$$|a_2| < \gamma \quad \text{şi} \quad |a_3| < \gamma(1 + \gamma).$$

Corolarul 2.3.8. *Fie $0 < \gamma \leq 1$ şi $f \in \sigma$ dată de (3.1). Dacă f verifică inegalităţile*

$$\left|\arg\left(\frac{2(zf'(z))'}{f'(z) + f'(-z)}\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}$$

şi

$$\left|\arg\left(\frac{2(wg'(w))'}{g'(w) + g'(-w)}\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad w \in \mathcal{U},$$

unde g reprezintă prelungirea analitică lui f^{-1} la $\mathcal{U}$, atunci avem estimările

$$|a_2| \leq \frac{\gamma}{\sqrt{4-\gamma}} \quad \text{şi} \quad |a_3| \leq \frac{\gamma(4 + 3\gamma)}{12}.$$

Definiţia 2.3.9 ([18])**.** Fie $0 \leq \alpha \leq 1$. Spunem că o funcţie $f \in \sigma$ aparţine clasei $\mathcal{S}^*_{s,\sigma}(\alpha, \phi)$ dacă au loc subordonările:

$$\frac{2[(1-\alpha)zf'(z) + \alpha z(zf'(z))']}{(1-\alpha)(f(z) - f(-z)) + \alpha z(f'(z) + f'(-z))} \prec \phi(z)$$

şi

$$\frac{2[(1-\alpha)wg'(w) + \alpha w(wg'(w))']}{(1-\alpha)(g(w) - g(-w)) + \alpha w(g'(w) + g'(-w))} \prec \phi(z),$$

unde g este prelungirea analitică lui f^{-1} la $\mathcal{U}$.

Teorema 2.3.10 ([18])**.** *Fie $0 \leq \alpha \leq 1$. Dacă $f \in \sigma$, de forma* (3.1)*, aparţine clasei $\mathcal{S}^*_{s,\sigma}(\alpha, \phi)$, atunci se au loc estimările*

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{2|(1+2\alpha)B_1^2 + 2(1+\alpha)^2(B_1 - B_2)|}} \tag{2.9}$$

şi

$$|a_3| \leq \frac{1}{2}B_1\left(\frac{1}{1+2\alpha} + \frac{1}{2(1+\alpha)^2}B_1\right). \tag{2.10}$$

Dacă
$$\phi(z) = \frac{1+(1-2\gamma)z}{1-z} = 1 + 2(1-\gamma)z + 2(1-\gamma)z^2 + \cdots, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$
Teorema 2.3.10 implică următorul corolar:

Corolarul 2.3.11. *Fie $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \gamma < 1$ şi $f \in \sigma$ de forma (3.1). Dacă au loc inegalităţile*
$$\operatorname{Re} \frac{2[(1-\alpha)zf'(z) + \alpha z(zf'(z))']}{(1-\alpha)(f(z)-f(-z)) + \alpha z(f'(z)+f'(-z))} > \gamma, \quad z \in \mathcal{U}$$
şi
$$\operatorname{Re} \frac{2[(1-\alpha)wg'(w) + \alpha w(wg'(w))']}{(1-\alpha)(g(w)-g(-w)) + \alpha w(g'(w)+g'(-w))} > \alpha, \quad w \in \mathcal{U},$$
unde g reprezintă prelungirea analitică lui f^{-1} la $\mathcal{U}$, atunci avem
$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{1-\gamma}{1+2\alpha}} \quad \text{şi} \quad |a_3| \leq (1-\gamma)\left(\frac{1}{1+2\gamma} + \frac{1-\gamma}{1+\alpha}\right).$$

Definiţia 2.3.12 ([18])**.** Fie $0 \leq \alpha \leq 1$. Spunem că o funcţie $f \in \sigma$ aparţine clasei $\mathcal{L}_{s,\sigma}(\alpha, \phi)$ dacă se verifică subordonările
$$\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)}\right)^{\alpha} \left(\frac{2(zf'(z))'}{(f'(z)+f'(-z))}\right)^{1-\alpha} \prec \phi(z)$$
şi
$$\left(\frac{2wg'(w)}{g(w)-g(-w)}\right)^{\alpha} \left(\frac{2(wg'(w))'}{(g'(w)+g'(-w))}\right)^{1-\alpha} \prec \phi(w)$$
unde g este prelungirea analitică lui f^{-1} la $\mathcal{U}$.

Teorema 2.3.13 ([18])**.** *Fie $0 \leq \alpha \leq 1$. Dacă funcţia f, având forma (3.1), aparţine clasei $\mathcal{L}_{s,\sigma}(\alpha, \phi)$, atunci au loc estimările*
$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{2|(\alpha^2 - 3\alpha + 3)B_1^2 + 2(2-\alpha)^2(B_1 - B_2)|}} \tag{2.11}$$
şi
$$|a_3| \leq \frac{1}{2}B_1\left(\frac{1}{2(2-\alpha)^2}B_1 + \frac{1}{3-2\alpha}\right). \tag{2.12}$$

Considerând din nou
$$\phi(z) = \frac{1+(1-2\gamma)z}{1-z} = 1 + 2(1-\gamma)z + 2(1-\gamma)z^2 + \cdots, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$
Teorem 2.3.13 conduce la următorul corolar:

Corolarul 2.3.14. *Fie $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \gamma < 1$ şi $f \in \sigma$ dată de (3.1). Dacă sunt satisfăcute inegalităţile*
$$\operatorname{Re}\left[\left(\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)}\right)^{\alpha} \left(\frac{2(zf'(z))'}{(f'(z)+f'(-z))}\right)^{1-\alpha}\right] > \gamma, \quad z \in \mathcal{U}$$

şi

$$\mathrm{Re}\left[\left(\frac{2wg'(w)}{g(w)-g(-w)}\right)^{\alpha}\left(\frac{2(wg'(w))'}{(g'(w)+g'(-w))}\right)^{1-\alpha}\right]>\gamma, \quad w\in\mathcal{U},$$

unde g este prelungirea analitică a lui f^{-1} la $\mathcal{U}$, atunci avem

$$|a_2|\leq\sqrt{\frac{1-\gamma}{\alpha^2-3\alpha+3}} \quad \text{şi} \quad |a_3|\leq(1-\gamma)\left(\frac{1-\gamma}{(1-\alpha)^2}+\frac{1}{3-2\alpha}\right).$$

Definiţia 2.3.15 ([18])**.** Fie $0\leq\alpha\leq 1$. Spunem că o funcţie $f\in\sigma$ aparţine clasei de funcţii $\mathcal{Q}_{s,\sigma}(\alpha,\phi)$ dacă au loc subordonările:

$$\frac{(1-\alpha)zf'(z)+\alpha z(zf'(z))'}{(1-\alpha)h(z)+\alpha zh'(z)}\prec\phi(z) \tag{2.13}$$

şi

$$\frac{(1-\alpha)wg'(w)+\alpha w(wg'(w))'}{(1-\alpha)h(w)+\alpha wh'(w)}\prec\phi(w) \tag{2.14}$$

unde h satisface

$$\mathrm{Re}\left[\frac{(1-\alpha)zh'(z)+\alpha z(zh'(z))'}{(1-\alpha)h(z)+\alpha zh'(z)}\right]>0, \quad z\in\mathcal{U} \tag{2.15}$$

iar g este prelungirea analitică a lui f^{-1} la $\mathcal{U}$.

