UNIVERSITATEA “BABEŞ-BOLYAI” CLUJ-NAPOCA

ŞCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Octavia-Maria NICA (BOLOJAN)

Metode de punct fix pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale neliniare cu condiţii nelocale

Rezumatul tezei de doctorat

Conducător Ştiinţific:

Prof. Dr. Radu PRECUP

Cluj-Napoca
2013

Această lucrare a fost posibilă cu sprijinul financiar oferit prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, cofinanţat prin Fondul Social European, în cadrul proiectului POSDRU/107/1.5/S/76841, cu titlul „Studii doctorale moderne: internaţionalizare şi interdisciplinaritate".

şi

cu sprijinul financiar oferit de Grant of the Romanian National Authority for Scientific Research, CNCS – UEFISCDI, project number PN-II-ID-PCE-2011-3-0094.

Cuprins

Introducere

Scopul prezentei teze de doctorat îl reprezintă studiul sistemelor de ecuaţii diferenţiale neliniare cu condiţii nelocale. Vom obţine rezultate de existenţă şi unicitate bazate pe o abordare operatorială ce utilizează teoreme de punct fix.

Metoda operatorială vectorială

Vom aplica principiile de punct fix ale lui Perov (o versiune vectorială a principiului contracţiilor al lui Banach), Schauder şi Leray-Schauder. În acest scop, problemele nelocale vor fi exprimate sub forma unor ecuaţii de punct fix de tipul

$$u = T(u), \tag{1}$$

pentru anumiţi operatori neliniari T. Astfel, un element-cheie este reprezentat de expresia specifică a operatorului T corespunzător. De fapt, în această teză, ecuaţia (1) are o structură vectorială, şi anume

$$\begin{cases} x = T_1(x, y) \\ y = T_2(x, y), \end{cases}$$

unde $u = (x, y)$, $T = (T_1, T_2)$, ceea ce permite celor doi termeni T_1, T_2 să aibă un comportament diferit unul faţă de celălalt, dar şi în raport cu cele două variabile. Acest lucru necesită utilizarea matricelor în locul constantelor atunci când condiţii de tip Lipschitz, creştere sau mărginire "a priori" sunt impuse operatorilor T_1 şi T_2. În mod corespunzător, este necesară utilizarea normelor vectoriale. Este de notat şi faptul că putem generaliza într-un mod foarte simplu abordarea din cazul sistemelor bidimensionale la cazul n-dimensional.

Din punct de vedere istoric, în 1964 A.I. Perov [63] a dat o versiune vectorială principiului contracţiilor al lui Banach şi a aplicat-o sistemelor diferenţiale, arătând avantajul utilizării matricelor convergente la zero şi a normelor vectoriale. Recent, R. Precup [65] a arătat că această metodă poate fi pusă în legătură cu alte principii din analiza neliniară, cum ar fi teoremele lui Schauder, Leray-Schauder şi Krasnoselskii. Aici, autorul a explicat de asemenea că utilizarea normelor vectoriale şi, în mod corespunzător, a matricelor convergente la zero este mult mai adecvată în tratarea sistemelor de ecuaţii. Aceste sisteme apar în modelarea matematică a diferitelor procese şi fenomene din domenii variate, cum ar fi fizica, biologia, chimia, ingineria, economia etc., atunci când diferite cantităţi variază în timp şi interacţionează.

Problemele nelocale studiate în cadrul tezei de doctorat

Iniţial, în Capitolul 2, considerăm problema cu condiţii nelocale discrete (polilocale)

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \\ x(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x(t_k) = 0 \\ y(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k y(t_k) = 0, \end{cases} \qquad \text{(a.p.t. pe } [0,1])$$

unde t_k sunt puncte date astfel încât $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ ... \ \leq t_m < 1$.

Ulterior, în locul condiţiilor de tip discret vom considera condiţii nelocale date prin intermediul a două funcţionale liniare şi continue, $\alpha, \beta : C[0,1] \to \mathbb{R}$, mai exact

$$x(0) = \alpha[x], \quad y(0) = \beta[y] \quad \text{(condiţii necuplate)}$$

şi de asemenea

$$x(0) = \alpha[y], \quad y(0) = \beta[x] \quad \text{(condiţii cuplate)}.$$

În Capitolul 3, vom trata cazul n-dimensional şi condiţiile cuplate liniare generale

$$u(0) = \alpha[u],$$

unde $u = (u_1, \ u_2, \ ..., \ u_n)$ şi $\alpha : C([0,1], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$, în timp ce în Capitolul 4 vom discuta ecuaţiile şi sistemele de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi de forma

$$\begin{cases} u''(t) = f(t, u(t), v(t)) \\ v''(t) = g(t, u(t), v(t)) \\ u(0) = 0, \ u(t_0) = \phi(u(\eta), v(\eta)) \\ v(0) = 0, \ v(t_0) = \psi(u(\eta), v(\eta)), \end{cases}$$

$(t \in [0,1])$, cu condiţii nelocale pe trei puncte $0, \eta, t_0$.

Metodele folosite sunt apoi adaptate în Capitolul 5 pentru a studia problema

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \\ x(0) = \alpha[x, y] \\ y(0) = \beta[x, y] \end{cases} \qquad t \in [0,1]$$

cu condiţii nelocale date de funcţionale neliniare $\alpha, \beta : C[0,1]^2 \to \mathbb{R}$. Aici, operatorii neliniari T_1, T_2 vor acţiona pe spaţiul produs $(C[0,1] \times \mathbb{R})^2$ încorporând în acest fel condiţiile neliniare.

Programul folosit pe parcursul acestei lucrări este aplicat în final în cadrul Capitolului 6 pentru o clasă specială de probleme, mai exact pentru sisteme cu impulsuri de forma

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \\ \Delta x|_{t=t_0} = I_1(x(t_0)), \quad \Delta y|_{t=t_0} = I_2(y(t_0)), \\ x(0) = \alpha_1[x], \qquad\qquad y(0) = \alpha_2[y], \end{cases} \qquad t \in (0,1), \ t \neq t_0.$$

Aici, $t_0 \in (0,1)$ şi $\Delta v|_{t=t_0}$ are semnificaţia de "salt" al funcţiei v în $t = t_0$, adică $\Delta v|_{t=t_0} = v(t_0^+) - v(t_0^-)$, unde $v(t_0^-), v(t_0^+)$ sunt limitele la stânga şi la dreapta ale lui v în $t = t_0$.

Condiţiile nelocale

Motivaţia studierii problemelor nelocale este dată de faptul că problema Cauchy nelocală are efect mai bun în aplicaţii decât problema Cauchy clasică, fiind de obicei mai exactă în măsurătorile fizice. De asemenea, modelarea matematică a diferitelor procese reale, cum ar fi fluxul de căldură, cel al fluidelor, chimic sau biologic, acolo unde condiţiile nelocale pot fi interpretare ca feedback-uri de control, au adus în atenţie tratamentul problemelor nelocale.

Studiul problemelor nelocale abstracte semiliniare a fost iniţiat de către L. Byszewski [19, 20], L. Byszewski şi V. Lakshmikantham [21] şi continuat mai apoi în numeroase alte lucrări: S. Aizicovici şi Y. Gao [3], S. Aizicovici şi M. McKibben [5], J. Liang, J.H. Liu şi T. Xiao [46], J.H. Liu [47], S.K. Ntouyas şi P.Ch. Tsamatos [58] şi referinţele din acestea. Aşa cum s-a remarcat în L. Byszewski [20], problemele nelocale apar în mod natural în modelarea problemelor fizice, menţionăm în acest sens lucrările G. Infante şi J.R.L. Webb [40], J.R.L. Webb şi G. Infante [76, 77] şi G. Infante, F.M. Minhós şi P. Pietramala [36]. O metodă unitară de stabilire a existenţei şi multiplicităţii soluţiilor pozitive pentru un număr mare de ecuaţii diferenţiale de ordin arbitrar cu un număr aleator de condiţii la limită nelocale a fost dată în J.R.L. Webb şi G. Infante [76, 77]. De asemenea, alte discuţii referitoare la importanţa condiţiilor nelocale în diferite domenii aplicative, exemple de probleme cu condiţii nelocale şi referinţe la alte lucrări ce tratează condiţii nelocale pot fi găsite în H.-K. Han şi J.-Y. Park [34], D. Jackson [41], H.C. Lee [45] şi referinţele din acestea.

Numeroşi autori au studiat diferite tipuri de probleme nelocale în special cu condiţii la limită pe mai multe puncte (a se vedea, de exemplu A. Boucherif şi R. Precup [17], A.M.A. El-Sayed, E.O. Bin-Taher [27], O. Nica şi R. Precup [52], S.K. Ntouyas [59] şi referinţele corespunzătoare pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, S.K. Ntouyas [59], R.P. Agarwal, D. O'Regan şi S. Staněk [2], C.P. Gupta, S.K. Ntouyas şi P.Ch. Tsamatos [33], G. Infante [35], R. Ma [50], S. Staněk [71] pentru ecuaţii de ordinul doi, sau M. Eggensperger şi N. Kosmatov [26], J.R.L. Webb, G. Infante şi D. Franco [80] pentru ecuaţii de ordin superior. Problemele nelocale ce implică condiţii la limită date prin intermediul unor funcţionale liniare şi continue, sau echivalent integrale Stieltjes, au fost studiate de exemplu în lucrările G. Infante [35], G.L. Karakostats şi P.Ch. Tsamatos [42], O. Nica [53, 55], J.R.L Webb şi G. Infante [78], J.R.L. Webb, G. Infante şi D. Franco [80].

Menţionăm de asemenea alte câteva lucrări ce tratează probleme nelocale pentru diferite clase de ecuaţii şi sisteme de ecuaţii diferenţiale: S. Aizicovici şi H. Lee [4], M. Benchohra şi A. Boucherif [7], M. Benchohra, E.P. Gatsori, L. Gorniewicz şi S.K. Ntouyas [8], O. Bolojan-Nica, G. Infante şi R. Precup [11], O. Bolojan-Nica, G. Infante şi R. Precup [12], A. Boucherif [14]-[16], A. Boucherif şi R. Precup [18], G. Infante şi P. Pietramala [37, 38], G. Infante şi J.R.L. Webb [40], G.L. Karakostas şi P.Ch. Tsamatos [42], O. Nica [54], S.K. Ntouyas [59], R. Precup [64], R. Precup şi D. Trif [66], J.R.L. Webb [74], J.R.L. Webb şi G. Infante [75], J.R.L. Webb şi K.Q. Lan [79], X. Xue [81, 82] şi Z. Yang [83].

Structura tezei de doctorat

Teza de doctorat este structurată în şase capitole, fiecare capitol fiind organizat în mai multe secţiuni.

