UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI
Şcoala Doctorală de Matematică şi Informatică

Andreea-Elena Tudor

NOI CLASE DE FUNCŢII ANALITICE

REZUMAT

Conducători ştiinţifici:
Prof. Dr. Grigore Ştefan Sălăgean
Prof. Dr. Stanisława Kanas

Cluj-Napoca, 2013

Cuprins

Introduction

Teoria geometrică a funcţiilor este ramura analizei complexe care se ocupă cu studiul proprietăţilor geometrice ale funcţiilor analitice. Această teorie este bazată pe noţiunea de reprezentare conformă unde funcţiile univalente ocupă un rol esenţial. Un rezultat remarcabil în acest sens îl constituie teorema Riemann de reprezentare conformă. Primele lucrări importante în această direcţie au apărut la începutul secolului al XX-lea, odată cu lucrările lui P. Koebe [46] în 1907, T. H. Gronwall [28] în 1914, J.W. Alexander [1] în 1915, L. Bieberbach [10] în 1916. Conjectura lui Bieberbach, demonstrată de către Louis de Branges în 1984, a dus la apariţia unor noi direcţii de studiu în teoria geometrică a funcţiilor analitice, una dintre aceste direcţii fiind definirea unor noi clase de funcţii univalente pentru care conjectura ar putea fi verificată. Odată cu acestea au apărut şi s-au dezvoltat noi metode de cercetare cum ar fi metoda parametrică a lui Löwner şi metoda reprezentării integrale introdusă de Herglotz.

Merită menţionat faptul că matematicienii români au adus numeroase contribuţii în dezvoltarea acestei ramuri a matematicii. G. Călugăreanu a obţinut, în anul 1931, condiţii necesare şi suficiente de univalenţa în discul unitate. Continuând munca lui G. Călugăreanu, P.T. Mocanu a obţinut rezultate semnificative în domeniu: a introdus noţiunea de α-convexitate; a obţinut criterii de univalenţa pentru funcţii neanalitice; a dezvoltat, in colaborare cu S.S. Miller, metoda subordonărilor şi superordonărilor diferenţiale.

Lucrarea de faţa este structurată în cinci capitole. Capitolul 1 cuprinde nouă subcapitole în care sunt prezentate definiţii fundamentale şi rezultate ce constituie baza necesară pentru următoarele capitole. Astfel, sunt prezentate rezultate importante cu privire la funcţii univalente, funcţii cu partea reală pozitivă, funcţii stelate, convexe, aproape stelate, aproape convexe, spiralate, precum si rezultate privind funcţiile armonice.

Capitolul al doilea este dedicat studiului subordonărilor diferencţiale. În primul subcapitol sunt prezentate definiţii şi rezultate de bază cu privire la subordonările diferenţiale precum şi o scurtă prezentare a metodei funcţiilor admisibile. Următoarele două subcapitole conţin rezultate originale introduse în lucrările [87] şi [43]. Astfel, în cel de-al doilea subcapitol sunt prezentate câteva exemple de subordonări diferenţiale pentru binecunoscutele cazuri particulare ala discului şi semiplanului iar în ultimul subcapitol sunt introduse subordonări diferenţiale legate de media armonică a unor expresii de forma $p(z), p(z) + zp'(z)$ şi $p(z) + \dfrac{zp'(z)}{p(z)}$, unde p este o funcţie analitică pe discul unitate, astfel încât $p(0) = 1, p(z) \not\equiv 1,$.

În cel de-al treilea capitol sunt definite noi subclase de funcţii bi-univalente pentru care s-au obţinut estimări ale coeficienţilor a_2 şi a_3. Rezultatele din acest capitol sunt originale şi se găsesc în lucrările [86] şi [88].

Capitolul al patrulea este dedicat studiului unor noi clase de funcţii definite cu ajutorul a diferiţi operatori. Acest capitol cuprinde rezultate originale prezentate în articolele [85], [89], [90], [19] şi [91]. În primul paragraf este definită o clasă de funcţii analitice cu ajutorul operatorilor Carlson-Shaffer şi Cho-Srivastava şi sunt prezentate câteva proprietăţi ale acestei clase cum ar fi condiţii suficiente pentru ca o funţie să aparţină clasei precum şi estimări unghiulare. În cel de-al doilea subcapitol este definită o subclasă de funcţii armonice univalente tot cu ajutorul unui operator generalizat. Pentru aceasta s-au determinat condiţii necesare şi suficiente de apartenenţa, puncte extreme, convoluţie, incluziune. În cel de-al treilea subcapitol este definită o clasă de funcţii analitice cu ajutorul operatorului integral Sălăgean pentru care se studiază proprietăţi de incluziune, subordonare, puncte extreme şi delimitări ale coeficienţilor. Subcapitolul al patrulea cuprinde două subclase de funcţii analitice introduse tot cu ajutorul operatorului integral Sălăgean. În ultimul subcapitol se defineşte o clasă de funcţii aproape stelate cu ajutorul operatorului Srivastava-Attiya pentru care sunt prezentate proprietăţi de incluziune, delimitări ale coeficienţilor precum şi reprezentare integrală.

În ultimul capitol este prezentată metoda lanţurilor Löwner şi utilitatea acestei metode în obţinerea unor noi criterii de univalenţa. În primul subcapitol este prezentată teoria generală a lanţurilor Löwner iar următoarele două capitole conţin rezultate originale care se regăsesc în lucrarea [92], unde sunt obţinute noi condiţii de univalenţa cu ajutorul acestei metode a lanţurilor de subordonare.

Bibliografia conţine 92 de titluri, 9 dintre acestea fiind semnate de autoare, două fiind în colaborare.

Ţin să aduc pe această cale sincere mulţumiri conducătorilor ştiinţifici ai lucrării prof. G. Şt. Sălăgean şi Prof. S. Kanas pentru încurajare, suport, îndrumare şi observaţii pertinente primite pe parcursul cercetării.

De asemenea, mulţumiri doamnei prof. D. Răducanu pentru încurajarea permanentă şi sprijinul oferit pe parcursul acestor ani.

Această lucrare a fost posibilă prin sprijinul financiar oferit prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, cofinanţat prin Fondul Social European, în cadrul proiectului POSDRU/107/1.5/S/76841, cu titlul Studii doctorale moderne: internaţionalizare şi interdisciplinaritate.

Cuvinte cheie: funcţie analitică, funcţie univalentă, funcţie bi-univalentă, funcţie armonică, stelaritate, convexitate, spiralitate, subordonare diferenţială, operator diferenţial, operator integral, criteriu univalenţa, lanţ Löwner.

Capitolul 1

Rezultate preliminare

1.1 Definiţii şi notaţii

În această secţiune sunt prezentate noţiunile de bază cu privire la funcţii complexe, continuare analitică şi puncte extreme.

Vom folosi următoarele notaţii:

- Discul unitate: $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$,
- $U_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$,
- $\bar{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$,
- $\partial U \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

Fie $\mathcal{H}(U)$ mulţimea funcţiilor olomorfe în U. Pentru $a \in \mathbb{C}$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, avem

- $\mathcal{H}[a, n] = \{f \in \mathcal{H}(U) : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots\}$,
- $\mathcal{A}_n = \{f \in \mathcal{H}(U) : f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots\}$, $(\mathcal{A}_1 = \mathcal{A})$.

O funcţie $f \in \mathcal{A}$ are următoarea dezvoltare în serie Taylor:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n. \tag{1.1}$$

1.2 Funcţii univalente

Definiţia 1.2.1. *[20] O funcţie f se numeşte univalentă pe $D \subset \mathbb{C}$ dacă nu ia aceeasi valoare de două ori; adica, dacă $f(z_1) \neq f(z_2)$ oricare ar fi z_1 şi z_2 în D cu $z_1 \neq z_2$.*

Notăm cu $\mathcal{S}$ clasa funcţiilor univalente pe discul unitate, normalizate prin condiţiile $f(0) = 0$ şi $f'(0) = 1$. Aşadar, fiecare funcţie din clasa $\mathcal{S}$ are dezvoltarea în serie Taylor de forma:

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots, \quad z \in U.$$

Teorema 1.2.1 (Conjectura lui Bieberbach). *Coeficienţii oricărei funcţii $f \in \mathcal{S}$ satisfac inegalitatea $|a_n| \leq n$ pentru $n = 2, 3, \cdots$. Egalitatea are loc dacă f este funcţia Koebe sau o rotaţie a acesteia.*

1.3 Funcţii cu partea reală pozitivă

Clasa funcţiilor Caratheodory se notează cu:

$$\mathcal{P} = \{p \in \mathcal{H}(U) : p(0) = 1,\ \Re p(z) > 0,\ z \in U\}.$$

Teorema 1.3.1. *[65] Fie $p \in \mathcal{P}$. Atunci*

$$\begin{aligned} &|p_n| \leq 2,\ n \geq 1, \\ &\left| p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right| \leq 2 - \frac{|p_1|^2}{2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.4 Funcţii stelate

Definiţia 1.4.1. *[57] Spunem că o funcţie $f \in \mathcal{H}(U)$ este stelată dacă este univalentă şi $f(U)$ este un domeniu stelat.*

Caracterizarea analitică a funcţiilor stelate:

Teorema 1.4.1. *[57] O funcţie $f \in \mathcal{H}(U)$ este stelată dacă şi numai dacă $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\Re \frac{z f'(z)}{f(z)} > 0, \quad z \in U.$$

Clasa funcţiilor stelate se notează cu $\mathcal{S}^*$ şi reprezintă mulţimea tuturor funcţiilor f din $\mathcal{S}$ pentru care $f(U)$ este stelată.

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re \frac{zf'(z)}{f(z)} > 0 \right\}. \tag{1.3}$$

Teorema 1.4.2. *[26] Dacă $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ este în $\mathcal{S}^*$ atunci*

$$|a_n| \leq n, \; n = 2, 3, \cdots .$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă f este funcţia Koebe.

1.5 Funcţii aproape stelate

Definiţia 1.5.1. *[67] O funcţie $f \in \mathcal{A}$ se numeşte aproape stelată dacă şi numai dacă există o funcţie $g \in \mathcal{S}^*$ astfel încât*

$$\Re \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) \geq 0, \quad z \in U.$$

Notăm cu $\mathcal{CS}^*$ clasa funcţiilor aproape stelate.

Teorema 1.5.1. *[67] Dacă $f \in \mathcal{A}$ este o funcţie aproape stelată atunci coeficienţii satisfac următoarea inegalitate:*

$$|a_n| \leq n^2, \; n = 2, 3, \cdots .$$

Egalitatea are loc pentru funcţiile Robertson stelate intr-o direcţie [70].

1.6 Funcţii convexe

Definiţia 1.6.1. *[57] Spunem că o funcţie $f \in \mathcal{H}(U)$ este convexă dacă şi numai dacă $f(U)$ este un domeniu convex.*

Teorema 1.6.1. *[57] O funcţie $f \in \mathcal{H}(U)$ este convexă dacă şi numai dacă $f'(0) \neq 0$ şi*

$$\Re \left[\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 \right] > 0, \quad z \in U.$$

Clasa funcţiilor convexe se notează cu $\mathcal{K}$ şi constă în acele funcţii f din $\mathcal{S}$ pentru care $f(U)$ este convexă.