Teorema 2.3.16 ([18])**.** *Fie $0\leq\alpha\leq 1$. Dacă funţia f de forma* (3.1) *aparţine clasei $\mathcal{Q}_{s,\sigma}(\alpha,\phi)$, atunci au loc estimările*

$$|a_2|\leq\sqrt{\frac{B_1^2+B_1^3+4|B_1-B_2|}{|3(1+2\alpha)B_1^2+4(1+\alpha)^2(B_1-B_2)|}} \tag{2.16}$$

şi

$$|a_3|\leq B_1\left(\frac{1}{1+2\alpha}+\frac{B_1}{4(1+\alpha)^2}\right)+\frac{4|B_1-B_2|}{3(1+2\alpha)B_1} \tag{2.17}$$

Capitolul 3

Noi clase de funcţii meromorfe

Acest capitol este dedicat studiului unor clase de funcţii meromorfe: în paragraful 3.1 se defineşte clasa de tip Janowski $\Sigma(A, B; \alpha)$ şi se prezintă , printre altele, o condiţie suficientă pentru ca o funcţie să aparţină clasei, estimări ale coeficienţilor funcţiilor din clasa studiată sau o proprietate de convoluţie. Paragraful 3.2 cuprinde o serie de rezultate de incluziune, proprietăţi de conservare şi convoluţie relative la două noi subclase de funcţii meromorfe definite cu ajutorul operatorului liniar $L_p^\lambda(a, c)$, iar în secţiunea 3.3 se prezintă câteva criterii pentru aproape convexitatea funcţiilor meromorfe $p-$valente. Contribuţiile originale din acest capitol sunt incluse în lucrările [20], [14] şi [15].

Pentru $p \in \mathbb{N}^*$, fie Σ_p clasa funcţiilor de forma

$$f(z) = \frac{1}{z^p} + \sum_{n=1-p}^{\infty} a_n z^n, \ z \in \mathcal{U}^*, \tag{3.1}$$

meromorfe şi p-valente în $\mathcal{U}^*$. Pe parcurul acestui capitol, vom nota Σ_1 cu Σ.

3.1 O clasa de funcţii meromorfe de tip Janowski

Definiţia 3.1.1 ([20])**.** Fie $-1 \le B < A \le 1$ şi $0 \le \alpha \le 1$. Spunem că o funcţie meromorfă f de forma

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \ z \in \mathcal{U}^*, \tag{3.2}$$

aparţine clasei $\Sigma(A, B; \alpha)$ dacă există o funcţie $g \in \Sigma^*(1/2)$ astfel încât să aibă loc subordonarea

$$\frac{(1-2\alpha)f'(z) - \alpha z f''(z)}{g(z)g(-z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz}, \tag{3.3}$$

unde $\Sigma^*(a)$, pentru $0 \le a < 1$ e clasa definită în relaţia (1.10).

În [34], Janowski a introdus clasa $P[A, B]$, unde $-1 \le B < A \le 1$, ca mulţimea tuturor funcţiilor p analitice în $\mathcal{U}$, cu $p(0) = 1$, subordonate funcţiei $\dfrac{1+Az}{1+Bz}$. Din acest motiv clasele definite utilizând subordonarea la funcţia $\dfrac{1+Az}{1+Bz}$ sunt adesea numite “de tip Janowski”.

Observaţia 3.1.2 ([20]). Clasa $\Sigma(A, B; \alpha)$ reprezintă o generalizare a claselor studiate de Wang et al. [89] (pentru cazul $\alpha = 0$, $A = -1$ şi $B = 1$) şi de către Sim şi Kwon [80] (pentru cazul $\alpha = 0$).

Observaţia 3.1.3 ([20]). Dacă $-1 \leq B_2 \leq B_1 < A_1 \leq A_2 \leq 1$, atunci avem $\Sigma(A_1, B_1; \alpha) \subset \Sigma(A_2, B_2; \alpha)$.

În demonstrarea rezultatelor referitoare la clasa $\Sigma(A, B; \alpha)$, avem nevoie de următoarele leme:

Lema 3.1.4 ([89]). *Fie* $g \in \Sigma^*(1/2)$. *Atunci*

$$-zg(z)g(-z) \in \Sigma^*.$$

Lema 3.1.5 ([89]). *Fie*

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \in \Sigma^*(1/2).$$

Atunci

$$|B_{2n-1}| \leq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

unde

$$B_{2n-1} = 2b_{2n-1} + 2b_1 b_{2n-3} - 2b_2 b_{2n-4} + \cdots + (-1)^{n-1} b_{n-2} b_n + (-1)^n b_{n-1}^2. \tag{3.4}$$

Lema 3.1.6 ([73]). *Fie*

$$h(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n z^n \quad \text{şi} \quad k(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} k_n z^n$$

două funcţii analitice în $\mathcal{U}$. *Dacă* k *este convexă şi are loc subordonarea* $h \prec k$, *atunci*

$$|h_n| \leq |k_1|, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Următorul rezultat furnizează o condiţie suficientă pentru ca o funcţie să aparţină clasei studiate $\Sigma(A, B; \alpha)$.

Teorema 3.1.7 ([20]). *Fie* $-1 \leq B < A \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ *şi*

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n, \quad z \in \mathcal{U}^*.$$

Dacă f *de forma* (3.2) *este o funcţie meromorfă pentru care are loc inegalitatea*

$$\sum_{n=1}^{\infty} [(1 + |B|)|1 - \alpha - \alpha n||a_n|n + (1 + |A|)|B_{2n-1}|] < A - B \tag{3.5}$$

unde coeficienţii B_{2n-1} *sunt daţi de relaţia* (3.4), *atunci* $f \in \Sigma(A, B; \alpha)$.

În următoarea teoremă sunt date estimări ale coeficienţilor funcţiilor aparţinând clasei $\Sigma(A, B; \alpha)$.

Teorema 3.1.8 ([20])**.** *Fie* $-1 \leq B < A \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ *şi* $f \in \Sigma(A, B; \alpha)$ *de forma* (3.2)*. Atunci*

$$|a_1| \leq 1,$$

$$|a_{2n}| \leq \frac{A-B}{2n|1-(2n+1)\alpha|}\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right), \quad n \in \mathbb{N}^* \tag{3.6}$$

şi

$$|a_{2n+1}| \leq \frac{A-B}{(2n+1)|1-(2n+2)\alpha|}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right), \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.7}$$

Teorema 3.1.9 ([20])**.** *Dacă* $-1 \leq B < A \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$ *şi* $f \in \Sigma(A, B; \alpha)$ *atunci pentru* $|z| = r$, $0 < r < 1$, *au loc următoarele inegalităţi:*

$$\frac{(1-r)^2}{r^2}\,\frac{1-Ar}{1-Br} \leq |(1-2\alpha)f'(z) - \alpha z f'(z)| \leq \frac{(1+r)^2}{r^2}\,\frac{1+Ar}{1+Br}. \tag{3.8}$$

Dăm în cele ce urmează o proprietate de convoluţie a funcţiilor din clasa $\Sigma(A, B; \alpha)$ studiată.