Capitolul 1 este dedicat în întregime prezentării unor noţiuni, rezultate şi notaţii preliminare de care vom avea nevoie pe parcursul lucrării. Aici, în Secţiunea 1.1 introducem conceptele de metrică vectorială şi normă vectorială, în timp ce în Secţiunea 1.2 vom prezenta un alt instrument de lucru esenţial în investigarea noastră, şi anume noţiunea de matrice convergentă la zero. Apoi, în Secţiunea 1.3, vom reaminti principiile clasice de punct fix ale lui Perov, Schauder şi Leray-Schauder pe care le vom aplica în mod frecvent în cadrul acestei teze. Alte rezultate auxiliare vor fi de asemenea prezentate în capitolele care urmează.

În **Capitolul 2** avem în discuţie trei tipuri de probleme nelocale pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi. Secţiunea 1.2 conţine o prezentare generală a capitolului în care explicăm conţinutul fiecărei secţiuni şi prezentăm principalele instrumente şi metode de lucru folosite.

Motivaţi de lucrarea A. Boucherif şi R. Precup [17], în Secţiunea 2.2 ne ocupăm de problema nelocală pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \\ x(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x(t_k) = 0 \\ y(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k y(t_k) = 0, \end{cases} \qquad \text{(a.p.t. pe } [0,1])$$

unde $f, g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii Carathéodory, t_k sunt puncte date cu proprietatea $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ ... \ \leq t_m < 1$ şi a_k, $\widetilde{a}_k$ sunt numere reale astfel încât $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \neq 0$ şi $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k \neq 0$. Secţiunea 2.2 conţine trei subsecţiuni, fiecare dintre acestea fiind dedicate studiului existenţei soluţiilor pentru problema de mai sus. Demonstraţiile se vor baza pe principiile de punct fix ale lui Perov, Schauder şi Leray-Schauder ce vor fi aplicate unui operator integral neliniar divizat în două părţi, o parte de tip Fredholm pentru subintervalul ce conţine punctele implicate de condiţia nelocală, şi o altă parte de tip Volterra pentru restul intervalului. Normele vectoriale şi matricile convergente la zero joacă un rol important în cadrul acestei abordări.

În Secţiunea 2.3 şi Secţiunea 2.4, vom extinde ideile ideile Secţiunii 2.2 prin considerarea condiţiilor iniţiale nelocale ca fiind exprimate mai general, prin intermediul unor funcţionale liniare şi continue, ca în lucrările lui J.R.L. Webb [74], J.R.L. Webb şi G. Infante [75, 76, 77], J.R.L. Webb şi K.Q. Lan [79]. Astfel, în Secţiunea 2.3 vom discuta problema cu nelocală de tipul

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \\ x(0) = \alpha[x] \\ y(0) = \beta[y], \end{cases} \qquad \text{(a.p.t. pe } [0,1])$$

în timp ce în Secţiunea 2.4 vom studia problema

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \\ x(0) = \alpha[y] \\ y(0) = \beta[x], \end{cases} \qquad \text{(a.p.t. pe } [0,1])$$

unde $f_1, f_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt de asemenea funcţii Carathéodory, iar $\alpha, \beta : C[0,1] \to \mathbb{R}$

sunt funcţionale liniare şi continue astfel încât $1-\alpha[1]\neq 0$ şi $1-\beta[1]\neq 0$, în primul caz, şi $1-\alpha[1]\beta[1]\neq 0$, în cel de-al doilea caz. Fiecare din Secţiunile 2.3 şi 2.4 sunt împărţite în trei subsecţiuni. Aici, rezultatele de existenţă şi unicitate sunt obţinute iniţial prin impunerea unor condiţii de tip Lipschitz sau de creştere pe întregul interval $[0,1]$, şi apoi, în cea de-a doua parte a fiecărei subsecţiuni, sub condiţii similare date în mod diferit pe două subintervale $[0,t_0]$ şi $[t_0,1]$. În cel de-al doilea caz, operatorul integral neliniar asociat problemei va fi scindat în două părţi, una de tip Fredholm şi cealaltă de tip Volterra, fapt ce este reflectat în comportamentul neliniarităţilor.

Principalele rezultate din Secţiunea 2.2 sunt: Teorema 2.2.1, ce reprezintă un rezultat de existenţă şi unicitate, ca aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Perov; Teorema 2.2.2 şi Teorema 2.2.3, două teoreme de existenţă rezultate din principiile de punct fix ale lui Schauder şi Leray-Schauder, respectiv. Rezultatele din această secţiune au fost publicate în lucrarea O. Nica şi R. Precup [52].

Cele mai relevante rezultate din Secţiunea 2.3 sunt: Teorema 2.3.1 şi Teorema 2.3.2, două rezultate de existenţă şi unicitate ce utilizează principiul de punct fix a lui Perov; Teorema 2.3.4 şi Teorema 2.3.5, rezultate de existenţă bazate pe teorema de punct fix a lui Schauder; Teorema 2.3.7 şi Teorema 2.3.8, două teoreme de existenţă ce reprezintă aplicaţii la principiul Leray-Schauder; Exemplul 2.3.3 şi Exemplul 2.3.6 două rezultate ce ilustrează teoria. Cea mai mare parte a acestor rezultate se regăsesc în lucrările O. Nica [53, 55].

Principalele contribuţii din Secţiunea 2.4 sunt: Teorema 2.4.1 şi Teorema 2.4.2 de existenţă şi unicitate; Teorema 2.4.4, Teorema 2.4.5, Teorema 2.4.7, Teorema 2.4.8 de existenţă; Exemplul 2.4.3 şi Exemplul 2.4.6, aplicaţii numerice ale rezultatelor teoretice.

Capitolul 3 extinde la cazul general rezultatele din Capitolul 2. Mai exact, considerăm sistemul n-dimensional

$$\begin{cases} u_1'(t)=f_1(t,u_1(t),u_2(t),...,u_n(t)), \\ u_2'(t)=f_2(t,u_1(t),u_2(t),...,u_n(t)), \\ ... \\ u_n'(t)=f_n(t,u_1(t),u_2(t),...,u_n(t)), \end{cases}$$

a.p.t. t din $[0,1]$, supus condiţiilor nelocale cuplate

$$\begin{cases} u_1(0)=\alpha_{11}[u_1]+\alpha_{12}[u_2]+...+\alpha_{1n}[u_n], \\ u_2(0)=\alpha_{21}[u_1]+\alpha_{22}[u_2]+...+\alpha_{2n}[u_n], \\ ... \\ u_n(0)=\alpha_{n1}[u_1]+\alpha_{n2}[u_2]+...+\alpha_{nn}[u_n]. \end{cases}$$

Aici $f_1,\ f_2,\ ...,f_n:[0,1]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ sunt funcţii L^1-Carathéodory şi $\alpha_{ij}:C[0,1]\to\mathbb{R}$, $i,j=1,2,...,n$ sunt funcţionale liniare şi continue. Problema poate fi rescrisă sub formă vectorială

$$\begin{cases} u'(t)=f(t,u(t)), \quad \text{a.p.t. pe } [0,1], \\ u(0)=\alpha[u], \end{cases}$$

unde $u=(u_1,\ u_2,\ ...,\ u_n)$, $f=(f_1,\ f_2,\ ...,\ f_n)$, şi

$$\alpha[u]=(\alpha_1[u],\ \alpha_2[u],\ ...,\ \alpha_n[u]),$$

$$\alpha_i[u]=\alpha_{i1}[u_1]+\alpha_{i2}[u_2]+...+\alpha_{in}[u_n] \quad (i=1,2,...,n).$$

În mod cert, în acest caz α este o funcţie liniară şi continuă din $C([0,1],\mathbb{R}^n)$ în $\mathbb{R}^n$. Acest capitol conţine patru secţiuni. După o prezentare generală dată în Secţiunea 3.1, prezentăm rezultatele de existenţă bazate pe teoremele de punct fix ale lui Perov, Schauder şi Leray-Schauder, în Secţiunea 3.2, Secţiunea 3.3 şi Secţiunea 3.4, respectiv.

Principalele rezultate din acest capitol sunt: Teorema 3.2.1, Teorema 3.3.1 şi Teorema 3.4.1; Exemplul 3.2.2 şi Exemplul 3.3.2 ce prezintă două aplicaţii numerice. Aceste contribuţii pot fi găsite în lucrarea O. Bolojan-Nica, G. Infante şi R. Precup [11].

Capitolul 4 este dedicat studiului ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi cu condiţii la limită pe trei puncte. Capitolul este structurat în cinci secţiuni după cum urmează. O prezentare generală asupra problemelor şi conţinutului din acest capitol este dată în Secţiunea 4.1. Apoi, fiind motivaţi de lucrarea lui E.V. Castelani şi T.F. Ma [23], în Secţiunea 4.2, începem investigaţia noastră prin a studia problema la limită pe trei puncte pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul doi

$$\begin{cases} u'' = f(t,u,u') \\ u(0)=0,\ u(t_0)=g(u(\eta)), \end{cases} \qquad 0<t<t_0$$

unde $0<\eta<t_0<1$ şi f, g sunt funcţii continue. În Secţiunea 4.3, dăm rezultate de existenţă pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi

$$\begin{cases} u''(t) = f(t,u(t),v(t)) \\ v''(t) = g(t,u(t),v(t)) \\ u(0)=0,\ u(t_0)=\phi(u(\eta),v(\eta)) \\ v(0)=0,\ v(t_0)=\psi(u(\eta),v(\eta)), \end{cases}$$

pe un interval dat $[0,t_0]$. În Secţiunea 4.4 studiem problema din Secţiunea 4.2 pe un interval mai mare $[0,1]$, şi anume

$$\begin{cases} u'' = f(t,u,u') \\ u(0)=0,\ u(t_0)=g(u(\eta)), \end{cases}$$

unde $t_0<1$. În cele din urmă, în Secţiunea 4.5, o strategie similară este aplicată unui sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul al doilea. Principalele rezultate din acest capitol sunt: Teorema 4.2.1, Teorema 4.2.2, Teorema 4.2.4 şi Teorema 4.3.1, Teorema 4.3.2, rezultate de existenţă pe $[0,t_0]$ pentru ecuaţii şi respectiv, sisteme; Teorema 4.4.1, Teorema 4.4.2, Teorema 4.4.3, Teorema 4.4.4 şi Teorema 4.5.1, Teorema 4.5.2, Teorema 4.5.3, Teorema 4.5.4, rezultate de existenţă pentru ecuaţii şi sisteme pe $[0,1]$. Rezultatele din acest capitol apar în lucrarea O. Nica [54].

