Contribuţii la studiul problemelor de coincidenţă pentru operatori univoci si multivoci

Rezumatul tezei de doctorat

Oana Maria Mleşniţe

Departamentul de Matematică
Universitatea Babeş-Bolyai, Cluj-Napoca

Conducător ştiinţific:

Prof. Dr. Adrian-Olimpiu Petruşel

Cluj-Napoca, 2013

Prezentarea publică va avea loc în data de 25 Octombrie 2013 în sala Tiberiu Popoviciu.

Preşedintele comisiei: Prof. Dr. Radu Precup

Referenţi:

- Prof. Dr. Aurelian Cernea (Universitatea din Bucureşti)
- Prof. Dr. Dorian Popa (Universitatea Tehnică Cluj-Napoca)
- Conf. Dr. Adriana Buică (Universitatea Babeş-Bolyai Cluj-Napoca)
- Prof. Dr. Enrique Llorens Fuster (Universitatea din Valencia)

Conducător ştiinţific: Prof. Dr. Adrian Petruşel

Cuprins

Introducere

Teoria punctului fix pentru operatorii univoci şi multivoci este un domeniu al analizei neliniare cu o mare dezvoltare în ultimele decenii, dovezile fiind o mulţime de monografii şi articole ştiinţifice apărute în aceşti ani.

În literatura de specialitate privind teoria punctului fix, condiţiile metricii asupra operatorilor joacă un rol important în demonstrarea existenţei şi unicităţii punctului fix. Teorema lui Banach este fundamentală în analiza funcţională, analiza neliniară şi în cadrul ecuaţiilor diferenţiale.

Urmând teorema lui Banach sau principiul contracţiei, aşa cum se mai numeşte, în 1969 Nadler introduce conceptul de contracţie multivocă şi stabileşte că o contracţie multivocă are un punct fix într-un spaţiu metric complet (a se vedea S. B. Nadler [83]). Ulterior, mulţi autori au generalizat teorema de punct fix a lui Nadler în diferite moduri. Rezultatele de punct fix pentru operatori univoci au fost extinse pentru operatori multivoci, a se vedea de exemplu Y. Feng şi S. Liu [44], W. A. Kirk şi B. Sims [65], D. Klim şi D. Wardowski [66], I. A. Rus [102] şi altele.

O generalizare a teoremei de punct fix a lui Brouwer, din 1912, a fost obţinută de Schauder în 1930. Generalizări ale acestei teoreme se cunosc luând în considerare operatori ϕ-contracţie sau operatori condensatori. Gradul de necompactitate al unei mulţimi se măsoară utilizând funcţia μ numită măsură de necompactitate. Prima măsură de necompactitate a fost definită în anul 1930 de către K. Kuratowski în lucrarea [67]. Mulţi autori, precum I. Gohberg, L. S. Gol'denshtein şi A. S. Markus [54] şi V. I. Istrăţescu [61] au definit mai târziu şi alte măsuri de necompactitate.

Pe de altă parte, problema stabilităţii pentru ecuaţii funcţionale porneşte de la întrebarea lui Stanislav Ulam [124], din anul 1940, în ceea ce priveşte stabilitatea morfismelor de grupuri. Anul următor, Donald H. Hyers [56] a dat un răspuns parţial afirmativ pentru întrebarea lui Ulam în contextul spaţiilor Banach. Acest răspuns a fost primul progres semnificativ şi un pas spre mai multe soluţii în acest domeniu. De atunci, un număr mare de lucrări au fost publicate în legătură cu diverse generalizări ale problemei lui Ulam şi Teoremei lui Hyers. Prin urmare, acest tip de stabilitate se numeşte stabilitate Ulam-Hyers. În ceea ce priveşte stabilitatea Ulam-Hyers, există multe rezultate pentru ecuaţii diferenţiale şi ecuaţii integrale, a se vedea T. P. Petru, A. Petruşel şi J.-C. Yao [94], I. A. Rus [110], I. A. Rus [111]. Pentru alte rezultate în cazul problemelor de punct fix şi a problemelor de coincidenţă, a se vedea M. Bota şi A. Petruşel [21], V. L. Lazăr [68], T. P. Petru, A. Petruşel şi J.-C. Yao [94], I. A. Rus

[112], I. A. Rus [108], I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel [114]. Pentru teoria punctului fix în spaţii metrice, vezi Q. H. Ansari [4], M. A. Khamsi şi W. A. Kirk [64], W. A. Kirk şi B. Sims [65], I. A. Rus [102].

Din punct de vedere matematic, multe probleme care decurg din diverse domenii ale ştiinţei implică existenţa unor soluţii pentru ecuaţii neliniare de forma

$$t(u) = s(u), \quad u \in M, \tag{1}$$

unde M este o submulţime nevidă a spaţiului Banach X, iar $s, t : M \to Y$ sunt operatori neliniari care iau valori într-un alt spaţiu Banach Y. Problema găsirii unei soluţii pentru ecuaţia (1) este cunoscută sub numele de *problemă de coincidenţă*. Teoria coincidenţei este o tehnică importantă în demonstrarea existenţei soluţiilor pentru ecuaţii neliniare. De exemplu, în R.F. Brown [25], A. Buică [29], T. Chen, W. Liu şi Z. Hu [32], K. Goebel [52], Y. Mao şi J. Lee [73] au fost aplicate astfel de rezultate pentru a rezolva probleme cu valori pe frontieră.

Problema de coincidenţă poate fi considerată o generalizare a problemei de punct fix, deoarece dacă $t : M \subseteq X \to X$ este un operator, studiul existenţei unui punct fix pentru t coincide cu găsirea unei soluţii pentru problema de coincidenţă, unde s este operatorul identitate pe M. În acest sens, R. Machuca [72] demonstrează o teoremă de coincidenţă care este o generalizare a teoremei lui Banach. Generalizări ale acestui rezultat pot fi găsite, de exemplu în J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49], K. Goebel [52], O. Mleşniţe [75]. Pe de altă parte, R.E. Gaines şi J.L. Mawhin [45] au introdus teoria gradului de coincidenţă, în 1970, în analiza ecuaţiilor funcţionale şi diferenţiale. Scopul, în teoria gradului de coincidenţă, este existenţa soluţiilor pentru ecuaţia (1) în submulţimea M, mărginită şi închisă, a spaţiului Banach X pentru operatorul liniar t şi operatorul neliniar s folosind teoria gradului Leray-Schauder (vezi A. Sirma şi S. Sevgin [121]).

Problema

$$S(x) \cap T(x) \neq \emptyset, \quad x \in X \tag{2}$$

unde X este spaţiu metric şi $S, T : X \to P(Y)$ sunt doi operatori multivoci se numeşte *problemă de coincidenţă multivocă*. În ceea ce priveşte existenţa şi stabilitatea Ulam-Hyers a soluţiilor pentru aceste tipuri de probleme, a se vedea V. Berinde [16], M. Bota şi A. Petruşel [21], A. Buică [29], O. Mleşniţe şi A. Petruşel [76], A. Petruşel, C. Urs şi O. Mleşniţe [93], T. P. Petru, A. Petruşel şi J.-C. Yao [94], I. A. Rus [102], [108].

Această teză este împărţită în patru capitole, fiecare capitol conţinând secţiuni.

Capitolul 1: Preliminarii.

Scopul acestui capitol este de a aminti câteva noţiuni şi rezultate de bază necesare în prezentarea capitolelor ce urmează în această teză. Pentru a realiza acest capitol am folosit următoarele surse bibliografice: J.-P. Aubin şi H. Frankowska [12], J. Dugundji şi A. Granas [55], S. Hu şi N. S. Papageorgiou [57], W.A. Kirk şi B. Sims [65], A. Petruşel [90], A. Petruşel [91], I.A. Rus [107], I. A. Rus [109], I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel [114]. Acest capitol conţine următoarele secţiuni:

§1 *Spaţii metrice. Spaţii metrice generalizate.* În această secţiune amintim conceptul de spaţiu metric generalizat în sens Perov cu câteva dintre proprietăţile sale.

§2 *Operatori univoci slab Picard.* În această secţiune sunt prezentate rezultatele importante din teoria operatorilor univoci slab Picard. Conceptul de operator Picard şi operator slab Picard au fost introduse de I. A. Rus în [102]. Teoria operatorilor slab Picard este importantă pentru a studia proprietăţile soluţiilor ecuaţiilor pentru care funcţionează metoda aproximaţiilor succesive. În termenii operatorilor slab Picard rezultatele clasice iau o formă destul de simplă.

§3 *Operatori multivoci slab Picard.* În această secţiune descriem rezultatele şi conceptele de bază pentru operatori multivoci slab Picard. Sunt, de asemenea, prezentate şi câteva noţiuni de continuitate pentru operatorii multivoci. Primele idei referitoare la continuitatea operatorilor multivoci apar în anii 1926-1927 în lucrările unor matematicieni precum W. A. Wilson, L. S. Hill şi W. Hurewicz. Noţiuni despre continuitatea operatorilor multivoci pot fi găsite în carţi şi articole precum J.-P. Aubin şi A. Cellina [11], J.-P. Aubin şi H. Frankowska [12], S. Hu şi N. S. Papageorgiou [57], W. A. Kirk şi B. Sims [65], A. Petruşel [91].

Capitolul 2: Teoreme de coincidenţă pentru operatori univoci.

Este binecunoscut faptul că o problemă de coincidenţă este, în anumite condiţii, echivalentă cu o problemă de punct fix pentru operatori univoci. Folosind această abordare, prezentăm, în acest capitol, teoreme de existenţă, unicitate şi stabilitate Ulam-Hyers pentru problema de coincidenţă menţionată mai sus. De asemenea, prezentăm extinderi ale acestor rezultate în spaţii metrice generalizate. Apar şi câteva exemple care ilustrează rezultatele principale ale acestui capitol. Acest capitol conţine următoarele secţiuni:

§1 *Operatori de acoperire şi rezultate de stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă.* În această secţiune prezentăm rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă cu operatori univoci. Ipoteza de bază ale acestor rezultate este proprietatea de acoperire a operatorilor. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teorema 2.1.1 care este un rezultat de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru doi operatori univoci de acoperire; Teorema 2.1.2 care este un rezultat de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru doi operatori univoci de acoperire în raport cu două mulţimi. Acest rezultat generalizează teorema de punct fix dată de către A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk şi V. Obukhovskii în [10]. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: O. Mleşniţe [78].

§2 *Rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă.* În această secţiune prezentăm rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă cu operatori univoci. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Lema 2.2.1 care arată că o problemă de coincidenţă este, în anumite condiţii, echivalentă cu o problemă de punct fix; Teorema 2.2.1 care este o generalizare a Teoremei lui Banach; Teoremele 2.2.3 şi 2.2.4 sunt rezultate referitoare la dependenţa de date pentru stabilitatea Ulam-Hyers pentru problema de coincidenţă cu operatori univoci; Teorema 2.2.5 este un rezultat de stabilitate Ulam-Hyers pentru problema de coincidenţă în raport cu două metrici tare echivalente. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarele lucrări: O. Mlesniţe [74], [75].

§3 *Probleme de coincidenţă pentru contracţii generalizate.* În această secţiune prezentăm rezultate de existenţă, unicitate şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă folosind contracţii generalizate şi generalizăm teorema de coincidenţă a lui Goebel din K. Goebel [52]. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teorema 2.3.1 este un rezultat de stabilitate Ulam-Hyers pentru teorema lui Goebel; Teorema 2.3.2 care extinde teorema lui Goebel considerând condiţia de φ-contracţie al unui operator în raport cu un alt operator; Teoremele 2.3.3 şi 2.3.4 sunt generalizări ale Teoremelor 2.2.1 şi respectiv 2.2.2 folosind contracţii generalizate; Teorema 2.3.5 este o generalizare a Teoremei 2.3.3; Corolarul 2.3.2; Teorema 2.3.6 este un rezultat de existenţă, unicitate şi stabilitate Ulam-Hyers pentru o problemă de coincidenţă folosind noţiunea de contracţie separată. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarele lucrări: O. Mlesniţe [74], [77], J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49].

§4 *Rezultate de coincidenţă prin teoreme de punct fix în spaţii metrice generalizate.* În această secţiune prezentăm rezultate de existenţă, unicitate şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de punct fix şi probleme de coincidenţă cu operatori univoci în spaţii metrice generalizate. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teorema 2.4.1 este o extensia a Teoremei lui Perov; Teorema 2.4.2 este un rezultat de existenţă şi unicitate pentru problemele de coincidenţă cu operatori univoci în spaţii metrice generalizate; Teorema 2.4.3 este o aproximare şi o estimare a erorii pentru soluţia unei probleme de coincidenţă. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: O. Mleşniţe [75]

§5 *O condiţie Leray-Schauder pentru problemele de coincidenţă.* În această secţiune obţinem câteva versiuni, fără a invoca teoria gradului, de probleme de coincidenţă, unde operatorii univoci pot fi neliniari. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teoremele 2.5.4 este o extindere a Teoremei 2.5.2; Teorema 2.5.5 este o extindere a Teoremei 2.5.3 (vezi W. V. Petryshyn [95]); Corolarul 2.5.2. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50].

Capitolul 3: Teoreme de coincidenţă pentru operatori multivoci.

Scopul acestui capitol este de a prezenta rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă cu operatori multivoci. Această abordare se bazează pe tehnica operatorilor slab Picard în contextul spaţiilor metrice generalizate în sens Perov, adică spaţii înzestrate cu o metrică vectorială $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$. Folosind tehnica produsului cartezian pentru doi operatori multivoci, aceste rezultate extind rezultatele existente în literatură precum M. Bota şi A. Petruşel [21], T. P. Petru, A. Petruşel şi J.-C. Yao [94], I. A. Rus [108]. Acest capitol conţine următoarele secţiuni:

§1 *Metric regularitate şi rezultate de stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă.* Proprietăţile de metric regularitate şi de acoperire deschisă a operatorilor joacă un rol important în multe subiecte ale analizei variaţionale moderne. În această secţiune prezentăm rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă cu operatori multivoci. Ipoteza de bază a acestor rezultate este proprietatea de metric regularitate a operatorilor. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Lema 3.1.1 care arată că o problemă de coincidenţă este, în anumite condiţii, echivalentă cu o problemă de punct fix pentru operatori multivoci; Teoremele 3.1.1 şi 3.1.2 sunt generalizări ale teoremelor date de A. V. Blaga în [19]. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: O. Mleşniţe [79].

§2 *Rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă.* În această secţiune prezentăm rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă cu operatori multivoci folosind tehnica operatorilor slab Picard. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teorema 3.2.1 este o generalizare a teoremei de punct fix a lui Covitz-Nadler; Teorema 3.2.2 este un rezultat referitor la dependenţa de date pentru problema de coincidenţă cu operatori multivoci. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: O. Mleşniţe şi A. Petruşel [76].

§3 *Rezultate de coincidenţă prin teoreme de punct fix în spaţii metrice generalizate.* În această secţiune prezentăm rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă cu operatori multivoci folosind tehnica operatorilor slab Picard în spaţii metrice generalizate. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teorema 3.3.1 este o generalizare a Teoremei de punct fix a lui Perov. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarele lucrări: O. Mleşniţe şi A. Petruşel [76], A. Petruşel, C. Urs şi O. Mleşniţe [93].

§4 *O condiţie Leray-Schauder pentru problemele de coincidenţă.* În acestă secţiune prezentăm rezultate de existenţă pentru probleme de coincidenţă cu operatori multivoci folosind condiţii de tip Leray-Schauder şi Teorema 2.5.2. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Teorema 3.4.1 este un rezultat de existenţă pentru problema de coincidenţă şi o generalizare a Teoremei 2.5.2; Teorema 3.4.2 este un rezultat de existenţă pentru problema de coincidenţă cu operatori care sunt condensatori, dar nu neaparat k-contracţie de mulţimi; Corolarele 3.4.2 şi 3.4.3 sunt consecinţe ale Teoremei 3.4.2. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50].

Capitolul 4: Aplicaţii.

Scopul acestui capitol este de a prezenta aplicaţii ale rezultatelor prezentate pe parcursul acestei teze. În primul rând este prezentată o aplicaţie referitoare la stabilitatea Ulam-Hyers pentru ecuaţii diferenţiale şi incluziuni operatoriale, după care urmează studiul existenţei pentru soluţiile clasice şi tari ale ecuaţiilor diferenţiale de ordinul întâi şi de ordinul doi. În final prezentăm existenţa soluţiilor pentru o problemă Dirichlet. Acest capitol conţine următoarele secţiuni:

§1 *Stabilitate Ulam-Hyers pentru ecuaţii diferenţiale.* În această secţiune stabilim noi rezultate de existenţă, unicitate şi stabilitate Ulam-Hyers pentru ecuaţii diferenţiale.

Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Aplicaţia 1 este un rezultat de stabilitate Ulam-Hyers pentru ecuaţii diferenţiale folosindu-se Teorema 2.3.4; Aplicaţia 2 este un rezultat de stabilitate Ulam-Hyers pentru ecuaţii diferenţiale folosind contracţii generalizate utilizându-se Teorema 2.3.2. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarele lucrări: J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49], O. Mleşniţe [77].