Teorema 3.1.10 ([20])**.** *Fie* $-1 \leq B < A \leq 1$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $\gamma \leq 1$ *şi* $f \in \Sigma(A, B; \alpha)$ *astfel încât funcţia corespunzătoare* $g \in \Sigma^*(1/2)$ *să satisfacă următoarea condiţie:*

$$-\mathrm{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) < \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\gamma \quad (z \in \mathcal{U}). \tag{3.9}$$

Dacă $\phi \in \Sigma$ *şi* $z^2\phi(z) \in \mathcal{R}(\gamma)$, *atunci* $\phi * f \in \Sigma(A, B; \alpha)$.

3.2 Clase de funcţii meromorfe multivalente utilizând un anumit operator liniar

În acest paragraf definim şi studiem două noi subclase de funcţii meromorfe p-valente, utilizând operatorul liniar $L^{\lambda}_{p,k}(a, c)$. Rezultatele sunt obţinute folosind metoda subordonărilor diferenţiale.

Definiţia 3.2.1. Funcţia $\varphi_p(a, c; z)$ este dată prin

$$\varphi_p(a, c; z) = z^{-p} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n}{(c)_n}z^{n-p}$$

$$(a, c \in \mathbb{R},\ c \notin \mathbb{Z}_0^- = \{0, -1, -2, \ldots\},\ z \in \mathcal{U}^*),$$

unde $(x)_n$ reprezintă simbolul lui Pochhammer definit prin

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)} = \begin{cases} 1, & \text{if } k = 0, \\ x(x+1)\ldots(x+n-1), & \text{if } k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Corespunzător funcţiei $\varphi_p(a, c; z)$, Liu şi Srivastava [47] şi Yang [92] au introdus, prin intermediul produsului de convoluţie, operatorul $L_p(a, c)$ pe clasa Σ_p, după cum urmează:

$$L_p(a, c)f(z) = \varphi_p(a, c; z) * f(z), \quad f \in \Sigma_p,\ z \in \mathcal{U}^*.$$

În [6] autorii consideră funcţia $\varphi_p^\lambda(a,c;z)$ astfel:

$$\varphi_p(a,c;z)*\varphi_p^\lambda(a,c;z)=\frac{1}{z^p(1-z)^{p+\lambda}} \tag{3.10}$$

$$(a,c\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}_0^-,\ \lambda>-p,\ p\in\mathbb{N}^*,\ z\in\mathcal{U}^*),$$

şi operatorul liniar corespunzător $L_p^\lambda(a,c)$, definit similar cu $L_p(a,c)$,

$$L_p^\lambda(a,c)f(z)=\varphi_p^\lambda(a,c;z)*f(z)=z^{-p}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(c)_n(p+n)_n}{(a)_n n!}a_{n-p}z^{n-p},\ z\in\mathcal{U}^*. \tag{3.11}$$

Observaţia 3.2.2. Din relaţiile (3.10) şi (3.11) se verifică uşor că

$$z(L_{p,k}^\lambda(a+1,c)f)'(z)=aL_{p,k}^\lambda(a,c)f(z)-(a+p)L_{p,k}^\lambda(a+1,c)f(z) \tag{3.12}$$

şi

$$z(L_{p,k}^\lambda(a,c)f)'(z)=(\lambda+p)L_{p,k}^{\lambda+1}(a,c)f(z)-(\lambda+2p)L_{p,k}^\lambda(a,c)f(z). \tag{3.13}$$

Pe parcursul acestei secţiuni, vom considera $p,k\in\mathbb{N}^*$, $a,c\notin\mathbb{Z}_0^-$, $\epsilon_k=\exp(2\pi i/k)$ şi

$$f_{p,k}^\lambda(a,c)(z)=\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\epsilon_k^{jp}(L_{p,k}^\lambda(a,c)f)(\epsilon_k^j z)=z^{-p}+\cdots\quad(f\in\Sigma_p),\ z\in\mathcal{U}^*. \tag{3.14}$$

Definiţia 3.2.3 ([14])**.** Fie $h\in\mathcal{P}$, convexă şi fie $f\in\Sigma_p$ astfel încât $f_{p,k}^\lambda(a,c)(z)\neq 0,\ z\in\mathcal{U}^*$. Spunem că funcţie f apaţine clasei $\Sigma_{p,k}^\lambda(a,c;h)$ dacă ea satisface subordonarea

$$-\frac{z(L_{p,k}^\lambda(a,c)f)'(z)}{pf_{p,k}^\lambda(a,c)(z)}\prec h(z). \tag{3.15}$$

Pentru $-1<B<A\leq 1$, utilizăm notaţia

$$\Sigma_{p,k}^\lambda(a,c;A,B):=\Sigma_{p,k}^\lambda\left(a,c;\frac{1+Az}{1+Bz}\right).$$

Observaţia 3.2.4 ([14])**.** Pentru $k=\lambda=1$, clasa $\Sigma_{p,1}^1(a,c;A,B)$ a fost introdusă şi studiată de către Liu şi Srivastava în [47]. Clasa $\Sigma_{p,1}^\lambda(a,c;h)$ a fost studiată de Srivastava et al. în [84], iar pentru $\lambda=1$, $\Sigma_{p,k}^1(a,c;h)$ a fost definită de Aouf et al. în [6].

Definiţia 3.2.5 ([14])**.** Fie $h\in\mathcal{P}$, convexă şi fie $f\in\Sigma_p$ cu proprietatea $f_{p,k}^\lambda(a,c)(z)\neq 0,\ z\in\mathcal{U}^*$. Spunem că f aparţine clasei $\mathcal{K}_{p,k}^\lambda(a,c;h)$ dacă există o funcţie $g\in\Sigma_{p,k}^\lambda(a,c;h)$ astfel încât să aibă loc

$$-\frac{z(L_{p,k}^\lambda(a,c)f)'(z)}{pg_{p,k}^\lambda(a,c)(z)}\prec h(z), \tag{3.16}$$

unde $g_{p,k}^\lambda(a,c)$ se defineşte precum în relaţia (3.14), iar $g_{p,k}^\lambda(a,c)(z)\neq 0,\ z\in\mathcal{U}^*$. Pentru $-1<B<A\leq 1$, notăm

$$\mathcal{K}_{p,k}^\lambda(a,c;A,B):=\mathcal{K}_{p,k}^\lambda\left(a,c;\frac{1+Az}{1+Bz}\right).$$

Lema 3.2.6 ([14]). *Fie $h \in \mathcal{P}$ convexă. Dacă $f \in \Sigma_{p,k}^{\lambda}(a,c;h)$, atunci*

$$-\frac{z(f_{p,k}^{\lambda}(a,c))'(z)}{pf_{p,k}^{\lambda}(a,c)(z)} \prec h(z). \tag{3.17}$$

Teorema 3.2.7 ([14]). *Fie $h \in \mathcal{P}$, convexă, cu $\operatorname{Re} h(z) < 1 + \dfrac{a}{p}$, $z \in \mathcal{U}$ şi fie $f \in \Sigma_{p,k}^{\lambda}(a,c;h)$ astfel încât $f_{p,k}^{\lambda}(a+1,c)(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$. Atunci avem $f \in \Sigma_{p,k}^{\lambda}(a+1,c;h)$.*

Dacă $h(z) = \dfrac{1+Az}{1+Bz}$, $z \in \mathcal{U}$, unde $-1 < B < A \leq 1$, atunci obţinem următorul corolar:

Corolarul 3.2.8 ([14]). *Fie $-1 < B < A \leq 1$ cu $\dfrac{1+A}{1+B} < 1 + \dfrac{a}{p}$ şi fie $f \in \Sigma_{p,k}^{\lambda}(a,c;A,B)$ astfel încât $f_{p,k}^{\lambda}(a+1,c)(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$. Atunci $f \in \Sigma_{p,k}^{\lambda}(a+1,c;A,B)$.*

Teorema 3.2.9 ([14]). *Fie $h \in \mathcal{P}$, convexă, cu $\operatorname{Re} h(z) < 1 + \dfrac{a}{p}$, $z \in \mathcal{U}$ şi fie f o funcţie aparţinând clasei $\mathcal{K}_{p,k}^{\lambda}(a,c;h)$ în raport cu funcţia $g \in \Sigma_{p,k}^{\lambda}(a,c;h)$. Atunci $f \in \mathcal{K}_{p,k}^{\lambda}(a+1,c;h)$, cu condiţia ca $g_{p,k}^{\lambda}(a,c)(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$.*

Corolarul 3.2.10 ([14]). *Fie $-1 < B < A \leq 1$ cu $\dfrac{1+A}{1+B} < 1 + \dfrac{a}{p}$ şi fie funcţia f aparţinând clasei $\mathcal{K}_{p,k}^{\lambda}(a,c;A,B)$ în raport cu funcţia $g \in \Sigma_{p,k}^{\lambda}(a,c;A,B)$. Avem atunci $f \in \mathcal{K}_{p,k}^{\lambda}(a+1,c;A,B)$, cu condiţia ca $g_{p,k}^{\lambda}(a,c)(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$.*

Teorema 3.2.11 ([14]). *Fie $h \in \mathcal{P}$, convexă, cu $\operatorname{Re} h(z) < 2 + \dfrac{\lambda}{p}$, $z \in \mathcal{U}$ şi fie $f \in \Sigma_{p,k}^{\lambda+1}(a,c;h)$ astfel încât $f_{p,k}^{\lambda+1}(a+1,c)(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$. Atunci $f \in \Sigma_{p,k}^{\lambda}(a,c;h)$.*

Corolarul 3.2.12 ([14]). *Fie $-1 < B < A \leq 1$ astfel încât $\dfrac{1+A}{1+B} < 2 + \dfrac{\lambda}{p}$ şi fie $f \in \Sigma_{p,k}^{\lambda+1}(a,c;A,B)$ îndeplinind condiţia $f_{p,k}^{\lambda+1}(a+1,c)(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$. Atunci $f \in \Sigma_{p,k}^{\lambda}(a,c;A,B)$.*

Teorema 3.2.13 ([14]). *Fie $h \in \mathcal{P}$, convexă, cu $\operatorname{Re} h(z) < 2 + \dfrac{\lambda}{p}$, $z \in \mathcal{U}$ şi fie f o funcţie aparţinând clasei $\mathcal{K}_{p,k}^{\lambda+1}(a,c;h)$ în raport cu $g \in \Sigma_{p,k}^{\lambda+1}(a,c;h)$. Atunci $f \in \mathcal{K}_{p,k}^{\lambda}(a,c;h)$, cu condiţia să avem $g_{p,k}^{\lambda}(a,c)(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$.*

Corolarul 3.2.14. *[14] Fie $-1 < B < A \leq 1$ astfel încât $\dfrac{1+A}{1+B} < 2 + \dfrac{\lambda}{p}$ şi fie f o funcţie aparţinând clasei $\mathcal{K}_{p,k}^{\lambda+1}(a,c;A,B)$ în raport cu funcţia $g \in \Sigma_{p,k}^{\lambda+1}(a,c;A,B)$. Atunci $f \in \mathcal{K}_{p,k}^{\lambda}(a,c;A,B)$, cu condiţia să avem $g_{p,k}^{\lambda}(a,c)(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$.*

Prezentăm încontinuare operatorul integral $F_{\mu,p} : \Sigma_p \to \Sigma_p$ $(\mu > 0)$:

$$F_{\mu,p}(f)(z) = \frac{\mu - p}{z^{\mu}} \int_0^z t^{\mu-1} f(z)dt, \quad f \in \Sigma_p,\ z \in \mathcal{U}^*. \tag{3.18}$$

Ecuaţia (3.18) implică relaţia

$$\mu L^{\lambda}_{p,k}(a,c)F_{\mu,p}(f)(z) + z\left(L^{\lambda}_{p,k}(a,c)F_{\mu,p}(f)\right)'(z) = (\mu - p)L^{\lambda}_{p,k}(a,c)f(z). \tag{3.19}$$

Operatorul $F_{\mu,p}$ a fost studiat de numeroşi autori (a se vedea, spre exemplu, lucrările [38], [87], [92]).

Teorema 3.2.15. *[14] Fie $h \in \mathcal{P}$ o funcţie convexă care îndeplineşte condiţia $\operatorname{Re} h(z) < \dfrac{\operatorname{Re}\mu}{p}$, $z \in \mathcal{U}$ şi fie $f \in \Sigma^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$. Avem atunci că $F_{\mu,p}(f) \in \Sigma^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$.*

Teorema 3.2.16 ([14])**.** *Fie $h \in \mathcal{P}$, convexă, astfel încât $\operatorname{Re} h(z) < \dfrac{\operatorname{Re}\mu}{p}$, $z \in \mathcal{U}$ şi fie funcţia f aparţinând clasei $\mathcal{K}^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$ în raport cu $g \in \Sigma^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$. Atunci, dacă $G^{\lambda}_{p,k}(a,c)(z) \neq 0$, $z \in \mathcal{U}^*$, avem că $F_{\mu,p}(f)$ aparţine clasei $\mathcal{K}^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$ în raport cu funcţia $G = F_{\mu,p}(g)$.*

Teoremele 3.2.17 şi 3.2.18 prezentate mai jos furnizează anumite proprietăţi de convoluţie ale funcţiilor aparţinând claselor $\Sigma^{\lambda}_{p,k}(a,c)$ şi respectiv $\mathcal{K}^{\lambda}_{p,k}(a,c)$.

Teorema 3.2.17 ([14])**.** *Fie $h \in \mathcal{P}$ o funcţie convexă astfel încât $\operatorname{Re} h(z) < 1 + \dfrac{1-\alpha}{p}$, $z \in \mathcal{U}$, $\alpha < 1$. Considerăm de asemenea*

$$g \in \Sigma_p \quad \textit{cu proprietatea} \quad z^{p+1}g(z) \in \mathcal{R}(\alpha). \tag{3.20}$$

Dacă $f \in \Sigma^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$, atunci $f * g \in \Sigma^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$.

