

UNIVERSITATE BABEȘ-BOLYAI
FACULTATEA DE FIZICĂ



REZUMAT EXTINS

Tranziții de tip ordine-dezordine
în sisteme de oscilatori cuplate

Autor:
BODA Szilárd

Conducător științific:
Prof. Dr. NÉDA Zoltán

CLUJ-NAPOCA 2013

Cuprins

1	Sincronizare - aspecte generale	4
2	Modele clasice pentru sincronizare spontană	4
	2.1 Introducere	4
	2.2 Modelul Kuramoto	4
	2.3 Modelul integrate and fire	5
	2.4 Oscilatori stochastici bimodali	6
3	Sincronizarea oscilatorilor stochastici bimodali	7
	3.1 Simulații noi pentru perioade de așteptare variabile (modelul I)	7
	3.2 Rezultate pentru modelul nou cu perioade variabilă de emiterie (modelul II)	8
	3.3 Realizare experimentală a oscilatorilor bimodali stochastici	9
	3.4 Rezultate experimentale pentru primul model	9
	3.5 Rezultate experimentale pentru al doilea model	10
4	Studii de sincronizare în sisteme de metronoame cuplate	10
	4.1 Introducere	10
	4.2 Realizare experimentală	11
	4.3 Sincronizarea metronoamelor cuplate	11
	4.3.1 Rezultate experimentale	11
	4.3.2 Modelul teoretic	12
	4.3.3 Parametri realistici a metronoamelor	14
	4.3.4 Validarea modelului	14
	4.3.5 Sincronizarea a două metronoame	15
	4.4 Analiză teoretică aprofundată	15
	4.5 Tranziția de fază Kuramoto cu metronoame	15
	4.5.1 Realizare experimentală și rezultate	16
	4.5.2 Modelul teoretic	17
	4.5.3 Rezultate numerice	17
5	Concluzii	18
6	Contribuții personale	20

Bibliografie

21

Structurarea tezei

Această teză este structurată în patru părți.

Prima parte, constă din Capitolele I și II. În capitolul I (intitulat **Sincronizare - aspecte generale**) vom prezenta o analiză istorică despre sincronizarea spontană. În capitolul II (intitulat **Modele clasice pentru sincronizare spontană**), vom descrie principalele modele care încearcă să descrie sincronizarea spontană. Vom prezenta modelul Kuramoto, modelul integrate and fire și modelul oscilatorilor bimodale, subliniând importanța acestor modele.

În a doua parte, formată din capitolul III (intitulat **Sincronizarea oscilatorilor stochastici bimodali**) vom prezenta cercetarea noastră legată de oscilatori stochastici bimodali. Vom prezenta un nou algoritm optimizat pentru simularea acestor sisteme, vom introduce un tip nou de oscilator stochastic bimodal și vom investiga dinamica lui pentru parametri diferiți. Vom descrie o realizare experimentală a sistemului și rezultatele obținute cu ea. Rezultatele experimentale și teoretice sunt comparate în mod critic.

Cea de a treia parte conține Capitolele IV și V. În capitolul IV (**Studii de sincronizare în sisteme de metronoame cuplate**) investigăm apariția sincronizării într-un sistem compus din metronoame cuplate. Vom porni de la sistemele deja studiate și vom descrie sistemul introdus de noi. Considerăm și un model teoretic a sistemului studiat. Prin alegerea realistă a parametrilor, modelul va reproduce rezultatele experimentale. Vom studia și efectele cauzate de dimensiunea finită a sistemului. În capitolul V (**Tranziția de fază Kuramoto cu metronoame**) vom reproduce tranziția de fază Kuramoto cu ajutorul metronoamelor. Vom descrie metoda prin care am studiat sistemul, rezultatele obținute și modelul teoretic propus pentru sistem. Vom compara rezultatele experimentale și teoretice.

În a patra parte, constând din capitolele VI (**Concluzii**) și VII (**Contribuții personale**) am rezumat rezultatele noastre, am discutat despre relevanța lor și am enumerat contribuțiile personale. Teza se sfârșește cu o bibliografie conținând 44 de indici bibliografici.

Mulțumiri

Prima dată vreau să mulțumesc Domnului că mi-a dat înțelepciunea și puterea să termin această cercetare.

Sunt foarte recunoscător conducătorului meu științific, Prof. Dr. Néda Zoltán, pentru că mi-a oferit perspective noi în fizică. Nu aș fi reușit să trec peste obstacole fără supravegherea lui excelentă și ideile lui geniale.

Vreau să mulțumesc și colegiilor de la Universitatea Babeș-Bolyai, care m-au ajutat: Dr. Arthúr Tunyagi, cine a inventat și a construit sistemele experimentale, Botond Tyukodi, cine m-a ajutat în partea experimentală și a avut idei geniale, Lect. Dr. Lázár Zolt, cine a dat sfaturi valoroase în programare. Totodată sunt recunoscător și comisiei de îndrumare: Prof. Dr. Nagy László și Lect. Dr. Járαι-Szabó Ferenc.

Această lucrare a fost posibilă prin sprijinul financiar oferit prin Programul Operațional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, cofinanțat prin Fondul Social European, în cadrul proiectului POSDRU/107/1.5/S/77946, cu titlul “Doctoratul: o carieră atractivă în cercetare”.

Vreau să mulțumesc prietenei, familiei și prietenilor pentru suport și încurajare.

Cuvinte de cheie

sincronizare, comportament colectiv, tranziție de fază, oscilatori cuplate, metronoame cuplate, oscilatori stochastici, oscilatori bimodali

1 Sincronizare - aspecte generale

Sincronizarea spontană este un fenomen complex care apare în sisteme mecanice (ceasuri cu pendul [3, 1, 4], metronoame cuplate [10, 15]), biologie (celulele cardiace [11], licuricii din Asia de Sud-Est [12]), și sisteme sociale (ciclul menstrual al femeilor care trăiesc împreună [6], aplauze [9]). Din cauza complexității și varietatea sistemelor în care sincronizarea apare, a atras interesul cercetătorilor timp de secole și chiar și astăzi este încă un subiect cercetat activ [14, 13].

Prima menționare științifică a sincronizării a fost făcută de fizicianul olandez Christiaan Huygens în 1665. El a observat mișcarea sincronizată pendulelor a două ceasuri suspendate pe același perete. A menționat acest fenomen tatălui său într-o scrisoare din data de 26 februarie 1665 [3].

Pentru a găsi originea cuplării între ceasuri, a efectuat mai multe experimente. În urma experimentelor a ajuns la concluzia, că cuplajul se realizează prin vibrații mici în suspensia comună a ceasurilor. El a rezumat observațiile sale într-o scrisoare la Royal Society din Londra [2].