Caracterizarea analitică:

$$\mathcal{K} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \Re\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right] > 0 \right\}. \tag{1.4}$$

Teorema 1.6.2. *[26] Dacă $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ esteîn $\mathcal{K}$ atunci*

$$|a_n| \leq 1,\ n = 2, 3, \cdots .$$

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă f este de forma:

$$f(z) = \frac{z}{1 + e^{i\sigma}z},\ \sigma \in \mathbb{R}.$$

1.7 Funcţii aproape convexe

Definiţia 1.7.1. *[67] O funcţie $f \in \mathcal{A}$ este aproape convexă dacă şi numai dacă există o funcţie $g \in \mathcal{K}$ astfel încât*

$$\Re\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) \geq 0, \quad z \in U.$$

Notăm cu $\mathcal{CK}$ clasa funcţiilor aproape convexe.

Teorema 1.7.1. *[67] Dacă $f \in \mathcal{A}$ este o funcţie aproape convexă atunci coeficienţii satisfac următoarea inegalitate:*

$$|a_n| \leq n,\ n = 2, 3, \cdots .$$

1.8 Funcţii spiralate

Teorema 1.8.1. *[65] O funcţie $f \in \mathcal{A}$ se numeşte λ- spiralată, $\left(-\frac{\pi}{2} < \lambda < \frac{\pi}{2}\right)$ dacă şi numai dacă*

$$\Re\left[e^{i\lambda}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > 0, \quad z \in U.$$

În 1967, R. Libera [52] extinde definiţia către funcţii λ-spiralate de ordin α.

Definiţia 1.8.1. *Pentru* $0 \leq \alpha < 1$ *şi* $|\lambda| < \pi/2$, *o funcţie* $f \in \mathcal{A}$ *se numeşte* λ*-spiralată de ordin* α *în* U *dacă*

$$\Re\left[e^{i\lambda}\frac{zf'(z)}{f(z)}\right] > \alpha\cos\lambda, \quad z \in U. \tag{1.5}$$

1.9 Funcţii armonice

În această secţiune vom câteva noţiuni de bază şi proprietăţi cu privire la funcţiile armonice. Aceste funcţii sunt strâns legate de funcţiile olomorfe deoarece părţile reală şi imaginară ale unei funcţii olomorfe sunt funcţii armonice şi orice funcţie armonică pe un domeniu simplu conex D din $\mathbb{C}$ este partea reală (imaginară) a unei funcţii olomorfe din D.

Definiţia 1.9.1. *[21] Fie* $D \subseteq \mathbb{C}$ *o regiune. Spunem că o funcţie* $u(x, y)$ *este armonică pe* D *dacă satisface ecuaţia lui Laplace:*

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Propoziţia 1.9.1. *[21] Fie* $f = u + iv$ *o funcţie olomorfă pe* D. *Atunci* u *şi* v *sunt armonice pe* D.

Observaţia 1.9.1. *Inversa propoziţiei* 1.9.1 *este de asemenea adevărată dar numai în cazul în care* D *este un domeniu simplu conex.*

Teorema 1.9.1. *[21] Presupunem că* u *este o funcţie armonică pe un domeniu simplu conex* D. *Atunci există o funcţie armonică* v *astfel încât* $f = u + iv$ *este olomorfă pe* D.

Observaţia 1.9.2. *Funcţia* v *se numeşte conjugatul armonic al lui* u.

Teorema 1.9.2 (Valoarea medie). *[21] Fie* u *o funcţie armonică pe* D. *Dacă* D *conţine un disc închis de rază* r *centrat în* z_0 *atunci*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

Teorema 1.9.3 (tPrincipiul maximului modulului). *[21] Fie* u *o funcţie armonică pe* D. *Dacă* u *îşi atinge valoarea maximă în* $z_0 \in D$ *atunci* u *este constantă.*

Teorema 1.9.4 (formula integrală Poisson). *[21] Fie $r > 0$ şi $u : \bar{U}(0,r) \to \mathbb{R}$ o funcţie armonică pe $U(0,r)$ şi continuă pe $\bar{U}(0,r)$. Atunci*

$$u(\rho e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2-\rho^2}{r^2-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}u(re^{i\theta})\mathrm{d}\theta,$$

pentru orice $\rho \in [0,r)$ şi $\varphi \in \mathbb{R}$.

Capitolul 2

Subordonări diferenţiale

În [56] şi [58], S.S. Miller şi P.T. Mocanu au extins studiul inegalităţilor diferenţiale pentru funcţii de variabilă reală la funcţii de variabilă complexă definite în discul unitate. Aceştia au dezvoltat o nouă metodă de cercetare în teoria geometrică a funcţiilor analitice numită metoda subordonărilor diferenţiale sau metoda funcţiilor analitice. Această metodă s-a dovedit a fi foarte eficientă în obţinerea unor noi rezultate în domeniu sau demonstrarea, într-o manieră mai simpla, a unor rezultate deja cunoscute.

2.1 Definiţii şi rezultate de bază

Definiţia 2.1.1. *[65] Dacă f şi g sunt două funcţii analitice pe U, spunem că f este subordonată lui g, şi vom nota cu*

$$f \prec g \quad \textit{sau} \quad f(z) \prec g(z),$$

dacă există o funcţie Schwarz ω (funcţie analitică pe U, cu $\omega(0) = 0$ şi $|\omega(z)| < 1$, pentru orice $z \in U$) astfel încât

$$f(z) = g(\omega(z)), \ z \in U.$$

Teorema 2.1.1. *[65] Fie $f, g \in \mathcal{H}(U)$ şi fie g o funcţie univalentă pe U. Atunci $f \prec g$ dacă şi numai dacă $f(0) = g(0)$ şi $f(U) \subseteq g(U)$.*

Fie $\Omega, \Delta \subset \mathbb{C}$, $p \in \mathcal{H}(U)$ cu $p(0) = a$, $a \in \mathbb{C}$ şi fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$. Metoda subordonărilor diferenţiale constă în generalizarea unor implicaţii de forma:

$$\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : z \in U\} \subset \Omega \Rightarrow p(U) \subset \Delta. \tag{2.1}$$

Definiţia 2.1.2. *Fie $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ şi fie h o funcţie univalentă pe U. Dacă p este analitică pe U şi satisface subordonarea diferenţială de ordinul al doilea:*

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z), \tag{2.2}$$

atunci p se numeşte soluţie a subordonării diferenţiale.

Funcţia univalentă q se numeşte dominantă a soluţiei subordonării diferenţiale dacă $p \prec q$ pentru orice p ce satisface (2.2).

O dominantă $\tilde{q}$ care satisface $\tilde{q} \prec q$ pentru orice dominantă q din (2.2) se numeşte cea mai bună dominantă.

Definiţia 2.1.3. *[57] Notăm cu Q clasa funcţiilor q care sunt analitice şi injective pe $\bar{U} \setminus E(q)$, unde*

$$E(q) = \left\{\zeta \in \partial U : \lim_{z \to \zeta} q(z) = \infty\right\},$$

astfel încât $q'(\zeta) \neq 0$ pentru $\zeta \in \partial U \setminus E(q)$.

Dacă $q \in Q$ atunci $\Delta = q(U)$ este un domeniu simplu conex.

Lema 2.1.1. *[57] Fie $q \in Q$, cu $q(0) = a$, şi fie $p(z) = a + a_n z^n + \cdots$ analitică pe U cu $p(z) \not\equiv a$ şi $n \geq 1$. Dacă p nu este subordonată lui q atunci există $z_0 = r_0 e^{i\theta_0} \in U$, $\zeta_0 \in \partial U \setminus E(q)$ şi $m \geq n \geq 1$ pentru care $p(U_{r_0}) \subset q(U)$,*

i) $p(z_0) = q(\zeta_0)$,

ii) $z_0 p'(z_0) = m\zeta_0 q'(\zeta_0)$,

iii) $\Re \dfrac{z_0 p''(z_0)}{p'(z_0)} + 1 \geq m\Re\left[\dfrac{\zeta_0 q''(\zeta_0)}{q'(\zeta_0)} + 1\right]$.

În continuare vom defini clasa funcţiilor admisibile:

Definiţia 2.1.4. *[57] Fie Ω în $\mathbb{C}$, $q \in Q$ şi n un întreg pozitiv. Clasa funcţiilor admisibile $\Psi_n[\Omega, q]$ constă în acele funcţii $\psi : \mathbb{C}^3 \times U \to \mathbb{C}$ care satisfac condiţiile* *de admisibilitate:*

$$\begin{cases} \psi(r,s,t;z) \notin \Omega, \ \text{atunci când} \\ r = q(\zeta), \ s = m\zeta q'(\zeta), \ \Re\left(1 + \dfrac{t}{s}\right) \geq m\Re\left(1 + \dfrac{\zeta q''(\zeta)}{q'(\zeta)}\right), \\ \zeta \in \partial U \setminus E(q), \ z \in U, \ m \geq n. \end{cases}$$

Teorema 2.1.2. *[57] Fie $\psi \in \Psi_n[\Omega, q]$ with $q(0) = a$.*
Dacă $p \in \mathcal{H}[a,n]$ şi $\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ este analitică pe U atunci

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in \Omega \Rightarrow p(z) \prec q(z).$$

Definiţia 2.1.5. *[57] Fie h o funcţie univalentă pe U cu $h(0) = a$ şi fie $p \in \mathcal{H}[a,n]$ ce satisface*

$$p(z) + \frac{zp'(z)}{\beta p(z) + \delta} \prec h(z).$$

Subordonarea diferenţială de ordinul I se numeşte subordonare diferenţială Briot-Bouquet.

Lema 2.1.2. *[57] Fie h o funcţie convexă pe U cu $\Re[\beta h(z) + \delta] > 0$, $z \in U$. Dacă q este o funcţie analitică pe U astfel încât $q(0) = h(0)$ şi*

$$q(z) + \frac{zq'(z)}{\beta q(z) + \delta} \prec h(z),$$

atunci $q(z) \prec h(z)$.