§2 *Stabilitate Ulam-Hyers pentru incluziuni operatoriale.* În această secţiune demonstrăm o teoremă de stabilitate Ulam-Hyers pentru problema Cauchy cu operatori multivoci în raport cu incluziunea diferenţială de ordinul întâi. Contribuţia proprie din această secţiune este: Teorema 4.2.1 care este un rezultat în ceea ce priveşte stabilitatea Ulam-Hyers pentru problema Cauchy. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: O. Mlesŋiţe [74].

§3 *Existenţa soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi.* În această secţiune dorim să studiem existenţa soluţiilor tari ale unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Lemele 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.4, 4.3.5 şi Teorema 4.3.1 reprezentând rezultatele principale pentru existenţa soluţiilor tari ale unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Pentru a obţine aceste rezultate de existenţă aplicăm Corolarul 2.5.2. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50].

§4 *Existenţa soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul doi.* În această secţiune dorim să studiem existenţa soluţiilor tari şi clasice ale unei ecuaţii diferenţiale de ordinul doi cu condiţii Dirichlet neomogene. Contribuţiile proprii din această secţiune sunt: Lemele 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3, 4.4.4 şi Teoremele 4.4.1 şi 4.4.3 reprezentând rezultatele principale pentru existenţa soluţiilor clasice ale unei ecuaţii diferenţiale de ordinul doi. Pentru a obţine aceste rezultate de existenţă aplicăm Teorema 2.3.3 şi Corolarul 3.4.2. Lemele 4.4.5, 4.4.6, 4.4.7 şi Teorema 4.4.4 reprezintă rezultatele principale pentru existenţa soluţiilor tari ale unei ecuaţii diferenţiale de ordinul doi. Pentru a obţine aceste rezultate de existenţă aplicăm Corolarul 3.4.3. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50].

§5 *O problemă Dirichlet neliniară.* În această secţiune obţinem existenţa soluţiilor pentru o problemă Dirichlet folosind rezultatele pentru problemele de coincidenţă. Contribuţia proprie din această secţiune este: Teorema 4.5.1 este un rezultat principal de existenţă a soluţiilor pentru o problemă Dirichlet. Rezultatele prezentate în această secţiune sunt incluse în următoarea lucrare: J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50].

Contribuţiile autorului prezentate în această teză se regăsesc şi în următoarele lucrări:

- **O. Mlesŋiţe**, *Ulam-Hyers stability for operatorial inclusions*, Creat. Math. Inform., 21 (2012), No. 1, 87-94 (MR2984982).

- **O. Mleşniţe**, *Existence and Ulam-Hyers stability results for coincidence problems*, J. Nonlinear Sci. Appl. 6 (2013), 108-116 (MR3017894).
- **O. Mleşniţe** and A. Petruşel, *Existence and Ulam-Hyers stability results for multivalued coincidence problems*, Filomat, 26, 5 (2012), 965-976 (IF: 0.714).
- **O. Mleşniţe**, *Existence and Ulam-Hyers stability result for a coincidence problems with applications*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 14 (2013), No 1, 183-189 (IF: 0.304).
- J. Garcia-Falset şi **O. Mleşniţe**, *Coincidence problems for generalized contractions*, trimis spre publicare.
- J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi **O. Mleşniţe**, *The Leray-Schauder condition in the coincidence problem for two mappings*, trimis spre publicare.
- **O. Mleşniţe**, *Covering mappings and Ulam-Hyers stability results for coincidence problems*, Carpathian Journal of Mathematics, acceptat spre publicare, (IF: 0.852).
- **O. Mleşniţe**, *Metric regularity and Ulam-Hyers stability results for coincidence problems with multivalued operators*, trimis spre publicare.
- A. Petruşel, C. Urs şi **O. Mleşniţe**, *Vector-valued Metrics in Fixed Point Theory*, Contemporary Math. Series, Amer. Math. Soc., 2013.
- M.-F. Bota, E. Karapinar şi **O. Mleşniţe**, *Ulam-Hyers stability results for fixed point problems via $\alpha - \psi$-contractive mapping in (b)-metric space*, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (2013), Article ID 825293, 6 pages (IF: 1.102).

O parte importantă din rezultatele originale demonstrate în această teză au fost, de asemenea, prezentate la următoarele conferinţe ştiinţifice:

- The 7^{th} International Conference on Applied Mathematics (ICAM7), September $1^{st} - 4^{th}$, 2010, North University of Baia Mare, Romania.
- International Conference on Nonlinear Operators, Diferential Equations and Applications (ICNODEA), July $5^{th} - 8^{th}$, 2011, Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca, Romania.
- The Fifth International Workshop-Constructive methods for non-linear boundary value problems, 28 June-1 July, 2012, Tokaj, Hungary.
- The 10^{th} International Conference on Fixed Point Theory and its Applications, July 9 - 15, 2012, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania.

- The 5^{th} Workshop on Metric Fixed Point Theory, November 15-17, 2012, Valencia, Spain.
- The Fourteenth International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, August, 29-31, 2013, Cluj-Napoca, Romania.
- The 9^{th} International Conference on Applied Mathematics (ICAM9), September, 25-28, 2013, North University of Baia Mare, Romania.

Cuvinte cheie: operator univoc, operator multivoc, spaţiu metric generalizat, punct fix, punct de coincidenţă, operator Picard, operator slab Picard, operator de acoperire, metric regularitate, stabilitate Ulam-Hyers, condiţia Leray-Schauder, contracţie generalizată, măsură de necompactitate, k-contracţie de mulţimi, operator condensator.

Capitolul 1

Preliminarii

Scopul acestui capitol este de a prezenta noţiunile de bază şi rezultatele utile în descrierea următoarelor capitole ale acestei teze. De-a lungul acestei teze folosim noţiunile şi notaţiile din Analiza Neliniară. Pentru teoria punctului fix în spaţii metrice, a se vedea G. Allaire şi S.M. Kaber [2], Q. H. Ansari [4], A. Granas şi J. Dugundji [55], M. A. Khamsi şi W. A. Kirk [64], W. A. Kirk şi B. Sims [65], M. A. Khamsi şi W. A. Kirk [64], G. Moţ, A. Petruşel şi G. Petruşel [82], A. Petruşel [90], I. A. Rus [101], I. A. Rus [102], I. A. Rus [107], I. A. Rus [109], I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel [114], R. S. Varga [125] şi altele.

1.1 Spaţii metrice. Spaţii metrice generalizate

În multe ramuri ale matematicii este convenabil să cunoaştem o noţiune legată de distanţa dintre elementele unei mulţimi abstracte. De exemplu, demonstraţiile unor teoreme din analiza reală depind doar de proprietăţile distanţei dintre puncte şi nu de puncte efectiv. Când aceste proprietăţi ale distanţei sunt abstracte, obţinem conceptul de spaţiu metric. Scopul nostru, în această secţiune, este de a defini spaţiul metric şi apoi spaţiul metric generalizat, cu proprietăţile lor.

În 1905 M. Frechet a introdus noţiunea de spaţiu metric cu scopul de a studia proprietăţile spaţiilor funcţionale.

La sfârşitul secolului XX şi începutul secolului XXI apar lucrări în care rezultatele se referă la o metrică vectorială care ia valori într-un spaţiu infinit dimensional (vezi W. A. J. Luxemburg şi A. C. Zaanen [70], A.C. Zaanen [131]). În continuare definim noţiunea de spaţiu metric generalizat.

Definiţia 1.1.1 (A. I. Perov [87]). *Fie X o mulţime nevidă. O funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}^m$ se numeşte metrică vectorială pe X dacă următoarele proprietăţi sunt îndeplinite:*

- *(i) $d(x, y) \geq O$ oricare ar fi $x, y \in X$; dacă $d(x, y) = O$, atunci $x = y$; (unde $O := \underbrace{(0, 0, \cdots, 0)}_{m-ori}$)*

- *(ii)* $d(x,y) = d(y,x)$ *oricare ar fi* $x, y \in X$*;*
- *(iii)* $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *oricare ar fi* $x, y, z \in X$*.*

O mulţime nevidă X înzestrată cu o metrică vectorială d se numeşte spaţiu metric generalizat în sens Perov (pe scurt spaţiu metric generalizat) şi va fi notat prin (X, d).

Spaţiul metric generalizat în sens Perov este un caz particulat al spaţiilor Riesz (vezi W. A. J. Luxemburg şi A. C. Zaanen [70], A. C. Zaanen [131]).

1.2 Operatori univoci slab Picard

Metoda aproximaţiilor succesive este una dintre teoriile de bază în cadrul ecuaţiilor operatoriale, în special în teoria punctului fix. Teoria operatorilor slab Picard este utilă în studiul proprietăţilor soluţiilor acestor ecuaţii pentru care se poate utiliza metoda aproximaţiilor succesive. În termenii operatorilor slab Picard, rezultatele clasice iau o formă mai simplă. În această secţiune folosim terminologia şi notaţiile din lucrările I. A. Rus [102] şi I.A. Rus [104], A. Petruşel şi G. Petruşel [114].

Fie X o mulţime nevidă şi $f : X \to X$ un operator. Folosim notaţia:

$$Fix(f) := \{x \in X \mid f(x) = x\} - \text{ pentru mulţimea punctelor fixe ale operatorului } f.$$

Fie (X, d), (Y, ρ) două spaţii metrice şi fie $f : X \to Y$ un operator.

(a) f se numeşte Lipschitz dacă există constanta $k \geq 0$ astfel încât

$$\rho(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x,y), \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

Dacă $k \in [0,1)$ atunci f se numeşte contracţie.

Dacă $k = 1$, atunci f se numeşte neexpansiv.

(b) f se numeşte dilataţie dacă există constanta $h > 1$ astfel încât

$$\rho(f(x), f(y)) \geq h \cdot d(x,y), \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

Dacă $h = 1$, atunci f se numeşte expansiv.

(c) f este contractiv dacă

$$\rho(f(x), f(y)) < d(x,y), \text{ oricare ar fi } x, y \in X \text{ cu } x \neq y.$$

Rezultatul principal pentru contracţii în spaţii metrice generalizate este teorema de punct fix a lui Perov, vezi A. I. Perov [87].

Teorema 1.2.1 (A. I. Perov [87]). *Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat complet şi operatorul $f : X \to X$ cu proprietatea că există o matrice $A \in M_{m,m}(\mathbb{R})$ astfel încât*

$$d(f(x), f(y)) \leq Ad(x, y) \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

Dacă A este o matrice convergentă la zero, atunci:

1) $Fix(f) = \{x^*\}$;

2) şirul aproximaţiilor succesive $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = f^n(x_0)$ este convergent şi are limita x^*, oricare ar fi $x_0 \in X$;

3) avem următoarea estimare

$$d(x_n, x^*) \leq A^n(I - A)^{-1}d(x_0, x_1);$$

4) Dacă $g : X \to X$ este un operator pentru care există $y^* \in Fix(g)$ şi dacă există $\eta := (\eta_1, ..., \eta_m) \in \mathbb{R}^m_+$ cu $\eta_i > 0$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., m\}$, astfel încât

$$d(f(x), g(y)) \leq \eta, \text{ oricare ar fi } x \in X,$$

atunci

$$d(y^*, x^*) \leq (I - A)^{-1}\eta.$$

5) Dacă $g : X \to X$ este un operator, $y_n = g^n(x_0)$ şi dacă există $\eta := (\eta_1, ..., \eta_m) \in \mathbb{R}^m_+$ cu $\eta_i > 0$ pentru orice $i \in \{1, 2, ..., m\}$ astfel încât

$$d(f(x), g(x)) \leq \eta, \text{ oricare ar fi } x \in X,$$

avem următoarea estimare

$$d(y_n, x^*) \leq (I - A)^{-1}\eta + A^n(I - A)^{-1}d(x_0, x_1).$$

1.3 Operatori multivoci slab Picard

În această secţiune descriem câteva concepte şi rezultate de bază pentru operatori multivoci, notaţii referitoare la operatori multivoci (vezi J.-P. Aubin şi A. Cellina [11], J.-P. Aubin şi H. Frankowska [12], W. A. Kirk şi B. Sims [65], A. Petruşel [91]) precum şi operatori multivoci slab Picard (vezi A. Petruşel [90], I. A. Rus [108], I. A. Rus [107], I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel [114]).

Un punct $x \in X$ se numeşte punct fix (respectiv punct fix strict) pentru F dacă

$$x \in F(x) \text{ (respectiv } \{x\} = F(x)).$$

Notăm prin $Fix(F)$ (sau $SFix(F)$) mulţimea punctelor fixe (respectiv mulţimea punctelor fixe stricte) pentru operatorul multivoc F, adică,

$Fix(F) := \{x \in X \mid x \in F(x)\} -$ mulţimea punctelor fixe ale operatorului F;

$SFix(F) := \{x \in X \mid \{x\} = F(x)\} -$ mulţimea punctelor fixe stricte ale operatorului F.

Definiţia 1.3.1. *Fie* (X, d) *şi* (Y, ρ) *două spaţii metrice şi fie* $F : X \to P_{\hat{\imath}}(X)$ *un operator multivoc. Atunci*

(a) *F se numeşte k-Lipschitz dacă şi numai dacă există* $k > 0$ *şi*

$$H_\rho(F(x), F(y)) \leq k \cdot d(x, y), \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

Dacă F este k-Lipschitz cu constanta $k < 1$*, atunci F se numeşte k-contracţie multivocă.*

(b) *F se numeşte* φ*-contracţie dacă* $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *este strict funcţie de comparaţie şi*

$$H_\rho(F(x), F(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

Următorul rezultat este cunoscut în literatură ca şi teorema de punct fix a lui Covitz-Nadler (vezi H. Covitz şi S. B. Nadler [35] şi S. B. Nadler [83]).

Teorema 1.3.1 (H. Covitz şi S. B. Nadler [35], S. B. Nadler [83])**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $x_0 \in X$ *arbitrar. Dacă* $F : X \to P_{\hat{\imath}}(X)$ *este k-contracţie multivocă, atunci F are cel puţin un punct fix şi există un şir al aproximaţiilor succesive pentru F pornind din* x_0 *care converge la un punct fix al lui F.*

Următorul rezultat este o generalizare a teoremei de punct fix a lui Covitz-Nadler, cunoscut în literatură sub numele de teorema de punct fix a lui Węgrzyk's (vezi R. Węgrzyk [129]).

Teorema 1.3.2 (R. Węgrzyk [129])**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $F : X \to P_{\hat{\imath}}(X)$ *o* φ*-contracţie multivocă. Atunci F are cel puţin un punct fix şi pentru orice* $x_0 \in X$ *există un şir al aproximaţiilor succesive pentru F pornind din* x_0 *care converge la un punct fix al lui F.*

Capitolul 2

Teoreme de coincidenţă pentru operatori univoci

Este binecunoscut faptul că o problemă de coincidenţă este, în anumite condiţii, echivalentă cu o problemă de punct fix pentru operatori univoci generată de operatorii s şi t. Folosind această abordare, vom prezenta, în acest capitol, teoreme de existenţă, unicitate, de acoperire a operatorilor, de stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă. Prezentăm, de asemenea câteva extinderi ale acestor rezultate în spaţii metrice generalizate. Exemplele date ilustrează rezultatele principale ale acestui capitol.

Câteva dintre referinţele bibliografice folosite pentru a dezvolta acest capitol sunt: J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez-Benavides şi G. Lopez Acedo [13], A. V. Arutyunov [7], A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk şi V. Obukhovskii [10], A. V. Dmitruk [38], K. Goebel [52], L. A. Lyusternik [71], O. Mleşniţe [78], [75], [74], [77], T. P. Petru, A. Petruşel şi J.-C. Yao [94], W. V. Petryshyn [95], I. A. Rus [108], [112].

Fie X, Y două mulţimi nevide şi $s, t : X \to Y$ doi operatori univoci. Considerăm următoarea problemă de coincidenţă:

$$\text{să se găsească } (x, y) \in X \times Y \text{ astfel încât } s(x) = t(x) = y. \tag{2.1}$$

Notăm prin $C(s, t)$ mulţimea tuturor punctelor de coincidenţă pentru operatorii s şi t.

O soluţie pentru problema de coincidenţă (2.1) pentru operatorii s şi t este perechea $(x^*, y^*) \in X \times Y$ astfel încât

$$s(x^*) = t(x^*) = y^*.$$

Notăm prin $CP(s, t) \subset X \times Y$ mulţimea tuturor soluţiilor pentru problema de coincidenţă (2.1).

Stabilitate Ulam-Hyers pentru problema de coincidenţă (2.1):

Fie (X, d), (Y, ρ) două spaţii metrice şi $s, t : X \to Y$ doi operatori. Problema de coincidenţă (2.1) se numeşte Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat dacă şi numai dacă există $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, continuă în 0 şi $\psi(0) = 0$ astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi oricare ar fi $w^* \in X$ o soluţie aproximativă pentru problema de coincidenţă, adică

$$\rho(s(w^*), t(w^*)) \leq \varepsilon \tag{2.2}$$

există o soluţie exactă z^* a problemei (2.1) astfel încât

$$d(w^*, z^*) \leq \psi(\varepsilon). \tag{2.3}$$

Dacă există $c > 0$ astfel încât $\psi(t) = ct$, oricare ar fi, $t \in \mathbb{R}_+$ atunci problema de coincidenţă (2.1) se numeşte Ulam-Hyers stabilă.