Obiectivul **Capitolului 5** este acela de a studia existenţa soluţiilor problemei nelocale pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, cu condiţii nelocale neliniare

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t,x(t),y(t)) \\ y'(t) = f_2(t,x(t),y(t)) \\ x(0)=\alpha[x,y] \\ y(0)=\beta[x,y]. \end{cases}, \qquad t\in[0,1]$$

Aici $f_1,f_2:[0,1]\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ sunt funcţii continue, în timp ce $\alpha,\beta: C[0,1]^2\to\mathbb{R}$ sunt funcţionale neliniare şi continue. Rezultatele de existenţă sunt stabilite prin intermediul principiilor de punct fix ale lui Perov, Schauder şi Leray-Schauder combinate cu tehnica bazată pe folosirea metricilor vectoriale şi a matricelor convergente la zero. Aici, principalele contribuţii sunt: Teorema 5.2.1, ce reprezintă un rezultat de existenţă şi unicitate ce are la bază principiul de punct fix a lui Perov; Teorema 5.3.1 şi Teorema 5.3.3, două rezultate de existenţă date ca aplicaţie directă a teoremelor lui Schauder şi respectiv Leray-Schauder; Exemplul 5.2.2 şi Exemplul 5.3.2, două aplicaţii numerice care ilustrează rezultatele date de Teorema 5.2.1 şi Teorema 5.3.1. Aceste rezultate sunt parte a lucrării O. Bolojan-Nica, G. Infante şi R. Precup [13].

Metodele pe care le-am folosit cel mai des în capitolele precedente sunt adaptate în cele ce urmează în cadrul **Capitolului 6** pentru cazul sistemelor cu impulsuri cu condiţii nelocale exprimate prin intermediul funcţionalelor liniare şi continue date de integrale Stieltjes

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)), \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)), \\ \Delta x|_{t=t_0} = I_1(x(t_0)), \quad \Delta y|_{t=t_0} = I_2(y(t_0)), \\ x(0) = \alpha_1[x], \quad y(0) = \alpha_2[y]. \end{cases} \quad t \in (0,1),\ t \neq t_0.$$

Aici $t_0 \in (0,1)$ şi $\Delta v|_{t=t_0}$ semnifică "saltul" funcţiei v în $t = t_0$, adică $\Delta v|_{t=t_0} = v(t_0^+) - v(t_0^-)$, unde $v(t_0^-), v(t_0^+)$ sunt limitele la stânga şi la dreapta ale lui v în $t = t_0$. Capitolul este împărţit în patru secţiuni. După o prezentare generală în Secţiunea 6.1, Secţiunea 6.2 prezintă un rezultat de existenţă şi unicitate prin aplicarea principiului de punct fix a lui Perov, în timp ce în Secţiunea 6.3 expunem un rezultat de existenţă ca o consecinţă a teoremei de punct fix a lui Schauder. Principiile de punct fix aplicate sunt completate de tehnica bazată pe norme vectoriale şi matrici convergente la zero. Principalele contribuţii din acest capitol sunt următoarele: Teorema 6.2.1, o teoremă de existenţă şi unicitate; Teorema 6.3.1 de existenţă; Exemplul 6.2.2 şi Exemplul 6.3.2. Aceste rezultate sunt incluse în lucrarea O. Bolojan-Nica, G. Infante şi P. Pietramala [12].

Câteva direcţii de cercetare viitoare

Metodele folosite pe parcursul tezei de doctorat pot fi aplicate şi altor clase de probleme, de exemplu, sistemelor de ecuaţii de evoluţie de tipul

$$\begin{cases} x'(t) + A_1 x(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) + A_2 y(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \\ x(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x(t_k) = 0 \\ y(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k y(t_k) = 0. \end{cases}$$

Aici, operatorul liniar $-A_i : D(A_i) \subseteq X_i \to X_i$ generează un semigrup de contracţii tare continuu $\{S_i(t), t \geq 0\}$ pe un spaţiu Banach $\left(X_i, |.|_{X_i}\right)$, pentru $i = 1, 2$. În particular, putem considera sisteme de ecuaţii parabolice şi hiperbolice.

O altă idee este aceea de a utiliza o versiune vectorială a teoremei de punct fix a lui Krasnoselskii pentru suma a doi operatori (a se vedea A. Viorel [73]) împreună cu metoda ce utilizează matrici convergente la zero, în scopul de a trata probleme nelocale mai complicate, cum ar fi problema

$$\begin{cases} x'(t) = g_1(t, x(t), y(t)) + h_1(t, x'(t), y'(t)) \\ y'(t) = g_2(t, x(t), y(t)) + h_2(t, x'(t), y'(t)) \\ x(0) = \alpha[x] \\ y(0) = \beta[y], \end{cases}$$

unde $g_i, h_i : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii Carathéodory şi $\alpha, \beta : [0,1] \to \mathbb{R}$ sunt funcţionale liniare şi continue. Desigur, toate celelalte probleme studiate în cadrul acestei lucrări pot fi generalizate în acest fel.

Activitatea de cercetare a autorului tezei de doctorat

Majoritatea rezultatelor din această teză de doctorat fac parte din următoarele lucrări/manuscrise:

- O. Nica and R. Precup, On the nonlocal initial value problem for first order differential systems, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 56 (2011), No. 3, 125–137.
- O. Nica, Initial-value problems for first-order differential systems with general nonlocal condiţiile, Electron. J. Differential Equations 2012 (2012), No. 74, 1–15.
- O. Nica, Existence results for second order three-point boundary value problems, Differ. Equ. Appl. 4 (2012), 547–570.
- O. Nica, Nonlocal initial value problems for first order differential systems, Fixed Point Theory 13 (2012), 603–612.
- O. Nica, Extensions of the Leray-Schauder Principle for integral systems, An. Univ. Oradea Fasc. Mat. 9 (2012), No. 2, 63-81.
- O. Nica, A fixed point approach to first order differential equations and systems, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity 10 (2012), 141-153.
- O. Bolojan-Nica, G. Infante, R. Precup, Existence results for systems with coupled nonlocal initial condiţiile, Nonlinear Anal. 94 (2014), 231-242.
- O. Bolojan-Nica, G. Infante, P. Pietramala, Existence results for impulsive systems with initial nonlocal condiţiile, Math. Model. Anal., to appear.
- O. Bolojan-Nica, G. Infante, R. Precup, Existence results for systems with coupled nonlocal nonlinear initial condiţiile, submitted.

O parte a acestor rezultate au fost prezentate la următoarele conferinţe ştiinţifice, workshop-uri şi întâlniri de lucru:

- International Conference on Sciences (ICS), November 11-12, 2011, Oradea, Romania.

- International Conference of Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications (ICNODEA), July 5-8, 2011, Cluj-Napoca, Romania.
- The Fifth International Workshop 2012 "Constructive Methods for Non-Linear Boundary Value Problems", June 28-July 1, 2012, Tokaj, Hungary.
- 6^{th} European Congress of Mathematics (6ECM), July 2-6, 2012, Krakow, Poland.
- 10^{th} International Conference on Fixed Point Theory and its Applications (ICFPTAC), July 9-15, 2012, Cluj-Napoca, Romania.
- Research Seminar of the Department of Mathematics, October 22, 2012, University of Calabria, Cosenza, Italy.
- A treia sesiune naţională de comunicări ştiinţifice a doctoranzilor, June 10-16, 2013, Timişoara, Romania.
- The Fourteenth International Conference on Applied Mathematics Computer Science şi Mechanics, "Theodor Angheluţă" Seminar, August 29-31, 2013, Cluj-Napoca, Romania.

Mulţumiri

Autoarea doreşte să-şi exprime recunoştinţa faţă de conducătorul său de doctorat, Profesorul Radu Precup, pentru întreaga muncă, sprijinul constant, răbdarea şi îndrumarea oferite, lucruri ce au făcut posibil acest proiect de cercetare. Numeroase alte mulţumiri sunt de asemenea adresate tuturor membrilor Grupului de Ecuaţii Diferenţiale, pentru ajutorul şi discuţiile fructuoase oferite de-a lungul programului de doctorat şi în timpul seminariilor de cercetare. Mulţumiri speciale sunt adresate Profesorilor Gennaro Infante şi Paola Pietramala pentru informaţiile şi sfaturile ştiinţifice, îndrumarea permanentă oferite pe parcursul stagiului de cercetare din cadrul Universităţii din Calabria, Cosenza, Italia şi de asemenea tuturor membrilor Departamentului de Matematică de la Universitatea din Calabria pentru implicarea de care au dat dovadă.

Cuvinte cheie: Ecuaţie diferenţială neliniară; sistem diferenţial; problemă cu valori iniţiale; problemă la limită; ecuaţie diferenţială cu impulsuri; condiţie nelocală; punct fix; contracţie; operator compact; normă vectorială; matrice convergentă la zero.

Capitolul 1

Preliminarii

În acest capitol vom prezenta câteva noţiuni şi rezultate preliminarii folosite pe parcursul tezei de doctorat. Metricile şi normele vectoriale, matricele convergente la zero şi principiile de punct fix ale lui Perov, Schauder şi Leray-Schauder sunt principalele instrumente de lucru din această lucrare.

1.1 Metrici şi norme vectoriale

Definiţia 1.1.1 *Fie X o mulţime nevidă. Prin* metrică vectorială *pe X înţelegem o funcţie $d : X \times X \to \mathbb{R}^n$ astfel încât*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *oricare ar fi $x, y \in X$ şi $d(x, y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$;*

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *oricare ar fi $x, y \in X$;*

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *oricare ar fi $x, y, z \in X$*
în raport cu relaţia naturală de ordine din $\mathbb{R}^n$. Mai exact, dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, prin $x \leq y$ înţelegem $x_i \leq y_i$ pentru $i = 1, 2, ..., n$.

Perechea (X, d) se numeşte *spaţiu metric generalizat.*

Definiţia 1.1.2 *Fie X un spaţiu liniar. O aplicaţie $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^n$ se numeşte* normă vectorială *dacă*

(i) $\|x\| \geq 0$ *oricare ar fi $x \in X$ şi $\|x\| = 0$ dacă şi numai dacă $x = 0$;*

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *oricare ar fi $x \in X$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$;*

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *oricare ar fi $x, y \in X$.*

În mod evident, fiecare spaţiu liniar înzestrat cu o normă vectorială este un spaţiu metric generalizat cu metrica vectorială

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

1.2 Matrice convergente la zero

Definiţia 1.2.1 *O matrice pătratică $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$ cu elemente nenegative se numeşte* convergentă la zero *dacă*

$$M^k \to 0 \qquad \text{când } k \to \infty.$$

Lema 1.2.2 *Fie $M \in M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$ o matrice pătratică cu elemente nenegative. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) M este o matrice care converge la zero;

(ii) $I - M$ este nesingulară şi $(I-M)^{-1} = I + M + M^2 + ...$ (unde I este matricea unitate de acelaşi ordin ca şi M);

(iii) valorile proprii ale lui M sunt localizate în discul unitate al planului complex;

(iv) $I - M$ este nesingulară şi $(I-M)^{-1}$ sunt elemente nenegative.