2.2 Exemple

În acest paragraf vom prezenta câteva exemple de subordonări pentru cazurile particulare ale discului şi semiplanului:

În primele trei exemple considerăm diferite condiţii pentru funcţiile A, B, C astfel încât să aibă loc implicaţia:

$$\Re[A(z)p(z) + B(z)zp'(z) + C(z)z^2p''(z)] > 0 \Rightarrow Rep(z) > 0, \ z \in U.$$

Examplul 2.2.1. *[87] Fie $A, B : U \to \mathbb{C}$, $C : U \to \mathbb{R}$ astfel încât $\Im A(z) \leq 1$ şi*

$\Re B(z) \leq 1 + C(z),\ z \in U$. *Dacă* $p(z) = 1 + a_1 z + \cdots$ *atunci*

$$\Re[A(z)p(z) + B(z)zp'(z) + C(z)z^2 p''(z)] > 0 \Rightarrow Rep(z) > 0,\ z \in U.$$

Examplul 2.2.2. *[87] Fie* $A, B : U \to \mathbb{C}$, $C : U \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\Re A(z) > 0$, $\Re B(z) \leq \Re A(z) + C(z)$, $C(z) > 0$ *şi* $\Im^2 A(z) \leq \Re^2 A(z)$, $z \in U$. *Dacă* $p(z) = 1 + a_1 z + \cdots$ *atunci*

$$\Re[A(z)p(z) + B(z)zp'(z) + C(z)z^2 p''(z)] > 0 \Rightarrow Rep(z) > 0,\ z \in U.$$

Examplul 2.2.3. *[87] Fie* $A, B, C : U \to \mathbb{C}$ *astfel încât* $\Im C(z) < 0$, $\Re B(z) = \Re C(z)$, $\Re C(z) > 0$ *şi* $\Im^2 A(z) \leq \Im^2 C(z)$, $z \in U$. *—Dacă* $p(z) = 1 + a_1 z + \cdots$ *atunci*

$$\Re[A(z)p(z) + B(z)zp'(z) + C(z)z^2 p''(z)] > 0 \Rightarrow Rep(z) > 0,\ z \in U.$$

În următoarele trei exemple considerăm diferite condiţii pentru funcţiile A, B, C astfel încât

$$\left|A(z)p(z) + B(z)zp'(z) + C(z)z^2 p''(z)\right| < 1 \Rightarrow |p(z)| < 1,\ z \in U.$$

Examplul 2.2.4. *[87] Fie* $A, B : U \to \mathbb{C}$, $C : U \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $C(z) \geq 1$, $\Re A(z) \geq 1 + \Im A(z)$ *şi* $(\Re B(z) - 1)^2 \leq 4\Im A(z)$, $z \in U$. *Dacă* $p \in \mathcal{H}[0, n]$ *atunci*

$$\left|A(z)p(z) + B(z)zp'(z) + C(z)z^2 p''(z)\right| \Rightarrow |p(z)| < 1,\ z \in U.$$

Examplul 2.2.5. *[87] Fie* $A, B, C : U \to \mathbb{C}$ *astfel încât* $\Re C(z) = \Re B(z)$, $\Re A(z) \geq 1 - \Re C(z)$ *şi* $\Re C(z) \geq 0$, $z \in U$. *Dacă* $p \in \mathcal{H}[0, n]$ *atunci*

$$\left|A(z)p(z) + B(z)zp'(z) + C(z)z^2 p''(z)\right| \Rightarrow |p(z)| < 1,\ z \in U.$$

Examplul 2.2.6. *[87] Fie* $A, B, C : U \to \mathbb{C}$ *astfel încât* $\Re C(z) = \Re B(z) - 2\Re A(z)$, $\Re B(z) \geq 1 + 2\Re A(z)$ *şi* $\Re A(z) \geq 1 + \Re^2 A(z)$, $z \in U$. *Dacă* $p \in \mathcal{H}[0, n]$ *atunci*

$$\left|A(z)p(z) + B(z)zp'(z) + C(z)z^2 p''(z)\right| \Rightarrow |p(z)| < 1,\ z \in U.$$

2.3 Aplicaţii ale subordonărilor diferenţiale

În acest paragraf vom studia apicaţii ale subordonărilor diferenţiale obţinute cu ajutorul mediei armonice.

Teorema 2.3.1. *[43] Fie $p(z) = 1 + a_1 z + \cdots$ o funcţie analitică pe U cu $p(z) \not\equiv 1$. Atunci*
$$\Re\left\{\frac{2p(z)\left[p(z) + zp'(z)\right]}{2p(z) + zp'(z)}\right\} > 0 \Rightarrow \Re p(z) > 0. \tag{2.3}$$

Observaţia 2.3.1. *Observăm că expresia din partea stângă a relaţiei (2.3) reprezintă media armonică a doua elemente $x_1 = p(z)$ şi $x_2 = p(z) + zp'(z)$ $(z \in U)$.*

Pentru $p(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ obţinem următorul corolar:

Corolarul 2.3.1. *[43] Fie $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ o funcţie analitică pe U. Atunci*
$$\Re\frac{2f(z)f'(z)}{f(z) + zf'(z)} > 0 \Rightarrow \Re\frac{f(z)}{z} > 0.$$

Teorema 2.3.2. *[43] Fie $p(z) = 1 + a_1 z + \cdots$ o funcţie analitică pe U cu $p(z) \not\equiv 1$. Atunci*
$$\Re\left[\frac{2p(z) + 2zp'(z)}{1 + p^2(z) + zp(z)p'(z)}\right] > 0 \Rightarrow \Re p(z) > 0.$$

Pentru $p(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ obţinem:

Corolarul 2.3.2. *[43] Fie $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ o funcţie analitică pe U. Atunci*
$$\Re\left[\frac{2\dfrac{z}{f(z)}f'(z)}{\dfrac{z}{f(z)} + f'(z)}\right] > 0 \Rightarrow \Re\frac{f(z)}{z} > 0.$$

Teorema 2.3.3. *[43] Fie $p(z) = 1 + a_1 z + \cdots$ o funcţie analitică pe U cu $p(z) \not\equiv 1$. Atunci*
$$\Re\left\{\frac{2\left[p(z) + \dfrac{zp'(z)}{p(z)}\right]}{2 + \dfrac{zp'(z)}{p^2(z)}}\right\} > 0 \Rightarrow \Re p(z) > 0.$$

Pentru $p(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ obţinem:

Corolarul 2.3.3. *[43] Fie* $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ *o funcţie analitică pe* U. *Atunci*

$$\Re\left\{\frac{2\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\left[1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right]}{1+\dfrac{zf'(z)}{f(z)}+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}}\right\} > 0 \Rightarrow \Re\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0.$$

Teorema 2.3.4. *[43] Fie* $p(z) = 1 + a_1z + \cdots$ *o funcţie analitică pe* U *cu* $p(z) \not\equiv 1$. *Atunci*

$$\Re\left\{\frac{2\left[p(z)+\dfrac{zp'(z)}{p(z)}\right]}{1+p^2(z)+zp'(z)}\right\} > 0 \Rightarrow \Re p(z) > 0.$$

Pentru $p(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ obţinem:

Corolarul 2.3.4. *[43] Fie* $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ *o funcţie analitică pe* U. *Atunci*

$$\Re\left\{\frac{2\dfrac{f(z)}{zf'(z)}\left[1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right]}{1+\dfrac{f(z)}{zf'(z)}+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}}\right\} > 0 \Rightarrow \Re\frac{zf'(z)}{f(z)} > 0.$$

Teorema 2.3.5. *[43] Fie* $p(z) = 1 + a_1z + a_2z^2 + \cdots$ *o funcţie analitică pe* U *cu* $p(z) \not\equiv 1$, *şi fie* $0 < M < \frac{1}{3}$. *Atunci*

$$\left|\frac{2p(z)\left[p(z)+zp'(z)\right]}{2p(z)+zp'(z)} - 1\right| < M \Rightarrow |p(z)-1| < M. \tag{2.4}$$

Pentru $p(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ obţinem următorul corolar:

Corolarul 2.3.5. *[43] Fie* $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ *o funcţie analitică pe* U *şi fie* $0 < M < \frac{1}{3}$. *Atunci*

$$\left|\frac{2f'(z)}{2+\dfrac{zf'(z)}{f(z)}} - 1\right| < M \Rightarrow \left|\frac{f(z)}{z} - 1\right| < M.$$

Pentru cazul $p(z) = f'(z)$, obţinem:

Corolarul 2.3.6. *[43] Fie $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ o funcţie analitică pe U şi fie $0 < M < \frac{1}{3}$. Atunci*

$$\left|\frac{2(f'(z)+zf''(z))}{2+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}} - 1\right| < M \Rightarrow |f'(z) - 1| < M.$$

Alegând $p(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ în Teorema (2.3.5), avem:

Corolarul 2.3.7. *[43] Fie $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ o funcţie analitică pe U şi fie $0 < M < \frac{1}{3}$. Atunci*

$$\left|\frac{2\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\left(2+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}-\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right)}{3+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}-\dfrac{zf'(z)}{f(z)}} - 1\right| < M \Rightarrow \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < M.$$

Teorema 2.3.6. *[43] Fie $p(z) = 1 + a_1z + \cdots$ o funcţie analitică pe U cu $p(z) \not\equiv 1$ şi fie $\gamma \in (0,1]$. Atunci*

$$\left|\arg\frac{2p(z)\left[p(z)+zp'(z)\right]}{2p(z)+zp'(z)}\right| < \gamma\frac{\pi}{2} \Rightarrow |\arg p(z)| < \gamma\frac{\pi}{2}. \tag{2.5}$$

Pentru $p(z) = \dfrac{f(z)}{z}$ obţinem:

Corolarul 2.3.8. *[43] Fie $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ o funcţie analitică pe U. Atunci*

$$\left|\arg\frac{2f(z)f'(z)}{f(z)+zf'(z)}\right| < \gamma\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|\arg\frac{f(z)}{z}\right| < \gamma\frac{\pi}{2}.$$

Alegând $p(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ în Teorema (2.3.6), obţinem:

Corolarul 2.3.9. *Fie $f(z) = z + a_2z^2 + \cdots$ o funcţie analitică pe U. Atunci*

$$\left|\arg\frac{2\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\left(2+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}-\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right)}{3+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}-\dfrac{zf'(z)}{f(z)}}\right| < \gamma\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \gamma\frac{\pi}{2}.$$

Teorema 2.3.7. *[43] Fie* $p(z) = 1 + a_1 z + \cdots$ *o funcţie analitică pe* U *cu* $p(z) \not\equiv 1$ *şi fie* $\gamma \in (0, 1]$. *Atunci*

$$\left| \arg \frac{2\left[p(z) + \dfrac{zp'(z)}{p(z)}\right]}{2 + \dfrac{zp'(z)}{p^2(z)}} \right| < \gamma \frac{\pi}{2} \Rightarrow |\arg p(z)| < \gamma \frac{\pi}{2}.$$

Pentru $p(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ avem:

Corolarul 2.3.10. *[43] Fie* $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ *o funcţie analitică pe* U. *Atunci*

$$\left| \arg \frac{2\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\left[1 + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right]}{1 + \dfrac{zf'(z)}{f(z)} + \dfrac{zf''(z)}{f'(z)}} \right| < \gamma \frac{\pi}{2} \Rightarrow \left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \gamma \frac{\pi}{2}.$$

Capitolul 3

Funcţii bi-univalente

3.1 Delimitări ale coeficienţilor pentru clasa $R^{\tau}_{\gamma,\sigma}(\varphi)$

Definiţia 3.1.1. *[86] O funcţie f, dată de* (1.1) *se găseşte în clasa $R^{\tau}_{\gamma,\sigma}(\varphi)$* $(0 \leq \gamma \leq 1,$ $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$ *dacă satisface următoarele condiţii:*

$$f \in \sigma \quad şi \quad 1 + \frac{1}{\tau}\left(f'(z) + \gamma z f''(z) - 1\right) \prec \varphi(z)$$

$$şi \quad 1 + \frac{1}{\tau}\left(g'(w) + \gamma w g''(w) - 1\right) \prec \varphi(w),$$

unde g reprezintă prelungirea lui f^{-1} pe U.