Teorema 3.2.18 ([14])**.** *Fie $h \in \mathcal{P}$ o funcţie convexă astfel încât $\operatorname{Re} h(z) < 1+\dfrac{1-\alpha}{p}$, $z \in \mathcal{U}$, $\alpha < 1$ şi fie $g \in \Sigma_p$ cu $z^{p+1}g(z) \in \mathcal{R}(\alpha)$. Dacă $f \in \mathcal{K}^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$ în raport cu funcţia $\psi \in \Sigma^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$, atunci avem de asemenea că $f * g \in \mathcal{K}^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$ în raport cu $\psi * g$.*

În cazurile particulare $\alpha = 0$ şi $\alpha = 1/2$, Teorema 3.2.17 şi Teorema 3.2.18 se reduc respectiv la următoarele două corolarii:

Corolarul 3.2.19 ([14])**.** *Fie $h \in \mathcal{P}$ o funcţie convexă şi fie $g \in \Sigma_p$ astfel încât să fie îndeplinită una din condiţiile:*

(i) $\operatorname{Re} h(z) < 1 + \dfrac{1}{p}$, $z \in \mathcal{U}$ *şi* $z^{p+1}g(z)$ *e o funcţie convexă în* $\mathcal{U}$

sau

(ii) $\operatorname{Re} h(z) < 1 + \dfrac{1}{2p}$, $z \in \mathcal{U}$ *şi* $z^{p+1}g(z) \in \mathcal{S}^*(1/2)$.

Dacă $f \in \Sigma^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$, atunci $f * g \in \Sigma^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$.

Corolarul 3.2.20 ([14])**.** *Fie $h \in \mathcal{P}$ o funcţie convexă şi fie $g \in \Sigma_p$ astfel încât să fie îndeplinită una din condiţiile:*

(i) $\operatorname{Re} h(z) < 1 + \dfrac{1}{p}$, $z \in \mathcal{U}$ *şi* $z^{p+1}g(z)$ *e o funcţie convexă în* $\mathcal{U}$

sau

(ii) $\operatorname{Re} h(z) < 1 + \dfrac{1}{2p}$, $z \in \mathcal{U}$ *şi* $z^{p+1}g(z) \in \mathcal{S}^*(1/2)$.

Dacă $f \in \mathcal{K}^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$, atunci $f * g \in \mathcal{K}^{\lambda}_{p,k}(a,c;h)$.

3.3 Criterii de aproape convexitate pentru funcţii meromorfe mutivalente

Fie $0 \leq \alpha < p$, $p \in \mathbb{N}^*$. Spunem că o funcţie $f \in \Sigma_p$ aparţine subclasei $\mathcal{MC}_p(\alpha)$ de funcţii meromorfe p-valente şi aproape convexe dacă ea verifică inegalitatea

$$\mathrm{Re}[z^{p+1}f'(z)] < -\alpha, \quad z \in \mathcal{U}^*.$$

Prezentăm în continuare o serie de condiţii suficiente de apartenenţă a unei funcţii meromorfe $p-$valente la clasa $\mathcal{MC}_p(\alpha)$.

Teorema 3.3.1 ([15])**.** *Dacă $f \in \Sigma_p$ satisface inegalitatea*

$$\mathrm{Re}\left[z^{p+1}\left(f'(z) + zf''(z)\right)\right] < \alpha p + \frac{p-\alpha}{2}, \quad z \in \mathcal{U}^*, \tag{3.21}$$

atunci avem $f \in \mathcal{MC}_p(\alpha)$.

Teorema 3.3.2 ([15])**.** *Dacă $f \in \Sigma_p$ verifică inegalitatea*

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^p f'(z)}(z^{p+1}f'(z))'\right) > \begin{cases} \dfrac{\alpha}{2(\alpha-p)}, & 0 \leq \alpha \leq \dfrac{p}{2}, \\ \dfrac{\alpha-p}{2\alpha}, & \dfrac{p}{2} \leq \alpha < p, \end{cases} \quad , \quad z \in \mathcal{U}^*, \tag{3.22}$$

atunci avem $f \in \mathcal{MC}_p(\alpha)$.

Teorema 3.3.3 ([15])**.** *Dacă $f \in \Sigma_p$ verifică inegalitatea*

$$\left|\frac{p}{z^{p+1}f'(z)}\left(p+1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \alpha, \quad z \in \mathcal{U}^*, \tag{3.23}$$

atunci $f \in \mathcal{MC}_p\left(\dfrac{p}{1+p\alpha}\right)$.

Teorema 3.3.4 ([15])**.** *Fie $\mu \in [0, 1/2]$ şi funcţia $f \in \Sigma_p$ astfel încât să fie îndeplinită condiţia*

$$\left|p+1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < 1-\mu, \quad z \in \mathcal{U}^*. \tag{3.24}$$

Atunci avem $f \in \mathcal{MC}_p(p\mu)$.

Capitolul 4

Subordonări diferenţiale utilizând media aritmetică şi media geometrică

Acest capitol este dedicat studiului anumitor subordonări diferenţiale în a căror expresie apar media aritmetică şi geometrică. Pentru demonstrarea rezultatelor, utilizăm metoda subordonărilor difereţiale şi anumite raţionamente geometrice. Cu excepţia lemei 4.1.1, rezultatele prezentate sunt originale şi sunt publicate în articolul [19].

Lema următoare, datorată lui Nunokawa, va fi utilă în demonstrarea rezultatelor originale ce urmează:

Lema 4.1.1 ([66]). *Fie p o funcţie analitică în $\mathcal{U}$ astfel încât $p(0) = 1$ şi $p(z) \not\equiv 1$. Dacă $z_0 \in \mathcal{U}$ verifică*

$$|\arg p(z_0)| = \max\{\arg p(z) : |z| \le |z_0|\} = \gamma\frac{\pi}{2}, \quad \text{şi} \quad p(z_0) = (ix)^\gamma,$$

atunci

$$\left|\arg[z_0 p'(z_0)]\right| = (\gamma+1)\frac{\pi}{2} \quad \text{şi} \quad |z_0 p'(z_0)| = \left|\frac{\gamma x^\gamma}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|.$$

Definiţia 4.1.2. Fie $\alpha \in [0,1]$, $\delta \in [1,2]$ şi $\mu \in [1,3/2]$. Notăm cu $\mathcal{H}(\alpha,\delta,\mu)$ clasa tuturor funcţiilor p analitice în $\mathcal{U}$ cu $p(0) = 1$, $p \not\equiv 1$, cu proprietatea că funcţia

$$Q(z) = \alpha[p(z)]^\delta + (1-\alpha)\left[p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}\right]^\mu, \quad z \in \mathcal{U},\ Q(0) = 1,$$

este bine definită în $\mathcal{U}$ (considerăm ramurile principale ale funcţiilor putere).

Teorema 4.1.3 ([19]). *Fie $\alpha \in [0,1]$, $a \in [0,1)$, $\delta \in [1,2]$ şi $\mu \in [1,3/2]$. Fie de asemenea $p \in \mathcal{H}(\alpha,\delta,\mu)$. Dacă p verifică*

$$\mathrm{Re}\left(\alpha[p(z)]^\delta + (1-\alpha)\left[p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}\right]^\mu\right) > a, \quad z \in \mathcal{U}, \tag{4.1}$$

atunci are loc

$$\mathrm{Re}\, p(z) > a, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{4.2}$$

Observaţia 4.1.4. Observăm că pentru $a = 0$, concluzia Teoremei 3.3.1 se păstrează dacă avem $\mu \in [1,2]$, după cum rezultă şi din teorema care urmează.