Pentru rezultate referitoare la stabilitatea Ulam-Hyers în cazul problemelor de punct fix şi al problemelor de coincidenţă pentru operatori univoci, a se vedea M. Bota şi A. Petruşel [21], V. L. Lazăr [68], T. P. Petru, A. Petruşel şi J.-C. Yao [94], I. A. Rus [102], [108], [112], I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel [114].

2.1 Operatori de acoperire şi rezultate de stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă

În această secţiune prezentăm rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru problemele de coincidenţă cu operatori univoci. Ipoteza de bază pentru acestor rezultate este proprietatea de acoperire a operatorilor. Aceste rezultate generalizează teoremele de punct fix date de A. V. Arutyunov [7], A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk şi V. Obukhovskii [10].

Definiţia 2.1.1 (A. Arutyunov [7])**.** *Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice. Pentru $\alpha > 0$, un operator $f : X \to Y$ se numeşte α- acoperire dacă oricare ar fi $x \in X$ şi $r > 0$ avem*

$$B_Y(f(x), \alpha r) \subseteq f(B_X(x, r)). \tag{2.4}$$

Supremumul pentru care α satisface incluziunea (2.4) se numeşte coeficientul de acoperire globală al lui f şi notăm, pe scurt, prin $cov(f)$ (în loc de $cov_{X\times Y}(f)$).
Observăm că datorită validităţii globale a incluziunii (2.4) avem

$$B_Y(f(x), cov(f)r) \subseteq f(B_X(x, r)), \text{ oricare ar fi } x \in X, r > 0.$$

Proprietatea de acoperire a operatorilor a fost studiată de către A. Arutyunov [7], A. V. Dmitruk, A. A. Milyutin, N. P. Osmolovskii [39], A. D. Ioffe [59], [60], B. S. Mordukhovich şi B. Wang [81].

Urmând ideea lui A. Uderzo [123] avem următoarea observaţie:

Observaţia 2.1.1. Un operator $f : X \to Y$ satisface Definiţia 2.1.1 dacă şi numai dacă există $k > 0$ astfel încât

$$d(x, f^{-1}(y)) \leq k\rho(f(x), y), \text{ oricare ar fi } x \in X, y \in Y. \tag{2.5}$$

Vom mai spune că f este *metric regulară pe* X.

Infimumul pentru care k satisface inegalitatea (2.5) se numeşte coeficientul de metric regularitate globală al lui f şi se notează prin $reg(f)$. Are loc următoarea relaţie între coeficientul de acoperire globală şi coeficietul de metric regularitate globală al operatorului f:

$$reg(f) = \frac{1}{cov(f)},$$

unde cazul $reg(f) = \infty$, corespunde la $cov(f) = 0$, ceea ce inseamnă absenţa acoperirii globale/metric regularităţii globale pentru operatorul f.

O altă caracterizare pentru acoperire/metric regularitate poate fi obţinută în ceea ce priveşte comportamentul Lipschitz al operatorului multivoc invers. De fapt, f acoperă pe X dacă şi numai dacă f^{-1} este Lipschitz continuă în Y şi are loc

$$lip(f^{-1}) = \frac{1}{cov(f)}.$$

Lema 2.1.1 (A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk şi V. Obukhovskii [10])**.** *Fie $f : X \to Y$ un operator surjectiv şi k-Lypschitz cu $k > 0$. Operatorul multivoc invers $f^{-1} : Y \to \mathcal{P}(X)$, $f^{-1}(x) = \{y \in \mathcal{P}(X) : f(y) = x\}$ este operator de acoperire cu constanta $\frac{1}{k}$.*

Observaţia 2.1.2. *Menţionăm faptul că inversa acestei afirmaţii este de asemenea adevărată: dacă f^{-1} este operator de acoperire cu constanta $\frac{1}{k}$, atunci f este k-Lipschitz.*

Considerăm o versiune relativă a proprietăţii operatorilor de acoperire cu constanta α.

Definiţia 2.1.2 (A. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk şi V. Obukhovskii [10])**.** *Fie $M \subseteq X$ şi $N \subseteq Y$ mulţimi oarecare şi $\alpha > 0$. Un operator $f : X \to Y$ se numeşte operator de α-acoperire în raport cu mulţimile M şi N dacă oricare ar fi $x \in M$ şi $r > 0$ astfel încât $B_X(x, r) \subseteq M$ avem*

$$B_Y(f(x), \alpha r) \cap N \subseteq f(B_X(x, r)). \tag{2.6}$$

Dacă $N = Y$ spunem că f este operator de α-acoperire pe M.

Alte definiţii despre acoperirea operatorilor se pot găsi în lucrări precum A. D. Ioffe [59], [60], B. S. Mordukhovich [80].

Definiţia 2.1.3. *Fie $M \subseteq X$ şi $N \subseteq Y$ mulţimi. Un operator $f : X \to Y$ se numeşte închis în raport cu M şi N dacă intersecţia graficului său cu mulţimea $M \times N$ este închisă.*

Teorema 2.1.1 (O. Mleşniţe [78])**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi (Y, ρ) un spaţiu metric. Presupunem că:*

(i) $t : X \to Y$ *este un operator deschis, bijectiv şi* k_t*-Lipschitz, cu constanta* $k_t > 0$*;*

(ii) $s : X \to Y$ *este un operator continuu şi de acoperire cu constanta* k_s *şi* $k_s > k_t$*;*

Atunci problema de coincidenţă (2.1) *are cel puţin o soluţie (adică există* $x^* \in X$ *astfel încât* $s(x^*) = t(x^*)$*) şi avem*

$$\rho(y_0, t(x^*)) \leq \frac{k_t}{k_s - k_t}\rho(y_0, s(t^{-1}(y_0))), \text{ oricare ar fi } y_0 \in t(X). \tag{2.7}$$

Dacă, în plus, $t : X \to Y$ *este metric regular pe* X *cu constanta* $\alpha > 0$ *atunci problema de coincidenţă* (2.1) *este Ulam-Hyers stabilă.*

Teorema 2.1.2 (O. Mleşniţe [78])**.** *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet,* (Y, ρ) *un spaţiu metric,* $x_0 \in X$ *şi* $R_1, R_2 \in (0, \infty]$*. Presupunem că:*

(i) $t : X \to Y$ *este un operator deschis, bijectiv şi* k_t*- Lipschitz, cu constanta* $k_t > 0$*;*

(ii) $s : X \to Y$ *este un operator continuu şi de acoperire, cu constanta* k_s*, în raport cu bilele* $B_X(x_0, R_1)$ *şi* $B_Y(s(x_0), k_s R_2)$ *şi* $k_s > k_t$ *astfel încât*

$$\rho(s(x_0), t(x_0)) \leq \left(\frac{k_s}{k_t} - 1\right)\min\{R_1, R_2\}. \tag{2.8}$$

Atunci problema de coincidenţă (2.1) *are cel puţin o soluţie (adică există* $x^* \in X$ *astfel încât* $s(x^*) = t(x^*)$*) şi avem*

$$\rho(y_0, t(x^*)) \leq \frac{k_t}{k_s - k_t}\rho(y_0, s(t^{-1}(y_0))), \text{ oricare ar fi } y_0 \in t(X). \tag{2.9}$$

Dacă, în plus, $t : X \to Y$ *este metric regulară pe* X *cu constanta* $\alpha > 0$ *atunci problema de coincidenţă* (2.1) *este Ulam-Hyers stabilă.*

2.2 Rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă

Scopul acestei secţiuni este de a prezenta rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă cu operatori univoci. Folosind tehnica produsului cartezian pentru doi operatori univoci, aceste rezultate sunt bazate pe următoarele lucrări: M. Bota şi A. Petruşel [21], O. Mleşniţe [74], [75], I. A. Rus [108].

Fie (X, d), (Y, ρ) două spaţii metrice şi $s, t : X \to Y$ doi operatori astfel încât t este un operator injectiv. În acest caz t admite inversa la stânga $t_l^{-1} : t(X) \to X$. Presupunem, de asemenea, că $s(X) \subseteq t(X)$. Considerăm $f : X \times t(X) \to X \times t(X)$ definită prin

$$f(x_1, x_2) = (t_l^{-1}(x_2), s(x_1)).$$

Lema 2.2.1. *În condiţiile de mai sus, avem $CP(s,t) = Fix(f)$.*

Fie (X,d), (Y,ρ) două spaţii metrice, d_Z metrica (generată de d şi ρ) pe $Z := X \times Y$ definită prin

$$d^*((x_1,x_2),(u_1,u_2)) = d(x_1,u_1) + \rho(x_2,u_2)$$

sau

$$d_*((x_1,x_2),(u_1,u_2)) = \max\{d(x_1,u_1), \rho(x_2,u_2)\}$$

oricare ar fi (x_1,x_2), $(u_1,u_2) \in Z$ şi $s,t : X \to Y$ doi operatori. Considerăm problema de coincidenţă (2.1).

Teorema 2.2.1 (O. Mleşniţe [75]). *Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spaţii metrice complete. Presupunem că operatorul $t : X \to Y$ este dilataţie cu constanta $k_t > 1$, operatorul $s : X \to Y$ este contracţie cu constanta $k_s < 1$ şi $s(X) \subseteq t(X)$. Atunci problema de coincidenţă* (2.1) *pentru s şi t are soluţie unică.*

Teorema 2.2.2 (O. Mleşniţe [75]). *Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spaţii metrice complete. Presupunem că toate ipotezele Teoremei 2.2.1 au loc şi în plus presupunem că $t : X \to Y$ este metric regulară pe X cu constanta $\alpha > 0$. Atunci problema de coincidenţă* (2.1) *este Ulam-Hyers stabilă.*

Observaţia 2.2.1. *Demonstraţii similare pentru Teorema* 2.2.1 *şi Teorema* 2.2.2 *sunt posibile dacă considerăm pe $Z := X \times \overline{t(X)}$ metrica $d^* : Z \times Z \to \mathbb{R}_+$ definită prin*

$$d^*((x_1,x_2),(u_1,u_2)) = \max\{d(x_1,u_1), \rho(x_2,u_2)\}.$$

În continuare demonstrăm câteva rezultate de dependenţă de date pentru stabilitatea Ulam-Hyers a problemelor de coincidenţă pentru două perechi de operatori univoci.

Teorema 2.2.3 (O. Mleşniţe [75]). *Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spaţii metrice şi $f_i, g_i : X \to Y$, $i \in \{1,2\}$ patru operatori. Considerăm următoarele ecuaţii de coincidenţă:*

$$f_1(x) = g_1(x), \quad x \in X, \tag{2.10}$$

$$f_2(x) = g_2(x), \quad x \in X. \tag{2.11}$$

Considerăm mulţimile:

$$C_{i\varepsilon} := \{x \in X | \rho(f_i(x), g_i(x)) \le \varepsilon\}, i \in \{1,2\}.$$

Dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:
(i) $C(f_2,g_2) \subseteq C(f_1,g_1)$;
(ii) ecuaţia de coincidenţă (2.11) *este Ulam-Hyers stabilă;*
(iii) $C_{1\varepsilon} \subseteq C_{2\varepsilon}$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$;
atunci ecuaţia de coincidenţă (2.10) *este Ulam-Hyers stabilă.*

În caz particular dacă $Y := X$ şi $g_1 = g_2 := 1_X$, obţinem următorul rezultat de stabilitate Ulam-Hyers pentru ecuaţii de punct fix.

Teorema 2.2.4 (O. Mleşniţe [75]). *Fie (X, d) un spaţiu metric şi $f_1, f_2 : X \to X$ doi operatori. Considerăm următoarele ecuaţii de punct fix:*

$$f_1(x) = x, \quad x \in X \tag{2.12}$$

$$f_2(x) = x, \quad x \in X. \tag{2.13}$$

Considerăm mulţimile:

$$F_{i\varepsilon} := \{x \in X | d(f_i(x), x) \leq \varepsilon\}, i = \{1, 2\}.$$

Dacă următoarele condiţii sunt îndeplinite:
(i) $Fix(f_1) = Fix(f_2)$;
(ii) ecuaţia de punct fix (2.13) este Ulam-Hyers stabilă;
(iii) $F_{1\varepsilon} \subseteq F_{2\varepsilon}$, oricare ar fi $\varepsilon > 0$;
atunci ecuaţia de punct fix (2.12) este Ulam-Hyers stabilă.

Dacă presupunem că $X = Y$ şi ρ, d sunt două metrici tare echivalente pe X, atunci obţinem un rezultat de stabilitate Ulam-Hyers pentru ecuaţia de coincidenţă (2.10).

Teorema 2.2.5 (O. Mleşniţe [75]). *Fie X o mulţime nevidă, ρ şi d două metrici tare echivalente. Dacă ecuaţia de coincidenţă (2.10) este Ulam-Hyers stabilă în raport cu metrica d, atunci ea este Ulam-Hyers stabilă în raport cu metrica ρ.*

2.3 Probleme de coincidenţă pentru contracţii generalizate

În această secţiune studiem existenţa, unicitatea şi stabilitatea Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă, extidem rezultatele date în O. Mleşniţe [75] şi dorim să obţinem o generalizare a Teoremei 2.1 din T. Xiang and R. Yuan [130].

În O. Mleşniţe [74] este prezentat următorul rezultat de stabilitate Ulam-Hyers în cazul teoremei de coincidenţă a lui Goebel.

Teorema 2.3.1 (O. Mleşniţe [74]). *Fie $X \neq \emptyset$ o mulţime arbitrară şi fie (Y, ρ) un spaţiu metric. Fie $s, t : X \to Y$ doi operatori astfel încât $s(X) \subset t(X)$ şi $(t(X), \rho)$ este un subspaţiu complet al lui Y. Presupunem că există $0 \leq k < 1$ astfel încât $\rho(s(x), s(y)) \leq k\rho(t(x), t(y))$, oricare ar fi $x, y \in X$. Atunci:*
a) $C(s, t) \neq \emptyset$ (Teorema lui Goebel, vezi [52]);
b) Dacă în plus:

$$\rho(y, s(t^{-1}(y))) \leq \rho(t(y), s(y)), \text{ oricare ar fi } y \in t(X), \tag{2.14}$$

atunci problema de coincidenţă (2.1) este Ulam-Hyers stabilă.

În O. Mleşniţe [77] este prezentat următorul rezultat care extinde Teorema lui Goebel (K. Goebel [52]) considerând condiţia de φ-contracţie a lui s în raport cu t.

Teorema 2.3.2 (O. Mleşniţe [77]). *Fie $X \neq \emptyset$ o mulţime arbitrară şi fie (Y, ρ) un spaţiu metric. Fie $s, t : X \to Y$ doi operatori astfel încât $s(X) \subseteq t(X)$ şi $(t(X), \rho)$ este un subspaţiu complet al lui Y. Presupunem că există funcţia $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare şi $(\varphi^n(t)) \to 0$ când $n \to \infty$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}_+$ astfel încât*

$$\rho(s(x), s(y)) \leq \varphi(\rho(t(x), t(y))), \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

Atunci:

a) $C(s, t) \neq \emptyset$;

b) Dacă în plus există $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, continuă în 0 şi $\psi(0) = 0$ astfel încât:

$$\rho(y, s(t^{-1}(y))) \leq \psi(\rho(t(y), s(y))), \text{ oricare ar fi } y \in t(X), \tag{2.15}$$

atunci problema de coincidenţă (2.1) este $(\beta^{-1} \circ \psi)-$ Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat, unde $\beta(t) := t - \varphi(t)$ este crescătoare şi bijectivă.

În continuare prezentăm rezultatele principale ale acestei secţiuni care extind rezultatele din O. Mleşniţe [75, Teoremele 1.6, 1.8, 1.11, 1.13].

Teorema 2.3.3 (J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49]). *Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice complete. Presupunem că:*

(i) $t : X \to Y$ este un operator expansiv,

(ii) operatorul $s : X \to Y$ este ϕ-contracţie,

(iii) $s(X) \subseteq t(X)$.

Atunci problema de coincidenţă (2.1) are soluţie unică.

În ceea ce priveşte stabilitatea Ulam-Hyers, ideea a fost dată în T. P. Petru, A. Petruşel şi J.-C. Yao [94, Theorem 2.3] ceea ce ne permite să obţinem următorul rezultat.