Dacă alegem $\varphi(z) = \dfrac{1+Az}{1+Bz}$, $\;-1 \leq B < A \leq 1,\;$ $z \in U$ vom obţine subclasa $R^{\tau}_{\gamma,\sigma}(A,B)$ funcţiilor f ce satisfac:

$$f \in \sigma \quad \text{şi} \quad \left|\frac{f'(z) + \gamma z f''(z) - 1}{\tau(A-B) - B\left(f'(z) + \gamma z f''(z) - 1\right)}\right| < 1,$$

$$\text{şi} \quad \left|\frac{g'(w) + \gamma w g''(w) - 1}{\tau(A-B) - B\left(g'(w) + \gamma w g''(w) - 1\right)}\right| < 1.$$

Teorema 3.1.1. *[86] Dacă $f \in R^{\tau}_{\gamma,\sigma}(\varphi)$ este dată de* (1.1) *atunci*

$$|a_2| \leq \frac{|\tau| B_1 \sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|3\tau B_1^2(1+2\gamma) - 4(B_2 - B_1)(1+\gamma)^2\right|}} \tag{3.1}$$

şi

$$|a_3| \leq \frac{B_1|\tau|}{3(1+2\gamma)} + \frac{B_1^2|\tau|^2}{4(1+\gamma)^2}. \tag{3.2}$$

Dacă alegem, în Teorema 3.1.1, $\tau = 1$ şi $\gamma = 0$ vom obţine rezultatul demonstrat de Ali [5, Th. 2.1].

Pentru $A = 1$ and $B = -1$ în Corolarul 3.1.1 şi pentru $\tau = 1$ and $\gamma = 0$, obţinem următoarele estimări pentru a_2 şi a_3

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ and } |a_3| \leq \frac{5}{3}.$$

Pentru $\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ obţinem:

Corolarul 3.1.1. *[86] Dacă* $f \in R^\tau_{\gamma,\sigma}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha\right)$, *atunci*

$$|a_2| \leq \frac{2|\tau|\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{|6\tau\alpha^2(1+2\gamma) - 4\alpha(\alpha-1)(1+\gamma)^2|}}$$

şi

$$|a_3| \leq \frac{|\tau|}{1+2\gamma}\left(\frac{2\alpha}{3} + \frac{\alpha^2|\tau|^2}{(1+\gamma)^2}\right).$$

Dacă alegem $\tau = 1$ şi $\gamma = 0$ în corolarul precedent, obţinem rezultatul din [81, Th. 1].

3.2 Delimitări ale coeficienţilor pentru clasa $M_{\alpha,\lambda,\sigma}(\varphi)$

Definiţia 3.2.1. *[86] O funcţie f, dată de* (1.1) *se găseşte în clasa* $M_{\alpha,\lambda,\sigma}(\varphi)$, $(\alpha \geq 0,\ \lambda \geq 0)$ *dacă satisface următoarele condiţii:*

$$f \in \sigma$$

$$\text{şi } \left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\frac{f(z)}{z}\right)^\alpha + \lambda\left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{zf'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right)\right]\right\} \prec \varphi(z)$$

$$\text{şi } \left\{\frac{wg'(w)}{g(w)}\left(\frac{g(w)}{w}\right)^\alpha + \lambda\left[1 + \frac{wg''(w)}{g'(w)} - \frac{wg'(w)}{g(w)} + \alpha\left(\frac{wg'(w)}{g(w)} - 1\right)\right]\right\} \prec \varphi(w),$$

unde g reprezintă prelungirea lui f^{-1} pe U.

Teorema 3.2.1. *[86] Dacă* $f \in M_{\alpha,\lambda,\sigma}(\varphi)$ *este de forma* (1.1) *atunci*

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{\left|\frac{1}{2}B_1^2(\alpha+1)(\alpha+2\lambda+2)+(1+\alpha)^2(1+\lambda)^2(B_1-B_2)\right|}} \tag{3.3}$$

şi

$$|a_3| \leq \frac{2\left(B_1+|B_2-B_1|\right)}{(\alpha+1)(\alpha+2\lambda+2)}. \tag{3.4}$$

Pentru $\alpha = 0$ şi $\lambda = 0$ obţinem estimări ale coeficienţilor pentru funcţiile bi-stelate şi pentru $\alpha = 0$ şi $\lambda = 1$ obţinem estimări ale coeficienţilor pentru funcţiile bi-convexe.

Pentru $\alpha = 1$ and $\lambda = 0$ obţinem estimări ale coeficienţilor pentru clasa $\mathcal{H}_\sigma(\varphi)$, introdusă de Ali în [5]:

Corolarul 3.2.1. *Fie* f *o funcţie din clasa* $M_{1,0,\sigma}(\varphi)$*. Atunci*

$$|a_2| \leq \frac{B_1\sqrt{B_1}}{\sqrt{|3B_1^2+4B_1-4B_2|}} \quad \textit{and}$$

$$|a_3| \leq \frac{1}{3}\left(B_1+|B_2-B_1|\right).$$

Observăm că estimarea pentru a_3 în Corolarul 3.2.1 este imbunătăţită ([5, Th. 2.1]).

3.3 Delimitări ale coeficienţilor pentru clasa $\mathcal{CK}_\sigma(\varphi)$

Definiţia 3.3.1. *[88] O funcţie* f*, de forma* (1.1)*, se găseşte în clasa* $\mathcal{CK}_\sigma(\varphi)$ *dacă satisface următoarele condiţii:*

$$f \in \sigma \quad \textit{şi există o funcţie } \phi \in \mathcal{K} \textit{ astfel încât } \frac{f'(z)}{\phi'(z)} \prec \varphi(z) \quad \textit{şi}$$

$$\frac{g'(w)}{\phi'(w)} \prec \varphi(w),$$

unde g *reprezintă prelungirea lui* f^{-1} *pe* U*.*

Teorema 3.3.1. *[88] Dacă $f \in \mathcal{CK}_\sigma(\varphi)$ este de forma (1.1) atunci*

$$|a_2| \leq \min\left\{\sqrt{\frac{B_1^2(B_1+1)+4\,|B_2-B_1|}{|3B_1^2-4(B_2-B_1)|}}\;,\;\frac{B_1}{2}\right\} \tag{3.5}$$

şi

$$|a_3| \leq B_1 + \frac{B_1^2}{4} + \frac{4}{3}\frac{|B_2-B_1|}{B_1}. \tag{3.6}$$

Pentru $\varphi(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ obţinem:

Corolarul 3.3.1. *Dacă $f \in \mathcal{CK}_\sigma\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha\right)$ este de forma (1.1) atunci*

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{2\alpha^2-\alpha+2}{\alpha+2}}$$

şi

$$|a_3| \leq \alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha + \frac{4}{3}.$$

3.4 Delimitări ale coeficienţilor pentru clasa $\mathcal{CS^*}_\sigma(\varphi)$

Definiţia 3.4.1. *[88] O funcţie f, de forma (1.1), se găseşte în clasa $\mathcal{CS^*}_\sigma(\varphi)$ dacă satisface următoarele condiţii:*

$$f \in \sigma \quad \textit{şi există o funcţie } h \in \mathcal{S}^* \textit{ astfel încât } \quad \frac{f(z)}{h(z)} \prec \varphi(z) \quad \textit{şi}$$

$$\frac{g(w)}{h(w)} \prec \varphi(w).$$

unde g reprezintă prelungirea lui f^{-1} pe U.

Teorema 3.4.1. *[88] Dacă $f \in \mathcal{CS^*}_\sigma(\varphi)$ este de forma (1.1) atunci*

$$|a_2| \leq \min\left\{\sqrt{\frac{B_1^3+B_1^2+4\,|B_2-B_1|}{|B_1^2-B_2+B_1|}}\;,\;B_1\right\} \tag{3.7}$$

şi

$$|a_3| \leq 3B_1 + B_1^2 + \frac{8|B_2-B_1|}{B_1}. \tag{3.8}$$

Pentru $\varphi(z)=\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha},\ 0<\alpha\leq 1$ obţinem:

Corolarul 3.4.1. *Dacă* $f\in \mathcal{CS}^{*}{}_{\sigma}\left(\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\right)$ *este de forma* (1.1) *atunci*

$$|a_2|\leq\sqrt{\frac{4\alpha^2-2\alpha+4}{\alpha+1}}$$

şi

$$|a_3|\leq 4\alpha^2-2\alpha+8.$$

Capitolul 4

Clase de funcţii definite cu ajutorul operatorilor

În acest capitol vom introduce noi clase de funcţii analitice definite cu ajutorul unor operatori cunoscuţi prezentaţi în continuare:

- **Operatorul diferenţial Sălăgean:**

  Pentru o funcţie $f \in \mathcal{A}$ Sălăgean [76] a introdus operatorul D^n definit prin:

$$
\begin{gathered}
D^0 f(z) = f(z), \\
D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z), \\
\vdots \\
D^n f(z) = D(D^{n-1} f(z)),\ n = 1, 2, \cdots,\ z \in U.
\end{gathered}
\tag{4.1}
$$

- **Operatorul integral Sălăgean:**

  Pentru o funcţie $f \in \mathcal{A}$ Sălăgean [76] a introdus operatorul I^n definit prin:

$$
\begin{gathered}
I^0 f(z) = f(z), \\
I^1 f(z) = If(z) = \int_0^z f(t) t^{-1} \mathrm{d}t, \\
\vdots \\
I^n f(z) = I(I^{n-1} f(z)),\ n = 1, 2, \cdots,\ z \in U.
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

- **Operatorul Ruscheweyh:**

  Pentru o funcţie $f \in \mathcal{A}$ Ruscheweyh [73] a introdus operatorul $R^{\lambda} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ definit prin:

$$R^{\lambda} f(z) = \frac{1}{(1-z)^{\lambda+1}} * f(z), \quad \lambda > -1, \ z \in U.$$

  În particular, pentru $\lambda = n$, avem

$$R^{n}(z) = \frac{z}{n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} \left\{ z^{n-1} f(z) \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \ z \in U. \tag{4.3}$$

- **Operatorul Carlson-Shaffer:**

  Fie funcţia $\phi(a, c; z)$ dată de

$$\phi(a, c; z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} z^{k+1} \quad (c \neq 0, -1, -2, ...; z \in U)$$

  unde $(x)_k$ este *simbolul Pochhammer* definit prin:

$$(x)_k := \begin{cases} 1, & k = 0 \\ x(x+1)(x+2)...(x+k-1), & k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

  Carlson şi Shaffer [15] au introdus operatorul liniar $L(a, c)$, ce corespunde funcţiei $\phi(a, c; z)$, definit prin:

$$L(a, c) := \phi(a, c; z) * f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} a_{k+1} z^{k+1}. \tag{4.4}$$

- **Operatorul Cho-Srivastava:**

  În [17], Cho şi Srivastava au introdus operatorul liniar de forma:

$$\mathcal{I}(m, l) f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{l+k}{l+1} \right)^{m} a_k z^k, \quad m \in \mathbb{Z}, \ l \geq 0. \tag{4.5}$$

- **Operatorul Srivastava-Attiya:**

Srivastava şi Attiya [82] au introdus operatorul liniar

$$J_{s,b} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

definit prin

$$J_{s,b}(f)(z) := G_{s,b}(z) * f(z), \quad z \in U, \ b \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}_0^-, \ s \in \mathbb{C}, \tag{4.6}$$

unde

$$G_{s,b}(z) := (1+b)^s \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+b)^s} - b^{-s} \right], \ z \in U. \tag{4.7}$$

4.1 Clasă de funcţii analitice definită cu ajutorul unui operator generalizat

Fie $\mathcal{L}(m, l, a, c, \lambda)$ operatorul definit prin:

$$\mathcal{L}(m, l, a, c, \lambda) f(z) = \lambda \mathcal{I}(m, l) f(z) + (1-\lambda) L(a, c) f(z) \tag{4.8}$$

unde $\mathcal{I}(m, l)f(z)$ este de forma (4.4) şi $L(a, c)f(z)$ este de forma(4.5).