În ciuda faptului că Huygens a publicat această descoperire în secolul al 17-lea, modelele matematice pentru descrierea sincronizării au apărut doar după 1960, și surprinzător au fost elaborate de către biologiști.

Arthur Taylor Winfree în 1966 a ajuns la concluzia că sincronizarea spontană este guvernată de mărimea cuplajului dintre oscilatori, și apare ca o tranziție de fază peste un cuplaj critic [16]. Kuramoto și Nishikawa [5] au reformulat și simplificat modelul lui Winfree, pentru a fi rezolvabil analitic.

Charles S. Peskin a modelat sincronizarea celulelor cardiace, cu un model teoretic bazat pe un sistem fizic simplu, format din condensatori și rezistențe [11]. Inspirat de acest model Mirollo și Strogatz au elaborat un model mai general, care a fost destul de simplu pentru a permite rezultate analitice [7].

2 Modele clasice pentru sincronizare spontană

2.1 Introducere

Modelarea și explicarea acestui fenomen fascinant nu a fost o sarcină ușoară. Vom prezenta modelele de bază care descriu sincronizarea și vom introduce noua noastră paradigmă de modelare, care ar putea fi relevantă pentru înțelegerea sincronizării spontană în sistemele biologice sau sociale.

2.2 Modelul Kuramoto

Pornind de la modelul lui Winfree, care nu putea fi rezolvat analitic, Yoshiki Kuramoto și Ikuko Nishikawa în 1980 [5] au dezvoltat modelul Kuramoto, care este un model matematic pentru a descrie comportamentul colectiv a unui ansamblu de rotatori non-identici. În formularea cea mai cunoscută, fiecare rotator are propria frecvență, ω_i , care este distribuit cu o densitate de probabilitate $g(\omega_i)$. Cuplajul dintre oscilatori este uniformă și globală. Evoluția sistemului este dată

de:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), i = 1 \dots N. \quad (1)$$

unde N este numărul oscilatorilor, K este constanta de cuplaj, iar θ_i este faza rotatorului i . Pentru a caracteriza nivelul de sincronizare în sistem, este esențial să introducem un parametru de ordine corectă. Kuramoto *et. al.* a ajuns la concluzia că un parametru de ordine adecvată, r , pentru sistemul lor ar fi:

$$r \exp(i\psi) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N N \exp(i\theta_j), \quad (2)$$

unde ψ este faza colectivă a stării sincronizate.

Ecuatiile se pot rezolva exact și se poate afla valoarea critică K_c a cuplajului.

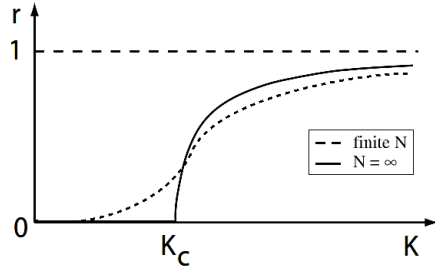


Figura 1: Rezultate pentru parametrul de ordine a modelului Kuramoto.

Dacă $K < K_c$ sistemul va fi într-o stare nesincronizată, unde rotatorii nu sunt sincronizați și $r = 0$. Dacă $K > K_c$ o sincronizare parțială va apărea între rotatori. Apariția acestei sincronizări se întâmplă ca o tranziție de fază în limita termodinamică $N \rightarrow \infty$ (cum este ilustrată în Figura 1).

2.3 Modelul integrate and fire

Dezavantajul modelului Kuramoto este că interacțiunile dintre rotatori sunt continuu. Dar în sisteme biologice este mai relevantă o interacțiune într-o formă de puls, adică interacțiunea să acționeze doar pentru o parte limitată a perioadei. Pornind de la modelul lui Charles S. Peskin [11] în 1990 Mirollo și Strogatz a elaborat un model teoretic mai general [7].

Ei au considerat un ansamblu de oscilatori cuplați globali, cu interacțiuni de tip puls. Ei au asociat un parametru de fază Φ pentru fiecare oscilator. Când oscilatorul atinge valoarea maximă Φ , va emite un puls și valoarea parametrului va deveni 0, după ce ciclul începe din nou. Au mai asociat un parametru de tip energetic la oscilatori, E , care este legat de parametrul de fază printr-o funcție

monotonă : $E = f(\Phi)$. Dacă unul dintre oscilatori emite un puls, efectul pulsului emis pe celelalte oscilatori va fi, că parametrul de energie va crește instantaneu cu o valoare σ . Prin creșterea valorii E , valoarea lui Φ va crește consecutiv, scurtând astfel timpul până la emiterea următoare. Dacă ilustrăm oscilatorii ca pe niște puncte care se deplasează de-a lungul unei funcții f , atunci putem observa dinamica lor pe Figura 2.

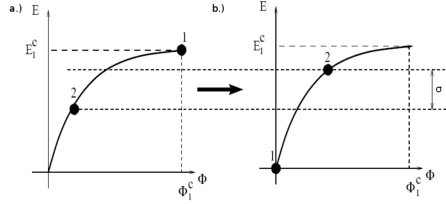


Figura 2: *Dinamica oscilatorilor integrate and fire. a) Oscilatorul 1 este la valoarea maximă b.) oscilatorul 1 emite un puls mărind energia oscilatorului 2 cu o valoare σ .*

Dacă ne gândim la oscilatori ca un sistem care interacționează, atunci imediat putem vizualiza, că emiterea de puls a unui oscilator poate să declanșeze o avalanșă de emitări, până ce toți oscilatori vor deveni sincronizați (cum ar fi licuricii sau celulele cardiace). Depinzând de diferența dintre oscilatori, este o valoare critică de cuplaj σ_c . Dacă $\sigma > \sigma_c$ oscilatorii se vor sincroniza.

Atât modelul Kuramoto cât și modelul integrate and fire au încorporate un mecanism de minimizare a diferenței de fază dintre specimene, astfel încât apariția sincronizării este un fenomen prevăzut.

2.4 Oscilatori stocastici bimodali

În sistemele biologice și sociologice complexe nu știm dacă sincronizarea este scopul principal al specimenelor participante, sau apare doar ca un co-produs al unui mecanism de optimizare. Sperând că o să înțeleagă mai bine acest fenomen, Nikitin, Vicsek și Nédá [8] au introdus și au investigat un nou tip de oscilatori, oscilatorul stocastic bimodal cu cuplaj de tip puls.

Ei au considerat un tip de oscilator destul de general, unde oscilatorii pot fi în trei stări posibile, A , B și C . Prima fază (A) este o stare stocastică. Cele două stări rămase (B și C) sunt deterministice. Starea B este o perioadă de așteptare, care în cazul neuronilor corespunde relaxării și procesului de recombinație. În starea C oscilatorul emite un puls constant de intensitate $\frac{1}{N}$. Ei au notat cu τ_A , τ_B și τ_C timpurile pe care oscilatorul petrece în stările respective.