Teorema 2.3.4 (J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49]). *Fie (X, d), (Y, ρ) două spaţii metrice complete. Presupunem că toate ipotezele Teoremei 2.3.3 au loc şi în plus funcţia $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\beta(r) := r - \phi(r)$ este strict crescătoare şi surjectivă. Atunci problema de coincidenţă (2.1) este Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat.*

Dacă $t : X \to Y$ este dilataţie, atunci t este un operator expansiv. Ca şi consecinţă a Teoremelor 2.3.3 şi 2.3.4, avem:

Corolarul 2.3.1 (J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49]). *Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice complete. Presupunem că operatorul $t : X \to Y$ este dilataţie şi $s : X \to Y$ este ϕ-contracţie cu $s(X) \subseteq t(X)$. Atunci*

1. *problema de coincidenţă (2.1) are soluţie unică.*

2. *Dacă în plus funcţia* $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\beta(r) := r - \phi(r)$ *este strict crescătoare şi bijectivă atunci problema de coincidenţă* (2.1) *este Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat.*

Teorema 2.3.5 (J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49]). *Fie* (X, d) *şi* (Y, ρ) *două spaţii metrice complete. Presupunem că:*

(i) $t : X \to Y$ *este un operator pentru care există o funcţie* $\phi_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, *continuă, crescătoare,* $\phi_1(r) > r$ *şi* $\phi_1(0) = 0$ *care satisface următoarea relaţie:*

$$\rho(t(y), t(z)) \geq \phi_1(d(y, z)), \text{ oricare ar fi} y, z \in X,$$

(ii) operatorul $s : X \to Y$ *este lipschizian cu constanta* $k_s > 0$,
(iii) $s(X) \subseteq t(X)$,
(iv) $r < \phi_1(\frac{r}{k_s})$.
Atunci problema de coincidenţă (2.1) *are soluţie unică.*

Următorul rezultat este o generalizare a Teoremei 2.1 din T. Xiang şi R. Yuan [130].

Corolarul 2.3.2 (J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49]). *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $t : X \to X$ *un operator surjectiv care satisface condiţia* (*i*) *a Teoremei 2.3.5. Atunci el are un punct fix unic.*

Teorema 2.3.6 (J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49]). *Fie* (X, d) *şi* (Y, ρ) *două spaţii metrice complete. Presupunem că operatorul* $t : X \to Y$ *este expansiv şi operatorul* $s : X \to Y$ *este contracţie separată şi* $s(X) \subseteq t(X)$. *Atunci*

(i) Dacă φ *este nedescrescătoare atunci problema de coincidenţă* (2.1) *are soluţie unică.*

(ii) Dacă ψ *este surjectivă, problema de coincidenţă* (2.1) *este Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat.*

Observaţia 2.3.1. *Alte rezultate despre stabilitatea Ulam-Hyers pentru probleme de punct fix folosind contracţii generalizate (adică* $\alpha - \psi$*-contracţii) în spaţii (b)-metrice sunt prezentate în M.-F. Bota, E. Karapinar şi O. Mleşniţe [20].*

2.4 Rezultate de coincidenţă prin teoreme de punct fix în spaţii metrice generalizate

În această secţiune sunt prezentate rezultate de existenţă, unicitate şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de punct fix şi probleme de coincidenţă cu operatori univoci în spaţii metrice generalizate. Alte contribuţii pe această temă se găsesc în lucrări precum R. P. Agarwal [1], A. Bucur, L. Guran şi A. Petruşel [27], A. D. Filip şi A. Petruşel [43], D. O'Regan, N. Shahzad şi R. P. Agarwal [85], R. Precup [97], R. Precup şi A. Viorel [98], [99].

Următoarea teoremă este o extensie a Teoremei lui Perov. În acelaşi timp, acest rezultat este o generalizare a teoremei principale din M. Berinde şi V. Berinde [17] în spaţii metrice generalizate.

Teorema 2.4.1 (A. Petruşel, O. Mleşniţe şi C. Urs [93]). *Fie (X, d) un spaţiu metric complet generalizat şi fie $f : X \to X$ o (A, B, C, D)-contracţie, adică, $A, B, C, D \in M_{mm}(\mathbb{R}_+)$ sunt astfel încât matricile D şi $M := (I - D)^{-1}(A + C)$ converg la zero şi*

$$d(f(x), f(y)) \leq Ad(x, y)+Bd(y, f(x))+Cd(x, f(x))+Dd(y, f(y)), \text{ oricare ar fi } x, y \in X.$$

Atunci au loc următoarele condiţii:

(1) f are cel puţin un punct fix şi oricare ar fi $x_0 \in X$, şirul $x_n := f^n(x_0)$ al aproximaţiilor succesive al lui f pornind din x_0 converge la $x^*(x_0) \in Fix(f)$, când $n \to \infty$;

(2) Pentru orice $x_0 \in X$ avem

$$d(x_n, x^*(x_0)) \leq M^n(I - M)^{-1}d(x_0, f(x_0)), \text{ oricare ar fi } n \in \mathbb{N}$$

şi

$$d(x_0, x^*(x_0)) \leq (I - M)^{-1}d(x_0, f(x_0));$$

(3) Dacă, în plus, matricea $A + B$ converge la zero, atunci f are punc fix unic în X.

Observaţia 2.4.1. *În particular, dacă $B = C = D = O_{mm}$ (unde O_{mm} este matricea nulă din $M_{mm}(\mathbb{R}_+)$), atunci obţinem rezultatul clasic al lui Perov, vezi Teorema 1.2.1.*

Introducem metrica vectorială de tip Perov. Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice. Fie $Z := X \times Y$ şi definim pe $Z \times Z$ metrica vectorială $d^V : Z \times Z \to \mathbb{R}^2_+$ prin

$$d^V(x, u) = d^V((x_1, x_2), (u_1, u_2)) = (d(x_1, u_1), \rho(x_2, u_2)), \tag{2.16}$$

oricare ar fi $x = (x_1, x_2), u = (u_1, u_2) \in Z$.

Un rezultat principal al acestei secţiuni este următorul:

Teorema 2.4.2 (O. Mleşniţe [75]). *Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice complete. Presupunem că operatorul $t : X \to Y$ este dilataţie cu constanta $k_t > 0$, operatorul $s : X \to Y$ este Lipschitz cu constanta $k_s > 0$ şi $s(X) \subseteq t(X)$. Dacă $\frac{k_s}{k_t} \in [0, 1)$, atunci problema de coincidenţă (2.1) are soluţie unică.*

Următorul rezultat este unul de aproximare şi de estimare a erorii pentru soluţia problemei de coincidenţă.

Teorema 2.4.3 (O. Mleşniţe [75]). *Fie $(X, d), (Y, \rho)$ două spaţii metrice complete. Presupunem că toate ipotezele Teoremei 2.4.2 au loc şi în plus presupunem că $t : X \to Y$ este metric regular pe X cu constanta $\alpha > 0$. Atunci problema de coincidenţă (2.1) este Ulam-Hyers stabilă.*

2.5 O condiţie Leray-Schauder pentru problemele de coincidenţă

Primul pas în extinderea Teoremei lui Schauder la operatori care nu sunt compacţi a fost făcut de către G. Darbo [36] în 1955. Prima măsură de necompactitate a fost definită de către K. Kuratowski [67] în 1930. Darbo foloseşte acestă măsură pentru a generaliza Teorema lui Schauder pentru o clasă mai largă de operatori, numită clasa operatorilor k-contracţie de mulţimi, care satisface condiţia: $\alpha(T(A)) \leq k\alpha(A)$ pentru $k \in [0, 1)$. În 1967, B. N. Sadovskii [117], generalizează Teorema lui Darbo pentru mulţime de operatori condensatori.

Măsurile de necompactitate sunt utile în teoria ecuaţiilor cu operatori în spaţii Banach. S-au scris multe lucrări pe această temă, de exemplu: R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina şi B. N. Sadovskii, [3], J. Banaś şi K. Goebel [14], V. I. Istrăţescu [61], [62], J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez-Benavides şi G. Lopez Acedo [13], W. Zhao [134], etc.

În această secţiune prezentăm rezultate, fară a folosi teoria gradului, pentru probleme de coincidenţă, unde s şi t pot fi operatori neliniari.

Definiţia 2.5.1. *Fie X un spaţiu normat şi $\mathcal{B}(X) := \{A \subset X : A \text{ este mărginită } \}$. O măsură de necompactitate este o funcţie $\mu : \mathcal{B}(X) \to \mathbb{R}^+$ care satisface condiţiile:*

1. $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \overline{A}$ *este compactă.*
2. $\mu(A) = \mu(\overline{A})$.
3. $\mu(A \cup B) = \max\{\mu(A), \mu(B)\}$
4. $\mu(conv(A)) = \mu(A)$.

Pentru a evita confuzia atunci când folosim spaţii diferite, vom adăuga, în unele cazuri, numele subspaţiului ca şi indice.

Punctul 3 din ultima definiţie implică faptul că $\mu(A) \leq \mu(B)$, când $A \subset B$.

Câteva măsuri uzuale de necompactitate sunt următoarele:

Definiţia 2.5.2. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat. Măsura de nocompactitate a lui Kuratowski pentru o submulţime mărginită A a lui X este dată prin*

$$\alpha(A) = \inf \{r > 0 : A \subset \cup_{i=1}^n D_i,\ diam(D_i) \leq r\}.$$

Definiţia 2.5.3. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu normat. Măsura de necompactitate a lui Hausdorff pentru o submulţime mărginită A a lui X este dată prin*

$$\chi(A) = \inf \{r > 0 : A \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, r), x_i \in X\}.$$

O prezentare detaliată a teoriei şi aplicaţiilor măsurilor de necompactitate pot fi găsite în monografiile R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina şi B. N. Sadovskii [3], J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez-Benavides şi G. Lopez Acedo [13].

Definiţia 2.5.4. *Fie* $(X, \|\cdot\|_X)$ *şi* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *două spaţii normate înzestrate cu măsurile de necompactitate* μ_X *şi, respectiv,* μ_Y. *Dacă* C *este o submulţime nevidă a lui* X *şi* $T : C \to Y$ *este un operator, atunci*

(a) Pentru $k > 0$*, operatorul* T *se numeşte* (μ_X, μ_Y)*-*k *contracţie de mulţimi dacă* $\mu_Y(T(A)) \leq k\mu_X(A)$*, oricare ar fi* $A \in \mathcal{B}(C)$*.*

(b) Operatorul T *se numeşte* (μ_X, μ_Y)*-condensator dacă* $\mu_Y(T(A)) < \mu_X(A)$ *pentru orice submulţime mărginită* A *a lui* C *cu* $\mu_X(A) > 0$*.*

(c) Operatorul T *se numeşte expansiv dacă inegalitatea* $\|T(x) - T(y)\|_Y \geq \|x - y\|_X$ *are loc, oricare ar fi* $x, y \in C$*.*

(d) Operatorul T *se numeşte neexpansiv dacă inegalitatea* $\|T(x)-T(y)\|_Y \leq \|x-y\|_X$ *are loc, oricare ar fi* $x, y \in C$*.*

(e) Operatorul T *se numeşte mărginit dacă există* $k > 0$ *astfel încât* $\|T(x)\|_Y \leq k$*, oricare ar fi* $x \in C$*.*

Următoarea teoremă a fost demonstrată în 1967 de către B. N. Sadovskii [117], ea este o generalizare a teoremei de punct fix a lui G. Darbo [36]. În lucrarea lui J. Appel [5], cititorul poate găsi aplicaţii ale acestor teoreme.

Teorema 2.5.1 (B. N. Sadovskii [117])**.** *Presupunem că* C *este o submulţime închisă, convexă a spaţiului Banach* X *şi* $T : C \to C$ *un operator continuu şi condensator, atunci* T *are un punct fix.*

Când domeniul C, în teorema lui Sadovskii, este nemărginit se obţine următorul rezultat.

Teorema 2.5.2 (J. Garcia-Falset [46])**.** *Presupunem că* C *este o submulţime închisă, convexă şi nemărginită a spaţiului Banach* X *şi* $T : C \to C$ *un operator continuu şi condensator. Dacă există* $R > 0$ *şi* $z \in C$ *astfel încât oricare ar fi* $u \in C \cap S_R(z)$

$$T(u) - z \neq \lambda(u - z), \qquad \forall\lambda > 1,$$

atunci T *are un punct fix.*

Reamintim următoarea teoremă demonstrată de W. V. Petryshyn în [95].

Teorema 2.5.3 (W. V. Petryshyn [95]). *Presupunem că U este o submulţime deschisă, mărginită a spaţiului Banach X şi $T : \overline{U} \to X$ un operator continuu şi condensator. Dacă există $z \in U$ astfel încât oricare ar fi $u \in \partial U$*

$$u \neq \lambda T(u) + (1-\lambda)z, \qquad \forall \lambda \in (0,1),$$

atunci T are un punct fix.

Fie $T : X \to Y$ un operator care transformă submulţimi mărginite ale lui X în submulţimi mărginite ale lui Y. Pentru un astfel de operator, definim

$$l(T) := \sup\{r > 0 : r\mu_X(A) \leq \mu_Y(T(A)), A \in \mathcal{B}(X)\}.$$

În ceea ce urmează folosim măsura de necompactitate a lui Kuratowski. Presupunem că $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ sunt spaţii normate şi dacă operatorul $T : C \to Y$ este (α_X, α_Y)-condensator atunci vom spune simplu că T este α-condensator.

În continuare ne propunem să stabilim rezultate de coincidenţă folosind Teorema 2.5.2.

Teorema 2.5.4 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50]). *Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ două spaţii Banach. Considerăm C o submulţime convexă şi închisă a mulţimii X astfel încât operatorii $t : C \to Y$ şi $s : C \to Y$ satisfac condiţiile:*

1. *$\overline{t(C)}$ este o submulţime convexă a lui Y şi $t^{-1} : t(C) \to C$ este uniform continuu pe submulţimi mărginite ale lui $t(C)$,*
2. *s este un operator continuu şi k-contracţie de mulţimi,*
3. *$s(C) \subseteq t(C)$,*
4. *$k < l(t)$,*
5. *Există $R > 0$ şi $x_0 \in C$ astfel încât oricare ar fi $x \in C$ cu $\|x - x_0\| \geq R$ avem*

$$s(x) - t(x_0) \neq \lambda(t(x) - t(x_0)) \qquad \forall \lambda > 1. \tag{2.17}$$

Atunci există $z \in C$ astfel încât $s(z) = t(z)$.

Corolarul 2.5.1 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50]). *Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spaţii Banach şi fie $t : X \to Y$ un operator continuu şi inversabil şi C o submulţime închisă şi convexă a lui X. Fie $s : C \to Y$ un operator continuu şi k-contracţie de mulţimi cu $k < l(t)$ şi care satisface relaţia $s(C) \subset t(C)$. Dacă există $R > 0$ şi $x_0 \in C$ astfel încât*

$$x \in C, \|x - x_0\|_X \geq R \Rightarrow s(x) - t(x_0) \neq \lambda(t(x) - t(x_0)) \qquad \forall \lambda > 1,$$

atunci există $z \in C$ astfel încât $s(z) = t(z)$.

Următorul rezultat poate fi considerat o generalizare a Teoremei 2.5.3.

Teorema 2.5.5 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50]). *Fie X un spaţiu normat şi fie Y un spaţiu Banach. Presupunem că U este o submulţime mărginită şi deschisă a lui X, $t : \overline{U} \to Y$ un operator expansiv astfel încât $t(U)$ este o submulţime mărginită şi deschisă a lui Y cu $\partial(t(U)) \subset t(\partial U)$ şi $s : \overline{U} \to Y$ este un operator continuu şi condensator. Dacă există $x_0 \in U$ astfel încât oricare ar fi $x \in \partial U$*

$$t(x) \neq \lambda s(x) + (1-\lambda)t(x_0) \qquad \forall \lambda \in (0,1) \tag{2.18}$$

atunci există $z_0 \in Y$ astfel încât $t(z_0) = s(z_0)$.

Corolarul 2.5.2 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50]). *Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ două spaţii Banach şi fie $t : X \to Y$ un operator continuu, expansiv, inversabil, afin şi U o submulţime deschisă, mărginită a lui X. Fie $s : \overline{U} \to Y$ un operator condensator continuu. Dacă există $x_0 \in U$ astfel încât oricare ar fi $x \in \partial U$,*

$$t(x) \neq \lambda s(x) + (1-\lambda)t(x_0) \qquad \forall \lambda \in (0,1),$$

atunci există $z \in \overline{U}$ astfel încât $s(z) = t(z)$.

Capitolul 3

Teoreme de coincidenţă pentru operatori multivoci

Scopul acestui capitol este de a prezenta rezultate de existenţă, metric regularitate şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de punct fix şi probleme de coincidenţă cu operatori multivoci. Această abordare se bazează pe tehnica operatorului Picard în contextul spaţiilor metrice generalizate în sens Perov, adică spaţii înzestrate cu o metrică vectorială $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$. Folosind tehnica produsului cartezian pentru doi operatori multivoci, aceste rezultate extind rezultatele existente în literatură precum M. Bota şi A. Petruşel [21], T. P. Petru, A. Petruşel şi J.-C. Yao [94], I. A. Rus [108].

Fie (X, d) un spaţiu metric, Y o mulţime nevidă şi $S, T : X \to P(Y)$ doi operatori multivoci. Un element $x^* \in X$ este punct de coincidenţă pentru S şi T dacă $S(x^*) \cap T(x^*) \neq \emptyset$. Notăm prin $C(S, T)$ mulţimea tuturor punctelor de coincidenţă pentru S şi T.

Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice şi $S, T : X \to P(Y)$ doi operatori multivoci. Fie d_Z o metrică scalară tradiţională pe $X \times Y$. Considerăm următoarea problemă de coincidenţă cu operatori multivoci:

$$\text{să se găsească } (x, y) \in X \times Y \text{ astfel încât } y \in S(x) \cap T(x). \tag{3.1}$$

Prin definiţie, o soluţie pentru problema de coincidenţă (3.1) este perechea $(x^*, y^*) \in X \times Y$ astfel încât

$$y^* \in T(x^*) \cap S(x^*).$$

Notăm prin $CP(S, T) \subset X \times Y$ mulţimea tuturor soluţiilor pentru problema de coincidenţă pentru S şi T.

Este binecunoscut faptul că problema de coincidenţă este, în anumite condiţii, echivalentă cu o problemă de punct fix pentru operatori multivoci generată de s şi t.

Stabilitate Ulam-Hyers pentru problema de coincidenţă (3.1):

Fie (X, d), (Y, ρ) două spaţii metrice şi $S, T : X \to Y$ doi operatori multivoci. Problema de coincidenţă (3.1) se numeşte Ulam-Hyers stabilă în sens generalizat dacă şi numai dacă există $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ crescătoare, continuă în 0 şi $\psi(0) = 0$ astfel încât oricare ar fi $\varepsilon > 0$ şi pentru orice $w^* \in X$ soluţie aproximativă a problemei de coincidenţă, adică

$$D_\rho(S(w^*), T(w^*)) \leq \varepsilon \tag{3.2}$$

atunci există z^* soluţie pentru (3.1) astfel încât

$$d_Z(w^*, z^*) \leq \psi(\varepsilon). \tag{3.3}$$

Dacă există $c > 0$ astfel încât $\psi(t) = ct$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}_+$, atunci problema de coincidenţă (3.1) este Ulam-Hyers stabilă.

Pentru stabilitatea Ulam-Hyers a ecuaţiilor diferenţiale şi integrale, vezi L.P. Castro şi A. Ramos [31], S.-M. Jung [63], I.A. Rus [110], [111], în timp ce pentru stabilitatea Ulam-Hyers pentru probleme de punct fix în spaţii metrice, a se vedea I.A. Rus [108], M. Bota şi A. Petruşel [21], P.T. Petru, A. Petruşel şi J.C. Yao [94].

3.1 Metric regularitate şi rezultate de stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă

În general, metric regularitatea se face cu studiul ecuaţiei de tipul $y \in F(x)$, unde $y \in X$ este fixat, pentru un operator multivoc $F : X \to P(Y)$. Mulţi autori au obţinut rezultate în domeniul metric regularităţii printre care amintim A. L. Dontchev, A. S. Lewis şi R. T. Rockafellar [40], A. L. Dontchev şi A. S. Lewis [42], A. D. Ioffe [59], [60], L. A. Lyusternik [71] şi alţii. Un punct x este o soluţie aproximativă pentru ecuaţia generalizată $y \in F(x)$ dacă distanţa de la punctul y la mulţimea $F(x)$ este mică.

Fie $F : X \to P(Y)$ un operator multivoc între spaţiile metrice (X, d) şi (Y, d) şi $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ submulţimi date. Conform cu A. D. Ioffe [59] şi B. S. Mordukhovich [80], F se numeşte *învelitoare deschisă* în raport cu $U \times V$ dacă există o constantă pozitivă a astfel încât

$$F(B(x, r)) \supseteq B(F(x) \cap V, ar), \text{ oricare ar fi } x \in U, r > 0 : B(x, r) \subseteq U. \tag{3.4}$$

Supremumul tuturor constantelor care satisfac incluziunea (3.4) se numeşte *modulul învelitorii deschise* al lui F în raport cu $U \times V$ şi se notează prin $cov_{U\times V}F$.

Metric regularitatea ia forma unei inegalităţi provenind din estimarea a cât de departe este x faţă de o soluţie generală a ecuaţiei $y \in F(x)$. În majoritatea teoremelor din calculul subdiferenţial condiţiile apar asupra regularităţii/învelitoare deschisă pentru operatori multivoci, a se vedea A. D. Ioffe [59] şi B. S. Mordukhovich [80].

Noţiunea de învelitoare deschisă în sens global se obţine pentru $U = X$ şi $V = Y$.

Definiţia 3.1.1 (A. D. Ioffe [59]). *Un operator multivoc $F : X \to P(Y)$ între spaţiile metrice (X, d) şi (Y, d) acoperă pe X dacă există o constantă $a > 0$ astfel încât*

$$F(B(x, r)) \supseteq B(F(x), ar), \text{ oricare ar fi } x \in X, r > 0. \tag{3.5}$$

Supremumul tuturor valorilor a care satisfac incluziunea (3.5) *se numeşte modulul învelitorii globale al lui F şi se notează pe scurt prin $cov(F)$ (în loc de $cov_{X\times Y}F$).*

Observaţia 3.1.1 (A. Uderzo [123])**.**

(i) Proprietatea de învelitoare deschisă a operatorilor multivoci admite câteva formulări utile. Se ştie că un operator F îndeplineşte condiţiile Definiţiei 3.1.1 dacă şi numai dacă există $l > 0$ astfel încât

$$D(x, F^{-1}(y)) \leq lD(y, F(x)), \text{ oricare ar fi } x \in X, y \in Y. \tag{3.6}$$

Infimumul tuturor valorilor l care satisfac inegalitatea (3.6) se numşte modulul metric regularităţii globale al lui F şi se notează prin $reg(F)$.

(ii) O altă caracterizare a învelitorii deschise / metric regularităţii poate fi obţinută în ceea ce priveşte comportamentu Lipschitz al operatorului invers. De fapt, F acoperă pe X dacă şi numai dacă F^{-1} este Lipschitz continuu în Y şi are loc:

$$lip(F^{-1}) = \frac{1}{cov(F)}.$$

În plus, presupunem că T şi S sunt surjectivi şi considerăm $F : X \times Y \to P(X) \times P(Y)$ definită prin $F(x, y) = T^{-1}(y) \times S(u)$. Deducem că $F^{-1} : X \times Y \to P(X) \times P(Y)$ este definită prin $F^{-1}(u, v) = S^{-1}(v) \times T(u)$.

Lema 3.1.1 (O. Mleşniţe şi A. Petruşel [76])**.** *În condiţiile de mai sus, avem:*

$$CP(S, T) = Fix(F) = Fix(F^{-1}).$$

Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice şi următoarele două metrici pe $X \times Y$:

$$d^*((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2), \text{ oricare ar fi } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$$

$$d_*((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d(x_1, x_2), \rho(y_1, y_2)\}, \text{ oricare ar fi } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y.$$

Notăm prin H_{d^*} şi H_{d_*} funcţionalele Hausdorff-Pompeiu pe $P(X \times Y)$ generate de d^* şi respectiv d_*.

Următoarele rezultate principale sunt generalizări ale teoremelor principale din lucrarea A. V. Blaga [19].

Teorema 3.1.1 (O. Mleşniţe [79])**.** *Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice complete. Fie $T, S : X \to P(Y)$ doi operatori multivoci surjectivi, astfel încât:*

(i) $T : X \to P_{cl}(Y)$ este contracţie cu constanta $k_T < 1$;

(ii) $S : X \to P(Y)$ este metric regulară pe X cu constanta $k_S \in (0, 1)$ şi $S^{-1}(y)$ este închisă pentru orice $y \in Y$.

Atunci există cel puţin o soluţie pentru problema de coincidenţă cu operatori multivoci (3.1).

Dacă , în plus, S^{-1} *şi* T *au valori compacte atunci problema* (3.1) *este Ulam-Hyers stabilă.*

Teorema 3.1.2 (O. Mleşniţe [79]). *Fie* (X,d) *şi* (Y,ρ) *două spaţii metrice complete. Fie* $T,S : X \to P(Y)$ *doi operatori multivoci surjectivi, astfel încât:*

(i) $T : X \to P_{cl}(Y)$ *satisface relaţia:*

$$\exists\, k_T > 2 \text{ astfel încât } D_\rho(x, T^{-1}(y)) \geq k_T{\cdot}D_d(y, T(x)), \text{ oricare ar fi } (x,y) \in X{\times}Y;$$

(ii) $S : X \to P(Y)$ *este metric regulară pe* X *cu constanta* $k_S \in (0, \frac{1}{2})$ *şi* $S^{-1}(y)$ *este închisă, pentru orice* $y \in Y$*;*

(iii) $(x,y) \in X \times Y$ *dacă şi numai dacă* $(y,x) \in X \times Y$.

Atunci există cel puţin o soluţie pentru problema de coincidenţă cu operatori multivoci (3.1).

Dacă, în plus S^{-1} *şi* T *au valori compacte atunci problema* (3.1) *este Ulam-Hyers stabilă.*

3.2 Rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă

În această secţiune vom prezenta rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de coincidenţă cu operatori multivoci folosind tehnica operatorilor Picard. Aceste rezultate se bazează pe următoarele lucrări: W. A. Kirk şi B. Sims [65], O. Mleşniţe şi A. Petruşel [76], A. Petruşel [90], I. A. Rus [108], [102], I.A. Rus, A. Petruşel şi A. Sîntămărian [115]

Fie (X,d) şi (Y,ρ) două spaţii metrice şi considerăm următoarele două spaţii metrice pe $X \times Y$:

$$d^*((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := d(x_1,x_2) + \rho(y_1,y_2), \text{ oricare ar fi } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y$$

$$d_*((x_1,y_1),(x_2,y_2)) := \max\{d(x_1,x_2), \rho(y_1,y_2)\}, \text{ oricare ar fi } (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in X \times Y.$$

Notăm prin H_{d^*} şi H_{d_*} funcţionalele Hausdorff-Pompeiu pe $P(X \times Y)$ generate de d^* şi respectiv d_*.

Teorema 3.2.1 (O. Mleşniţe şi A. Petruşel [76]). *Fie* (X,d) *şi* (Y,ρ) *două spaţii metrice complete. Fie* $T,S : X \to P(Y)$ *doi operatori multivoci astfel încât:*

(i) $T : X \to P(Y)$ *este operator surjectiv,* k_T*- tare dilataţie cu constanta* $k_T > 1$ *şi* $T^{-1}(y)$ *este închisă oricare ar fi* $y \in Y$*;*

(ii) $S : X \to P_{cl}(Y)$ *este* k_S*-contracţie.*

Atunci există cel puţin o soluţie pentru problema de coincidenţă cu operatori multivoci (3.1).
Dacă, în plus operatorii multivoci S *şi* T^{-1} *au valori compacte şi* T *este metric regular pe* X *cu constanta* $l > 0$ *atunci problema de coincidenţă multivocă (3.1) este Ulam-Hyers stabilă.*

Observaţia 3.2.1. *Un rezultat similar se obţine dacă înlocuim, în demonstraţia teoremei anterioare, metrica* d^* *cu* d_* *şi* H_{d^*} *cu* H_{d_*}.

În continuare prezentăm rezultate legate de dependenţa de date pentru stabilitatea Ulam-Hyers a problemei de coincidenţă pentru două perechi de operatori multivoci.

Teorema 3.2.2 (O. Mleşniţe şi A. Petruşel [76])**.** *Fie* (X, d) *şi* (Y, ρ) *două spaţii metrice şi* $T_i, S_i : X \to P(Y)$, $i \in \{1, 2\}$ *patru operatori multivoci. Considerăm următoarele probleme de coincidenţă cu operatori multivoci:*

$$T_1(x) \cap S_1(x) \neq \emptyset \tag{3.7}$$

şi

$$T_2(x) \cap S_2(x) \neq \emptyset. \tag{3.8}$$

Considerăm mulţimile:

$$C_{i\varepsilon} := \{x \in X | D_\rho(T_i(x), S_i(x)) \leq \varepsilon\}, i \in \{1, 2\}.$$

Dacă au lor următoarele condiţii:
(i) $C(T_2, S_2) \subseteq C(T_1, S_1)$;
(ii) problema de coincidenţă multivocă (3.8) *este Ulam-Hyers stabilă;*
(iii) $C_{1\varepsilon} \subseteq C_{2\varepsilon}$, *oricare ar fi* $\varepsilon > 0$;
atunci, problema de coincidenţă multivocă (3.7) *este Ulam-Hyers stabilă.*

3.3 Rezultate de coincidenţă prin teoreme de punct fix în spaţii metrice generalizate

Scopul acestei secţiuni este de a prezenta rezultate de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru probleme de punct fix şi probleme de coincidenţă cu operatori multivoci. Această abordare este bazată pe tehnica operatorilor Picard în contextul spaţiilor metrice generalizate în sens Perov, adică, spaţii înzestrate cu metrica vectorială $d : X \times X \to \mathbb{R}^m_+$. Folosind tehnica produsului cartezian pentru doi operatori multivoci, aceste rezultate îmbunătăţesc teoremele existente în literatură, vezi M. Bota şi A. Petruşel [21], T. P. Petru, A. Petruşel şi J.-C. Yao [94], I. A. Rus [108], [110], [111].

Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice. Fie $Z := X \times Y$ şi definim pe $Z \times Z$ metrica vectorială $d^V(u, v) := \begin{pmatrix} d(u_1, v_1) \\ \rho(u_2, v_2) \end{pmatrix}$, oricare ar fi $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2) \in Z$.

Considerăm funcţionala de tip Hausdorff-Pompeiu $H^* : (P(X) \times P(Y)) \times (P(X) \times P(Y)) \to \mathbb{R}^2_+$ dată prin

$$H^*(A \times B, U \times V) := \begin{pmatrix} H_d(A, U) \\ H_\rho(B, V) \end{pmatrix}.$$

Conform definiţiei, rezultă că H^* este o metrică vectorială pe $P_{cl}(X) \times P_{cl}(Y)$.

Următorul rezultat este unul de existenţă şi stabilitate Ulam-Hyers pentru problemele de coincidenţă.

Teorema 3.3.1 (O. Mleşniţe şi A. Petruşel [76]). *Fie (X, d) şi (Y, ρ) două spaţii metrice complete. Fie $T, S : X \to P(Y)$ doi operatori multivoci astfel încât:*

(i) $T : X \to P(Y)$ este un operator surjectiv, k_T- tare dilataţie şi $T^{-1}(y)$ este închisă oricare ar fi $y \in Y$;

(ii) $S : X \to P_{cl}(Y)$ este k_S-Lipschitz;

(iii) $\frac{k_S}{k_T} < 1$.

Atunci există cel puţin o soluţie pentru problema de coincidenţă (3.1).
Dacă, în plus operatorii multivoci S, T^{-1} au valori compacte şi T este metric regular pe X cu constanta $l > 0$, atunci problema de coincidenţă multivocă (3.1) este Ulam-Hyers v-stabilă.

3.4 O condiţie Leray-Schauder pentru problemele de coincidenţă

În această secţiune stabilim rezultate pentru probleme de coincidenţă cu operatori multivoci folosind condittii de tip Leray-Schauder type şi Teorema 2.5.2. Aceste rezultate au la bază următoarele lucrări: V. Barbu [15], J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50].

Definiţia 3.4.1. *Un operator $F \subset X \times X$ se numeşte acretiv dacă şi numai dacă $\|x - y\| \le \|x - y + \lambda(u - v)\|$, oricare ar fi $x, y \in Dom(F)$, $u \in F(x)$, $v \in F(y)$ şi $\lambda > 0$. Dacă, în plus, $R(F + I) = X$, spunem că F este m-acretiv.*

Mai multe detalii şi aplicaţii despre operatorii acretivi se pot găsi, de exemplu, în monografia V. Barbu [15].

Teorema 3.4.1 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50]). *Fie X un spaţiu normat şi fie Y un spaţiu Banach. Considerăm o mulţime nevidă D a lui X. Presupunem că $t : D \to P(Y)$ este un operator multivoc şi $s : D \to Y$ este un operator care satisface condiţiile:*

1. *$R(t) = Y$ şi $t^{-1} : Y \to D$ este un operator univoc continuu şi compact,*

2. *s este un operator continuu şi duce submulţimi mărginite în submulţimi mărginite,*

3. *Există $R > 0$ astfel încât*

$$\|x\|_X \geq R,\ x \in D \quad \Rightarrow \quad \lambda s(x) \notin t(x) \quad \forall \lambda \in (0, 1). \tag{3.9}$$

Atunci există $x_0 \in D$ cu $s(x_0) \in t(x_0)$.

Corolarul 3.4.1 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50]). *Fie X un spaţiu Banach şi $F : Dom(F) \to P(X)$ un operator m-acretiv astfel încât $0 \in F(0)$ şi $s : Dom(F) \to X$ un operator continuu. Presupunem că următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

1. *J_λ^F este compact,*

2. *există $R > 0$ astfel încât $\|s(x)\| \leq a + b\|x\|$, când $x \in Dom(F)$ cu $\|x\| \geq R$.*

Atunci pentru $\rho > b$ există $x_0 \in Dom(F)$ astfel încât $s(x_0) \in \rho x_0 + F(x_0)$.

Următorul rezultat are loc în cazul operatorilor condensatori, dar care nu sunt neapărat operatori k-contracţie de mulţimi. Exemple de astfel de operatori se găsesc în J. Appel [5], J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez-Benavides şi G. Lopez Acedo [13].