Pentru $c = 1$ and $a = n + 1$ avem

$$\mathcal{L}(m, l, n, \alpha) f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\alpha \left(\frac{l+k}{l+1} \right)^m + (1-\alpha) C_{n+k-1}^n \right] a_k z^k, \tag{4.9}$$

Cu ajutorul operatorului $\mathcal{L}(m, l, a, c, \lambda)$ introducem următoarea subclasă de funcţii analitice:

Definiţia 4.1.1. *[85] Spunem că o funcţie $f \in \mathcal{A}_n$ se află în clasa $\mathcal{BL}(m, l, a, c, \mu, \alpha, \lambda)$, $n, m \in \mathbb{N}, l, \mu, \lambda \geq 0, \alpha \in [0, 1)$ dacă*

$$\left| \frac{\mathcal{L}(m+1, l, a+1, c, \lambda) f(z)}{z} \left(\frac{z}{\mathcal{L}(m, l, a, c, \lambda) f(z)} \right)^{\mu} - 1 \right| < 1 - \alpha, \ z \in U. \tag{4.10}$$

Observaţia 4.1.1. *[85] Clasa $\mathcal{BL}(m, l, a, c, \mu, \alpha, \lambda)$ include diferite clase de funcţii univalente, printre care:*

- $\mathcal{BL}(0,0,a,c,1,\alpha,1) \equiv \mathcal{S}^*(\alpha)$
- $\mathcal{BL}(1,0,a,c,1,\alpha,1) \equiv \mathcal{K}(\alpha)$
- $\mathcal{BL}(0,0,a,c,0,\alpha,1) \equiv \mathcal{R}(\alpha)$
- $\mathcal{BL}(0,0,a,c,2,\alpha,1) \equiv \mathcal{B}(\alpha)$ *introdusă de Frasin şi Darus în [24]*
- $\mathcal{BL}(0,0,a,c,\mu,\alpha,1) \equiv \mathcal{B}(\mu,\alpha)$ *introdusă de Frasin şi Jahangiri în [23]*
- $\mathcal{BL}(m,0,a,c,\mu,\alpha,1) \equiv \mathcal{BS}(m,\mu,\alpha)$ *introdusă de A. Alb Lupaş şi A. Cătaş în [4]*
- $\mathcal{BL}(m,0,m+1,1,\mu,\alpha,0) \equiv \mathcal{BR}(m,\mu,\alpha)$ *introdusă de A. Alb Lupaş şi A. Cătaş în [3]*
- $\mathcal{BL}(m,0,m+1,1,\mu,\alpha,\lambda) \equiv \mathcal{BL}(m,\mu,\alpha,\lambda)$ *introdusă de A. Alb Lupaş şi A. Cătaş în [2]*

În prima teoremă prezentăm condiţia suficientă pentru o funcţie să fie în clasa $\mathcal{BL}(m,l,a,c,\mu,\alpha,\lambda)$.

Teorema 4.1.1. *[85] Fie $f \in \mathcal{A}_n$, $n,m \in \mathbb{N}, l,\mu,\lambda \geq 0, \alpha \in [1/2,1)$. Dacă*

$$\lambda\frac{(l+1)\mathcal{I}(m+2,l)f(z) - l\mathcal{I}(m+1,l)f(z)}{\mathcal{L}(m+1,l,a+1,c,\lambda)}$$
$$+(1-\lambda)\frac{(a+1)L(a+2,c)f(z) - aL(a+1,c)f(z)}{\mathcal{L}(m+1,l,a+1,c,\lambda)}$$
$$-\mu\lambda\frac{(l+1)\mathcal{I}(m+1,l)f(z) - l\mathcal{I}(m,l)f(z)}{\mathcal{L}(m,l,a,c,\lambda)}$$
$$+\mu(1-\lambda)\frac{aL(a+1,c)f(z) - (a-1)L(a,c)f(z)}{\mathcal{L}(m,l,a,c,\lambda)}$$
$$+\mu \prec 1 + \frac{3\alpha-1}{2\alpha}z, \quad z \in U, \tag{4.11}$$

atunci $f \in \mathcal{BL}(m,l,a,c,\mu,\alpha,\lambda)$.

Dacă alegem $a = l$ în Teorema 4.1.1, obţinem:

Corolarul 4.1.1. *[85] Fie* $f \in \mathcal{A}_n,\ n, m \in \mathbb{N}, l, \mu, \lambda \geq 0, \alpha \in [1/2, 1)$. *Dacă*

$$\frac{(l+1)\mathcal{L}(m+2, l, a+2, c, \lambda)}{\mathcal{L}(m+1, l, a+1, c, \lambda)} - \mu\frac{(l+1)\mathcal{L}(m+1, l, a+1, c, \lambda)}{\mathcal{L}(m, l, a, c, \lambda)}$$
$$-l + \mu(l+1) \prec 1 + \frac{3\alpha - 1}{2\alpha}z, \quad z \in U,$$

atunci $f \in \mathcal{BL}(m, l, a, c, \mu, \alpha, \lambda)$.

Teorema 4.1.2. *[85] Fie* $f(z) \in \mathcal{A}$. *Dacă* $f(z) \in \mathcal{BL}(m, l, l+1, c, \mu, \alpha, \lambda)$, *atunci*

$$\left|\arg \frac{\mathcal{L}(m, l, l+1, c, \lambda)}{z}\right| < \frac{\pi}{2}\,\alpha,$$

pentru $0 < \alpha \leq 1$ *şi* $2/\pi\ \tan^{-1}(\alpha/(l+1)) - \alpha(\mu - 1) = 1$.

Dacă alegem, în Teorema 4.1.2, $m = l = 0, \mu = 2$ şi $\lambda = 1$, obţinem următorul corolar, demonstrat de B. A. Frasin şi M. Darus în [24]:

Corolarul 4.1.2. *[24] Fie* $f(z) \in \mathcal{A}$. *Dacă* $f(z) \in \mathcal{B}(\alpha)$, *atunci*

$$\left|\arg\left(\frac{f(z)}{z}\right)\right| < \frac{\pi}{2}\,\alpha,\ z \in U,$$

pentru $\alpha(0 < \alpha < 1)$ *şi* $(2/\pi)\ \tan^{-1}\alpha - \alpha = 1$.

4.2 Subclasă de funcţii armonice

Fie

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k + \overline{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k}, \quad |b_1| < 1. \tag{4.12}$$

Observăm că familia $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ se reduce la binecunoscuta clasă $\mathcal{S}$ dacă partea co-analitică a lui $f = h + \overline{g}$ este zero ($g \equiv 0$). Silverman [77] a introdus o subclasă a lui $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$, notată cu $\mathcal{S}_{\overline{\mathcal{H}}}$, care conţine funcţii de forma $f = h + \overline{g}$ unde

$$h(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} |a_k| z^k \quad \text{şi}$$
$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| z^k, \ \ |b_1| < 1. \tag{4.13}$$

Pentru $f = h + \overline{g}$ de forma (4.12), vom defini operatorul $\mathcal{L}(m, l, n, \alpha)$ prin

$$\mathcal{L}(m, l, n, \alpha) f(z) = \mathcal{L}(m, l, n, \alpha) h(z) + \overline{\mathcal{L}(m, l, n, \alpha) g(z)}, \tag{4.14}$$

unde

$$\mathcal{L}(m, l, n, \alpha) h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\alpha \left(\frac{l+k}{l+1} \right)^m + (1-\alpha) C_{n+k-1}^{n} \right] a_k z^k$$

şi

$$\mathcal{L}(m, l, n, \alpha) g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\alpha \left(\frac{l+k}{l+1} \right)^n + (1-\alpha) C_{n+k-1}^{n} \right] b_k z^k, |b_1| < 1.$$

Notăm cu $\mathcal{HL}(m, l, n, \alpha, \gamma)$ clasa funcţiilor armonice f de forma (4.12), astfel încât

$$\Re \left[\frac{z \left(\mathcal{L}(m, l, n, \alpha) f(z) \right)'}{\mathcal{L}(m, l, n, \alpha) f(z)} \right] \geq \gamma, \quad 0 \leq \gamma < 1.$$

Pentru $n = l$, obţinem clasa $\mathcal{HL}(m, l, \alpha, \gamma)$

$$\Re \left[\frac{(l+1)\mathcal{L}(m+1, l, l+1, \alpha) f(z)}{\mathcal{L}(m, l, l, \alpha) f(z)} - l \right] \geq \gamma, \tag{4.15}$$

unde $\mathcal{L}(m, l, n, \alpha)$ este de forma (4.14).

Mai mult, notăm cu $\overline{\mathcal{HL}}(m, l, \alpha, \gamma)$ clasa funcţiilor $f = h + \overline{g}$ in $\mathcal{HL}(m, l, \alpha, \gamma)$, unde h şi g sunt de forma (4.13).

Teorema 4.2.1. *[89] Fie $f = h + \overline{g}$ dată de (4.12). Dacă*

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k - \gamma) \left[\alpha \left(\frac{l+k}{l+1} \right)^m + (1-\alpha) C_{l+k-1}^{l} \right] (|a_k| + |b_k|) + |b_1| \leq 1 - \gamma, \tag{4.16}$$

unde $l, m \geq 0$, $a_1 = 1$, $\alpha, \gamma \in [0, 1)$, atunci $f(z)$ este armonică univalenta ce păstrează sensul pe U şi $f(z) \in \mathcal{HL}(m, l, \alpha, \gamma)$.

Pentru $m, l, \gamma = 0$ şi $\alpha = 1$ în teorema precedentă, obţinem următoarea teoremă demonstrată de Jahangiry and Silverman în [37].

Corolarul 4.2.1. *Fie $f = h + \overline{g}$ de forma (4.12). Dacă*

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(|a_k| + |b_k|) \leq 1 - |b_1|,$$

atunci f păstrează sensul, este armonică univalentă pe U şi $f \in \mathcal{S}^*_{\mathcal{H}}$.

Funcţia armonică

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1-\gamma}{(k-\gamma)A_k} x_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-\gamma)}{[(1-\gamma+k) + |1+\gamma-k|]A_k} \overline{y_k z^k}, \quad (4.17)$$

unde

$$A_k = \left[\alpha \left(\frac{l+k}{l+1} \right)^m + (1-\alpha) C^l_{l+k-1} \right].$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| = 1$$

ne arată că rezultatul este exact.