Lema 1.2.3 *Dacă A este o matrice pătratică ce converge la zero şi elementele unei alte matrice pătratice B sunt suficient de mici, atunci $A + B$ este de asemenea convergentă la zero.*

Definiţia 1.2.4 *Un operator $T : X \to X$ se numeşte* contracţie generalizată *(în raport cu metrica vectorială d din X) dacă există o matrice convergentă la zero M astfel încât*

$$d(T(u), T(v)) \le M d(u, v) \quad \text{oricare ar fi } u, v \in X.$$

1.3 Teoreme de punct fix

Teorema 1.3.1 (Perov) *Fie (X, d) un spaţiu metric generalizat complet şi $T : X \to X$ o contracţie generalizată cu matricea Lipschitz M. Atunci T are un unic punct fix x^* şi pentru oricare $x \in X$ avem*

$$d(T^k(x), x^*) \le M^k (I-M)^{-1} d(x, T(x)), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Teorema 1.3.2 (Schauder) *Fie X un spaţiu Banach, $D \subset X$ o submulţime nevidă convexă, închisă şi mărginită şi $T : D \to D$ un operator complet continuu (i.e., T este continuu şi $T(D)$ este relativ compact). Atunci T are cel puţin un punct fix.*

Teorema 1.3.3 (Leray–Schauder) *Fie $(X, |\,.\,|_X)$ un spaţiu Banach, $R > 0$ şi $T : \overline{B}_X(0; R) \to X$ un operator complet continuu. Dacă $|u|_X < R$ pentru oricare soluţie u a ecuaţiei $u = \lambda T(u)$ şi pentru oricare $\lambda \in (0, 1)$, atunci T are cel puţin un punct fix.*

Capitolul 2

Probleme nelocale pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

2.1 Prezentare generală

Acest capitol este dedicat studiului existenţei soluţiilor problemelor cu valori iniţiale pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale neliniare planare cu condiţii nelocale exprimate prin intermediul unor funcţionale liniare discrete şi continue.

2.2 Sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi cu condiţii polilocale

În această secţiune, avem în studiu problema nelocală pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi, de tipul

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)) \\ x(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x(t_k) = 0 \qquad \text{(a.p.t. pe } [0,1]) \\ y(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k y(t_k) = 0. \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Aici $f, g : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii Carathéodory, t_k sunt puncte date astfel încât $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ ... \ \leq t_m < 1$ şi a_k, $\widetilde{a}_k$ sunt numere reale cu proprietatea $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \neq 0$ şi $1 + \sum\limits_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k \neq 0$. Este de observat faptul că condiţiile nelocale neomogene

$$\begin{cases} x(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} a_k x(t_k) = x_0 \\ y(0) + \sum\limits_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k y(t_k) = y_0 \end{cases}$$

pot fi întotdeauna reduse la unele omogene (cu $x_0 = y_0 = 0$) prin schimbările de variabilă $x_1(t) := x(t) - a\ x_0$ şi $y_2(t) := y(t) - \widetilde{a}\ y_0$, unde

$$a = \left(1 + \sum_{k=1}^{m} a_k\right)^{-1} \quad \text{şi} \quad \widetilde{a} = \left(1 + \sum_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k\right)^{-1}. \tag{2.2.2}$$

Aceasta poate fi văzută ca o problemă de punct fix în $C\,[0,1]^2$ pentru operatorul complet continuu $T = (T_1, T_2)$, $T : C\,[0,1]^2 \to C\,[0,1]^2$, unde T_1 şi T_2 sunt date prin

$$\begin{aligned} T_1(x,y)(t) &= -a \sum_{k=1}^{m} a_k \int_0^{t_k} f\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds + \int_0^t f\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds, \\ T_2(x,y)(t) &= -\widetilde{a} \sum_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k \int_0^{t_k} g\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds + \int_0^t g\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds. \end{aligned}$$

Operatorii T_1 şi T_2 apar ca suma a doi operatori integrali, unul de tip Fredholm, a cărui valori depind de restricţiile funcţiilor pe $[0, t_m]$, şi un alt operator de tip Volterra depinzând de restricţiile pe $[t_m, 1]$, aşa cum a fost arătat în lucrarea A. Boucherif şi R. Precup [17]. Astfel, T_1 poate fi rescris ca $T_1 = T_{F_1} + T_{V_1}$, unde

$$T_{F_1}(x,y)(t) = \begin{cases} -a \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \int_0^{t_k} f\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds + \int_0^t f\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds, & \text{dacă } t < t_m \\ -a \sum\limits_{k=1}^{m} a_k \int_0^{t_k} f\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds + \int_0^{t_m} f\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds, & \text{dacă } t \geq t_m \end{cases}$$

şi

$$T_{V_1}(x,y)(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \ t < t_m \\ \int_{t_m}^t f\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds, & \text{dacă } \ t \geq t_m. \end{cases}$$

În mod similar, $T_2 = T_{F_2} + T_{V_2}$, unde

$$T_{F_2}(x,y)(t) = \begin{cases} -\widetilde{a} \sum\limits_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k \int_0^{t_k} g\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds + \int_0^t g\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds, & \text{dacă } t < t_m \\ -\widetilde{a} \sum\limits_{k=1}^{m} \widetilde{a}_k \int_0^{t_k} g\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds + \int_0^{t_m} g\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds, & \text{dacă } t \geq t_m \end{cases}$$

şi

$$T_{V_2}(x,y)(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \ t < t_m \\ \int_{t_m}^t g\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds, & \text{dacă } \ t \geq t_m. \end{cases}$$

2.2.1 Neliniarităţi cu proprietatea Lipschitz. Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Perov

Aici, vom arăta că existenţa şi unicitatea soluţiilor problemei (2.2.1) rezultă din teorema de punct fix a lui Perov în cazul în care f, g satisfac condiţiile Lipschitz în x şi y :

$$|f(t,x,y)-f(t,\overline{x},\overline{y})| \leq \begin{cases} b_1\,|x-\overline{x}| + \widetilde{b}_1\,|y-\overline{y}|\,, & \text{dacă } t\in[0,t_m] \\ c_1\,|x-\overline{x}| + \widetilde{c}_1\,|y-\overline{y}|\,, & \text{dacă } t\in[t_m,1]\,, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

$$|g(t,x,y)-g(t,\overline{x},\overline{y})| \leq \begin{cases} B_1\,|x-\overline{x}| + \widetilde{B}_1\,|y-\overline{y}|\,, & \text{dacă } t\in[0,t_m] \\ C_1\,|x-\overline{x}| + \widetilde{C}_1\,|y-\overline{y}|\,, & \text{dacă } t\in[t_m,1] \end{cases} \tag{2.2.4}$$

oricare ar fi $x,y,\overline{x},\overline{y}\in\mathbb{R}$.

În cele ce urmează, notăm $A_1 := 1+|a|\sum\limits_{k=1}^{m}|a_k|\,,\ A_2 = 1+|\widetilde{a}|\sum\limits_{k=1}^{m}|\widetilde{a}_k|\,,$ unde a şi $\widetilde{a}$ sunt date de (2.2.2).

Teorema 2.2.1 *Dacă f,g satisfac condiţiile Lipschitz* (2.2.3), (2.2.4) *şi matricea*

$$M_0 := \begin{bmatrix} b_1 t_m A_1 & \widetilde{b}_1 t_m A_1 \\ B_1 t_m A_2 & \widetilde{B}_1 t_m A_2 \end{bmatrix} \tag{2.2.5}$$

este convergentă la zero, atunci problema (2.2.1) *are o unică soluţie.*

2.2.2 Neliniarităţi cu creştere cel mult liniară. Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder

Aici demostrăm că existenţa soluţiilor problemei (2.2.1) rezultă din teorema de punct fix a lui Schauder în cazul în care f,g satisfac în locul condiţiilor de tip Lipschitz, condiţiile mai relaxate de creştere cel mult liniară:

$$|f(t,x,y)| \leq \begin{cases} b_1\,|x| + \widetilde{b}_1\,|y| + d_1, & \text{dacă } t\in[0,t_m] \\ c_1\,|x| + \widetilde{c}_1\,|y| + d_2, & \text{dacă } t\in[t_m,1]\,, \end{cases} \tag{2.2.6}$$

$$|g(t,x,y)| \leq \begin{cases} B_1\,|x| + \widetilde{B}_1\,|y| + D_1, & \text{dacă } t\in[0,t_m] \\ C_1\,|x| + \widetilde{C}_1\,|y| + D_2, & \text{dacă } t\in[t_m,1]\,, \end{cases} \tag{2.2.7}$$

oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$ şi coeficienţii nenegativi $b_i,c_i,d_i,\widetilde{b}_i,\widetilde{c}_i,\widetilde{d}_i,B_i,C_i,D_i,\widetilde{B}_i,\widetilde{C}_i,\widetilde{D}_i, i = 1,2.$

Teorema 2.2.2 *Dacă f,g satisfac condiţiile* (2.2.6), (2.2.7) *şi matricea* (2.2.5) *este convergentă la zero, atunci problema* (2.2.1) *are cel puţin o soluţie.*

2.2.3 Neliniarităţi mai generale. Aplicaţie a principiului Leray-Schauder

Considerăm că neliniarităţile f,g satisfac condiţiile de creştere mai generale, şi anume:

$$|f(t,u)| \leq \begin{cases} \omega_1(t,|u|_e), & \text{dacă } t\in[0,t_m] \\ \alpha(t)\beta_1(|u|_e), & \text{dacă } t\in[t_m,1], \end{cases} \tag{2.2.8}$$

$$|g(t,u)| \leq \begin{cases} \omega_2(t,|u|_e), & \text{dacă } t\in[0,t_m] \\ \alpha(t)\beta_2(|u|_e), & \text{dacă } t\in[t_m,1], \end{cases} \tag{2.2.9}$$

oricare ar fi $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$, unde prin $|u|_e$ înţelegem norma euclidiană din $\mathbb{R}^2$. Aici ω_1,ω_2 sunt funcţii Carathéodory pe $[0,t_m]\times\mathbb{R}_+$, nedescrescătoare în cel de-al doilea argument,

$\alpha \in L^1[t_m,1]$, în timp ce $\beta_1,\beta_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sunt nedescrescătoare şi $1/(\beta_1+\beta_2) \in L^1_{loc}(0,\infty)$.

Teorema 2.2.3 *Presupunem că au loc condiţiile* (2.2.8), (2.2.9). *În plus, să presupunem că există un număr pozitiv R_0 astfel încât pentru $\rho = (\rho_1,\rho_2) \in (0,\infty)^2$*

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_1}\int_0^{t_m}\omega_1(t,|\rho|_e)dt \geq \frac{1}{A_1} \\ \frac{1}{\rho_2}\int_0^{t_m}\omega_2(t,|\rho|_e)dt \geq \frac{1}{A_2} \end{cases} \quad \textit{implică} \quad |\rho|_e \leq R_0 \tag{2.2.10}$$

şi

$$\int_{R^*}^{\infty}\frac{d\tau}{\beta_1(\tau)+\beta_2(\tau)} > \int_{t_m}^{1}\alpha(s)ds, \tag{2.2.11}$$

unde $R^* = \left[\left(A_1\int_0^{t_m}\omega_1(t,R_0)dt\right)^2 + \left(A_2\int_0^{t_m}\omega_2(t,R_0)dt\right)^2\right]^{1/2}$. *Atunci problema* (2.2.1) *are cel puţin o soluţie.*

2.3 Condiţiile nelocale $x\,(0) = \alpha[x]$, $y\,(0) = \beta[y]$

Obiectivul principal al Secţiunii 2.3 este de a extinde rezultatele obţinute în Secţiunea 2.2 la cazul în care condiţiile nelocale sunt exprimate mai general, în termenii a două funcţionale liniare şi continue pe $C[0,1]$.