Teorema 3.4.2 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50]). *Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spaţiu normat şi fie $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un spaţiu Banach. Presupunem că $t : X \to P(Y)$ este un operator multivoc cu $R(t) = Y$ astfel încât $t^{-1} : Y \to X$ este un operator univoc neexpansiv şi $s : Dom(t) \to Y$ este un operator continuu, α-condensator pentru care există $R > 0$ şi $y_0 \in Y$ astfel încât*

$$\|x - t^{-1}y_0\|_X \geq R \Rightarrow \mu s(x) + (1 - \mu)y_0 \notin t(x) \qquad \forall \mu \in (0, 1). \tag{3.10}$$

Atunci există $x_0 \in X$ astfel încât $s(x_0) \in t(x_0)$.

Corolarul 3.4.2 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50]). *Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spaţiu normat şi fie $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un spaţiu Banach. Presupunem că $t : X \to Y$ este un operator expansiv şi surjectiv şi $s : X \to Y$ este un operator continuu, mărginit şi α-condensator. Atunci există $x_0 \in X$ astfel încât $s(x_0) = t(x_0)$.*

Corolarul 3.4.3 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50]). *Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ un spaţiu normat şi fie $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un spaţiu Banach. Presupunem că $t : X \to Y$ este un operator expansiv şi surjectiv şi $s : X \to Y$ un operator continuu, α-condensator pentru care există $R > 0$ şi $y_0 \in Y$ astfel încât*

$$\|x - t^{-1}y_0\|_X \geq R \Rightarrow \|s(x) - y_0\|_Y \leq \|x - t^{-1}(y_0)\|_X. \tag{3.11}$$

Atunci există $x_0 \in X$ astfel încât $s(x_0) = t(x_0)$.

Capitolul 4

Aplicaţii

Scopul acestui capitol este de a prezenta câteva aplicaţii ale rezultatelor prezentate în această teză. În primul rând este dată o aplicaţie în ceea ce priveşte stabilitatea Ulam-Hyers pentru ecuaţii diferenţiale şi incluziuni operatoriale, după care se studiază existenţa soluţiilor clasice şi tari pentru ecuaţiile diferenţiale de ordinul întâi şi doi.

Câteva referinţe folosite în dezvoltarea acestui capitol sunt: J. Appell şi P.P. Zabrejko [6], H. Brezis şi W. Strauss [23], J. Garcia-Falset [47], J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49], J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50], K. Goebel [52], O. Mleşniţe [74], [77]

4.1 Stabilitate Ulam-Hyers pentru ecuaţii diferenţiale

În această secţiune, stabilim noi rezultate de existenţă, unicitate şi stabilitate Ulam-Hyers pentru ecuaţii diferenţiale. În acest caz, următoarea teoremă este o aplicaţie a Teoremelor 2.3.3 şi 2.3.4.

Aplicaţia 1.(J. Garcia-Falset şi O. Mleşniţe [49]) Considerăm ecuaţia diferenţială

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \\ u(0) = \xi \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.1}$$

unde $f : [0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface următoarele condiţii:

- (i) $f(t, \cdot)$ este o funcţie continuă pentru aproape toţi $t \geq 0$;
- (ii) $f(\cdot, u)$ este o funcţie măsurabilă pentru orice $u \in \mathbb{R}$;
- (iii) Inegalitatea Lipschitz, adică, $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L(t)|x - y|$, unde $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ este o funcţie local integrabilă pe intervalul $(0, \infty)$;
- (iv) $\int_0^t f(\tau, 0)d\tau = O(e^{\int_0^t L(\tau)d\tau}) := \{u \in C([0, \infty)) \ : \ |u(t)| \leq Me^{\int_0^t L(\tau)d\tau} + N\}$.

Atunci ecuaţia (4.1) are soluţie unică u_ξ pentru orice $\xi \in \mathbb{R}$,

$$u_\xi \in C([0,+\infty)) := \{u : [0,+\infty) \to \mathbb{R} \text{ continuă }\},$$

şi, mai mult, ea este Ulam-Hyers stabilă.

Considerăm mulţimile

$$X = \{u \in C([0,+\infty)) \mid u(t) = O(e^{\int_0^t L(\tau)d\tau})\},$$

şi metrica $d_p : X \times X \to \mathbb{R}^+$ definită prin $d_p(u,v) = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} \{|u(t)-v(t)| \cdot e^{-p\int_0^t L(\tau)d\tau}\}$ unde $p > 1$, $Y = BC([0,+\infty))$ este mulţimea funcţiilor continue şi mărginite pe $[0,+\infty)$ şi înzestrăm această mulţime cu metrica $\rho : Y \times Y \to \mathbb{R}^+$ definită prin $\rho(u,v) = \|u-v\|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} |u(t)-v(t)|$. În acest caz (Y,ρ) este un spaţiu metric complet.

Avem: (X, d_p) şi (Y, ρ) sunt spaţii metrice complete.

Definim operatorii $T, S : X \to Y$ prin

$$Tu(t) = u(t) \cdot e^{-p\int_0^t L(\tau)d\tau} \quad \text{şi} \quad Su(t) = \left\{\int_0^t f(\tau, u(\tau))d\tau + \xi\right\} e^{-p\int_0^t L(\tau)d\tau}.$$

Ecuaţia (4.1) poate fi scrisă ca şi o problemă de coincidenţă astfel:

$$\text{să se găsească } u \in X \text{ astfel încât } Tu = Su. \tag{4.2}$$

T şi S satisfac ipotezele Teoremei 2.3.3, deci problema de coincidenţă (4.2) are soluţie unică în X, ceea ce înseamnă că există $\bar{x} \in X$ astfel încât $S(\bar{x}) = T(\bar{x})$.

Pentru cea de-a doua concluzie, dacă definim $\beta(r) := r - \dfrac{r}{p}$ $(p > 1)$ şi ţinând cont că β este o funcţie continuă strict crescătoare, $\lim\limits_{r\to 0^+} \beta(r) = 0$ şi $\lim\limits_{r\to+\infty} \beta(r) = +\infty$, atunci β este strict crescătoare şi surjectivă.

Toate ipotezele Teoremei 2.3.4 au loc, deci problema de coincidenţă (4.2) este Ulam-Hyers stabilă. Astfel, deducem că ecuaţia (4.1) este Ulam-Hyers stabilă.

În continuare prezentăm o aplicaţie a Teoremei 2.3.2.

Aplicaţia 2.(O. Mleşniţe [77]) Considerăm aceeaşi ecuaţie diferenţială (4.1) unde $f : [0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface toate condiţiile din Aplicaţia 1. Dacă în plus, f îndeplineşte următoarea condiţie

- $f(t, \gamma u) \geq \gamma f(t,u)$ oricare ar fi $\gamma \geq 1, t > 0, u \in \mathbb{R}$,

atunci ecuaţia diferenţială (4.1) are soluţie unică pentru orice $\xi \in \mathbb{R}$ şi în plus ea este Ulam-Hyers stabilă.

Operatorii S şi T îndeplinesc condiţiile Teoremei 2.3.2, deci există $\bar{x} \in X$ astfel încât $S(\bar{x}) = T(\bar{x})$.

În continuare demonstrăm că ecuaţia (4.1) este Ulam-Hyers stabilă.

Avem $(T^{-1}y)(t) = y(t) \cdot e^{p\int_0^t L(\tau)d\tau}$. Demonstrăm că $d(y, S(T^{-1}(y))) \leq \alpha d(Ty, Sy)$, oricare ar fi $y \in T(A)$. Obţinem:

$$S(T^{-1}(y))(t) = e^{-p\int_0^t L(\tau)d\tau}\left\{\int_0^t f(\tau, y(\tau)e^{p\int_0^t L(\tau)d\tau})d\tau + \xi\right\}.$$

Prin calcul obţinem:

$$|y(t) - S(T^{-1}(y))(t)| = \left|y(t) - e^{-p\int_0^t L(\tau)d\tau}\left\{\int_0^t f(\tau, y(\tau)e^{p\int_0^t L(\tau)d\tau})d\tau + \xi\right\}\right| \leq$$

$$\leq e^{p\int_0^t L(\tau)d\tau}|(Sy)(t) - (Ty)(t)|.$$

Astfel, toate condiţiile Teoremei 2.3.2 au loc, atunci ecuaţia diferenţială (4.1) este Ulam-Hyers stabilă.

4.2 Stabilitate Ulam-Hyers pentru incluziuni operatoriale

Scopul acestui capitol este de a demonstra o teoremă de stabilitate Ulam-Hyers pentru problema Cauchy multivocă în raport cu ecuaţia diferenţială de ordinul întâi.

Considerăm următoarea problemă Cauchy multivocă:

$$\begin{cases} x'(t) \in F(t, x(t)), \text{ a.p.t } t \in [a, b]; \\ x(a) = \alpha, \end{cases} \tag{4.3}$$

unde $\alpha \in \mathbb{R}^n$ şi $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ este un operator multivoc. Notăm prin $\displaystyle\int_a^b F(s, x(s))ds$ (unde $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie dată) integrala multivocă in sens Aumann, vezi J.-P. Aubin şi H. Frankowska [12].

Definiţia 4.2.1. *Fie $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ un operator multivoc, $a \in \mathbb{R}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}^n$. O funcţie $\varphi : [a, T] \to \mathbb{R}^n$ se numeşte soluţie pentru problema* (4.3) *dacă şi numai dacă $T \leq b$, φ este absolut continuă pe intervalul $[a, T]$ şi satisface relaţiile:*

$$\begin{cases} \varphi'(t) \in F(t, \varphi(t)), \quad a.p.t \text{ pe } [a, T]; \\ \varphi(a) = \alpha. \end{cases}$$

Echivalenţa între incluziunea diferenţială de mai sus şi o incluziune integrală este dată de următoarea lemă:

Lema 4.2.1. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $F : I \times \mathbb{R}^n \to P_{cp,cv}(\mathbb{R}^n)$ un operator multivoc semi-continuu superior. Atunci $x : I \to \mathbb{R}$ este o soluţie pentru incluziunea diferenţială*

$$x'(t) \in F(t, x(t)) \tag{4.4}$$

dacă şi numai dacă

$$x(t_2) \in x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F(t, x(t))dt, \text{ pentru orice } t_1, t_2 \in I. \tag{4.5}$$

Ţinând cont de Lema 4.2.1 deducem că problema (4.3) este echivalentă cu o incluziune integrală de tip Volterra:

$$x(t) \in \alpha + \int_{a}^{t} F(s, x(s))ds, \quad t \in [a, b]. \tag{4.6}$$

Următoarea teoremă este un rezultat în ceea ce priveşte stabilitatea Ulam-Hyers pentru problema Cauchy (4.3).

Teorema 4.2.1 (O. Mleşniţe [74]). *Fie $F : [a, b] \times \mathbb{R}^n \to P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$ astfel încât:*

(a) există o funcţie integrabilă $M : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ astfel încât pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$ avem $F(s, u) \subset M(s)B(0, 1)$, a.p.t. $s \in [a, b]$;

(b) pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$, $F(\cdot, u) : [a, b] \to P_{\hat{\imath},cv}(\mathbb{R}^n)$ este măsurabilă;

(c) pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$, $F(\cdot, u) : [a, b] \to P_{\hat{\imath},cv}(\mathbb{R}^n)$ este semi-continuă inferior;

(d) există o funcţie continuă $p : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ astfel încât oricare ar fi $s \in [a, b]$ şi oricare ar fi $u, v \in \mathbb{R}^n$ avem:

$$H(F(s, u), F(s, v)) \le p(s) \cdot |u - v|. \tag{4.7}$$

Atunci au loc următoarele concluzii:

(i) există cel puţin o soluţie pentru problema Cauchy (4.3)*;*

(ii) problema Cauchy (4.3) *este Ulam-Hyers stabilă.*

4.3 Existenţa soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

În această secţiune ne propunem să obţinem câteva rezultate, fără a invoca teoria gradului, pentru problemele de coincidenţă unde operatorii s şi t pot fi neliniari. Pentru acest tip de aplicaţii folosim Corolarul 2.5.2. Aceste rezultate sunt bazate pe următoarele lucrări: J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50].

În această secţiune ne propunem să găsim o funcţie absolut continuă $u : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ astfel încât derivatele ei $u' \in L^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$ satisfac aproape pentru orice punct din intervalul $(0, 1)$ următoarea ecuaţie diferenţială:

$$\begin{cases} u'(t) - g(t, u(t), u'(t)) = f(t), & t \in (0, 1) \text{ a.p.t.} \\ u(0) = \xi \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4.8}$$

unde $f \in L^1(0, 1; \mathbb{R}^n)$ este o funcţie fixată şi $g : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie Carathéodory. O astfel de funcţie u se numeşte o soluţie tare a ecuaţiei (4.8).

Considerăm spaţiul Banach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n)$ şi $L^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ spaţiul Banach al funcţiilor $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ integrabile în sens Bochner înzestrat cu norma

$$\|x\|_1 = \int_0^1 \|x(t)\|_n dt.$$

Se ştie că dacă $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ este absolut continuă, atunci ea este diferenţiabilă aproape peste tot pe $[0,1]$, derivatele ei $x' \in L^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ şi

$$x(t) = x(0) + \int_0^t x'(s)ds.$$

Mai întâi observăm că ecuaţia (4.8) este echivalentă cu ecuaţia diferenţială

$$\begin{cases} u'(t) - g(t, u(t) + \xi, u'(t)) = f(t), & t \in (0,1) \text{ a.p.t.} \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{4.9}$$

Deci, scopul nostru este de a studia existenţa soluţiilor tari pentru ecuaţia (4.9).

Introducem spaţiul Sobolev $W^{1,1}(0,1;\mathbb{R}^n)$, spaţiul funcţiilor absolut continue. Acest spaţiu îl putem scrie astfel:

$$W^{1,1}(0,1;\mathbb{R}^n) := \left\{u \in L^1(0,1;\mathbb{R}^n) : u' \in L^1(0,1;\mathbb{R}^n)\right\},$$

Spaţiul $W^{1,1}(0,1;\mathbb{R}^n)$ poate fi înzestrat cu norma

$$\|u\|_{1,1} := \max\{\|u\|_1, \|u'\|_1\},$$

unde $\|\cdot\|_1$ este norma uzuală în $L^1(0,1;\mathbb{R}^n)$. $(W^{1,1}(0,1;\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{1,1})$ este un spaţiu Banach.

Considerăm următorul subspaţiu $X := \{u \in W^{1,1}(0,1;\mathbb{R}^n) :\ u(0) = 0\}$. Acesta este un subspaţiu închis al lui $(W^{1,1}(0,1;\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{1,1})$, deci el este, de asemenea, un spaţiu Banach.

Lema 4.3.1. *Fie u un element din X. Atunci $\|u\|_{1,1} = \|u'\|_1$.*

Lema 4.3.2. *Fie f un element fixat din $L^1(0,1;\mathbb{R}^n)$. Operatorul $T : X \to L^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ definit prin $T(u)(t) = u'(t) - f(t)$ este expansiv şi bijectiv.*

Fie $\mathcal{M}(0,1;\mathbb{R}^n)$ mulţimea tuturor funcţiilor măsurabile $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Dacă $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este o funcţie Carathéodory, atunci f defineşte un operator $N_f : \mathcal{M}(0,1;\mathbb{R}^n) \to \mathcal{M}(0,1;\mathbb{R}^n)$ prin $N_f(\varphi)(t) := f(t, \varphi(t))$. Acest operator se numeşte operator de superpoziţie (sau operator Nemytskii) generat de f. Următoarele trei leme au o mare importanţă în obţinerea rezultatelor dorite.

Lema 4.3.3. *Fie $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie Carathéodory. Dacă există o constantă $b \geq 0$ şi o funcţie $a(\cdot) \in L^1_+(0,1;\mathbb{R})$ astfel încât*

$$\|f(t,x)\|_n \leq a(t) + b\|x\|_n,$$

atunci funcţia $N_f : L^1(0,1;\mathbb{R}^n) \to L^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ este continuă.

Urmând idee lui J. Appell şi P.P. Zabrejko din [6, Lemma 9.5] obţinem:

Lema 4.3.4. *Fie* $g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie Carathéodory. Dacă există o constantă* $b \geq 0$ *şi o funcţie* $a(\cdot) \in L^1_+(0,1;\mathbb{R})$ *astfel încât*

$$\|g(t,x,y)\|_n \leq a(t) + b(\|x\|_n + \|y\|_n),$$

atunci funcţia $N_g : W^{1,1}(0,1;\mathbb{R}^n) \to L^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ *definită prin*

$$N_g(\varphi)(t) = g(t,\varphi(t),\varphi'(t))$$

este continuă.

Lema 4.3.5. *Fie* $g : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie Carathéodory pentru care există* $a \in L^1_+(0,1,\mathbb{R})$, $b,k > 0$ *astfel încât*

1. $\|g(t,x,0)\|_n \leq a(t) + b\|x\|_n$,
2. $\|g(t,x,y_1) - g(t,x,y_2)\|_n \leq k\|y_1 - y_2\|_n$.