Funcţiile de forma (4.17) sunt în clasa $\mathcal{HL}(n, l, \alpha, \gamma)$ deoarece

$$\sum_{k=2}^{\infty} (k-\gamma) A_k (|a_k| + |b_k|) + |b_1|$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} (k-\gamma) A_k |a_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-\gamma+k) + |1+\gamma-k|}{2} A_k |b_k|$$

$$= (1-\gamma) \left(\sum_{k=2}^{\infty} |x_k| + \sum_{k=1}^{\infty} |y_k| \right) = 1 - \gamma.$$

Teorema 4.2.2. *[89] Fie $f = h + \overline{g}$ de forma (4.13). Atunci $f \in \overline{\mathcal{HL}}(m, l, \alpha, \gamma)$ dacă şi numai dacă*

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-\gamma)\left[\alpha\left(\frac{l+k}{l+1}\right)^m + (1-\alpha)C_{l+k-1}^{l}\right](|a_k| + |b_k|) + |b_1| \leq 1-\gamma. \tag{4.18}$$

Teorema 4.2.3. *[89] Fie f de forma 4.13. Atunci $f \in \overline{\mathcal{HL}}(m, l, \alpha, \gamma)$ dacă şi numai dacă*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(X_k h_k(z) + Y_k g_k(z)\right), \tag{4.19}$$

unde

$$h_1(z) = z,\ h_k(z) = z - \frac{1-\gamma}{(k-\gamma)A_k} z^k,\ k \geq 2,$$

$$g_k(z) = z + \frac{2(1-\gamma)}{((1-\gamma+k) + |1+\gamma-k|)A_k}\overline{z}^k,\ k \geq 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(X_k + Y_k) = 1,\ X_k \geq 0,\ Y_k \geq 0.$$

Teorema 4.2.4. *[89] Fie $f \in \overline{\mathcal{HL}}(m, l, \alpha, \gamma)$. Atunci, pentru $|z| = r < 1$, avem*

$$|f(z)| \leq (1+|b_1|)r + \frac{1}{\alpha\left(\frac{l+2}{l+1}\right)^m + (1-\alpha)(l+1)}\left(\frac{1-\gamma}{2-\gamma} - \frac{1}{2-\gamma}|b_1|\right)r^2$$

şi

$$|f(z)| \geq (1-|b_1|)r - \frac{1}{\alpha\left(\frac{l+2}{l+1}\right)^m + (1-\alpha)(l+1)}\left(\frac{1-\gamma}{2-\gamma} - \frac{1}{2-\gamma}|b_1|\right)r^2.$$

Teorema 4.2.5. *[89] Fie $f(z) \in \overline{\mathcal{HL}}(m, l, \alpha, \gamma)$ şi $F(z) \in \overline{\mathcal{HL}}(m, l, \alpha, \delta)$, pentru $0 \leq \delta \leq \gamma < 1$. Atunci $f(z) * F(z) \in \overline{\mathcal{HL}}(m, l, \alpha, \gamma) \subset \overline{\mathcal{HL}}(m, l, \alpha, \delta)$.*

4.3 Subclasă de funcţii analitice definită cu ajutorul operatorului integral Sălăgean

În acest paragraf vom studia o nouă clasă de funcţii analitice, $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^n$. Pentru această clasă vom prezentă o proprietate de incluziune, vom găsi punctele extreme precum şi delimitări ale coeficienţilor.

Definiţia 4.3.1. *[90] Pentru $\alpha \in (-\pi, \pi]$, $\beta \in (0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$, fie*

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^n := \left\{ f \in \mathcal{A} : \left| \arg \left((I^n f(z))' + \frac{1+e^{i\alpha}}{2} z (I^n f(z))'' \right) \right| < \beta \frac{\pi}{2},\ z \in U \right\} \tag{4.20}$$

Observăm că pentru $\beta = 1$ şi $n = 0$ $\mathcal{L}_{\alpha,1}^0 := \mathcal{L}_\alpha$.

Teorema 4.3.1. *[90] Presupunem că există o funcţie $\omega(z)$ astfel încât*

$$(I^{n+1} f(z))' + \frac{1+e^{i\alpha}}{2} z (I^{n+1} f(z))'' = \left(\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)} \right)^\beta, \tag{4.21}$$

unde $\omega(0) = 0$. Atunci

$$\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^n \subset \mathcal{L}_{\alpha,\beta}^{n+1},\ \textit{pentru orice } n \in \mathbb{N}, \alpha \in (-\pi, \pi],\ \textit{şi } \beta \in (0,1].$$

Teorema 4.3.2. *[90] Fie $\alpha \in (-\pi, \pi)$, $\beta \in (0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$. Dacă $f \in \mathcal{L}_{\alpha,\beta}^n$ atunci*

$$(I^n f(z))' \prec q(z) = \frac{c}{z^c} \int_0^z t^{c-1} \left(\frac{1+t}{1-t} \right)^\beta \mathrm{d}t, \quad z \in U,$$

unde $c = \dfrac{2}{1+e^{i\alpha}}$.

Funcţia q este cea mai bună dominantă.

Teorema 4.3.3. *[90] Fie $\alpha \in (-\pi, \pi)$, $\beta \in (0,1]$ şi $n \in \mathbb{N}$. Punctele extreme ale clasei $\mathcal{L}_{\alpha,\beta}^n$ sunt*

$$f_x(z) = z + 2 \sum_{k=2}^\infty \frac{\lambda_{k-1} k^{n-1}}{e^{i\alpha}(k-1) + (k+1)} x^{k-1} z^k, \tag{4.22}$$

unde $|x| = 1,\ z \in U,$

$$\lambda_k = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \beta \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ k-j \end{pmatrix} (-1)^{k-j} & 0 < \beta < 1, \\ \\ (-2)^{k-1} & \beta = 1. \end{cases} \tag{4.23}$$

şi

$$\begin{pmatrix} \beta \\ j \end{pmatrix} = \begin{cases} \dfrac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-j+1)}{j!} & j = 1, \dots, k, \\ \\ 1 & j = 0. \end{cases}$$

În ultima teoremă prezentăm delimitări ale coeficienţilor clasei $\mathcal{L}^n_{\alpha,\beta}$. Rezultatul pentru cazul $k = 2$ este exact.

Teorema 4.3.4. *[90] Fie* $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{L}^n_{\alpha,\beta}$, *unde* $\alpha \in (-\pi, \pi],\ \beta \in (0, 1]$ *şi* $n \in \mathbb{N}$. *Atunci*

$$|a_k| \leq \frac{2\sqrt{2}\beta k^{n-1}}{\sqrt{k^2 + 1 + (k^2 - 1)\cos\alpha}},\ k = 2, 3, \dots. \tag{4.24}$$

Pentru $k = 2$ *rezultatul este exact, egalitatea având loc pentru funcţia* f_x *dată de* (4.22)

4.4 Subclasă de funcţii λ-spiralate de ordin α

În acest paragraf, folosind operatorul integral Sălăgean, introducem două noi clase de funcţii analitice pentru care vom studia proprietăţi de incluziune.

Pentru început, considerăm operatorul L_c, introdus de Bernardi în [9].

Pentru $f(z) \in \mathcal{A}$ şi $c \in \mathbb{N}$, definim operatorul integral $L_c f(z)$ de forma

$$L_c f(z) = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z f(t) t^{c-1} \mathrm{d}t. \tag{4.25}$$

Considerând operatorul integral I^n definit în [76], de forma (4.2), introducem următoarele subclase de funcţii analitice:

$$S_n^\lambda(\alpha) = \{f \in \mathcal{A} \,|\, I^n f(z) \in S^\lambda(\alpha)\},$$

$$F_n^\lambda(\alpha) = \{f \in \mathcal{A} \,|\, I^n f(z) \in F^\lambda(\alpha)\}.$$

Observăm că $f(z) \in F_n^\lambda(\alpha)$ dacă şi numai dacă $zf'(z) \in S_n^\lambda(\alpha)$. De asemenea, $S_0^\lambda(\alpha) = S^\lambda(\alpha)$ şi $F_0^\lambda(\alpha) = F^\lambda(\alpha)$.

Teorema 4.4.1. *[19] Pentru $n \in \mathbb{N}$,*

$$S_n^\lambda(\alpha) \subset S_{n+1}^\lambda(\alpha),$$

unde $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\alpha \in [0,1)$.

Teorema 4.4.2. *[19] Pentru $n \in \mathbb{N}$,*

$$F_n^\lambda(\alpha) \subset F_{n+1}^\lambda(\alpha),$$

unde $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$ şi $\alpha \in [0,1)$.

Teorema 4.4.3. *[19] Fie $c \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\alpha \in [0,1)$. Dacă $f(z) \in S_n^\lambda(\alpha)$ atunci $L_c f(z) \in S_n^\lambda(\alpha)$, pentru $z \in U$.*

Teorema 4.4.4. *[19] Fie $c \in \mathbb{N}$, $\lambda \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\alpha \in [0,1)$. Dacă $f(z) \in F_n^\lambda(\alpha)$ atunci $L_c f(z) \in F_n^\lambda(\alpha)$, pentru $z \in U$.*

4.5 Subclasă de funcţii aproape stelate

În acest paragraf vom studia câteva proprietăţi ale clasei $\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)$: relaţie de incluziune, inegalităţi ale coeficienţilor precum şi reprezentare integrală.

Definiţia 4.5.1. *[91] O funcţie $f \in \mathcal{A}$ este în clasa $\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$ dacă funcţia $F(f)(z) = (1-\alpha)J_{s,b}(f)(z) + \alpha z J'_{s,b}(f)(z)$ este aproape stelată, adică*

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Re\left(\frac{zF'(f)(z)}{F(f)(z)}\right) \mathrm{d}\theta > -\pi,\ z = re^{i\theta},\ 0 < r < 1$$

.

Condiţia de mai sus este echivalentă cu

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Re\left(\frac{zJ'_{s,b}(f)(z)+\alpha z^2 J''_{s,b}(f)(z)}{(1-\alpha)J_{s,b}(f)(z)+\alpha z J'_{s,b}(f)(z)}\right)\mathrm{d}\theta > -\pi,\ z=re^{i\theta},\ 0<r<1. \quad (4.26)$$

Definiţia 4.5.2. *[91] O funcţie f este în clasa $\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)$ dacă şi numai dacă există o funcţie $g\in\mathcal{S}^*$ astfel încât*

$$\Re\left[\frac{F(f)(z)}{g(z)}\right] > 0,\ z\in U. \quad (4.27)$$

Primil rezultat este un rezultat de incluziune pentru clasa $\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)$.

Teorema 4.5.1. *[91] Pentru $\alpha\in(0,1]$, $\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)\subset\mathcal{CS}^*_{s,b}$.*

Teorema 4.5.2. *[91] Dacă funcţia f de forma $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ este în clasa $\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)$, atunci*

$$|a_n|\le\frac{n^2}{1-\alpha+\alpha n}\left|\left(\frac{n+b}{1+b}\right)^s\right|,\quad n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Rezultatul este exact.

În continuare, vom arăta că $\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)$ este închisă la convoluţia cu o funcţie convexă.