Emisia totală a sistemului este:

$$f = \sum_{i=1}^N f_i, \quad (3)$$

unde f_i este emisia oscilatorului i , care poate să aibă următoarele valori:

$$f_i = \begin{cases} 0 & \text{dacă oscilatorul e în starea A sau B} \\ \frac{1}{N} & \text{dacă oscilatorul e în starea C} \end{cases}$$

Fiecare oscilator detectează impulsurile emise de ceilalți. Dinamica care reglementează comportamentul oscilatorilor este simplu: oscilatorii încearcă să mențină emisia totală a sistemului, f , în jurul unei valori f^* precizată. Pentru a realiza această dinamică, oscilatorii pot alege dintre două moduri, prin manipularea impulsurilor emise. Această manipulare de puls se poate face în două moduri diferite: fie cu perioade variabile de așteptare, fie cu perioade variabile de emiter. În ambele cazuri pentru anumite intervale de f^* va apărea o sincronizare parțială.

3 Sincronizarea oscilatorilor stochastici bimodali

3.1 Simulații noi pentru perioade de așteptare variabile (modelul I)

Ca un prim exercițiu, am încercat să reproducem cu o simulare optimizată rezultatele publicate de Nikitin, Vicsek și Néda în 2003. Am fixat parametrii ($\tau_{B_{\perp}} = 0.8$ s, $\tau_{B_{\parallel}} = 0.4$ s, $\tau_c = 0.1$ s și $\tau_* = 0,2$ s) și am rulat simulări pentru număr diferiți de oscilatori și diferite valori f^* . Am calculat nivelul de sincronizare în starea de echilibru și am luat media 100 de rulări, fiecare cu diferite condiții inițiale. Rezultatele pentru parametrul de sincronizare în funcție de f^* este reprezentată în Figura 3.

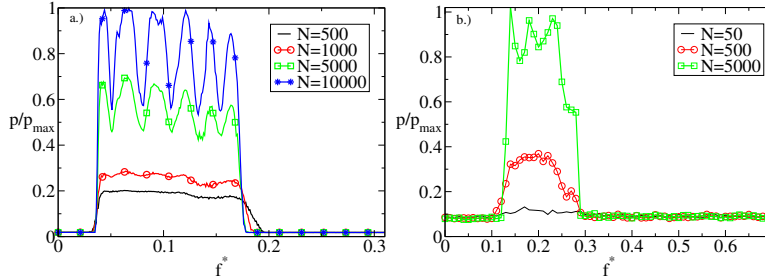


Figura 3: Rezultate de simulare pentru oscilatorile stochastice bimodale cu: a) perioade de așteptare variabile b) perioade de emiter variabile

Rezultatele noastre sugerează că în funcție de f^* , sistemul va trece de la o stare nesincronizată la una sincronizată, și apoi din nou la o stare nesincronizată. Schimbarea bruscă a parametrului de ordine indică două tranziții de fază, care devin și mai evidente, când mărim numărul oscilatorilor. Rezultatele obținute

sunt într-o concordanță foarte bună cu cele obținute în studiile anterioare de Nikitin, Vicsek și Nédá, demonstrând corectitudinea simulării noi.

3.2 Rezultate pentru modelul nou cu perioade variabilă de emisie (modelul II)

Pentru a dovedi că sincronizarea prin optimizarea nu se limitează doar la modelul utilizat anterior, am considerat o altă variantă a modelului. Dinamica noilor oscilatori este similară cu dinamica oscilatorilor din cazul precedent, dar acum în loc de perioade de așteptare variabile, avem două perioade de emisii posibile. Am fixat următoarele parametrii: $\tau_B = 0.4$ s, $\tau_{C_I} = 0.1$ s, $\tau_{C_{II}} = 0.2$ s și $\tau^* = 0,2$ s. Am rulat mai multe simulări, și am calculat parametrul de ordine pentru fiecare, și am luat media mai multor rulări. Rezultatele finale sunt prezentate în Figura 3.

Am investigat dependența numărului de oscilatori la nivelul de sincronizare, analizând până la $N = 5000$ oscilatorii. Rezultatele obținute sunt prezentate în Figura 4. Deși există o fluctuație în parametrul de ordine, avem o tendință foarte clară: prin mărirea numărului de oscilatori, nivelul de sincronizare detectată în sistem crește.

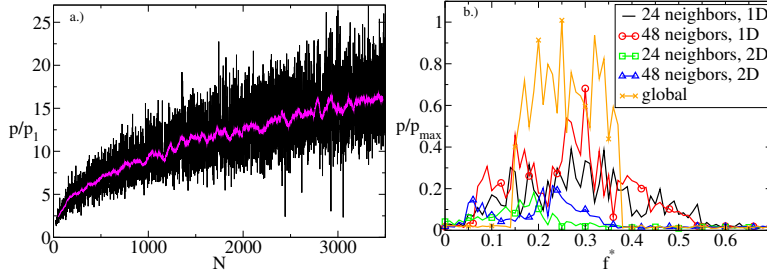


Figura 4: *Rezultate de simulare pentru oscilatorii stocastici bimodali cu perioade de emisie variabilă pentru: a) diferiți număr de oscilatori. Linia neagră este rezultatul direct, iar linia roșie este o medie pe o fereastră de $\Delta N = 50$. ($f^* = 0.15$ s și $\tau^* = 0.2$ s) b) Rezultate pentru cuplaj local și pentru 1D și 2D ($N=2500$, $\tau_A = 0.08s$, $\tau_B = 0.8s$, $\tau_{C_I} = 0.2s$, $\tau_{C_{II}} = 0.4s$).*

De asemenea, am studiat cum topologia cuplajului influențează nivelul de sincronizare. În loc de cuplaj global, am considerat un cuplaj local, pe o grilă de pătrat. Dacă numărul vecinilor care se interacționează este destul de mare, o sincronizare parțială va apărea în sistem. Pe Figura 4 am prezentat rezultatele obținute pentru $N = 2500$ oscilatori.

3.3 Realizare experimentală a oscilatorilor bimodali stochastici

În această secțiune am considerat o realizare experimentală a sistemului de oscilatori stochastici bimodali. Pentru a realiza acest scop am proiectat un nou tip de oscilatori, și am numit “licurici electronici”. Oscilatorii și interfața de măsurare au fost proiectate, construite și programate de către Dr. Arthur Tunyagi. Aceste licurici electronici au trei proprietăți principale:

1. pot emite un puls de lumină cu o diodă emițătoare de lumină (LED)
2. pot detecta intensitatea luminii printr-un foto-rezistor.
3. dinamica lor este reglată de un ATMEGA8 micro-controller

Pe Figura 5 putem vedea o fotografie a sistemului.