Atunci, operatorul $N_g : X \to L^1(0,1;\mathbb{R}^n)$ *este* $2k$*- contracţie de mulţimi.*

Pentru a studia existnţa soluţiilor tari ale ecuaţiei (4.9), definim

$$T : X \to L^1(0,1;\mathbb{R}^n) \ \text{ prin } \ T(u) = u' - f$$

şi

$$S : X \to L^1(0,1;\mathbb{R}^n) \ \text{ prin } \ S(u) = N_{\tilde{g}}(u),$$

unde $\tilde{g}(t,x,y) = g(t,x+\xi,y)$.

Astfel, pentru a arăta că ecuaţia (4.9) are o soluţie trebuie să arătăm că problema de coincidenţă $T(u) = S(u)$ admite o soluţie.

Teorema 4.3.1 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50])**.** *Dacă* $\max\{b+k, 2k\} < 1$, *ecuaţia (4.9) are cel puţin o soluţie în spaţiul Sobolev* $W^{1,1}(0,1;\mathbb{R}^n)$.

Exemplul 4.3.1.

$$\begin{cases} u'(t) - \frac{\cos(u(t))}{\sqrt{t}} - \frac{u(t)+\sin(u'(t))}{2\sqrt{t+2}} = f(t), \quad t \in (0,1) \\ u(0) = \xi, \end{cases} \tag{4.10}$$

are o soluţie tare, deoarece în acest exemplu avem $g(t,x,y) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{t}} + \frac{x+\sin(y)}{2\sqrt{t+2}}$ şi deci $|g(t,x,0)| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}|x|$ şi $|g(t,x,y_1) - g(t,x,y_2)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}|y_1 - y_2|$, ceea ce implică faptul că g îndeplineşte condiţiile Teoremei 4.3.1.

4.4 Existenţa soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale de ordinul doi

În această secţiune se studiază existenţa soluţiilor clasice şi tari ale unei ecuaţii diferenţiale cu condiţii Dirichlet neomogene (ne referim la ecuaţia (4.11)). Pentru aceste tipuri de aplicaţii folosim Teorema 2.3.3 şi Corolarul 3.4.3. Aceste rezultate sunt bazate pe următoarea lucrare: J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50].

În primul rând studiem existenţa soluţiilor clasice pentru o ecuaţie dieferenţială de ordinul doi.

Fie $Y := (C([0,1]), \|\cdot\|_0)$ spaţiul Banach al funcţiilor continue $u : [0,1] \to \mathbb{R}$, unde$\|u\|_0 := \sup\{|u(t)| : t \in [0,1]\}$.

Notăm prin $C^2([0,1]) := \{u : [0,1] \to \mathbb{R} : u'' \in C([0,1])\}$. Acest lucru ne permite să introducem următorul spaţiu liniar

$$X := \{u \in C^2([0,1]) : u(0) = u(1) = 0\},$$

iar dacă pe acest spaţiu liniar definim norma $\|u\|_2 := \max\{\|u\|_0, \|u'\|_0, \|u''\|_0\}$, atunci $(X, \|\cdot\|_2)$ este un spaţiu Banach.

Pe de altă parte, dacă $g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, atunci g defineşte un operator $N_g : Y \to X$ prin $N_g(u)(t) = g(t, u(t), u''(t))$. Acest operator se numeşte operator de superpoziţie (sau operator Nemytskii) generat de g. Următoarele leme sunt importante în analiza pe care dorim sa o facem în continuare.

Lema 4.4.1. *Fie u un element din X. Atunci $\|u\|_2 = \|u''\|_0$.*

Lema 4.4.2. *Fie f un element fixat din Y. Operatorul $T : X \to Y$ definit prin $T(u)(t) = u''(t) - f(t)$ este un operator expansiv şi surjectiv.*

Lema 4.4.3. *Fie $g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pentru care există $k \in [0,1)$ astfel încât*

$$|g(t,x,y,z) - g(t,u,v,w)| \leq k \max\{|x-u|, |y-v|, |z-w|\},$$

oricare ar fi $(t,x,y,z), (t,u,v,w) \in [0,1] \times \mathbb{R}^3$. Atunci operatorul de superpoziţie $N_g : X \to Y$ este k-contracţie.

Lema 4.4.4. *Fie $g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Atunci operatorul de superpoziţie $N_g : X \to Y$ este un operator continuu şi compact.*

Dorim să studiem existenţa soluţiilor clasice pentru ecuaţia diferenţială cu condiţii Dirichlet neomogene.

$$\begin{cases} u''(t) - g(t, u(t), u'(t)) = f(t), \ t \in [0,1], \\ u(0) = \xi, \quad u(1) = \nu, \end{cases} \tag{4.11}$$

unde $f \in Y$ este o funcţie fixată.

În primul rând, observăm că ecuaţia (4.11) este echivalentă cu o ecuaţie diferenţială cu condiţii Dirichlet

$$\begin{cases} u''(t) - g(t, u(t) + (\nu - \xi)t + \xi, u'(t) - (\nu - \xi)) = f(t), \ t \in [0,1], \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Deci, scopul nostru este să studiem existenţa soluţiilor clasice ale ecuaţiei (4.12). Pentru aceasta, definim

$$T : X \to Y \text{ prin } T(u)(t) = u''(t) - f(t)$$

şi

$$S : X \to Y \text{ prin } S(u)(t) = N_{\tilde{g}}(u)(t),$$

unde $\tilde{g}(t, x, y) = g(t, x + (\nu - \xi)t + \xi, y - (\nu - \xi))$.

Pentru a arăta că ecuaţia (4.12) are o soluţie clasică trebuie să găsim un element $u_0 \in X$ astfel încât $T(u_0) = S(u_0)$. Aceasta se reduce la a găsi o soluţie pentru problema de coincidenţă.

Ca o consecinţă a Lemelor 4.4.1, 4.4.2, 4.4.3 şi Teoremei 2.3.3 este următorul rezultat.

Teorema 4.4.1 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50])**.** *Dacă $g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ îndeplineşte ipotezele Lemei 4.4.3, atunci problema* (4.12) *are soluţie unică.*

O altă consecinţă a Lemelor 4.4.1, 4.4.2, 4.4.4 şi Corolarul 3.4.2 este următorul rezultat.

Teorema 4.4.2. *Dacă $g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi mărginită atunci problema* (4.12) *are o soluţie.*

Teorema 4.4.3 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50])**.** *Dacă $g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă cu proprietăţile:*

(a) există $M > 0$ astfel încât dacă $|x| > M$, atunci $xg(t, x + t(\nu - \xi) + \xi, 0) > \max\{0, -xf(t)\}$,

(b) există $A, B > 0$ astfel încât dacă $|x| \le M$, atunci $|g(t, x + t(\nu - \xi) + \xi, y)| < A(y + (\nu - \xi))^2 + B$ oricare ar fi $t \in [0,1]$ şi oricare ar fi $y \in \mathbb{R}$,

atunci problema (4.12) *are o soluţie.*

Exemplul 4.4.1.

$$\begin{cases} u''(t) - u^3(t) = f(t), t \in [0,1], \\ u(0) = \xi, \quad u(1) = \nu, \end{cases} \tag{4.13}$$

are o soluţie, deoarece în acest exemplu avem $g(t, x, p) = x^3$ şi astfel g îndeplineşte condiţiile Teoremei 4.4.3.

În continuare, studiem existenţa soluţiilor tari ale unei ecuaţii diferenţiale de ordinul doi.

Considerăm intervalul $I := (0,1)$ şi definim spaţiul Sobolev

$$W^{2,1}(I) := \{u \in W^{1,1}(I) : u' \in W^{1,1}(I)\}.$$

Spaţiul $W^{2,1}(I)$ poate fi inzestrat cu norma

$$\|u\|_{2,1} := \max\{\|u\|_1, \|u'\|_1, \|u''\|_1\},$$

unde $\|\cdot\|_1$ este norma uzuală din $L^1(I)$. Se ştie că $(W^{2,1}(I), \|\cdot\|_{2,1})$ este un spaţiu Banach.

Considerăm următorul subspaţiu $X := \{u \in W^{2,1}(I) : u(0) = 0, u'(0) = 0\}$. Acesta este un subspaţiu închis al lui $(W^{2,1}(I), \|\cdot\|_{2,1})$ şi deci el este, de asemenea un spaţiu Banach.

Pe de altă parte, dacă $g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory, atunci g defineşte un operator $N_g : L^1(I) \to \mathcal{M}(I)$ prin $N_g(u)(t) = g(t, u(t), u'(t))$, unde $\mathcal{M}(I)$ este mulţimea tuturor funcţiilor măsurabile $\phi : I \to \mathbb{R}$. Acest operator se numeşte operator de superpoziţie generat de g. Următoarele leme sunt importanta in analiza pe care dorim sa o efectuăm.

Lema 4.4.5. *Fie u un element din X. Atunci $\|u\|_{2,1} = \|u''\|_1$.*

Lema 4.4.6. *Fie f un element fixat din $L^1(I)$. Operatorul $T : X \to L^1(I)$ definit prin $T(u)(t) = u''(t) - f(t)$ este un operator expansiv şi surjectiv.*

Lema 4.4.7. *Fie $g : [0,1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie Carathéodory pentru care există $b, c > 0$ şi $a \in L^1_+(I)$ care îndeplineşte relaţia $|g(t,x,y)| \leq a(t) + b|x| + c|y|$. Atunci operatorul de superpoziţie $N_g : X \to L^1(I)$ este un operator compact şi continuu.*

Dorim să studiem existenţa cel puţin a unei funcţii $u \in W^{2,1}(I)$ astfel încât

$$\begin{cases} u''(t) - g(t, u(t), u'(t)) = f(t), \ t \in (0,1) \text{ a.p.t.} \\ u(0) = \xi, u(1) = \nu, \end{cases} \tag{4.14}$$

unde $f \in L^1(I)$ este o funcţie fixată.

În primul rând, observăm că ecuaţia (4.14) este echivalentă cu ecuaţia diferenţială

$$\begin{cases} u''(t) - g(t, u(t) + t(\nu - \xi) + \xi, u'(t) + (\nu - \xi)) = f(t), \ t \in (0,1) \text{ a.p.t.} \\ u(0) = 0 = u(1). \end{cases} \tag{4.15}$$

Deci, scopul nostru este să demonstrăm că funcţia $u \in X$ verifică ecuaţia (4.15). Pentru aceasta definim

$$T : X \to L^1(I) \text{ prin } T(u) = u'' - f$$

şi

$$S : X \to L^1(I) \text{ prin } S(u) = N_{\tilde{g}}(u),$$

unde $\tilde{g}(t,x,y) = g(t, x + t(\nu - \xi) + \xi, y + (\nu - \xi))$.

Pentru a arăta că ecuaţia (4.15) are o soluţie trebuie să găsim un element $u_0 \in X$ astfel încât $T(u_0) = S(u_0)$. Deci, trebuie să vedem dacă problema de coincidenţă are soluţie.

Teorema 4.4.4 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50])**.** *Dacă $b + c < 1$, ecuaţia* (4.15) *are cel puţin o soluţie în $W^{2,1}(I)$.*

4.5 O problemă Dirichlet neliniară

În această secţiune folosim rezultatele problemelor de coincidenţă pentru a obţine existenţa soluţiilor unei probleme Dirichlet de forma (4.16). Cu scopul de a găsi o soluţie pentru astfel de probleme aplicăm Teorema 3.4.1. Aceste aplicaţii sunt bazate pe lucrarea: J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50].

Fie Ω o submlţime măsurabilă pe $\mathbb{R}^n$ care pentru simplitate presupunem că este mărginită.

Spaţiul Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ este spaţiul Banach al tuturor funcţiilor din $L^p(\Omega)$ ale cărui derivate până la ordinul m sunt de asemenea din $L^p(\Omega)$. Norma în acest spaţiu este dată prin

$$\|u\|_{m,p} = \|u\|_p + \sum_{1\leq|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_p,$$

unde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, şi $D^\alpha u = \frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}} u$.

$W_0^{m,p}(\Omega)$ este închiderea lui $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ în $W^{m,p}(\Omega)$.

În continuare studiem existenţa soluţiilor din $L^1(\Omega)$ pentru ecuaţia

$$\begin{cases} \Delta\rho(u(x)) = f(x, u(x)) & x \in \Omega \\ \rho(u(x)) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.16}$$

Specificăm condiţiile care asigură existenţa soluţiei pentru ecuaţia (4.16):

1. Ω este un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^n$ cu frontiera, $\partial\Omega$, netedă.
2. $\rho \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $\rho(0) = 0$.
3. există $C > 0$ şi $\gamma \in \mathbb{R}^+$ cu $\gamma > 1$ astfel încât
$$\rho'(r) \geq C|r|^{\gamma-1} \text{ pentru orice } r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$
4. $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie Carathéodory astfel încât $|f(s,x)| \leq a(s) + b|x|$, unde $a \in L^1(\Omega)$ şi $b \geq 0$. Aceste condiţii ne asigură că operatorul de superpoziţie asociat lui f,
$$N_f(u)(s) = f(s, u(s)),$$
este definit pe $L^1(\Omega)$ cu valori în $L^1(\Omega)$ şi este continuu. Facem referire la J. Apell şi P. P. Zabrejko [6] pentru mai multe detalii asupra operatorilor de superpoziţie.

H. Brezis şi W. Strauss în [23] arată că în condiţiile (1) şi (2), operatorul

$$\begin{cases} D(P) = \{u \in L^1(\Omega) : \ \rho(u) \in W_0^{1,1}(\Omega), \ \Delta\rho(u) \in L^1(\Omega)\} \\ P(u) = \Delta\rho(u), \ u \in D(P) \end{cases} \tag{4.17}$$

este m-disipativ, ceea ce înseamnă că $-P$ este m-acretiv.

Definiţia 4.5.1. *Spunem că $v \in L^1(\Omega)$ este soluţie pentru problema (4.16) dacă $v \in L^1(\Omega)$, $\rho(v) \in W_0^{1,1}(\Omega)$, $\Delta\rho(v) \in L^1(\Omega)$ şi $\Delta\rho(v(x)) = f(x, v(x))$ a.p.t. $x \in \Omega$. Aceasta înseamnă că $v \in D(P)$ este o soluţie pentru problema de coincidenţă $P(v) = N_f(v)$, unde $D(P)$ şi P sunt definite în (4.17).*

Teorema 4.5.1 (J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi O. Mleşniţe [50])**.** *Dacă condiţiile (1-4) sunt îndeplinite, atunci problema (4.16) are o soluţie.*

Bibliografie

[1] R. P. Agarwal, *Contraction and approximate contraction with an application to multipoint boundary value problems*, J. Comput. Applied Math., 9 (1983), 315-325.

[2] G. Allaire şi S.M. Kaber, *Numerical Linear Algebra*, Texts in Applied Mathematics, vol. 55, Springer, New York, 2008.

[3] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina şi B. N. Sadovskii, *Measures of noncompactness and condensing operators*, Birkhäuser Verlag, 1992.

[4] Q. H. Ansari, *Metric Spaces: Including Fixed Point Theory and Set-valued Maps*, Narosa Publishing House, New Delhi, 2010.

[5] J. Appel, *Measures of noncompactness, condensing operators and fixed points: An application-oriented survey*, Fixed Point Theory, Volume 6, No. 2, (2005), 157-229.

[6] J. Appell şi P.P. Zabrejko, *Nonlinear superposition operators*, Cambridge University Press, 1990.

[7] A. V. Arutyunov, *Covering mappings in metric spaces and fixed points*, Doklady Mathematics, Vol. 76, No. 2 (2007), 665-668.

[8] A. V. Arutyunov, *Stability of Coincidence Points and Properties of Covering Mappings*, Mathematical Notes, **86** (2) (2009), 153-158.

[9] A. V. Arutyunov, *Stability of coincidence points and set-valued covering maps in metric spaces*, Doklady Mathematics, **80** (1) (2009), 555-557.

[10] A. V. Arutyunov, E. Avakov, B. Gel'man, A. Dmitruk şi V. Obukhovskii, *Locally covering maps in metric spaces and coincidence points*, J. Fixed Point Theory Appl. 5 (2009), 105-127.

[11] J.-P. Aubin şi A. Cellina, *Differential Inclusions*, Springer, Berlin, 1984.

[12] J.-P. Aubin şi H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Basel, 1990.

[13] J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez-Benavides şi G. Lopez Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory,* Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser Verlag, 1997.

[14] J. Banaś şi K. Goebel, *Measures of noncompactness in Banach Spaces*, Marcel Dekker, Inc., 1980.

[15] V. Barbu, *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach spaces*, Springer, Monographs in Mathematics, 2010.

[16] V. Berinde, *Contracţii generalizate si aplicaţii*, Club Press 22, Baia Mare, 1997.

[17] M. Berinde şi V. Berinde, *On a general class of multivalued weakly Picard mappings*, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007), 772-782.

[18] V. Berinde şi M. Păcurar, *Fixed points and continuity of almost contractions*, Fixed Point Theory, vol. 9, no. 1, pp. 2334, 2008.

[19] A. V. Blaga, *Metric regularity and fixed points for uni-valued and set-valued operators*, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 4, 2010, no. 9, 419-425.

[20] M.-F. Bota, E. Karapinar şi **O. Mleşniţe**, *Ulam-Hyers stability results for fixed point problems via $\alpha - \psi$-contractive mapping in (b)-metric space*, Abstract and Applied Analysis, Volume 2013 (2013), Article ID 825293, 6 pages (IF: 1.102).