Teorema 4.5.3. *[91] Fie $\phi\in\mathcal{K}$ şi $f\in\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)$. Atunci $\phi * f\in\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)$.*

În cele din urmă, prezentăm reprezentarea integrală a funcţiilor din clasa $\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)$

Teorema 4.5.4. *[91] Dacă funcţia f este în clasa $\mathcal{CS}^*_{s,b}(\alpha)$, atunci*

$$f(z)=h_{s,b}(z)*\frac{1}{\alpha z^{1/\alpha-1}}\int_0^z t^{1/\alpha-2}g(t)p(t)\mathrm{d}t,$$

unde $g\in\mathcal{S}^*$, $p\in\mathcal{P}$ şi

$$h_{s,b}(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n+b}{1+b}\right)^s z^n.$$

Capitolul 5

Criterii de univalenţa

5.1 Lanţuri Löwner. Definiţii şi notaţii

Definiţia 5.1.1. *O funcţie* $L(z,t) : U \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ *se numeşte lanţ Löwner dacă satisface următoarele condiţii:*

i) $L(z,t)$ *este analitică şi univalentă pe* U *pentru* $t \in [0,\infty)$*,*

ii) $L(z,s) \prec L(z,t)$ *pentru* $0 \le s \le t < \infty$*,*

5.2 Criteriu de univalenţa definit cu ajutorul operatorului Sălăgean

Teorema 5.2.1. *[92] Fie* $f \in \mathcal{A}$ *şi* p *o funcţie analitică cu* $p(0) = 1$*. Dacă inegalităţile:*

$$\left| \frac{2}{p(z)+1} \cdot \frac{zf'(z)}{D^{n+1}f(z)} - 1 \right| \le 1 \tag{5.1}$$

şi

$$\left| \left(\frac{2}{p(z)+1} \cdot \frac{zf'(z)}{D^{n+1}f(z)} - 1 \right) |z|^2 + (1-|z|^2) \left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^{n+1}f(z)} - 1 + \frac{zp'(z)}{p(z)+1} \right) \right| \le 1 \tag{5.2}$$

sunt adevărate pentru $z \in U$*, atunci funcţia* f *este univalentă pe* U*.*

Pentru $n = 0$ în Teorema 5.2.1 obţinem rezultatul datorat lui Lewandowski [49].

Pentru $p \equiv 1$ şi $n = 0$ criteriul se reduce la binecunoscutul criteriu al lui Becker [8] şi Duren et al. [22].

Pentru $n = 1$, Teorema 5.2.1 ne conduce la rezultatul următor:

Corolarul 5.2.1. *[92] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi p o funcţie analitică cu $p(0) = 1$. Dacă inegalităţile*

$$\left|\frac{2}{p(z)+1} \cdot \frac{f'(z)}{f'(z)+zf''(z)} - 1\right| \leq 1$$

şi

$$\left|\left(\frac{2}{p(z)+1} \cdot \frac{f'(z)}{f'(z)+zf''(z)} - 1\right)|z|^2\right.$$

$$\left.+ (1-|z|^2)\left(\frac{2zf''(z)+z^2f'''(z)}{f'(z)+zf''(z)} + \frac{zp'(z)}{p(z)+1}\right)\right| \leq 1$$

sunt adevărate pentru $z \in U$ atunci $f \in \mathcal{S}$.

Pentru lanţul Löwner de forma

$$L(z,t) := f(e^{-t}z) + (e^t z - e^{-t}z) \cdot \frac{p(e^{-t}z)+1}{2} \cdot \frac{D^{n+1}f(e^{-t}z)}{D^n f(e^{-t}z)}, \quad z \in U, t \in [0,\infty),$$

urmând aceiaşi paşi ca şi în demonstraţia teoremei 5.2.1, vom obţine:

Teorema 5.2.2. *[92] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi p o funcţie analitică cu $p(0) = 1$. Dacă inegalităţile*

$$\left|\frac{2}{p(z)+1} \cdot f'(z)\frac{D^n f(z)}{D^{n+1}f(z)} - 1\right| \leq 1$$

şi

$$\left|\left(\frac{2}{p(z)+1} \cdot f'(z)\frac{D^n f(z)}{D^{n+1}f(z)} - 1\right)|z|^2\right.$$

$$\left.+(1-|z|^2)\left(\frac{D^{n+2}f(z)}{D^{n+1}f(z)} - \frac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)} + \frac{zp'(z)}{p(z)+1}\right)\right| \leq 1$$

sunt adevărate pentru $z \in U$, atunci funcţia f este univalentă pe U.

Pentru $n = 0$ obţinem:

Corolarul 5.2.2. *Fie $f \in \mathcal{A}$ şi p o funcţie analitică cu $p(0) = 1$. Dacă inegalităţile*

$$\left|\frac{2}{p(z)+1} \cdot \frac{f(z)}{z} - 1\right| \leq 1$$

şi

$$\left|\left(\frac{2}{p(z)+1}\cdot\frac{f(z)}{z}-1\right)|z|^2\right.$$

$$\left.+(1-|z|^2)\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{zf'(z)}{f(z)}+\frac{zp'(z)}{p(z)+1}\right)\right|\leq 1$$

sunt adevărate pentru $z\in U$, atunci funcţia f este univalentă pe U.

Pentru $p\equiv 1$ în corolarul precedent, obţimen Corolarul 3.5 demonstrat de Kanas şi Lecko [42].

Pentru $p(z)=\dfrac{f(z)}{z}$ obţinem:

Corolarul 5.2.3. *[92] Fie $f\in\mathcal{A}$ cu $\Re\dfrac{f(z)}{z}>0$. Dacă inegalităţile*

$$\left|\left(\frac{f(z)}{z}-1\right)|z|^2+(1-|z|^2)\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\left(\frac{f(z)}{z}+1\right)-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\right|\leq\left|\frac{f(z)}{z}+1\right|$$

sunt adevărate pentru $z\in U$, atunci funcţia f este univalentă pe U.

Acum, pentru $p(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ în Corolarul 5.2.2, obţinem următorul rezultat:

Corolarul 5.2.4. *Fie $f\in\mathcal{A}$. Dacă inegalităţile*

$$\left|2\frac{f(z)}{z}-\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\leq\left|1+\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$$

şi

$$\left|\left(2\frac{f(z)}{z}-\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right)|z|^2\right.$$

$$\left.+(1-|z|^2)\left(2\frac{zf'(z)}{f(z)+1}\right)\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right|\leq\left|1+\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$$

sunt adevărate pentru $z\in U$, atunci funcţia f este univalentă pe U.

5.3 Criteriu de univalenţă definit cu ajutorul operatorului Ruscheweyh

Teorema 5.3.1. *[92] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi fie p o funcţie analitică cu $p(0) = 1$. Dacă inegalităţile*

$$\left|\frac{2}{p(z)+1} \cdot \frac{zf'(z)}{(n+1)R^{n+1}f(z) - nR^n f(z)} - 1\right| \leq 1 \tag{5.3}$$

şi

$$\left|\left(\frac{2}{p(z)+1} \cdot \frac{zf'(z)}{(n+1)R^{n+1}f(z) - nR^n f(z)} - 1\right)|z|^2\right.$$

$$\left. +(1-|z|^2)\left[(n+1)\left(\frac{(n+2)R^{n+2}f(z)-(n+1)R^{n+1}f(z)}{(n+1)R^{n+1}f(z) - nR^n f(z)} - 1\right) + \frac{zp'(z)}{p(z)+1}\right]\right| \leq 1 \tag{5.4}$$

sunt adevărate pentru $z \in U$, atunci funcţia f este univalentă pe U.

Pentru $n = 0$ în Teorema 5.3.1 obţinem rezultatul datorat lui Lewandowski [49] şi pentru $n = 0$ şi $p = 1$ obţinem rezultatul datorat lui Becker [8].

Pentru $n = 1$ în Teorema 5.3.1, avem

Corolarul 5.3.1. *[92] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi fie p o funcţie analitică cu $p(0) = 1$. Dacă inegalităţile*

$$\left|\frac{2}{p(z)+1} \cdot \frac{zf'(z)}{zf'(z) + z^2 f''(z)} - 1\right| \leq 1$$

şi

$$\left|\left(\frac{2}{p(z)+1} \cdot \frac{zf'(z)}{zf'(z) + z^2 f''(z)} - 1\right)|z|^2\right.$$

$$\left. +(1-|z|^2)\left[\frac{zp'(z)}{p(z)+1} + \frac{2zf'(z) + 4z^2 f''(z) + z^3 f'''(z)}{zf'(z) + z^2 f''(z)} - 2\right]\right| \leq 1$$

sunt adevărate pentru $z \in U$, atunci funcţia f este univalentă pe U.

Teorema 5.3.2. *[92] Fie $f \in \mathcal{A}$ şi fie p o funcţie analitică cu $p(0) = 1$. Dacă inegalităţile*

$$\left|\frac{2}{p(z)+1} \cdot f'(z)\frac{R^n f(z)}{R^{n+1} f(z)} - 1\right| \leq 1$$

şi

$$\left|\left(\frac{2}{p(z)+1}\cdot f'(z)\frac{R^n f(z)}{R^{n+1}f(z)}-1\right)|z|^2\right.$$

$$\left.+(1-|z|^2)\left((n+2)\frac{R^{n+2}f(z)}{R^{n+1}f(z)}-(n+1)\frac{R^{n+1}f(z)}{R^n f(z)}-1+\frac{zp'(z)}{p(z)+1}\right)\right|\leq 1$$

sunt adevărate pentru $z\in U$, atunci funcţia f este univalentă pe U.

Pentru $n=0$ obţinem rezultatul din Corolarul 5.2.2.

Bibliografie

[1] J.W. Alexander, *Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions*, Ann. of Math. (Ser. 2), **17**(1915), 12-22.

[2] A. Alb Lupaş and A. Cătaş, *A note on a subclass of analytic functions defined by a generalized Sălăgean and Ruscheweyh operator*, General Mathematics, **17**(2009), no. 4, 75-81.

[3] A. Alb Lupaş, *Some differential subordinations using Sălăgean and Ruscheweyh operators*, Proceedings of International Conference on Fundamental Sciences, ICFS 2007, Oradea, 58-61.

[4] A. Alb Lupaş and A. Cătaş, *A note on a subclass of analytic functions defined by differential Sălăgean operator*, Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica, **2**(60)(2009), 131-134.

[5] R.M. Ali, S.K. Lee, V. Ravichandran and S. Supramanian, *Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions*, Appl.Math. Lett. **25**(2012), 344-351.

[6] M.K. Aouf, *The Sălăgean integral operator and strongly starlike functions*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., **56**(2011), 109-115.

[7] D. Bansal, *Fekete-Szegö problem for a new class of analytic functions*, Int. J. Math. Mathematical Sciences **2011**(2011), article ID: 143096, 5 pages.

[8] J. Becker, *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **255**(1972), 23-43.

[9] S.D. Bernardi, *Convex and starlike functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **135**(1969), 429-446.

[10] L. Bieberbach, *Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsb.,(1916), 940-955.

[11] D. Blezu and N.N. Pascu, *Integral of univalent functions*, Mathematica(Cluj), **46**(1981), 5-8.

[12] L.D. Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. **154**(1985), 137-152.l

[13] D.A. Brannan, J.G. Clunie and W.E. Kirwan, *Coefficient estimates for a class of starlike functions*, Canad. J. Math. **22**(1970), 476-485.

[14] D.A. Brannan, J.G. Clunie and W.E. Kirwan, *On the coefficient problem for functions of bounded boundary rotation*, Ann. Acad. Sci. fenn. Al **532**(1972), 18 pp.

[15] B.C. Carlson and D.B. Shaffer, *Starlike and prestarlike hypergeometric functions*, SIAM J. Math. Anal., **15**(1984), no. 4, 737-745.

[16] P.N. Chichra, *Regular functions $f(z)$ for which $zf'(z)$ is α-spiral-like*, Proc. Amer. Math. Soc., **49**(1975), no. 1, 151-160.