Mai exact, avem de-a face cu problema nelocală pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi de forma

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t,x(t),y(t)) \\ y'(t) = f_2(t,x(t),y(t)) \qquad \text{(a.p.t. pe } [0,1]) \\ x(0) = \alpha[x] \\ y(0) = \beta[y]. \end{cases} \tag{2.3.12}$$

Aici $f_1, f_2 : [0,1]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii Carathéodory, $\alpha,\beta : C[0,1] \to \mathbb{R}$ sunt funcţionale liniare şi continue astfel încât $1-\alpha[1] \neq 0$ şi $1-\beta[1] \neq 0$.

Aceasta poate fi văzută ca o problemă de punct fix în $C[0,1]^2$ pentru operatorul complet continuu $T : C[0,1]^2 \to C[0,1]^2$, $T = (T_1,T_2)$, unde T_1 şi T_2 sunt daţi prin

$$\begin{aligned} T_1(x,y)(t) &= \tfrac{1}{1-\alpha[1]}\alpha[g_1] + \textstyle\int_0^t f_1(s,x(s),y(s))\,ds, \\ T_2(x,y)(t) &= \tfrac{1}{1-\beta[1]}\beta[g_2] + \textstyle\int_0^t f_2(s,x(s),y(s))\,ds, \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

unde $g_1(x,y)(t) := \int_0^t f_1(s,x(s),y(s))\,ds$, $g_2(x,y)(t) := \int_0^t f_2(s,x(s),y(s))\,ds$.

Impunem următoarea proprietate:

$$x|_{[0,t_0]} = y|_{[0,t_0]} \text{ implică } \alpha[x-y] = 0, \text{ ori de câte ori } x,y \in C[0,1]. \tag{2.3.14}$$

Aşadar, condiţia (2.3.14) ne indică faptul că valoarea funcţionalei α în orice funcţie x depinde doar de restricţiile lui x la subintervalul fixat $[0,t_0]$.
Proprietatea centrală a funcţionalei α ce satisface (2.3.14) constă în faptul că

$$|\alpha[x]| \leq \|\alpha\| \cdot |x|_{C[0,t_0]}, \tag{2.3.15}$$

oricare ar fi $x \in C[0,1]$.

2.3.1 Existenţă şi unicitate cu condiţii Lipschitz

Iniţial, arătăm că existenţa şi unicitatea soluţiilor pentru problema (2.3.12) rezultă din teorema de punct fix a lui Perov în cazul în care f_1, f_2 satisfac condiţiile Lipschitz în x şi y :

$$\begin{cases} |f_1(t,x,y) - f_1(t,\overline{x},\overline{y})| \le a_1 |x-\overline{x}| + b_1 |y-\overline{y}| \\ |f_2(t,x,y) - f_2(t,\overline{x},\overline{y})| \le a_2 |x-\overline{x}| + b_2 |y-\overline{y}|, \end{cases} \tag{2.3.16}$$

oricare ar fi $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.3.1 *Dacă f_1, f_2 satisfac condiţiile Lipschitz* (2.3.16) *şi matricea*

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} a_1\left(\frac{\|\alpha\|}{|1-\alpha[1]|}+1\right) & b_1\left(\frac{\|\alpha\|}{|1-\alpha[1]|}+1\right) \\ a_2\left(\frac{\|\beta\|}{|1-\beta[1]|}+1\right) & b_2\left(\frac{\|\beta\|}{|1-\beta[1]|}+1\right) \end{bmatrix} \tag{2.3.17}$$

este convergentă la zero, atunci problema (2.3.12) *are o soluţie unică.*

Pentru cel de-al doilea rezultat de existenţă şi unicitate obţinut prin intermediul teoremei de punct fix a lui Perov, vom considera că există $t_0 \in (0,1)$ astfel încât neliniarităţile f_1, f_2 să satisfacă condiţiile Lipschitz ce diferă pe $[0,t_0]$ şi $[t_0,1]$, respectiv:

$$|f_1(t,x,y) - f_1(t,\overline{x},\overline{y})| \le \begin{cases} a_1 |x-\overline{x}| + b_1 |y-\overline{y}|, & \text{dacă } t \in [0,t_0] \\ a_2 |x-\overline{x}| + b_2 |y-\overline{y}|, & \text{dacă } t \in [t_0,1], \end{cases} \tag{2.3.18}$$

$$|f_2(t,x,y) - f_2(t,\overline{x},\overline{y})| \le \begin{cases} A_1 |x-\overline{x}| + B_1 |y-\overline{y}|, & \text{dacă } t \in [0,t_0] \\ A_2 |x-\overline{x}| + B_2 |y-\overline{y}|, & \text{dacă } t \in [t_0,1], \end{cases} \tag{2.3.19}$$

oricare ar fi $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$.

În cele ce urmează notăm cu $A_\alpha := \frac{\|\alpha\|}{|1-\alpha[1]|} + 1$, $B_\beta := \frac{\|\beta\|}{|1-\beta[1]|} + 1$.

Teorema 2.3.2 *Presupunem că α, β satisfac* (2.3.14). *Dacă f_1, f_2 satisfac condiţiile Lipschitz* (2.3.18), (2.3.19) *şi matricea*

$$M_0 := \begin{bmatrix} a_1 t_0 A_\alpha & b_1 t_0 A_\alpha \\ A_1 t_0 B_\beta & B_1 t_0 B_\beta \end{bmatrix} \tag{2.3.20}$$

este convergentă la zero, atunci problema (2.3.12) *are o unică soluţie.*

Exemplul 2.3.3 Considerăm următoarea problemă nelocală:

$$\begin{cases} x'(t) = 0.1 + \frac{1}{4}\frac{y^2(t)}{1+y^2(t)}\sin(2x(t)) \equiv f_1(x(t),y(t)) \\ y'(t) = 0.1 + \frac{2}{3}\frac{y^2(t)}{1+y^2(t)}\cos(2x(t)) \equiv f_2(x(t),y(t)) \quad , \ t \in [0,40] \\ x(0) = \int_0^{1/2} x(s)ds, \ \ y(0) = \int_0^{1/2} y(s)ds. \end{cases} \tag{2.3.21}$$

Avem

$$M_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{32} \\ \frac{4}{3} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$

cu valorile proprii $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0.9330\ldots$ Aşadar M_0 este convergentă la zero şi Teorema 2.3.2 garantează faptul că problema (2.3.21) are o unică soluţie.

2.3.2 Existenţă cu condiţii de creştere cel mult liniară

Iniţial, arătăm că existenţa soluţiilor problemei (2.3.12) rezultă din teorema de punct fix a lui Schauder în caz că f_1, f_2 satisfac în loc de condiţiile de tip Lipschitz, condiţiile mai relaxate de creştere cel mult liniară:

$$\begin{cases} |f_1(t,x,y)| \leq a_1 |x| + b_1 |y| + c_1 \\ |f_2(t,x,y)| \leq a_2 |x| + b_2 |y| + c_2, \end{cases} \tag{2.3.22}$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

În acest caz, avem de-a face cu oricare două funcţionale liniare α, β (i.e., nu presupunem că are loc (2.3.14)).

Teorema 2.3.4 *Dacă f_1, f_2 satisfac* (2.3.22) *şi matricea* (2.3.17) *este convergentă la zero, atunci problema* (2.3.12) *are cel puţin o soluţie.*

În cele ce urmează, vom da un alt rezultat de existenţă pentru problema (2.3.12) ca o aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder în cazul în care f_1, f_2 satisfac condiţii mai relaxate de creştere cel mult liniare date în mod diferit, pe două subintervale $[0, t_0]$ şi $[t_0, 1]$,

$$|f_1(t,x,y)| \leq \begin{cases} a_1 |x| + b_1 |y| + c_1, & \text{dacă } t \in [0, t_0] \\ a_2 |x| + b_2 |y| + c_2, & \text{dacă } t \in [t_0, 1], \end{cases} \tag{2.3.23}$$

$$|f_2(t,x,y)| \leq \begin{cases} A_1 |x| + B_1 |y| + C_1, & \text{dacă } t \in [0, t_0] \\ A_2 |x| + B_2 |y| + C_2, & \text{dacă } t \in [t_0, 1], \end{cases} \tag{2.3.24}$$

şi dacă funcţionalele α, β satisfac (2.3.14).

Teorema 2.3.5 *Dacă f_1, f_2 satisfac* (2.3.23), (2.3.24) *şi matricea* (2.3.20) *este convergentă la zero, atunci problema* (2.3.12) *are cel puţin o soluţie.*

Exemplul 2.3.6 Considerăm problema nelocală

$$\begin{cases} x' = -0.9x - 1.8\frac{xy}{2+x^2} + 90 \equiv f_1(x,y) \\ y' = -0.2y - 1.8\frac{xy}{2+x^2} + 750 \equiv f_2(x,y) \quad , \ t \in [0,1] \\ x(0) = \int_0^{1/2} x(s)ds,\ y(0) = \int_0^{1/2} y(s)ds. \end{cases} \tag{2.3.25}$$

Întrucât $\left|\frac{x}{2+x^2}\right| \leq \frac{\sqrt{2}}{4}$, avem

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.6364 \\ 0 & 0.8364 \end{pmatrix}.$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0.9,\ \lambda_2 = 0.8364$, ceea ce demonstrează faptul că M_0 este convergentă la zero. Atunci, din Teorema 2.3.5, problema (2.3.25) are cel puţin o soluţie.

2.3.3 Existenţă cu condiţii de creştere mai generale

Considerăm acum că neliniarităţile f_1, f_2 satisfac condiţii de creştere mai generale pe întregul interval $[0,1]$, şi anume:

$$\begin{cases} |f_1(t,u)| \leq \omega_1(t,|u|_e) \\ |f_2(t,u)| \leq \omega_2(t,|u|_e) \end{cases}, \quad \text{pentru } t \in [0,1], \tag{2.3.26}$$

oricare ar fi $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, unde prin $|u|_e$ înţelegem norma euclidiană din $\mathbb{R}^2$. Aici, ω_1, ω_2 sunt funcţii Carathéodory pe $[0,1] \times \mathbb{R}_+$, nedescrescătoare în al doilea argument.