Teorema 4.1.5 ([19]). *Fie* $\alpha \in [0,1]$, $\gamma \in (0,1]$, $\delta \in [1,2]$ *şi* $\mu \in [1,2]$. *Fie de asemenea* $p \in \mathcal{H}(\alpha,\delta,\mu)$. *Dacă funţia* p *verifică*

$$\left|\arg\left(\alpha[p(z)]^\delta + (1-\alpha)\left[p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}\right]^\mu\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}, \tag{4.3}$$

atunci

$$|\arg p(z)| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{4.4}$$

Definiţia 4.1.6. Fie $\alpha \in [0,1]$, $\delta \in [1,2]$ şi $\mu \in [0,1]$. Notăm cu $\mathcal{F}(\alpha,\delta,\mu)$ clasa funcţiilor p analitice în $\mathcal{U}$ cu $p(0) = 1$, $p \not\equiv 1$, pentru care funcţia

$$Q(z) = \alpha[p(z)]^\delta + (1-\alpha)[p(z)]^\mu\left[p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}\right]^{1-\mu}, \quad z \in \mathcal{U},\ Q(0) = 1,$$

este bine definită în $\mathcal{U}$ (considerăm ramurile principale ale funcţiilor putere).

Teorema 4.1.7 ([19]). *Fie* $\alpha \in [0,1]$, $a \in [0,1)$, $\delta \in [1,2]$, $\mu \in [0,1]$. *De asemenea, fie funcţia* $p \in \mathcal{F}(\alpha,\delta,\mu)$. *Dacă* p *verifică*

$$\mathrm{Re}\left(\alpha[p(z)]^\delta + (1-\alpha)[p(z)]^\mu\left[p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}\right]^{1-\mu}\right) > a, \quad z \in \mathcal{U}, \tag{4.5}$$

atunci are loc

$$\mathrm{Re}\, p(z) > a, \quad z \in \mathcal{U}. \tag{4.6}$$

Teorema 4.1.8 ([19]). *Fie* $\alpha \in [0,1]$, $\gamma \in (0,1]$, $\delta \in [1,2]$, $\mu \in [0,1]$. *Fie de asemenea funcţia* $p \in \mathcal{F}(\alpha,\delta,\mu)$. *Dacă* p *verifică*

$$\left|\arg\left(\alpha[p(z)]^\delta + (1-\alpha)[p(z)]^\mu\left[p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)}\right]^{1-\mu}\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}, \tag{4.7}$$

atunci

$$|\arg\, p(z)| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Dăm în continuare o serie de aplicaţii ale teoremelor prezentate anterior, care se obţin pentru anumite forme particulare ale funcţiei p.

Alegând $p(z) = zf'(z)/f(z)$ în Teorema 4.1.3 şi Teorema 4.1.5, obţinem următorul rezultat:

Corolarul 4.1.9. *Fie funcţia* $f \in \mathcal{A}$ *şi numerele* $\alpha \in [0,1]$, $a \in [0,1)$, $\delta \in [1,2]$, $\mu \in [1,3/2]$ *şi* $\gamma \in [0,\pi/2]$.

(i) Dacă

$$\mathrm{Re}\left(\alpha\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^\delta + (1-\alpha)\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^\mu\right) > a, \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\mathrm{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > a, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Prin urmare, f *este stelată de ordin* a *în* $\mathcal{U}$.

(ii) Dacă

$$\left|\arg\left(\alpha\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\delta}+(1-\alpha)\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{\mu}\right)\right|<\gamma\frac{\pi}{2},\quad z\in\mathcal{U}$$

atunci

$$\left|\arg\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right|<\gamma\frac{\pi}{2},\quad z\in\mathcal{U},$$

şi deci f este tare stelată de ordin γ în $\mathcal{U}$.

Observaţia 4.1.10. Pentru $\delta=\mu=1$, regăsim rezultatul lui Mocanu [59] conform căruia clasa funcţiilor $\alpha-$convexe (de ordin a) este este inclusă în clasa funcţiilor stelate (de ordin a) în $\mathcal{U}$.

Aceeaşi substituţie $p(z)=zf'(z)/f(z)$ în Teorema 4.1.7 şi Teorema 4.1.8 conduce la rezultatul prezentat mai jos:

Corolarul 4.1.11. *Fie funcţia $f\in\mathcal{A}$ şi numerele $\alpha\in[0,1]$, $a\in[0,1)$, $\delta\in[1,2]$, $\mu\in[0,1]$ şi $\gamma\in[0,\pi/2]$.*

(i) Dacă

$$\operatorname{Re}\left(\alpha\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\delta}+(1-\alpha)\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\mu}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{1-\mu}\right)>a,\quad z\in\mathcal{U},$$

atunci

$$\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]>a,\quad z\in\mathcal{U},$$

deci f este o funcţie stelată de ordin a în $\mathcal{U}$.

(ii) Dacă

$$\left|\arg\left(\alpha\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\delta}+(1-\alpha)\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]^{\mu}\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{1-\mu}\right)\right|<\gamma\frac{\pi}{2},\quad z\in\mathcal{U}$$

atunci

$$\left|\arg\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right|<\gamma\frac{\pi}{2},\quad z\in\mathcal{U},$$

sau, echivalent, f este tare stelată de ordin γ în $\mathcal{U}$.

Observaţia 4.1.12. În cazul particular $\delta=1$, $\gamma=1$, $\alpha=0$, $\mu:=\gamma$ obţinem rezultatul datorat lui Lewandowski et al. [44], conform căruia funcţiile $\gamma-$stelate sunt stelate in $\mathcal{U}$.

Corolarul 4.1.13. *Fie $f\in\mathcal{A}$ şi fie $\alpha\in[0,1]$, $a\in[0,1)$, $\delta\in[1,2]$, $\mu\in[1,3/2]$ şi $\gamma\in[0,\pi/2]$.*

(i) Dacă

$$\operatorname{Re}\left(\alpha[f'(z)]^{\delta}+(1-\alpha)\left[f'(z)+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{\mu}\right)>a,\quad z\in\mathcal{U},$$

atunci

$$\operatorname{Re}f'(z)>a,\quad z\in\mathcal{U}.$$

Prin urmare, conform criteriului de univalenţă al lui Noshiro, Warschawski şi Wolff, f este univalentă în $\mathcal{U}$.

(ii) Dacă

$$\left|\arg\left(\alpha[f'(z)]^\delta + (1-\alpha)\left[f'(z) + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^\mu\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}$$

atunci

$$|\arg f'(z)| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Rezultatul precedent este o consecinţă a Teoremelor 4.1.3 şi 4.1.5, pentru cazul special $p(z) = f'(z)$, $f \in \mathcal{A}$. Considerând $p(z) = f'(z)$ în Teoremele 4.1.7 şai 4.1.8, obţinem următorul corolar:

Corolarul 4.1.14. *Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ şi fie $\alpha \in [0,1]$, $a \in [0,1)$, $\delta \in [1,2]$, $\mu \in [0,1]$ şi $\gamma \in [0,\pi/2]$.*
(i) Dacă

$$\operatorname{Re}\left(\alpha[f'(z)]^\delta + (1-\alpha)[f'(z)]^\mu\left[f'(z) + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{1-\mu}\right) > a, \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\operatorname{Re} f'(z) > a, \quad z \in \mathcal{U}.$$

În consecinţă f este univalentă în $\mathcal{U}$.
(ii) Dacă

$$\left|\arg\left(\alpha[f'(z)]^\delta + (1-\alpha)[f'(z)]^\mu\left[f'(z) + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]^{1-\mu}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\gamma, \quad z \in \mathcal{U}$$

atunci

$$|\arg f'(z)| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}.$$

În cazul particular $p(z) = f(z)/z$, Teorema 4.1.3 şi Teorema 4.1.5 implică:

Corolarul 4.1.15. *Fie funcţia $f \in \mathcal{A}$ şi fie $\alpha \in [0,1]$, $a \in [0,1)$, $\delta \in [1,2]$, $\mu \in [1,3/2]$ şi $\gamma \in [0,\pi/2]$.*
(i) Dacă

$$\operatorname{Re}\left(\alpha\left[\frac{f(z)}{z}\right]^\delta + (1-\alpha)\left[\frac{f(z)}{z} + \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right]^\mu\right) > a, \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right) > a, \quad z \in \mathcal{U}.$$

(ii) Dacă

$$\left|\arg\left(\alpha\left[\frac{f(z)}{z}\right]^\delta + (1-\alpha)\left[\frac{f(z)}{z} + \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right]^\mu\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}$$

atunci

$$\left|\arg\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}.$$

În final, considerând aceeaşi substituţie $p(z) = f(z)/z$ in Teoremele 4.1.7 şi 4.1.8, avem următorul rezultat:

Corolarul 4.1.16. *Fie* $f \in \mathcal{A}$ *şi fie* $\alpha \in [0,1]$, $a \in [0,1)$, $\delta \in [1,2]$, $\mu \in [0,1]$ *şi* $\gamma \in [0, \pi/2]$.

(i) Dacă

$$\operatorname{Re}\left(\alpha\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\delta} + (1-\alpha)\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\mu}\left[\frac{f(z)}{z} + \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right]^{1-\mu}\right) > a, \quad z \in \mathcal{U},$$

atunci

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)}{z}\right) > a, \quad z \in \mathcal{U}.$$

(ii) Dacă

$$\left|\arg\left(\alpha\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\delta} + (1-\alpha)\left[\frac{f(z)}{z}\right]^{\mu}\left[\frac{f(z)}{z} + \frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right]^{1-\mu}\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}$$

atunci

$$\left|\arg\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right| < \gamma\frac{\pi}{2}, \quad z \in \mathcal{U}.$$

Bibliografie

[1] M. Acu, *Some subclasses of meromorphic functions*, Filomat, 21(2)(2007), 1-9.

[2] L.V. Ahlfors, Conformal Invariants. Topics in Geometric Function Theory, McGraw-Hill, New-York, 1973.

[3] J.W. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math., 17(1915), 12-22.

[4] R.M. Ali, S.K. Lee, V. Ravichandran, S. Supramaniam, *Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions*, Appl. Math. Lett., 25(2012), 344-351.

[5] F.M. Al-Oboudi, *On univalent functions defined by a generalized Sălăgean operator*, Int. J. Math. Math. Sci., 27(2004), 1429-1436.

[6] M.K. Aouf, A. Shamandy, A.O. Mostafa, F. El-Emam, *Argument estimates of certain meromorphically p-valent functions associated with a family of linear operators*, Math. Slovaca, 61(2011), 907-920.

[7] S.D. Bernardi, *Convex and starlike univalent functions*, Trans. Amer. Math. Soc., 135(1969), 429-446.

[8] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, S.-B. Preuss. Akad. Wiss. 1916, 940-955.

[9] M. Biernacki, *Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles*, Prace Mat.-Fiz., 44(1936), 293-314.

[10] D.A. Brannan, W.E. Kirwan, *On some classes of bounded univalent functions*, J. London Math. Soc., 1(2)(1969), 431-443.

[11] C. Carathéodory, *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene werte nicht annehmen*, Math. Ann., 64(1907), 95-115.

[12] P.N. Chichra, *Regular functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is α-spiral-like*, Proc. Amer. Math. Soc., 49(1)(1975), 151-160.

[13] J.B. Conway, Functions of One Complex Variable, Springer-Verlag, New-York, 1978.

[14] O. Crişan, *Subclasses of meromorphically p-valent functions involving a certain linear operator*, accepted for publishing at Math. Slovaca.

[15] O. Crişan, *Some criteria for meromorphic multivalent close-to-convex functions*, submitted.

[16] O. Crişan, *Differential subordinations obtained by using Al-Oboudi and Ruscheweyh operators*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 56(3)(2011), 45-51.

[17] O. Crişan, *On some subclasses of bi-univalent functions involving starlikeness with respect to symmetric points*, submitted.

[18] O. Crişan, *Coeffcient estimates for certain subclasses of bi-univalent functions*, Gen. Math. Notes, 16(2)(2013), 93-102.

[19] O. Crişan, S. Kanas, *Differential subordinations involving arithmetic and geometric means*, Appl. Math. Comp., 222(2013), 123-131.

[20] O. Crişan, G.Ş. Sălăgean, *On a certain subclass of meromorphic close-to-convex functions*, preprint.

[21] O. Crişan, A.E. Tudor, *Some subclasses of analytic functions involving λ-spirallikeness of order α*, Acta Univ. Apulensis, 31(2012), 47-52.

[22] L. de Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math., 154(1985), 137-152.

[23] P.L. Duren, Univalent Functions, Springer-Verlag, New York, 1983.

[24] P.J. Eenigenburg, S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *On a Briot-Bouquet differential subordination*, General Inequalities, 3, International Series of Numerical Mathematics, Vol. 64 Birkhäuser Verlag, Basel 1983, 339-348.

[25] B.A. Frasin, M.K. Aouf, *New subclasses of bi-univalent functions*, Appl. Math. Lett., 24(2011), 1569-1573.

[26] S. Fukui, *On $\alpha-$convex functions of order β*, Int. J. Math. Math. Sci., 20(4)(1997), 769-772.

[27] A.W. Goodman, Univalent Functions, I-II, Mariner Publ. Comp., Tampa, Florida, 1983.

[28] I. Graham, G. Kohr, Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions, Marcel Dekker Inc., New York, 2003.

[29] T.H. Gronwall, *Some remarks on conformal representation*, Ann. Math., 16(1914/15), 72-76.

[30] D.J. Hallenbeck, S. Ruscheweyh, *Subordination by convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 52(1975), 191-195.

[31] P. Hamburg, P.T. Mocanu, N. Negoescu, Analiză Matematică (Funcţii Complexe), Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1982.

[32] D.J. Hallenbeck, T.H. MacGregor, Linear Problems and Convexity Techniques in Geometric Function Theory, Pitman Adv. Publ. Program, Boston-London-Melbourn, 1984.

[33] E. Hille, Ordinary Differential Equations in the Complex Plane, John Wiley, New York, 1976.

[34] W. Janowski, *Some external problems for certain families of analytic functions*, Ann. Polon. Math., 28 (1973), 297-326.

[35] A. Kanas, A. Lecko, J. Stankiewicz, *Differential subordinations and geometric means*, Compl. Var. Theor. Appl., 28(1996), 201-209.

[36] W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J., 1(1952), 169-185.

[37] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. (1907), 191-210.

[38] V. Kumar, S.L. Shukla, *Certain integrals for classes of p-valent meromorphic functions*, Bull. Austral. Math. Soc., 25(1982), 85-97.

[39] A. Lecko, M. Lecko, *Differential subordinations of arithmetic and geometric means of some functionals related to a sector*, Int. J. Math. Math. Sci., 2011(2011), Article ID 205845, 19 pages.

[40] Z. Lewandowski, *Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes I*, Ann. Univ. Mariae Curie Skłodowska, 12(1958), 131-146.