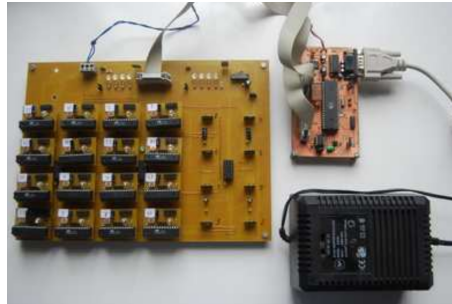


Figura 5: *Placa de circuit cu licuricii electronici și interfața.*

Am investigat ambele tipuri de oscilatori cu acest setup experimental, atât oscilatorii cu perioade variabile de așteptare cât și oscilatorii cu perioade de emisii variabile. Prin deplasarea între cele două moduri posibile, oscilatorii încercă să mențină emisia totală a sistemului în jurul unei valori definite. Ca un co-produs a acestei optimizări simple o sincronizare netrivială a apărut pentru anumite intervale de parametri.

3.4 Rezultate experimentale pentru primul model

Parametrul de ordine a fost calculat în mod similar ca și în simulări. Parametrul de ordine obținut în funcție de tensiunea de referință, U (având rolul de f^*), pentru un număr diferit de licurici este reprezentat în Figura 6.

Similar cu rezultatele obținute în simulări, putem observa o sincronizare spontană pentru un anumit interval. Nivelul sincronizării crește prin mărirea numărului de licurici. Apariția și dispariția sincronizării sugerează o tranziție de fază, care este mai evident cu mărirea sistemului.

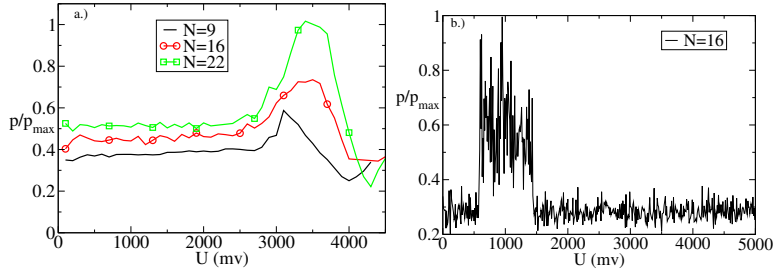


Figura 6: Rezultate experimentale pentru parametrul de ordine a) pentru primul model b) pentru al doilea model

3.5 Rezultate experimentale pentru al doilea model

Am modificat programul de guvernare a licuricilor, și am ars noul program în EEPROMul licuricilor. Am prelucrat datele obținute, și am calculat parametrul de ordine ca și în cazul precedent. Parametrul de ordine în funcție de U pentru cei 16 licurici utilizați se pot vedea pe Figura 6.

Putem observa că sistemul trece prin două tranziții de fază: una de la o stare nesincronizată la una parțial sincronizată, și încă una de la o fază sincronizată la una nesincronizată, așa cum creștem tensiunea de referință. Schimbare bruscă observabilă în variația parametrului de ordine în funcție de U sugerează o tranziție de fază.

4 Studii de sincronizare în sisteme de metronoame cuplate

4.1 Introducere

După Huygens mulți cercetători au revizitat experimentul lui Huygens ([1], [4] etc.)

Analiza cea mai completă pentru ceasurile lui Huygens a fost făcută de către Kapitaniak *et. al.* [4]. Și ei au confirmat, că sincronizarea în anti-fază este comportamentul colectiv dominant [4].

Inspirat de sistemul lui Huygens, Pantaleone [10] a propus un sistem simplu pentru exemplificarea modelului Kuramoto. În loc de ceasuri cu pendul, el a folosit două metronoame plasate pe o platformă ușoară și mobilă.

Pantaleone a monitorizat mișcarea metronoamelor prin înregistrarea sunetelor lor. În cazul acestui sistem el a găsit numai sincronizare în fază. El a derivat și ecuații de mișcare pentru metronoame.

Ulrichs *et. al.* [15] a reconsiderat teoretic experimentul lui Pantaleone lucrând cu mai multe metronoame. Și ei au confirmat absența sincronizării în anti-fază pentru metronoame.

Noi am lucrat cu o configurație asemănătoare, dar în loc de o platformă de

lemn am folosit o platformă de formă de disk care învârtea în mijlocul lui cu o frecare mică pentru că acest sistem este mai robust.

4.2 Realizare experimentală

Am așezat metronoamele pe perimetrul platformei, așa cum se vede în Figura 7.

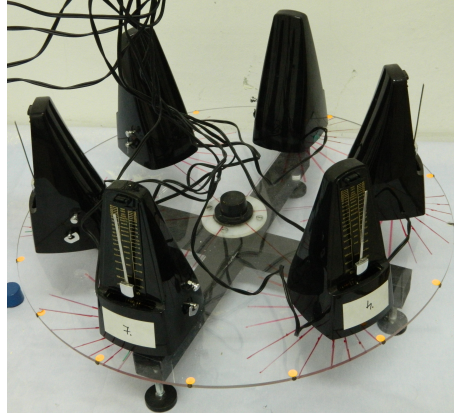


Figura 7: *Realizare experimentală.*

Pentru a monitoriza mișcarea pendulelor metronoamelor am considerat o soluție simplă și ieftină, prin montarea detectoarelor de foto-celule Kingbright KTIR 0611 S în traiectoria pendulelor.

Pentru a caracteriza numeric nivelul de sincronizare în sistem, am folosit parametrul de ordine a modelului Kuramoto [5]:

$$r \exp(i\phi) = \frac{1}{N} \sum_j \exp(i\theta_j). \quad (4)$$

4.3 Sincronizarea metronoamelor cuplate

În această secțiune vom investiga experimental și teoretic condițiile care favorizează sincronizare în sistemul nostru.

4.3.1 Rezultate experimentale

Pornind de la frecvența $160BPM$, am efectuat experimente pentru toate valorile nominale de frecvență până la $208BPM$ ($168, 176, 184, 192$ și $208BPM$). Am luat media 10 măsurări independente pentru fiecare frecvență după calcularea parametrului de ordine Kuramoto pentru fiecare caz. Rezultatele obținute sunt prezentate în Figura 8.