Teorema 2.3.7 *Presupunem că are loc condiţia* (2.3.26)*. În plus, presupunem că există un număr pozitiv R_0 astfel încât pentru $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in (0,\infty)^2$*

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_1}\int_0^1 \omega_1(t,|\rho|_e)dt \geq \frac{1}{A_\alpha} \\ \frac{1}{\rho_2}\int_0^1 \omega_2(t,|\rho|_e)dt \geq \frac{1}{B_\beta} \end{cases} \quad \textit{implică} \quad |\rho|_e \leq R_0. \tag{2.3.27}$$

Atunci problema (2.3.12) *are cel puţin o soluţie.*

Mai departe, presupunem că neliniarităţile f_1, f_2 satisfac condiţii de creştere mai generale date diferit pe $[0,t_0]$ şi $[t_0,1]$, şi anume:

$$|f_1(t,u)| \leq \begin{cases} \omega_1(t,|u|_e), & \text{dacă } t \in [0,t_0] \\ \gamma(t)\beta_1(|u|_e), & \text{dacă } t \in [t_0,1], \end{cases} \tag{2.3.28}$$

$$|f_2(t,u)| \leq \begin{cases} \omega_2(t,|u|_e), & \text{dacă } t \in [0,t_0] \\ \gamma(t)\beta_2(|u|_e), & \text{dacă } t \in [t_0,1], \end{cases} \tag{2.3.29}$$

oricare ar fi $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Aici, ω_1, ω_2 sunt funcţii Carathéodory pe $[0,t_0] \times \mathbb{R}_+$, nedescrescătoare în al doilea argument, $\gamma \in L^1[t_0,1]$, în timp ce $\beta_1, \beta_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ sunt nedescrescătoare şi $1/(\beta_1 + \beta_2) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 2.3.8 *Presupunem că funcţionalele α, β satisfac* (2.3.14) *şi condiţiile* (2.3.28), (2.3.29) *au loc. In plus, presupunem că există un număr pozitiv R_0 astfel încât pentru $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in (0,\infty)^2$*

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_1}\int_0^{t_0} \omega_1(t,|\rho|_e)dt \geq \frac{1}{A_\alpha} \\ \frac{1}{\rho_2}\int_0^{t_0} \omega_2(t,|\rho|_e)dt \geq \frac{1}{B_\beta} \end{cases} \quad \textit{implică} \quad |\rho|_e \leq R_0 \tag{2.3.30}$$

şi

$$\int_{R^*}^{\infty} \frac{d\tau}{\beta_1(\tau) + \beta_2(\tau)} > \int_{t_0}^1 \gamma(s)ds, \tag{2.3.31}$$

unde

$$R^* = \left[\left(A_\alpha \int_0^{t_0} \omega_1(t,R_0)dt\right)^2 + \left(B_\beta \int_0^{t_0} \omega_2(t,R_0)dt\right)^2\right]^{1/2}.$$

Atunci problema (2.3.12) *are cel puţin o soluţie.*

2.4 Condiţiile nelocale $x(0) = \alpha[y],\ y(0) = \beta[x]$

În această secţiune introducem în cadrul studiului nostru condiţii nelocale cuplate exprimate prin intermediul funcţionalelor liniare, şi anume

$$x(0) = \alpha[y], \quad y(0) = \beta[x].$$

Aşadar, avem de-a face cu problema nelocală pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \\ x(0) = \alpha[y] \\ y(0) = \beta[x]. \end{cases} \quad \text{(a.p.t. pe } [0,1]) \tag{2.4.32}$$

Aici, $f_1, f_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii Carathéodory, $\alpha, \beta : C[0,1] \to \mathbb{R}$ sunt funcţionale liniare şi continue.

Aceasta poate fi văzută ca o problemă de punct fix în $C[0,1]^2$ pentru operatorul complet continuu $T : C[0,1]^2 \to C[0,1]^2$, $T = (T_1, T_2)$, unde T_1 şi T_2 sunt exprimaţi prin

$$\begin{aligned} T_1(x,y)(t) &= \tfrac{1}{1-\alpha[1]\beta[1]} (\alpha[g_2] + \alpha[1]\beta[g_1]) + \textstyle\int_0^t f_1(s, x(s), y(s))\, ds, \\ T_2(x,y)(t) &= \tfrac{1}{1-\alpha[1]\beta[1]} (\beta[g_1] + \beta[1]\alpha[g_2]) + \textstyle\int_0^t f_2(s, x(s), y(s))\, ds. \end{aligned}$$

2.4.1 Probleme cu condiţii Lipschitz

Presupunem că f_1, f_2 satisfac condiţiile Lipschitz în x şi y :

$$\begin{cases} |f_1(t,x,y) - f_1(t,\overline{x},\overline{y})| \le a_1 |x - \overline{x}| + b_1 |y - \overline{y}| \\ |f_2(t,x,y) - f_2(t,\overline{x},\overline{y})| \le A_1 |x - \overline{x}| + B_1 |y - \overline{y}|, \end{cases} \tag{2.4.33}$$

oricare ar fi $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$ şi facem notaţiile

$$\begin{aligned} A_\alpha &:= \tfrac{1}{|1-\alpha[1]\beta[1]|} \|\alpha\|, \quad A_\beta := \tfrac{|\alpha[1]|}{|1-\alpha[1]\beta[1]|} \|\beta\|, \\ B_\alpha &:= \tfrac{|\beta[1]|}{|1-\alpha[1]\beta[1]|} \|\alpha\|, \quad B_\beta := \tfrac{1}{|1-\alpha[1]\beta[1]|} \|\beta\|. \end{aligned}$$

Teorema 2.4.1 *Dacă f_1, f_2 satisfac condiţiile Lipschitz* (2.4.33) *şi matricea*

$$M := \begin{bmatrix} A_\alpha A_1 + (A_\beta + 1) a_1 & A_\alpha B_1 + (A_\beta + 1) b_1 \\ B_\beta a_1 + (B_\alpha + 1) A_1 & B_\beta b_1 + (B_\alpha + 1) B_1 \end{bmatrix} \tag{2.4.34}$$

este convergentă la zero, atunci problema (2.4.32) *are soluţie unică.*

În cazul în care α, β satisfac condiţia (2.3.14) pentru un anumit $t_0 \in (0,1)$, putem impune condiţii de creştere diferite pentru f_1, f_2, pe $[0, t_0]$ şi respectiv $[t_0, 1]$:

$$|f_1(t,x,y) - f_1(t,\overline{x},\overline{y})| \le \begin{cases} a_1 |x - \overline{x}| + b_1 |y - \overline{y}|, & \text{dacă } t \in [0, t_0] \\ a_2 |x - \overline{x}| + b_2 |y - \overline{y}|, & \text{dacă } t \in [t_0, 1], \end{cases} \tag{2.4.35}$$

$$|f_2(t,x,y) - f_2(t,\overline{x},\overline{y})| \le \begin{cases} A_1 |x - \overline{x}| + B_1 |y - \overline{y}|, & \text{dacă } t \in [0, t_0] \\ A_2 |x - \overline{x}| + B_2 |y - \overline{y}|, & \text{dacă } t \in [t_0, 1], \end{cases} \tag{2.4.36}$$

oricare ar fi $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.4.2 *Presupunem că α, β satisfac condiţia* (2.3.14). *Dacă f_1, f_2 satisfac condiţiile Lipschitz* (2.4.35), (2.4.36) *şi matricea*

$$M_0 := \begin{bmatrix} A_\alpha A_1 t_0 + (A_\beta + 1)\, a_1 t_0 & A_\alpha B_1 t_0 + (A_\beta + 1)\, b_1 t_0 \\ B_\beta a_1 t_0 + (B_\alpha + 1)\, A_1 t_0 & B_\beta b_1 t_0 + (B_\alpha + 1)\, B_1 t_0 \end{bmatrix} \tag{2.4.37}$$

este convergentă la zero, atunci problema (2.4.32) *are o soluţie unică.*

Exemplul 2.4.3 Vom considera următoarea problemă nelocală:

$$\begin{cases} x'(t) = 0.1 + \frac{1}{4}\frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} \sin(2x(t)) \equiv f_1(x(t), y(t)) \\ y'(t) = 0.1 + \frac{1}{3}\frac{y^2(t)}{1+y^2(t)} \cos(2x(t)) \equiv f_2(x(t), y(t)) \quad , \ t \in [0,1] \\ x(0) = \int_0^{1/4} x(s)ds, \quad y(0) = \int_0^{1/4} y(s)ds. \end{cases} \tag{2.4.38}$$

Avem $\alpha\,[u] = \beta[u] = \int_0^{1/4} u(s)ds$, $\alpha\,[1] = \beta[1] = \frac{1}{4}$ şi $\|\alpha\| = \|\beta\| = \frac{1}{4}$. De asemenea, $t_0 = 1/4$, $A_\alpha = B_\beta = 4/15$, $A_\beta = B_\alpha = 1/15$ şi

$$M = \begin{pmatrix} \frac{8}{45} & \frac{\sqrt{3}}{30} \\ \frac{19}{90} & \frac{19\sqrt{3}}{480} \end{pmatrix}$$

ale cărei valori proprii sunt $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0.246338122$. Cum λ_1 şi λ_2 sunt mai mici decât 1, matricea M este convergentă la zero şi Teorema 2.4.2 garantează existenţa unei soluţii unice pentru problema (2.4.38).

2.4.2 Probleme cu condiţii de creştere cel mult liniară

Pentru primul rezultat de existenţă, presupunem că f_1, f_2 satisfac în locul condiţiei Lipschitz, condiţia mai relaxată de creştere cel mult liniară, uniform pe întreg intervalul $[0,1]$, şi că α, β sunt funcţionale liniare şi continue generale pe $C[0,1]$. Aşadar, presupunem că

$$\begin{cases} |f_1(t,x,y)| \le a_1\,|x| + b_1\,|y| + c_1, \\ |f_2(t,x,y)| \le A_1\,|x| + B_1\,|y| + C_1, \end{cases} \tag{2.4.39}$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.4.4 *Dacă f_1, f_2 satisfac* (2.4.39) *şi matricea* (2.4.34) *este convergentă la zero, atunci problema* (2.4.32) *are cel puţin o soluţie.*

Pentru cel de-al doilea rezultat de existenţă, o altă aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder, impunem neliniarităţilor f_1, f_2 condiţiile de creştere mai generale date diferit pe $[0, t_0]$ şi $[t_0, 1]$, respectiv:

$$|f_1(t,x,y)| \le \begin{cases} a_1\,|x| + b_1\,|y| + c_1, & \text{dacă } t \in [0, t_0] \\ a_2\,|x| + b_2\,|y| + c_2, & \text{dacă } t \in [t_0, 1], \end{cases} \tag{2.4.40}$$

$$|f_2(t,x,y)| \leq \begin{cases} A_1|x| + B_1|y| + C_1, & \text{dacă } t \in [0,t_0] \\ A_2|x| + B_2|y| + C_2, & \text{dacă } t \in [t_0,1], \end{cases} \tag{2.4.41}$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$ şi anumiţi coeficienţi nenegativi $a_i, b_i, c_i, A_i, B_i, C_i, i = 1, 2$.