[17] N.E. Cho and H.M. Srivastava, *Argument estimates for certain analytic functions defined by a class of multiplier transformation*, Math. Comput Modelling, **37**(1-2)(2003), 39-49.

[18] J. Clunie, T. Scheil-Small, *Harmonic univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math, **9**(1984), 2-25.

[19] O. Crişan and A.E. Tudor, *Some subclasses of analytic functions involving λ-spirallikeness of order α*, Acta Universitatis Apulensis, **31**(2012), 47-52.

[20] P.L. Duren, 'Univalent functions', Springer, New-York, 1983.

[21] P.L. Duren, 'Harmonic Mappings in the Plane', Cambridge University Press, 2004.

[22] P.L. Duren, H.S. Shapiro and A.L. Shields, *Singular measures and domains not for Smirnov type*, Duke Math. J. **33**(1966), 242-254.

[23] B.A. Frasin and J.M. Jahangiri, *A new and comprehensive class of analytic functions*, Analele Universităţii din Oradea, **XV**(2008).

[24] B.A. Frasin and M. Darus, *On certain analytic univalent functions*, Internat. J. Math. and Math. Sci., **25**(5)(2001), 305-310.

[25] S.P. Goyal and P. Goswami, *Estimate for initial Maclaurin coefficients of bi-univalent functions for a class defined by fractional derivatives*, J. of the Egyptian Math. Soc. **20**(2012), issue 3,179-182.

[26] A.W. Goodman, 'Univalent functions', Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey, 1983.

[27] G.S. Goodman, *Univalent functions and optimal control*, Thesis, Stanford University, 1968.

[28] T.H. Gronwall, *Some remarks on conformal representation*, Ann. of Math. **2**(1914/1915), 72-76.

[29] D. Guo and M.S. Liu, *On certain subclass of Bazilevič functions*, J. Inequal. Pure Appl. Math. **8**(1)(2007) art 12.

[30] D.I. Hallenbeck and St. Ruscheweyh, *Subordination by convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **52**(1975), 191-195.

[31] G. Herglotz, *Über Potenzreihen mit positivem, reelen Teil im Einheitskreis*, Ber. Sachs. Akad. Wiss. Leipzig Math.-Phys. Kl. **63**(1911), 501-511.

[32] E. Hille, 'Ordinary Differential Equations in the Complex Plane', John Wiley, New York, 1976.

[33] P. Hamburg, P.T. Mocanu and N. Negoescu, 'Analiză Matematică (Funcţii complexe)', Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1982.

[34] I. Jack, *Functions starlike and convex of order α*, J. London Math. Soc. **3**(1971), 469-474.

[35] J.M. Jahangiri, *Harmonic functions starlike in the unit disc*, J. Math. Anal. Appl., **235**(1999), 470-477.

[36] J.M. Jahangiri, G. Murugusundaramoorthy and K. Vijaya *Salagean-type harmonic univalent functions*, South. J. Pure and Appl. Math., **2**(2002)(2), 77-82.

[37] J.M. Jahangiri and H. Silverman, *Harmonic univalent functions with varying arguments*, Int. J. of Appl. Math., **8**(2002)(3), 267-275.

[38] I.B. Jung, Y.C. Kim and H.M. Srivastava, *The Hardy space of analytic functions associated with certain one-parameter families of integral operators*, J. Math. Anal. Appl. **176**(1993),138-147.

[39] S. Kanas, A. Lecko and J. Stankiewicz , *Differential subordinations and geometric means*, Compl. Var. 44. Theor. Appl.**28**(1996), 201-209.

[40] S. Kanas and J. Stankiewicz , *Arithmetic means with reference to convexity conditions*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź 47, Ser. Rech. Deform. 24(1997), 73-82.

[41] S. Kanas and A. Lecko , *Univalence criteria connected with arithmetic and geometric means, II*, Folia Sci. Univ. Tech. Resov. **20**(1996), 49-59.

[42] S. Kanas and A. Lecko , *Univalence criteria connected with arithmetic and geometric means, II*, Proceedings of the Second Int. Workshop of Transform Methods and Special Functions, Varna '96, Bulgar. Acad. Sci. (Sofia)(1996), 201-209.

[43] S. Kanas and A. E. Tudor *Differential subordinations and harmonic means*, The Scientific World Journal, Submitted.

[44] W. Kaplan, *Close-to-convex schlicht functions*, Michigan Math. J. **1**(1952), 169-185.

[45] Y. Ch. Kim and A. Lecko , *On differential subordinations related to convex functions*, J. Math. Anal. Appl. **235**(1999), 130 – 141.

[46] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analitischen Kurven*, Nachr. Ges. Wiss. G"otingen, Math-phys. **1**(1907), 191-210.

[47] P.P. Kufarev, *On one-parameter families of analytic functions* (in Russian. Engjish summary), Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **13(55)**(1943), 87-118.

[48] A. Lecko and M. Lecko , *Differential subordinations of arithmetic and geometric means of some functionals related to a sector*, Int. J. Math. Math. Sci., **2011**(2011), Article ID 205845, 19 pages.

[49] Z. Lewandowski, *On a univalence criterion*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., **29**(1981), 123-126.

[50] Z. Lewandowski ,S.S. Miller and E. Złotkiewicz , *Generating functions for some classes of univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **56** (1976), 111 – 117.

[51] M. Lewin, *On a coefficient problem for bi-univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **18**(1967), 63-68.

[52] R.J. Libera, *Univalent λ-spiral functions*, Canad. J. Math, **19**(1967), 449-456.

[53] K. Löwner, *Untersuchungen über schlichte konforme Abbidungen des Einheitskreises*, Math. Ann. **89**(1923), 103-121.

[54] X.-F. Li and A.-P. Wang, *Two new subclasses of bi-univalent functions*, Int. Math. Forum no. 30, **7**(2012), 1495-1504.

[55] P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G.Şt. Sălăgean, *Teoria Geometrică a Funcţiilor Univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţa, Cluj-Napoca, 2006.

[56] S.S. Miller and P.T. Mocanu, *Second-order differential inequalities in complex plane*, J. Math. Anal. Appl., **65**(1978), 289-305.

[57] S.S. Miller and P.T. Mocanu, 'Differential Subordinations: Theory and Applications', Dekker, New York, 2000.

[58] S.S. Miller and P.T. Mocanu, *Differential subordinations and univalent functions*, Michig. Math. J., **28**(1981), 157-171.

[59] P.T. Mocanu , *Une propriété de convexité dans la théorie de représentation conforme*, Stud. Univ. Babes-Bolyai, **34(11)**(1969), 127 – 134.

[60] G. Murugusundaramoorthy and K. Vijaya, *On certain classes of harmonic univalent functions involving Ruscheweyh derivatives*, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, **96**(2004)(2), 99-108.

[61] E. Netanyahu, *The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in* $|z| < 1$, Arch. Ration. Mech. Anal. **32**(1969), 100-112.

[62] S. Owa, N. Nunokawa, H. Saitoh and H.M. Srivastava, *Close-to-convexity, starlikeness and convexity for certain analytic functions*, Appl. Math. Lett., **15**(2002), 63-69.

[63] S. Ozaki and M. Nunokawa, *The Schwarzian derivative and univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc., **33**(1972), 392394.

[64] Ch. Pommerenke, *Über dis subordination analytischer funktionen*, J. Reine Angew Math. **218**(1965), 159-173.

[65] Ch. Pommerenke, 'Univalent functions', Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen, (1975)

[66] D. Răducanu and V. O. Nechita , *On* α*-convex analytic functions defined by generalized Ruscheweyh operator*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai **53**(2008), 109 – 118.

[67] M.O. Reade, *On close-to-convex univalent functions*, Michigan Math. J. **3**(1955-56), 59-62.

[68] M.S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. Math., **37**(1936), 374-408.

[69] M.S. Robertson, *Univalent functions* $f(z)$ *for which* $zf'(z)$ *is spirallike*, Michigan Math. J., **16**(1969), 97-101.

[70] M.S. Robertson, *Analytic functions starlike in one direction*, Amer. J. **58**(1936), 456-472.

[71] W. Rogosiński, *On the coefficients of subordinate functions*, Proc. London Math. Soc. **48**(1943), 48-82.

[72] A. Rosihan and V. Ravichandran, *Classes of meromorphic* α*-convex functions*, Taiwanese J. Math. **14**(2010), 1479 – 1490.

[73] S. Ruscheweyh, *New criteria for univalent functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975), 109-115.

[74] St. Ruscheweyh and T. Sheil-Small, *Hadamard product of schlicht functions and the Pólya-Schoenberg conjecture*, Comment. Math. Helv. **48**(1973), 119-135.

[75] St. Ruscheweyh, *Convolutions in Geometric Function Theory*, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1982.

[76] G. Sălăgean, *Subclasses of univalent functions*, Lecture Notes in Math., Springer Verlag, Berlin, 1013(1983), 362-372.

[77] H. Silverman, *Harmonic univalent functions with negative coefficients*, J. Math. Anal. Appl. **220**(1)(1998), 283-289.

[78] H. Silverman, E.M. Silvia, *Characterizations for subclasses of univalent functions*, Math. Japonica **50**, No. 1(1999), 103-109.

[79] H. Silverman, E.M. Silvia, *Subclasses of univalent functions*, Math. Japonica **51**(2000), 179-186.

[80] L. Špaček, *Contribution à la théorie des fonctions univalentes*, Časopis Pěst. Mat., **62**(1932), 12-19 (in Czech).

[81] H.M. Srivastava, A.K. Mishra and P. Gochhayat, *Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions*, Appl. Math. Lett. **23**(2010), 1188-1192.

[82] H.M. Srivastava and A.A. Attiya, *An integral operator associated with the Hurwitz-Lerch Zeta function and differential subordination*, integral Transforms Spec. Funct. **18**(2007), 207-216.

[83] H.M. Srivastava, D. Răducanu and G.S. Sălăgean, *A new class of generalized close-to-starlike functions defined by the Srivastava-Attiya operator*, Submitted

[84] Q.-H. Xu, Y.-C. Gui and H.M. Srivastava, *Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions*, Appl. Math. Lett. **25**(2012), 990-994.

[85] A.E. Tudor, *A subclass of analytic functions*, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. **57**(2012)(2), 277-282.

[86] A.E. Tudor, *Bi-univalent functions connected with arithmetic and geometric means* Journal of Global Research in Mathematical Archives, **1**(2013) (2), 78-83.

[87] A.E. Tudor, *Subordonări şi superordonări diferenţiale*, Lucrare de licenţă, Braşov, 2008.

[88] A.E. Tudor, *Coefficient estimates for certain subclasses of bi-univalent functions*, Filomat, Submitted.

[89] A.E. Tudor, *On a subclass of harmonic univalent functions based on a generalized operator*, General Mathematics Notes,**16**(2013)(2), 83-92.

[90] A.E. Tudor, *On a subclass of analytic functions involving Sălăgean integral operator*, Acta Mathematica Scientia, Submitted.

[91] A.E. Tudor, *A class of generalized close-to-starlike functions*, European Journal of Pure and Applied Mathematics, Submitted.

[92] A.E. Tudor, *Univalence criteria related with Sălăgean and Ruscheweyh operators*, Submitted.