Rezultatele sugerează că nivelul sincronizării crește pe măsură ce crește frecvența naturală a metronoamelor. Pentru a investiga dacă acest fenomen se

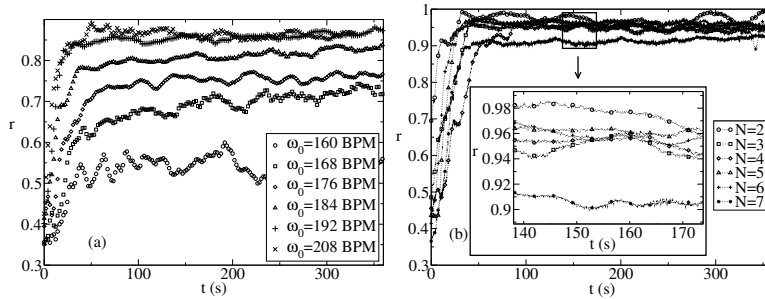


Figura 8: *Evoluția parametrului de ordine Kuramoto pentru diferite a) frecvențe naturale și $N = 7$ metronoame. b) pentru frecvența $\omega_0 = 192$ BPM și diferiți numări de metronoame.*

datorează unei schimbări în abaterea standard de frecvență a metronoamelor, am măsurat deviația standard între frecvențele naturale ale metronoamelor, dar am obținut valori aproximativ egale pentru frecvențele folosite. Deci, putem afirma că tendința monotonă de creștere a nivelului sincronizării, în funcție de frecvența nominală a metronoamelor, nu este din cauza schimbării a deviației standard în frecvența metronoamelor.

În al doilea set de experimente am investigat influența numărului de metronoame pe nivelul sincronizării. Am procedat în mod similar ca și în cazul precedent. Singura diferență a fost, că acum am fixat frecvența ($\omega_0 = 192$ BPM) și după efectuarea a 10 măsurători am îndepărtat consecutiv un metronom de pe platformă. Rezultatele finale sunt reprezentate în Figura 8. Putem vedea, că prin creșterea numărului de metronoame, nivelul sincronizării va scădea într-un mod monoton.

Am calculat din nou deviația standard a frecvențelor naturale a metronoamelor. Nici în acest caz nu am găsit o tendință clară în funcție de numărul de metronoame, N , deci se poate afirma că tendința de scădere a nivelului sincronizării în funcția numărului metronoamelor nu se datorează schimbării deviației standard pentru diferiți numări de metronoame.

4.3.2 Modelul teoretic

Pentru a studia astfel de sisteme într-un mod mai flexibil, am dezvoltat un model teoretic realist. Am considerat un model mecanic simplu, care ia în considerare doar componentele esențiale ale sistemului: o platformă rotativă și pendule fizice atașate la perimetrul acesteia.

Pentru o astfel de configurare mecanică simplă, este ușor să scriem funcția

Lagrange, care va fi:

$$L = \frac{J}{2}\dot{\phi}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{J_i\omega_i^2}{2} + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left\{ \left[\frac{d}{dt} (x_i + h_i \sin \theta_i) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt} (h_i \cos \theta_i) \right]^2 \right\} - \sum_{i=1}^N m_i g h_i (1 - \cos \theta_i) \quad (5)$$

În funcția Lagrange am folosit următoarele notații: indicele i denotă pendulele, J este momentul de inerție al platformei cu metronoamele pe ea (luate în raport cu axa de rotație verticală), ϕ este deplasarea unghiulară a platformei, J_i este momentul de inerție a pendulului în raport cu centrul său de masă, ω_i este viteza unghiulară de rotație a pendulului față de centrul de masă, m_i este masa totală a pendulului ($m_i \approx W_1^{(i)} + W_2^{(i)}$, neglijând masa tijei), x_i este deplasarea orizontală a centrului de masă al pendulului datorită rotației platformei, h_i este distanța dintre centrul de masă și punctul de suspensie al pendulului și θ_i este deplasarea pendulului i , în radiani. Am asumat că greutatea suspendate pe tijă sunt identice ($W_1^{(i)} = w_1$, $W_2^{(i)} = w_2$, și $m_i = m$), și am ignorat termenul constant $m_i g h_i$, care oricum va dispărea după derivare. Luând în considerare, că $x_i = R\dot{\phi}$ și $\omega_i = \dot{\theta}_i$, ecuațiile Euler-Lagrange vor fi:

$$(J + NmR^2)\ddot{\phi} + mR \sum_i h_i [\ddot{\theta}_i \cos \theta_i - \dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i] = 0 \quad (6)$$

$$[mh_i^2 + J_i]\ddot{\theta}_i + mR\ddot{\phi}h_i \cos \theta_i + mgh_i \sin \theta_i = 0.$$

Adaugând coeficienți de frecare și de excitație ecuațiile Euler-Lagrange se vor transforma în:

$$(J + NmR^2)\ddot{\phi} + mR \sum_i h_i [\ddot{\theta}_i \cos \theta_i - \dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i] + c_\phi \dot{\phi} + \sum_i \mathbb{M}_i = 0 \quad (7)$$

$$[mh_i^2 + J_i]\ddot{\theta}_i + mR\ddot{\phi}h_i \cos \theta_i + mgh_i \sin \theta_i + c_\theta \dot{\theta}_i = \mathbb{M}_i. \quad (8)$$

Aici c_ϕ este coeficientul de frecare pentru rotirea platformei și c_θ coeficientul de frecare a pendulelor. Termenul \mathbb{M}_i este excitația, pentru care am ales forma:

$$\mathbb{M}_i = M\delta(\theta_i)\dot{\theta}_i, \quad (9)$$

unde δ este funcția Dirac iar M este un parametru fix caracterizând mecanismul de excitație a metronoamelor.

Pentru a modela deviația standard în frecvența metronoamelor am adăugat un zgomot de tip Gaussian în termenii L_2 , considerând restul parametrilor identice.

4.3.3 Parametri realistici a metronoamelor

O dificultate în acest studiu a fost găsirea parametrilor realistici pentru metronoame. Prima dată am stabilit cele măsurabile, cu ajutorul unei balanțe analitice ($w_1 = 0,025 \text{ kg}$, $w_2 = 0.0069 \text{ kg}$), și a unui șubler ($L_1 = 0.0358 \text{ m}$, $L_2 \in [0.019, 0.049] \text{ m}$, în funcție de frecvența aleasă, $R = 0,27 \text{ m}$) și am calculat $J \in [0.0729, 0.25515] \text{ kg m}^2$ (în funcție de numărul metronoamelor plasate pe platformă). Prin reglarea coeficientului de excitație și a coeficienților de frecare în simulațiile noastre, până ce obținem același amplitudini pentru pendule și pentru platformă ca și în experimente, am găsit parametrii realistici ($c_\theta = 5 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2/\text{s}$, $c_\phi = 1 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2/\text{s}$ și $M = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Nm/s}$).

4.3.4 Validarea modelului

Am integrat numeric ecuațiile de mișcare (7, 8) cu un algoritm de tip viteză-Verlet. Pentru a obține rezultate precise, am considerat $dt = 0,01 \text{ s}$, iar simulările au fost efectuate până la $t = 4000 \text{ s}$. Am considerat aceeași configurații ca și în experimente, și pentru a obține rezultate mai acurate am luat media a 100 de simulări cu condiții inițiale diferite pentru fiecare caz. Rezultatele sunt prezentate în Figura 9.