Teorema 2.4.5 *Presupunem că* α, β *satisfac* (2.3.14). *Dacă* f_1, f_2 *satisfac* (2.4.40), (2.4.41) *şi matricea* (2.4.37) *este convergentă la zero, atunci problema* (2.4.32) *are cel puţin o soluţie.*

Exemplul 2.4.6 Studiem problema nelocală

$$\begin{cases} x' = -0.9x - 1.8\frac{xy}{2+x^2} + 1 \equiv f_1(x,y) \\ y' = -0.2y - 1.8\frac{xy}{2+x^2} + 0.7 \equiv f_2(x,y) \\ x(0) = \int_0^{1/4} x(s)ds \\ y(0) = \int_0^{1/4} y(s)ds. \end{cases}, \ t \in [0,1] \tag{2.4.42}$$

Obţinem faptul că matricea

$$M = \begin{pmatrix} 0.24 & 0.08094757079 \\ 0.06 & 0.04094757081 \end{pmatrix}.$$

are valorile proprii (rotunjite la a treia zecimală după virgulă) $\lambda_1 = 0.262 < 1$, $\lambda_2 = 0.019 < 1$. Aceasta arată faptul că matricea M este convergentă la zero. Atunci, din Teorema 2.4.5, problema (2.4.42) are cel puţin o soluţie.

2.4.3 Probleme cu condiţii de creştere mai generale

Aşa cum am observat până acum, teorema Leray-Schauder garantează existenţa soluţiilor impunând condiţii de creştere mai generale pentru f_1, f_2 :

$$\begin{cases} |f_1(t,u)| \leq \omega_1(t, |u|_e) \\ |f_2(t,u)| \leq \omega_2(t, |u|_e) \end{cases} \tag{2.4.43}$$

oricare ar fi $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, unde prin $|u|_e$ am notat norma euclidiană din $\mathbb{R}^2$. Ca şi până acum, ω_1, ω_2 sunt funcţii Carathéodory pe $[0,1] \times \mathbb{R}_+$, nedescrescătoare în al doilea argument.

Teorema 2.4.7 *Presupunem că are loc condiţia* (2.4.43). *În plus, presupunem că există un număr pozitiv* R_0 *astfel încât pentru* $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in (0,\infty)^2$

$$\begin{cases} \frac{A_\beta+1}{\rho_1}\int_0^1 \omega_1(t,|\rho|_e)dt + \frac{A_\alpha}{\rho_1}\int_0^1 \omega_2(t,|\rho|_e)dt \geq 1 \\ \frac{B_\beta}{\rho_2}\int_0^1 \omega_1(t,|\rho|_e)dt + \frac{B_\alpha+1}{\rho_2}\int_0^1 \omega_2(t,|\rho|_e)dt \geq 1 \end{cases} \quad \textit{implică} \quad |\rho|_e \leq R_0 \tag{2.4.44}$$

Atunci problema (2.4.32) *are cel puţin o soluţie.*

Dacă funcţionalele α, β satisfac (2.3.14) pentru un anumit număr $t_0 \in (0,1)$, atunci putem impune funcţiilor f_1, f_2 să satisfacă condiţiile de creştere generale, date în mod diferit pe fiecare din intervalele $[0,t_0]$ şi $[t_0,1]$, şi anume:

$$|f_1(t,u)| \leq \begin{cases} \omega_1(t, |u|_e), & \text{dacă } t \in [0,t_0] \\ \gamma(t)\beta_1(|u|_e), & \text{dacă } t \in [t_0,1], \end{cases} \tag{2.4.45}$$

$$|f_2(t,u)| \leq \begin{cases} \omega_2(t,|u|_e), & \text{dacă } \ t\in[0,t_0] \\ \gamma(t)\beta_2(|u|_e)\ , & \text{dacă } \ t\in[t_0,1], \end{cases} \tag{2.4.46}$$

oricare ar fi $u=(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Din nou, ω_1,ω_2 sunt funcţii Carathéodory pe $[0,t_0]\times\mathbb{R}_+$, nedescrescătoare în al doilea argument, $\gamma\in L^1[t_0,1]$, în timp ce $\beta_1,\beta_2:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ sunt nedescrescătoare şi $1/(\beta_1+\beta_2)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$.

Teorema 2.4.8 *Presupunem că α,β satisfac* (2.3.14) *şi condiţiile* (2.4.45), (2.4.46) *au loc. În plus, presupunem că există un număr pozitiv R_0 astfel încât pentru $\rho=(\rho_1,\rho_2)\in(0,\infty)^2$*

$$\begin{cases} \frac{A_\beta+1}{\rho_1}\int_0^{t_0}\omega_1(t,|\rho|_e)dt+\frac{A_\alpha}{\rho_1}\int_0^{t_0}\omega_2(t,|\rho|_e)dt\geq 1 \\ \frac{B_\beta}{\rho_2}\int_0^{t_0}\omega_1(t,|\rho|_e)dt+\frac{B_\alpha+1}{\rho_2}\int_0^{t_0}\omega_2(t,|\rho|_e)dt\geq 1 \end{cases} \quad \textit{implică} \quad |\rho|_e\leq R_0 \tag{2.4.47}$$

şi

$$\int_{R^*}^{\infty}\frac{d\tau}{\beta_1(\tau)+\beta_2(\tau)}>\int_{t_0}^{1}\gamma(s)ds, \tag{2.4.48}$$

unde

$$\begin{aligned} R^* \;=\; & \left\{\left[(A_\beta+1)\int_0^{t_0}\omega_1(t,R_0)dt+A_\alpha\int_0^{t_0}\omega_2(t,R_0)dt\right]^2\right. \\ & \left.+\left[B_\beta\int_0^{t_0}\omega_1(t,R_0)dt+(B_\alpha+1)\int_0^{t_0}\omega_2(t,R_0)dt\right]^2\right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Atunci problema (2.4.32) *are cel puţin o soluţie.*

Capitolul 3

Sisteme cu condiţii nelocale cuplate generale

3.1 Prezentare generală

Având în minte problemele şi tehnicile considerate în Capitolul 2, în acest capitol este elaborată o teorie de existenţă a soluţiilor pentru sisteme de ordinul întâi n-dimensionale cu condiţii nelocale cuplate date prin funcţionale liniare generale.

Mai exact, avem în discuţie sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} u_1'(t) = f_1(t, u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)), \\ u_2'(t) = f_2(t, u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)), \\ ... \\ u_n'(t) = f_n(t, u_1(t), u_2(t), ..., u_n(t)), \end{cases} \tag{3.1.1}$$

pentru a.p.t. t din $[0,1]$, cu condiţiile nelocale cuplate

$$\begin{cases} u_1(0) = \alpha_{11}[u_1] + \alpha_{12}[u_2] + ... + \alpha_{1n}[u_n], \\ u_2(0) = \alpha_{21}[u_1] + \alpha_{22}[u_2] + ... + \alpha_{2n}[u_n], \\ ... \\ u_n(0) = \alpha_{n1}[u_1] + \alpha_{n2}[u_2] + ... + \alpha_{nn}[u_n]. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Aici $f_1, f_2, ..., f_n : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sunt funcţii L^1-Carathéodory şi $\alpha_{ij} : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2, ..., n$ sunt funcţionale liniare şi continue. Aşa cum s-a arătat în R. Precup şi D. Trif [66], problema (3.1.1)-(3.1.2) este suficient de generală pentru a cuprinde probleme legate de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul n cu condiţii nelocale ce implică funcţia necunoscută şi derivatele acesteia până la ordinul $n-1$.

Problema (3.1.1)-(3.1.2) poate fi rescrisă sub formă vectorială

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)), \quad \text{a.p.t. pe } [0,1], \\ u(0) = \alpha[u], \end{cases} \tag{3.1.3}$$

unde $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$, $f = (f_1, f_2, ..., f_n)$ şi

$$\alpha[u] = (\alpha_1[u], \alpha_2[u], ..., \alpha_n[u]), \tag{3.1.4}$$

$$\alpha_i [u] = \alpha_{i1}[u_1] + \alpha_{i2}[u_2] + ... + \alpha_{in} [u_n], \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{3.1.5}$$

Subliniem faptul că α este o aplicaţie continuă şi liniară din $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ în $\mathbb{R}^n$.

Presupunem că matricea

$$I - \alpha [1] \quad \text{este nesingulară,} \tag{3.1.6}$$

unde I este matricea unitate de ordinul n şi prin $\alpha [1]$ înţelegem matricea pătratică $\alpha [1] := (\alpha_{ij} [1])_{1 \leq i,j \leq n}$.

Aşadar, problema (3.1.1)-(3.1.2) este echivalentă cu ecuaţia integrală

$$u (t) = (I - \alpha [1])^{-1} \alpha \left[\int_0^t f (s, u (s)) \, ds \right] + \int_0^t f (s, u (s)) \, ds \tag{3.1.7}$$

în spaţiul $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$.

Abordarea noastră constă în a căuta soluţiile ecuaţiei (3.1.7) ca puncte fixe ale operatorului

$$(Tu) (t) = (I - \alpha [1])^{-1} \alpha \left[\int_0^t f (s, u (s)) \, ds \right] + \int_0^t f (s, u (s)) \, ds. \tag{3.1.8}$$

în spaţiul $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Pe parcursul acestui capitol, presupunem că

$$\alpha_{ij} [v] = \int_0^{t_0} v (s) \, dA_{ij} (s), \quad (v \in C [0, 1])$$

pentru $i, j = 1, 2, ..., n$, unde $t_0 \in [0, 1]$. În acest caz,

$$\alpha [v] = 0 \;\text{ ori de câte ori } v (t) \equiv 0 \text{ în } [0, t_0]. \tag{3.1.9}$$

Cu ipoteza (3.1.9), operatorul T poate fi scris ca suma a doi operatori, unul de tip Fredholm şi celălalt de tip Volterra,

$$T = T_F + T_v,$$

unde

$$(T_F u) (t) = \begin{cases} (I - \alpha [1])^{-1} \alpha \left[\int_0^t f (s, u (s)) \, ds \right] + \int_0^t f (s, u (s)) \, ds, & \text{pentru } 0 \leq t \leq t_0 \\ (I - \alpha [1])^{-1} \alpha \left[\int_0^t f (s, u (s)) \, ds \right] + \int_0^{t_0} f (s, u (s)) \, ds, & \text{pentru } t_0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(T_V u) (t) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } 0 \leq t \leq t_0 \\ \int_{t_0}^t f (s, u (s)) \, ds, & \text{pentru } t_0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