[21] M. Bota şi A. Petruşel, *Ulam-Hyers stability for operatorial equations*, Analele Univ. Al.I. Cuza Iaşi, 57 (2011), 65-74.

[22] J. M. Borwein şi D. M. Zhuang, *Verifiable necessary and sufficient conditions for openness and regularity of set-valued and single-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 134 (2) (1988), 441-459.

[23] H. Brezis şi W. Strauss, *Semi-linear second-order elliptic equations in L^1,* J. Math. Soc. Japan 35 (1973),131-165.

[24] L. E. J. Brouwer, *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 71 (1912), 97-115.

[25] R.F. Brown, *A topological introduction to nonlinear analysis*, Birkhäuser Boston, 1993.

[26] J. Bryant şi L. F. Guseman, *Extensions of contractive mappings and Edelstein's iterative test*, Canad. Math. Bull., (16) (1973), 185-192.

[27] A. Bucur, L. Guran şi A. Petruşel, *Fixed points for multivalued operators on a set endowed with vector-valued metrics and applications*, Fixed Point Theory, 10 (2009), no. 1, 19-34.

[28] A. Buică, *Data dependence theorems on coincidence problems*, Studia Univ. "Babeş-Bolyai" (Mathematica) 41(1996), 33-40.

[29] A. Buică, *Coincidence principles and applications*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001 (in Romanian).

[30] T. A. Burton, *Integral equations, implicit functions and fixed points*, Proc. Amer. Math. Soc. 124(1996) 2383-2390.

[31] L.P. Castro şi A. Ramos, *Hyers-Ulam-Rassias stability for a class of Volterra integral equations*, Banach J. Math. Anal., 3(2009), 36-43.

[32] T. Chen, W. Liu şi Z. Hu, *A boundary value problem for fractional differential equation with p-Laplacian operator at resonance*, Nonlinear Analysis 75 (2012), 3210-3217.

[33] A. Chiş-Novac, R. Precup şi I. A. Rus, *Data dependence of fixed point for non-self generalized contractions*, Fixed Point Theory, 10 (2009), No. 1, 73-87.

[34] Lj. B. Ćirić, *Generalized contractions and fixed point theorems*, Publ. Inst. Math. (Beograd), 12(1971), 19-26.

[35] H. Covitz şi S. B. Nadler jr., *Multivalued contraction mappings in generalized metric spaces*, Israel J. Math., 8(1970) 5-11.

[36] G. Darbo, *Punti uniti in transformazioni a codomio non compatto*, Rend. Sem. Mat. Uni. Padova, 24 (1955), 84-92.

[37] T. Domínguez Benavides şi G. López Acedo, *Fixed points of asymptotically contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 164 (2) (1992), 447-452.

[38] A. V. Dmitruk, *On a nonlocal metric regularity of nonlinear operators*, Control and Cybernetics, 34 (3) (2005), 723-746.

[39] A. V. Dmitruk, A. A. Milyutin şi N. P. Osmolovskii, *Lyusternik's theorem and the theory of extrema*, Russian Math. Surveys 35:6 (1980), 11-51.

[40] A. L. Dontchev, A. S. Lewis şi R. T. Rockafellar, *The radius of metric regularity*, Trans. Amer., Math., Soc., vol. 355, nr. 2(2002), 493-517.

[41] A. L. Dontchev şi R. T. Rockafellar, *Regularity and conditioning of solution mappings in variational analysis*, Set-Valued Analysis, 12 (1) (2004), 79-109.

[42] A. L. Dontchev şi A. S. Lewis, *Perturbation and metric regularity*, Set-Valued Analysis, vol. 13, nr. 4, pp. 417-438, 2005(22).

[43] A. D. Filip şi A. Petruşel, *Fixed points theorems on spaces endowed with vector-valued metrics*, Fixed Point Theory and Applications, vol. 2010, Article ID 281381, 15 pages, 2009.

[44] Y. Feng şi S. Liu, *Fixed point theorems for multivalued contractive mappings and multivaled Caristi type mappings*, J. Math. Anal. Appl. 317 (2006), 103- 112.

[45] R.E. Gaines şi J.L. Mawhin, *Alternative problems, coincidence degree, and nonlinear differential equations*, Lecture Notes in Math. 568, Springer Verlag, Berlin 1977.

[46] J. Garcia-Falset, *Existence of fixed points and measures of weak noncompactness*, Nonlinear Anal. 71 (2009), 2625-2633.

[47] J. Garcia-Falset, *Existence of fixed points for the sum of two operators*, Math. Nachr. **283** (12) (2010), 1736-1757.

[48] J. Garcia-Falset, K. Latrach, E. Moreno-Gálvez şi M.A. Taoudi, *Schaefer-Krasnoselskii fixed point theorems using a usual measure of weak noncompactness*, J. Differential Equations 252(2012), 3436-3452.

[49] J. Garcia-Falset şi **O. Mleşniţe**, *Coincidence problems for generalized contractions*, trimis spre publicare.

[50] J. Garcia-Falset, C. A. Hernández-Linares şi **O. Mleşniţe**, *The Leray-Schauder condition in the coincidence problem for two mappings*, trimis spre publicare.

[51] J. Garcia-Falset şi O. Muñiz-Pérez, *Fixed point theory for* 1*-set contractive and pseudocontractive mappings*, Appl. Math. Comput. (2013), http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.12.079.

[52] K. Goebel, *A coincidence theorem*, Bull. de l'Acad. Pol. des Sciences, 16 (1968), No. 9, 733-735.

[53] K. Goebel şi W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, 1990.

[54] I. Gohberg, L. S. Gol'denshtein şi A. S. Markus, *Investigation of some properties of bounded linear operators in connection with their q-norm*, Ucen. Zap. Kishinevsk. Un-ta 29 (1957), 29-36.

[55] A. Granas şi J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer Verlag Berlin, 2003.

[56] D. H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, vol. 27, no. 4, pp. 222-224, 1941.

[57] S. Hu şi N. S. Papageorgiou, *Handbook of Multivalued Analysis*, Vol. I and II, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997 and 1999.

[58] L.-G. Huang şi X. Zhang, *Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl., 332 (2007), 1468-1476.

[59] A. D. Ioffe, *Metric regularity and and subdifferential calculus*, Uspekhi Mat. Nauk, 55(2000), 103-162.

[60] A. D. Ioffe, *On perturbation stability of metric regularity*, Set-Valued Analysis, 9 (1-2) (2001), 101-109.

[61] V. I. Istrăţescu, *On a measure of noncompactness*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Romanie (N. S.) 16 (64), no. 2 (1972), 195-197.

[62] V. I. Istrăţescu, *Fixed Point Theory*, Reidel Pub. Co., 1981.

[63] S.-M. Jung, *A fixed point approach to the stability of a Volterra integral equation*, Fixed Point Theory and Applications, Vol. 2007, Article ID 57064, 9 pages.

[64] M. A. Khamsi şi W. A. Kirk, *An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York, 2001.

[65] W. A. Kirk şi B. Sims, *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2001.

[66] D. Klim şi D. Wardowski, *Fixed point theorems for set-valued contractions in complete metric spaces*, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007), 132-139.

[67] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund. Math. 15 (1930), 301-309.

[68] V. L. Lazăr, *Ulam-Hyers stability for partial differential inclusions*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 21 (2012), 1-19.

[69] Y. Liu şi Z. Li, *Schaefer type theorem and periodic solutions of evolution equations*, J. Math. Anal. Appl. 316 (2006) 237-225.

[70] W. A. J. Luxemburg şi A. C. Zaanen, *Riesz spaces*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Vol. 1, 1971.

[71] L. A. Lyusternik, *On the conditional extrema of functionals*, Mat. Sbornik, 41 (1934), 390-401 (in Russian).

[72] R. Machuca, *A coincidence theorem*, Am. Math. Month. 74 (1967), 469.

[73] Y. Mao şi J. Lee, *Two point boundary value problems for nonlinear differential equations*, Rocky Mountain Journal of Mathematics **26**(4) (1996), 1499-1514.

[74] **O. Mlesnițe**, *Ulam-Hyers stability for operatorial inclusions*, Creat. Math. Inform., 21 (2012), No. 1, 87-94 (MR2984982).

[75] **O. Mleşniţe**, *Existence and Ulam-Hyers stability results for coincidence problems*, J. Nonlinear Sci. Appl. 6 (2013), 108-116 (MR3017894).

[76] **O. Mleşniţe** şi A. Petruşel, *Existence and Ulam-Hyers stability results for multi-valued coincidence problems*, Filomat, 26, 5 (2012), 965-976 (IF: 0.714).

[77] **O. Mleşniţe**, *Existence and Ulam-Hyers stability result for a coincidence problems with applications*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 14 (2013), No 1, 183-189 (IF: 0.304).

[78] **O. Mleşniţe**, *Covering mappings and Ulam-Hyers stability results for coincidence problems*, Carpathian Journal of Mathematics, acceptat spre publicare (IF: 0.852).

[79] **O. Mleşniţe**, *Metric regularity and Ulam-Hyers stability results for coincidence problems with multivalued operators*, trimis spre publicare.

[80] B. S. Mordukhovich, *Variational analysis and generalized differentiation. I. Basic Theory*, Grundlehren Math. Wiss. 330, Springer, Berlin, 2006.

[81] B. S. Mordukhovich şi B. Wang, *Restrictive metric regularity and generalized differential calculus in Banach spaces*, Int. J. Math., Sci. 50 (2004), 2653-2680.

[82] G. Moţ, A. Petruşel şi G. Petruşel, *Topics in nonlinear analysis and applications to mathematical economics*, Casa Cărţii de ştiinţă, Cluj-Napoca, 2007.

[83] S. B. Nadler jr., *Multi-valued contraction mappings*, Pacific J. Math. 30 (1969) 475-488.

[84] S. B. Nadler, *A note on an iterative test of Edelstein*, Canad. Math. Bull., 15 (1972), 381-386.

[85] D. O'Regan, N. Shahzad şi R. P. Agarwal, *Fixed point theory for generalized contractive maps on spaces with vector valued metrics*, Fixed Point Theory and Applications, Vol. 6, Nova Sci. Publ., New York, 2007, 143-149.

[86] J.-P. Penot, *Metric regularity, openness and Lipschitzian behavior of multifunctions, Nonlinear Analysis*, TMA 13 (6) (1989), 629-643.

[87] A. I. Perov, *On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations*, Pviblizhen. Met. Reshen. Differ. Uravn., 2 (1964), 115-134.

[88] A. I. Perov şi A. V. Kibenko, *On a certain general method for investigation of baundary value problems*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 30 (1966), 249-264 (in Russian).

[89] I.-R. Petre şi A. Petruşel, *Krasnoselskii's theorem in generalized Banach spaces and applications*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., No. 85, 2012, 1-20.

[90] A. Petruşel, *Multivalued weakly Picard operators and applications*, Sci. Math. Jpn., 59(2004), 169-202.

[91] A. Petruşel, *Multifunctions and Applications*, Cluj University Press, 2002.

[92] A. Petruşel şi I. A. Rus, *The theory of a metric fixed point theorem for multivalued operators*, Fixed Point Theory and its Applications, Yokohama Publ., 2010, 167-176.

[93] A. Petruşel, C. Urs şi **O. Mleşniţe**, *Vector-valued Metrics in Fixed Point Theory*, Contemporary Math. Series, Amer. Math. Soc., 2013.

[94] T. P. Petru, A. Petruşel şi J.-C. Yao, *Ulam-Hyers stability for operatorial equations and inclusions via nonself operators*, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 15, No. 5, pp. 2195-2212, October 2011.

[95] W. V. Petryshyn, *Structure of the fixed points sets of k-set-contractions*, Arch. Rational Mech. Anal. 40 (1971), 312-328.

[96] W.V. Petryshyn, *Remarks on condensing and k-set-contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 39 (1972), 717-741.

[97] R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Math. Comput. Model., 49 (2009), 703-708.

[98] R. Precup şi A. Viorel, *Existence results for systems of nonlinear evolution equations*, Intern. J. Pure Appl. Math., 47(2008), no. 2, 199-206.

[99] R. Precup şi A. Viorel, *Existence results for systems of nonlinear evolution inclusions*, Fixed Point Theory, 11 (2010), no. 2, 337-346.

[100] I. A. Rus, *Some remarks on coincidence theory*, Pure Math. Manuscript 9 (1990-91), 137-148.

[101] I. A. Rus, *Basic problems of the metric fixed point theory (II)*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai 36 (1991), 81-99.

[102] I. A. Rus, *Generalized Contractions and Applications*, Cluj University Press (2001).

[103] I. A. Rus, *Weakly Picard operators and applications*, Seminar on Fixed Point Theory, Cluj-Napoca, 2(2001), 10-15.

[104] I. A. Rus, *Metrical fixed point theorems*, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, 1979.

[105] I. A. Rus, *Generalized contractions*, Seminar on Fixed Point Theory, Prepint Nr. 3, 1983, Babeş-Bolyai Univ., 1-130.

[106] I. A. Rus, *Principles and Applications of the Fixed Point Theory*, Dacia, Cluj-Napoca, Romania, 1979.

[107] I. A. Rus, *Picard operators and applications*, Scientiae Mathematicae Japonicae, 58 (2003), No. 1, 191-219.

[108] I.A. Rus, *Remarks on Ulam stability of the operatorial equations*, Fixed Point Theory, 10(2009), no. 2, 305-320.

[109] I. A. Rus, *Weakly Picard mappings*, Comment. Math. Univ. Carol. 34 (4) (1993), 769-773.

[110] I.A. Rus, *Ulam stability of ordinary differential equations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai Math., 54 (2009), 125-133.

[111] I.A. Rus, *Gronwall lemma approach to the Ulam-Hyers-Rassias stability of an integral equation*, Nonlinear Analysis and Variational Problems (P.M. Pardalos et al. (eds.)), 147 Springer Optimization and Its Applications 35, New York, 147-152.

[112] I. A. Rus, *The theory of a metrical fixed point theorem: theoretical and applicative relevances*, Fixed Point Theory, 9(2008), No. 2, 541-559.

[113] I. A. Rus şi S. Mureşan, *Data dependance of the fixed point set of some weakly Picard operators*, Itinerant Seminar, Cluj-Napoca, 2000, 201-108.

[114] I.A. Rus, A. Petruşel şi G. Petruşel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, 2008.

[115] I.A. Rus, A. Petruşel şi A. Sîntămărian, *Data dependence of the fixed points set of some multivalued weakly Picard operators*, Nonlinear Anal., 52(2003), 1947-1959.

[116] L. Rybinski, *On Carathéodory type selection*, Fund. Math. 125 (1985), 187-193.

[117] B. N. Sadovskii, *On a fixed point principle*, Funkt. Anal. 4 (2) (1967), 74-76.

[118] A. Sîntămărian, *Data dependence of the fixed points for some Picard operators*, Semin. Fixed Point Theory, Cluj-Napoca, 2 (2001), 81-86.

[119] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), 171-180.

[120] J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Annali di Matematica pura ed applicata, vol CXLVI, (1987), 65-96.

[121] A. Sirma şi S. Sevgin, *A note on coincidence degree theory*, Abstract and Applied Analysis, 2012, 18 pages. doi:10.1155/2012/370946.

[122] M. Turinici, *Finite-dimensional vector contractions and their fixed points*, Studia Universitatis Babes- Bolyai. Mathematica, vol. 35, no. 1, pp. 3042, 1990.

[123] A. Uderzo, *A metric version of Milyutin theorem*, Set-Valued Var. Anal. 20 (2012), 279-306, DOI 10.1007/s11228-011-0193-9.

[124] S. M. Ulam, *Problems in Modern Mathematics*, John Wiley and Sons, New York, USA, 1960.

[125] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 27, Springer, Berlin, 2000.

[126] A. Viorel, *Contributions to the study of nonlinear evolution equations*, Ph.D. Thesis, Babeş-Bolyai University Cluj-Napoca, 2011.

[127] I. I. Vrabie, *Compactness methods for nonlinear evolutions*, Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math. 2nd edn. Vol. 75 (Longman, Harlow, 1995).

[128] S. Z. Wang, B. Y. Li şi Z. M. Gao, *Some fixed point theorems on expansion mappings*, Adv. Math. (China) 11(2)(1982) 149-153.

[129] R. Węgrzyk, *Fixed point theorems for multifunctions and their applications to functional equations*, Dissertationes Math., 201 (1982), 28pp.

[130] T. Xiang şi R. Yuan, *A class of expansive-type Krasnosel'skii fixed point theorems*, Nonlinear Analysis, 71 (2009), 3229-3239.

[131] A. C. Zaanen, *Riesz spaces*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Vol. 2, 1983.

[132] P. P. Zabrejko, *K-metric and K-normed linear spaces: survey*, Collect. Math., 48 (1997), no. 4-6, 825-859.

[133] W. Zhao, *Geometrical coefficients and measures of noncompactness*, Ph. D. Dissertation, University of Glasgow, 1992.

[134] W. Zhao, *Remarks on various measures of noncompactness*, J. Math. Anal. App. 174 (1993), 290-297.