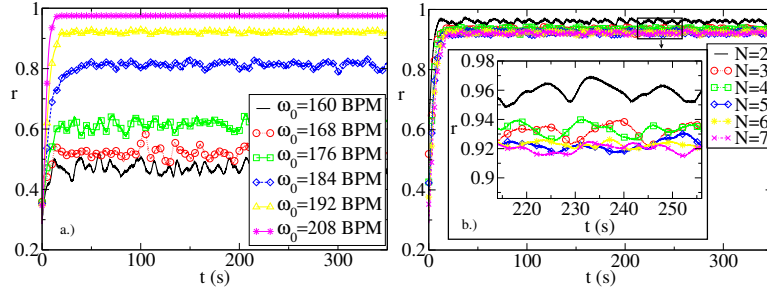


Figura 9: *Rezultatele simulării pentru dinamica parametrului de ordine Kuramoto pentru: a) același ω care a fost folosită în experimente și pentru $N = 7$ metronoame. b) frecvența $\omega_0 = 192 \text{ BPM}$ fixată și diferite numere de metronoame care au fost folosite și în experimente.*

Putem observa, că tendințele observate în rezultatele simulării sunt în bună concordanță cu rezultatele experimentale prezentate mai devreme (Figura 8).

În a doua etapă de validare am studiat în timp evoluția parametrului de ordine pentru diferite numere de pendule, stabilind aceleași $\omega_0 = 192$ frecvență naturală BPM ca în experimente. Am luat media a 100 de simulări independente. Curbele obținute sunt reprezentate grafic în Figura 9. Putem observa că noul grafic este într-o concordanță bună cu graficul experimental.

Rezultatele simulării sugerează că modelul nostru cu parametrii realistici descrie bine dinamica metronoamelor. Acum putem investiga mai multe cazuri interesante, care nu ar fi posibile experimental.

4.3.5 Sincronizarea a două metronoame

În toate experimentele noastre am observat doar sincronizare în fază, și am simțit nevoia de a argumenta acest fenomen. Am luat în considerare trei cazuri diferite, 1. fără excitație și frecare, 2. cu o excitație și amortizare mică, 3. cu frecare și excitație realistă. Cum era de așteptat, pentru cazul fără frecare și excitație sincronizarea nu apare. Dacă adăugăm disipare și excitație, probabilitatea sincronizării în fază și în anti-fază va fi egală. Pentru parametrii realistici sincronizarea în anti-fază va dispărea, și va avea loc doar în cazul în care cele două metronoame sunt pornite exact în anti-fază.

4.4 Analiză teoretică aprofundată

Folosind modelul nostru, am investigat un număr mai mare de metronoame cu mai multe valori a frecvențelor naturale ale metronoamelor. Am luat media rezultatelor pentru o gamă largă de numărul de metronoame, N , și le-am prezentat în Figura 10.

Este ușor de observat din Figura 10 că, în limita $N \rightarrow \infty$ apare o tranziție de fază. În apropiere valorii critice de $\omega_c = 185$ BPM, parametrul de ordine prezintă o creștere accentuată, care devine mai clară cu mărirea numărul metronoamelor. Acesta este un semn clar al tranziției de fază. Pentru a demonstra acest lucru, am reprezentat abaterea standard a valorilor parametrilor de ordine obținute din diferite simulări (Figura 10 b). Putem observa vârful caracteristic în jurul valorii critice $\omega_c = 185$ BPM.

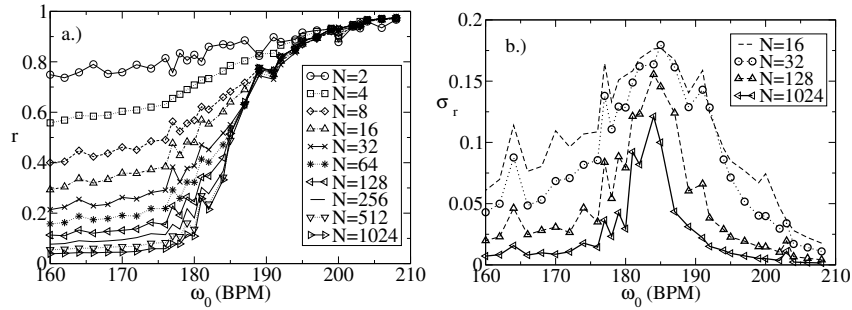


Figura 10: Rezultatele simulării pentru parametrul de ordine Kuramoto (a) și abaterea lui standard, σ_r , pentru 100 de simulări (b).

4.5 Tranziția de fază Kuramoto cu metronoame

În capitolul precedent am investigat condițiile experimentale care favorizează sincronizarea metronoamelor. În această secțiune dorim să investigăm influența cuplajului dintre metronoame, și vom încerca să reproducem într-un mod pedagogic tranziția de fază Kuramoto cu ajutorul acestui sistem.

4.5.1 Realizare experimentală și rezultate

Am considerat aceeași sistem ca în cazul anterior, cu trei modificări mici :

1. un ac a fost montat pe partea de jos a metronoamelor, perpendicular cu planul de mișcare a pendulei;
2. pe platformă am marcat unghiurile de orientare cu un pas de 15^0 grade între 0^0 și 180^0 ;
3. metronoamele sunt rotite cu un unghi α în raport cu direcția radială a platformei.

Principala sursă de cuplaj în sistemul nostru sunt impulsurile date de mecanismul de excitație a metronoamelor. Impulsurile pot fi ușor descompuse în două componente, una paralelă cu direcția radială a platformei ($p_{||}$) și una perpendiculară pe acest sens (p_{\perp}). Prin rotirea metronoamelor în raport cu direcția radială a platformei, suntem capabili de a reduce termenul p_{\perp} , care, la rândul său, va reduce cuplajul.

Am efectuat experimente pentru 2, 3 și 6 metronoame pentru diferite unghiuri de rotație începând de la $\alpha = 0^0$ la $\alpha = 180^0$ cu un pas de 15 grade (360 de experimente în total). Am calculat parametrul de ordine Kuramoto și am făcut o medie a rezultatelor. Rezultatele finale sunt ilustrate în Figura 11.

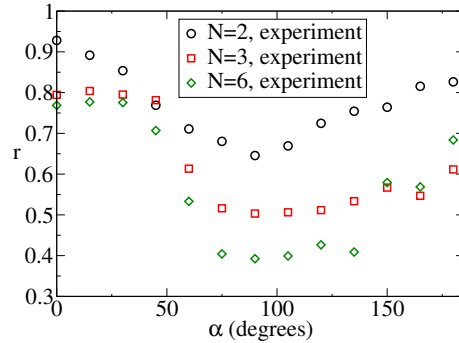


Figura 11: *Rezultatele experimentale pentru nivelul de sincronizare a stării de echilibriu a sistemului pentru diferite unghiuri de orientare a metronoamelor.*

Curbele sugerează o tranziție de fază de tip ordine-dezordine în jurul $\alpha \approx 50^0$ și o altă tranziție la aproximativ $\alpha \approx 150^0$. Prima tranziție dintr-o stare parțial sincronizată într-una nesincronizată apare ca urmare a micșorării cuplajului. Natura asimetrică a curbei se datorează faptului, că pentru $\alpha > 90^0$ pendulele metronoamelor se apropie de axa de rotație a platformei, ceea ce duce la o scădere a momentului forței p_{\perp} . Prin mărirea numărului de metronoame pe platformă, tranzițiile sunt mai accentuate.