[41] Z. Lewandowski, *Sur l'identité de certaines classesde fonctions univalentes II*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, 14(1960), 19-46.

[42] Z. Lewandowski, S. Miller, E. Złotkiewicz, *Gamma-starlike functions*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, 28(1974), 32-36.

[43] Z. Lewandowski, S.S. Miller, E. Złotkiewicz, *Generating functions for some classes of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 56(1976), 111-117.

[44] M. Lewin, *On a coefficient problem for bi-univalent functions*, Proc. Am. Math. Soc., 18(1967), 63-68.

[45] R.J. Libera, *Univalent λ-spiral functions*, Canad. J. Math, 19(1967), 449-456.

[46] E. Lindelöf, *Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel*, Acta Soc. Sc. Fennicae, 35(7)(1908), 1-35.

[47] J.-L. Liu, H.M. Srivastava, *A linear operator and associated families of meromorphically multivalent functions*, J. Math. Anal. Appl., 259(2001), 566-581.

[48] K. Löwner, *Untersuchungen über die Verzerrung bei konformen Abbidungen des Einheitskreises* $|z| < 1$, *die durch Funktionen mit nichtverschwindender Ableitung geliefert werden*, S.B. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig Berichte, 69(1917), 89-106.

[49] W.C. Ma, D. Minda, *A unified treatment of some special classes of univalent functions*, in: Proceedings of the Conference on Complex Analysis, Tianjin, 1992, pp. 157-169, Conf. Proc. Lecture Notes Anal., I, Int. Press, Cambridge, MA, 1994.

[50] A. Marx, *Untersuchungen über schlichte Abbildungen, Math. Ann.*, 107(1932), 40-67.

[51] S.S. Miller, *Distortion properties of alpha-starlike functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 38(1973), 311-318.

[52] S.S. Miller, P.T. Mocanu, Differential Subordinations: Theory and Applications, Series on Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 225, Marcel Dekker, New York, 2000.

[53] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations and univalent functions*, Michig. Math. J., 28(1981), 157-171.

[54] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., 65(1978), 289-305.

[55] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Briot-Bouquet differential equations and differential subordinations*, Compl. Var., 33(1997), 217-237.

[56] S.S. Miller, P.T. Mocanu, *Differential subordinations and inequalities in the complex plane*, J. Diff. Eqns., 67(1987), 199-211.

[57] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *All α-convex functions are starlike*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 17(1972), 1395-1397.

[58] S.S. Miller, P.T. Mocanu, M.O. Reade, *Bazilevich functions and generalized convexity*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 19(1974), 213-224.

[59] P.T. Mocanu, *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme*, Mathematica (Cluj), 11(34)(1969), 127-133.

[60] P.T. Mocanu, *On strongly starlike and strongly convex functions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 31(1986), 16-21.

[61] P.T. Mocanu, *Alpha-convex integral operators and strongly starlike functions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 34(1989), 18-24.

[62] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G.Ş. Sălăgean, Teoria Geometrică a Funcţiilor Analitice, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 1999.

[63] R. Nevanlinna, *Über die konforme Abbildung von Sterngebieten*, Översikt av Finska Vetenskaps-Soc. Förh., 63A(1920-1921), 1-21.

[64] K. Noor, *On quasi-convex functions and related topics*, Internat. J. Math. Math. Sci., 10(2)(1987), 241-258.

[65] K. Noshiro, *On the theory of schlicht functions*, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 2(1934-35), 129-155.

[66] M. Nunokawa, *On the order of strongly starlikeness of strongly convex functions*, Proc. Japan. Acad., Ser. A, 69(1993), 234-237.

[67] S. Ozaki, *On the theory of multivalent functions*, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, A, 40(1935), 167-188.

[68] C. Pommerenke, Univalent Functions, Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen 1975.

[69] V. Ravichandran, *Starlike and convex functions with respect to conjugate points*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyiregyhaziensis, 20(2004), 31-37.

[70] D. Răducanu, V.O. Nechita, *On α-convex analytic functions defined by generalized Ruscheweyh operator*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai, 53(2008), 109-118.

[71] M.O. Reade, *On close-to-convex univalent functions*, Mich. Math. J., 3(1955-56), 59-62.

[72] M.S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. Math., 37(1936), 374-408.

[73] W. Rogosinski, *On the coefficients of subordinate functions*, Proc. London Math. Soc. Series 2, 48(1943), 48-82.

[74] S. Ruschweyh, Convolutions in Geometric Function Theory, Les Presses de l'Université de Montreal, 1982.

[75] S. Ruscheweyh, *New criteria for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., 49(1975), 109-115.

[76] S. Ruscheweyh, V. Singh, *On a Briot-Bouquet equation related to univalent functions*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 24(1979), 285-290.

[77] K. Sakaguchi, *On a certain univalent mapping*, J. Math. Soc. Japan, 11(1)(1959), 72-75.

[78] K. Sakaguchi, S. Fukui, *On alpha-starlike functions and related functions*, Bull. Nara Univ. of Education, 28(1979), 5-12.

[79] G.Ş., Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, Berlin, 1013(1983), 362-372.

[80] Y.J. Sim, O.S. Kwon, *A subclass of meromorphic close-to-convex functions of Janowski's type*, Int. J. Math. Math. Sci., Article ID 682162, 12 pages, 2012. doi:10.1155/2012/682162.

[81] L. Spaček, *Contribution à la théorie des fonctions univalentes*, Časopis Pĕst. Mat., 62(1932), 12-19 (in Russian).

[82] H.M. Srivastava, A.K. Mishra, P. Gochhayat, *Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions*, Appl. Math. Lett., 23(2010), 1188-1192.

[83] H.M. Srivastava, A.A. Attyia, *Some applications of differential subordination*, Appl. Math. Lett., 20(2007), 1142-1147.

[84] H.M. Srivastava, D.-G. Yang, N.-E. Xu, *Some subclasses of meromorphically multivalent functions associated with a linear operator*, Appl. Math. Comp., 195(2008), 11-23.

[85] E. Strohhäcker, *Beitrage zur Theorie der schlichten Funktionen*, Math. Z., 37(1933), 356-380.

[86] E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstüde der Geometrie, 2. Heft, Teubner, Leipzig, Berlin, 1913.

[87] B.A. Uralegaddi, C. Somanatha, *Certain classes of meromorphic multivalent functions*, Tamkang J. Math., 23(1992), 223-231.

[88] Z.G. Wang, C.-Y. Gao, S.-M. Yuan, *On certain subclasses of close-to-convex and quasi-convex functions with respect to k-symmetric points*, J. Math. Anal. Appl., 322(2006), 97-106.

[89] Z.-W. Wang, Y. Sun, N. Xu, *Some properties of certain meromorphic close-to-convex functions*, Appl. Math. Lett., 25(2012), 454-460.

[90] S.E. Warschawski, *On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping*, Trans. Amer. Math. Soc., 38(1935), 310-340.

[91] J. Wolff, *L'intégrate d'une fonction holomorphe et à partie réelle positive dans un demi plan est univalente*, C.R. Acad. Sci. Paris, 198(13)(1934), 1209-1210.

[92] D.-G. Yang, *Certain convolution operators for meromorphic functions*, Southeast Asian Bull. Math., 25(2001), 175-186.