4.5.2 Modelul teoretic

Modificăm modelul elaborat de noi pentru a încorpora rotirea metronoamelor, și funcția Lagrange a sistemului ideal va fi:

$$L = \frac{J}{2}\dot{\phi}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \left\{ \left[\frac{d}{dt}(x_i \cos \alpha_i + h_i \sin \theta_i) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(x_i \sin \alpha_i) \right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(h_i \cos \theta_i) \right]^2 \right\} + \sum_{i=1}^N \frac{J_i \omega_i^2}{2} - \sum_{i=1}^N m_i g h_i (1 - \cos \theta_i), \quad (9)$$

unde α este unghiul de rotație. Adaugând termenii de disipare și excitare, vom obține:

$$\ddot{\phi} = \frac{mr \cos(\alpha) \sum_i h_i \dot{\theta}_i^2 \sin \theta_i - c_\phi \dot{\phi} - \cos(\alpha) \sum_i M_i + A + B - C}{D}, \quad (10)$$

$$\ddot{\theta}_i = \frac{M_i - mr \cos(\alpha) \ddot{\phi} h_i \cos \theta_i - m g h_i \sin \theta_i - c_\theta \dot{\theta}_i}{m h_i^2 + J_i} \quad (11)$$

unde

$$\begin{aligned} A &= m^2 g r \cos(\alpha) \sum_i \frac{h_i^2 \sin \theta_i \cos \theta_i}{m h_i^2 + J_i}, \\ B &= m r c_\theta \cos(\alpha) \sum_i \frac{h_i \dot{\theta}_i \cos \theta_i}{m h_i^2 + J_i}, \\ C &= m r \cos(\alpha) \sum_i \frac{h_i M_i \cos \theta_i}{m h_i^2 + J_i}, \\ D &= \left[J + N m R^2 - m^2 r^2 \cos^2(\alpha) \sum_i \frac{h_i^2 \cos^2 \theta_i}{m h_i^2 + J_i} \right]. \end{aligned}$$

4.5.3 Rezultate numerice

Pentru rezolvarea ecuațiilor 10, 11 am folosit programul nostru C scris anterior, care utilizează metoda integrării vitează Verlet cu $dt = 0.01$ s. Am efectuat simulări pentru α între 0^0 și 180^0 , măbind α cu un pas de 1^0 . Pentru fiecare valoare de α am efectuat 100 simulări, am calculat parametrul de ordine Kuramoto și am luat media rezultatelor. Graficele obținute în comparație cu rezultatele experimentale se pot vedea în Figura 12.

În cazul în care numărul metronoamelor este $N = 2$ sau $N = 6$, rezultatele experimentale și teoretice sunt într-o concordanță bună. Diferențele pentru cazul $N = 3$, se datorează faptului că pentru $\alpha \in [90^0, 180^0]$ experimentele au arătat că un metronom va deplasa continuu între două stări. În prima stare va fi în fază cu celelalte două și în cealaltă stare va fi în anti-fază cu celelalte două. Acest fenomen este mai puțin frecvent reprodusă în simulări, conducând la o valoare de parametru de ordine mai mare.

După această validare a modelului, scopul nostru a fost să investigăm sistemul pentru numere mai mari de metronoame (până la $N = 100$). Pentru

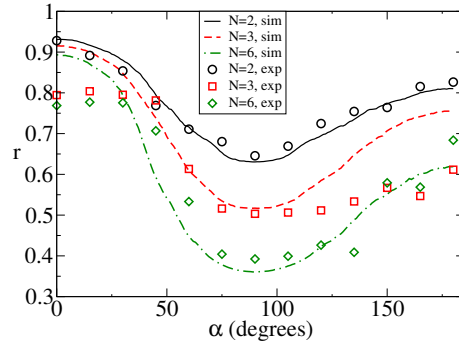


Figura 12: Rezultate simulării în comparație cu rezultatele experimentale.

a ilustra creșterea fluctuațiilor în vecinătatea valorii critice α , am calculat și deviația standard, σ_r , a parametrului de ordine r , pentru cele 100 de simulări. Rezultatele obținute pot fi văzute în Figura 13.

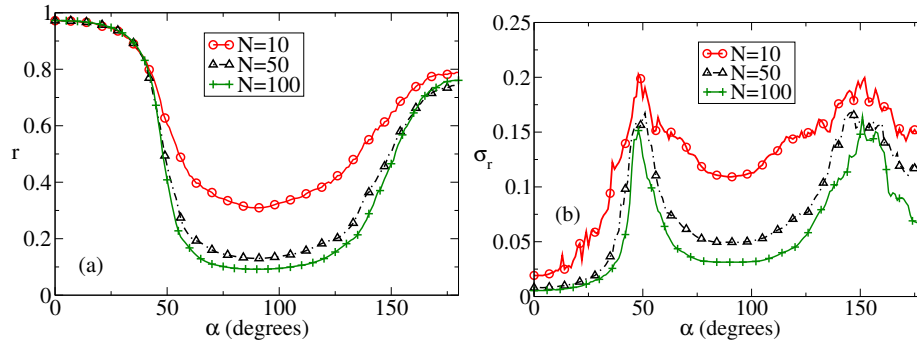


Figura 13: Rezultatele simulării pentru ansamble mai mari de metronoame. (a) Parametrul de ordine în funcție de unghiul de orientare (b) Fluctuația parametrului de ordine în funcție de unghiul de orientare.

Cum era de așteptat, pentru ansamble mai mari tranziția este mai bruscă și vârful în fluctuațiile parametrului de ordine se îngustează.

5 Concluzii

Dinamica a două tipuri de sisteme au fost investigate cu ajutorul unor experimente simple și simulări pe calculator.

În primul rând un sistem compus din oscilatori stochastici bimodali și cu o dinamică simplă de optimizare a fost investigată. Pentru a dovedi caracterul general ale modelelor de sincronizare bazate pe optimizare, am considerat două modele similare: una cu două perioade de așteptare posibile și una cu

două perioade de emiterie posibilă. Aici nu există nici-o interacțiune explicit încorporată care favorizează sincronizare. Există doar o regulă de optimizare simplă care guvernează comportamentul oscilatorilor. Oscilatorii încearcă să mențină emisia totală a sistemului, f , în jurul unui valori definite f^* . Ca un co-produs al acestei reguli de optimizare simplă, sincronizarea apare pentru un anumit interval f^* . Această sincronizare spontană a apărut în ambele modele studiate de noi. Apariția și dispariția sincronizării spontane se seamănă cu o tranziție de fază. Am studiat și o realizare experimentală a acestui sistem, proiectată și construită de noi. Rezultatele experimentale și teoretice au fost într-o concordanță bună.

Chiar dacă studiul nostru este mai mult un studiu teoretic, ar putea exista mai multe aplicații practice ale acestuia, cum ar fi construirea unor oscilatori cu o perioadă mai stabilă, sau construirea unor calculatoare de tip CNN cu cuplaj global.

Ca o a doua linie de studii în domeniul sincronizării spontane, am investigat dinamica colectivă a unui sistem mecanic format din metronoame cuplate. Metronoamele au fost plasate pe o platformă care se mișca cu o frecare mică. Acest sistem a fost investigat atât prin experimente cât și prin simulări pe calculator. Într-un prim set de experimente, am căutat condițiile care favorizează apariția sincronizării spontane. Am ajuns la concluzia, că nivelul de sincronizare detectată în sistem va crește uniform cu frecvența naturală a metronoamelor. Din datele experimentale am constatat, că prin mărirea numărului de metronoame în sistem, o scădere a nivelului de sincronizare va fi detectată.

Cu scopul de a investiga sistemul mai bine, am elaborat un model teoretic realist. Am stabilit parametrii realistici a modelului și am integrat numeric ecuațiile de mișcare. Rezultatele oferite de model au reprodus rezultatele și tendințele observate experimental. Prin acest model am reușit să demonstrăm importanța alegerii corecte a parametrilor. Din simulări am ajuns la concluzia, că pentru un ansamblu de metronoame cu o deviație standard fixă în frecvența lor naturală, parametrul de ordine va crește în funcție de frecvența medie a metronoamelor ω_0 . Această creștere se întâmplă brusc pentru ansamble mari, foarte asemănătoare unui tranziții de fază.

Ca un al doilea set de experimente cu configurarea anterioară am investigat influența cuplajului între metronoame. Prin rotirea metronoamelor pe perimetrul discului, mărirea cuplajului poate fi reglată fin. În funcție de mărirea cuplajului, sistemul va trece prin două tranziții de fază asemănătoare cu cea cunoscută în modelul Kuramoto. Modelul nostru teoretic cu câteva ajustări a fost folosit pentru a descrie noua configurare. Modelul a reprodus bine rezultatele experimentale și a permis și studiul ansamblelor mult mai mari. Pentru ansamble mari, tranziția în parametrul de ordine devine mai clară semănând cu o tranziție de fază.

6 Contribuții personale

Contribuțiile personale în domeniul oscilatorilor stochastici bimodali:

1. am scris propriul meu cod pentru a simula comportamentul oscilatorilor din modelul original, și din modelul modificat ;
2. am rulat simulările și am făcut graficile ;
3. am modificat programarea licuricilor electronici și am efectuat toate experimentele, precum și am scris coduri pentru a procesa datele. De asemenea, am procesat toate datele experimentale ;
4. am ajutat în construcția dispozitivului experimental.

Contribuțiile personale în studiul sistemului de metronoame :

1. am ajutat în construcția realizării experimentale;
2. am efectuat toate experimentele, și am scris programele necesare pentru a prelucra datele, interpreta rezultatele și am făcut graficile ;
3. împreună cu îndrumătorul meu am elaborat două modele noi, și am scris programele de simulare pentru a rezolva ecuațiile implicate.

Publicații legate de teză

1. R. Sumi, Z. Nédá, A. Tunyagi, Sz. Boda and Cs. Szász. Nontrivial spontaneous synchronization. *Physical Review E*, 79:056205, 2009.
2. Zs. Sárközi, E. Káptalan, Z. Nédá, Sz. Boda and A. Tunyagi. Optimization induced collective behavior in a system of flashing oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 22:1230002, 2009.
3. Sz. Boda, Z. Nédá, B. Tyukodi and A. Tunyagi. The rhythm of coupled metronomes. *The European Physical Journal B*, 86:1, 2013.
4. Sz. Boda, Sz. Ujvári, A. Tunyagi and Z. Nédá, Kuramoto-type phase transition with metronomes, accepted in *European Journal of Physics* (2013)
5. Z. Nédá, Sz. Boda, and E. Káptalan, Rend a rendezetlenségéből - játék metronomokkal, accepted in *Természet világa* (2013)

Bibliografie

- [1] M. Bennet, M. F. Schatz, H. Rockwood, and K. Wiesenfeld. Huygens clocks. *Proceedings of the Royal Society A*, 458:563, 2002.
- [2] C. Huygens. Letter to de sluse, in: Oeuvres complètes de christian huygens. *Société Hollandaise Des Sciences*, 1665.
- [3] Ch. Huygens. *Evres Completes*. Swets and Zeitlinger B.V., Amsterdam, 1967.
- [4] M. Kapitaniak, K. Czolczynski, P. Perlikowski, A. Stefanski, and T. Kapitaniak. Synchronization of clocks. *Physics Reports*, 517:1–69, 2012.
- [5] Y. Kuramoto and I. Nishikawa. Statistical macrodynamics of large dynamical systems. case of a phase transition in oscillator communities. *Journal of Statistical Physics*, 49:569, 1987.
- [6] Martha K. McClintock. Menstrual synchrony and suppression. *Nature*, 229:244, 1971.
- [7] R. Mirollo and S. Strogatz. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50:775, 1990.
- [8] Z. Néda, A. Nikitin, and T. Vicsek. Synchronization of two-mode stochastic oscillators: a new model for rhythmic applause and much more. *Physica A*, 321:238, 2003.
- [9] Z. Néda, E. Ravasz, Y. Brechet, T. Vicsek, and A.-L. Barabási. Self-organizing processes: The sound of many hands clapping. *Nature*, 403:849, 2000.
- [10] J. Pantaleone. Synchronization of metronomes. *American Journal of Physics*, 70:992, 2002.
- [11] C. S. Peskin. *Mathematical Aspects of Heart Physiology*. Courant Institute of Mathematics, New York, 1975.
- [12] H. M. Smith. Synchronous flashing of fireflies. *Science*, 16:151, 1935.

- [13] S. Strogatz. From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators. *Physica D*, 226:181–196, 2000.
- [14] S. Strogatz. *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order*. Hyperion, New York, 2003.
- [15] H. Ulrichs, A. Mann, and U. Parlitz. Synchronization and chaotic dynamics of coupled mechanical metronomes. *Chaos*, 19:043120, 2009.
- [16] A. T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 16:15, 1967.