3.2 Existenţă şi unicitate. Cazul neliniarităţilor de tip Lipschitz

În această secţiune presupunem că funcţiile $f_1,\ f_2,\ ...,\ f_n$ satisfac condiţiile Lipschitz de forma

$$|f_i(t,u) - f_i(t,v)| \le \begin{cases} a_{i1}(t)\,|u_1 - v_1| + ... + a_{in}(t)\,|u_n - v_n|\,, \text{ pentru } t \in [0, t_0]\,, \\ b_{i1}(t)\,|u_1 - v_1| + ... + b_{in}(t)\,|u_n - v_n|\,, \text{ pentru } t \in [t_0, 1]\,, \end{cases} \tag{3.2.10}$$

oricare ar fi $u, v \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, ..., u_n)\,,\ v = (v_1, v_2, ..., v_n)\,,$ funcţiile $a_{ij} \in L^1((0,1); \mathbb{R}_+)\,,$ $b_{ij} \in L^p((0,1); \mathbb{R}_+)$ şi $1 < p \le \infty \ \ (1 \le i, j \le n)\,.$

Utilizând notaţiile vectoriale, putem rescrie condiţia (3.2.10) astfel:

$$\|f(t,u) - f(t,v)\| \le \begin{cases} A(t)\,\|u - v\|\,, & \text{pentru } t \in [0, t_0]\,, \\ B(t)\,\|u - v\|\,, & \text{pentru } t \in [t_0, 1]\,, \end{cases} \tag{3.2.11}$$

unde $A(t)\,, B(t)$ sunt matrice cu coeficienţii Lipschitz

$$A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \le i,j \le n}\,, \quad B(t) = (b_{ij}(t))_{1 \le i,j \le n}\,.$$

În mod evident $A \in L^1((0,1); \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+))$ şi $B \in L^p((0,1); \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+))\,.$

Teorema 3.2.1 *Fie* $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie Carathéodory ce satisface* (3.2.11) *şi fie* $\alpha : C([0,1], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ *liniară şi continuă ce satisface* (3.1.6) *şi* (3.1.9)*. Dacă*

$$\textit{matricea } \left(\left|(I - \alpha[1])^{-1}\right| |\alpha| + I\right) |A|_{L^1(0,t_0)} \textit{ este convergentă la zero,} \tag{3.2.12}$$

atunci problema (3.1.3) *are o soluţie unică* $u \in W^{1,1}((0,1); \mathbb{R}^n)\,.$

Notăm cu M_0, matricea

$$M_0 := \left|(I - \alpha[1])^{-1}\right| |\alpha| + I. \tag{3.2.13}$$

Exemplul 3.2.2 Considerăm problema nelocală

$$\begin{cases} x' = a \sin x + by + g(t) \equiv f_1(t,x,y), \\ y' = \cos(cx + dy) + h(t) \equiv f_2(t,x,y), \\ x(0) = \frac{1}{4} \int_0^{t_0} (x(s) + y(s))\, ds, \\ y(0) = \frac{1}{4} \int_0^{t_0} (x(s) + y(s))\, ds, \end{cases} \tag{3.2.14}$$

unde $t \in [0,1]\,,\ a, b, c, d \in R;\ g, h \in L^1(0,1)$ şi $0 \le t_0 \le 1$. Avem $\alpha_{ij}[1] = \frac{t_0}{4}$ şi $|\alpha_{ij}| = \frac{t_0}{4}$ pentru $1 \le i, j \le 2$. Atunci

$$M_0 |A|_{L^1(0,t_0)} = \frac{t_0}{2(2 - t_0)} \begin{bmatrix} (4 - t_0)|a| + t_0|c| & (4 - t_0)|b| + t_0|d| \\ t_0|a| + (4 - t_0)|c| & t_0|b| + (4 - t_0)|d| \end{bmatrix}. \tag{3.2.15}$$

Astfel, dacă matricea (3.2.15) este convergentă la zero, atunci problema (3.2.14) are soluţie unică.

Cazuri particulare: (a) dacă $|a| = |c|$ şi $|b| = |d|$, atunci

$$M_0 |A|_{L^1(0,t_0)} = \frac{2t_0}{2-t_0} \begin{bmatrix} |a| & |b| \\ |a| & |b| \end{bmatrix},$$

ale cărei valori proprii sunt $\lambda_1 = 0$ şi $\lambda_2 = \frac{2t_0}{2-t_0}(|a| + |b|)$. Astfel matricea este convergentă la zero dacă şi numai dacă

$$\frac{2t_0}{2-t_0}(|a| + |b|) < 1.$$

(b) dacă $|a| = |d|$ şi $|b| = |c|$, atunci

$$M_0 |A|_{L^1(0,t_0)} = \frac{t_0}{2(2-t_0)} \begin{bmatrix} (4-t_0)|a| + t_0|b| & t_0|a| + (4-t_0)|b| \\ t_0|a| + (4-t_0)|b| & (4-t_0)|a| + t_0|b| \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii sunt $\lambda_1 = t_0(|a| - |b|)$, $\lambda_2 = \frac{2t_0}{2-t_0}(|a| + |b|)$. Cum $|\lambda_1| \leq \lambda_2$, matricea este convergentă la zero dacă şi numai dacă

$$\frac{2t_0}{2-t_0}(|a| + |b|) < 1.$$

3.3 Existenţă. Neliniarităţi cu creştere cel mult liniară

Presupunem acum că funcţiile $f_1, f_2, \ldots, f_n$ satisfac în loc de condiţiile Lipschitz, condiţiile mai relaxate de creştere cel mult liniară

$$|f_i(t,u)| \leq \begin{cases} a_{i1}(t)|u_1| + \ldots + a_{in}(t)|u_n| + \overline{a}_i(t), & \text{pentru } t \in [0,t_0], \\ b_{i1}(t)|u_1| + \ldots + b_{in}(t)|u_n| + \overline{b}_i(t), & \text{pentru } t \in [t_0,1], \end{cases} \tag{3.3.16}$$

pentru $u \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ şi anumite funcţii $a_{ij}, \overline{a}_i, \overline{b}_i \in L^1((0,1);\mathbb{R}_+)$, $b_{ij} \in L^p((0,1);\mathbb{R}_+)$ şi $1 < p \leq \infty$ $(1 \leq i,j \leq n)$.

Utilizând notaţiile vectoriale putem rescrie condiţia (3.3.16) după cum urmează:

$$\|f(t,u)\| \leq \begin{cases} A(t)\|u\| + \overline{a}(t), & \text{pentru } t \in [0,t_0], \\ B(t)\|u\| + \overline{b}(t), & \text{pentru } t \in [t_0,1], \end{cases} \tag{3.3.17}$$

unde $A(t), B(t)$ sunt matricele cu coeficienţii $A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$, $B(t) = (b_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n}$ şi $\overline{a}(t), \overline{b}(t)$ matricele coloană $\overline{a}(t) = (\overline{a}_i(t))_{1 \leq i \leq n}$, $\overline{b}(t) = \left(\overline{b}_i(t)\right)_{1 \leq i \leq n}$. Avem $A \in L^1((0,1);\mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+))$, $B \in L^p((0,1);\mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+))$ şi $\overline{a}, \overline{b} \in L^1\left((0,1);\mathbb{R}^n_+\right)$.

Teorema 3.3.1 *Fie* $f : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *o funcţie Carathéodory ce satisface* (3.3.17) *şi fie* $\alpha : C([0,1],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ *liniară şi continuă ce satisface* (3.1.6) *şi* (3.1.9). *Dacă condiţia* (3.2.12) *are loc, atunci problema* (3.1.3) *are cel puţin o soluţie* $u \in W^{1,1}((0,1);\mathbb{R}^n)$.

Exemplul 3.3.2 Considerăm problema nelocală

$$\begin{cases} x' = ax\sin\left(\frac{y}{x}\right) + by\sin\left(\frac{x}{y}\right) + g(t) \equiv f_1(t,x,y), \\ y' = cx\sin\left(\frac{y}{x}\right) + dy\sin\left(\frac{x}{y}\right) + h(t) \equiv f_2(t,x,y), \\ x(0) = \frac{1}{4}\int_0^{t_0}(x(s) + y(s))\,ds, \\ y(0) = \frac{1}{4}\int_0^{t_0}(x(s) + y(s))\,ds, \end{cases} \tag{3.3.18}$$

unde $t \in [0,1]$, $a,b,c,d \in R$; $g,h \in L^1(0,1)$ şi $0 \leq t_0 \leq 1$. Cum

$$|f_1(t,x,y)| \leq |a|\,|x| + |b|\,|y| + |g(t)|, \qquad |f_2(t,x,y)| \leq |c|\,|x| + |d|\,|y| + |h(t)|$$

suntem în ipotezele din Secţiunea 3.3. De asemenea, matricea $M_0\,|A|_{L^1(0,t_0)}$ este cea din Exemplul 3.2.2. Aşadar, potrivit Teoremei 3.3.1, dacă această matrice este convergentă la zero, atunci problema (3.3.18) are cel puţin o soluţie. Este de notat faptul că funcţiile $f_1(t,x,y)$, $f_2(t,x,y)$ din acest exemplu nu satisfac condiţiile Lipschitz în x,y şi în consecinţă Teorema 3.2.1 nu se aplică.

3.4 Existenţă. Neliniarităţi cu creştere mai generală

Presupunem că neliniarităţile $f_1, f_2, ..., f_n$ satisfac condiţii de creştere mai generale, şi anume

$$|f_i(t,u)| \leq \begin{cases} \omega_i(t,\|u\|), & \text{dacă } t \in [0,t_0], \\ \beta(|u|)\gamma_i(t), & \text{dacă } t \in [t_0,1], \end{cases} \tag{3.4.19}$$

oricare ar fi $u = (u_1, u_2, ..., u_2) \in \mathbb{R}^n$ $(1 \leq i \leq n)$. Aici ω_i sunt funcţii L^1-Carathéodory pe $[0,t_0] \times \mathbb{R}^n_+$, nedescrescătoare în al doilea argument, $\gamma_i \in L^1((t_0,1);\mathbb{R}_+)$, în timp ce $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ este nedescrescătoare şi $1/\beta \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$; aici, simbolurile $|.|$, $\|.\|$ sunt folosite pentru a nota norma Euclidiană şi the norma vectorială din $\mathbb{R}^n$, respectiv.

Utilizând notaţia vectorială, condiţia (3.4.19) poate fi rescrisă astfel:

$$\|f(t,u)\| \leq \begin{cases} \omega(t,\|u\|), & \text{dacă } t \in [0,t_0], \\ \beta(|u|)\gamma(t), & \text{dacă } t \in [t_0,1], \end{cases} \tag{3.4.20}$$

unde $\omega(t,\|u\|)$, $\gamma(t)$ sunt matricele coloană $\omega(t,\|u\|) = (\omega_i(t,\|u\|))_{1\leq i\leq n}$, $\gamma(t) = (\gamma_i(t))_{1\leq i\leq n}$.

Teorema 3.4.1 *Presupunem că are loc condiţia* (3.4.20). *În plus, presupunem că există vectorul* $R_0 \in \mathbb{R}^n_+$ *şi un număr* $R_1 > 0$ *astfel încât*

$$\text{dacă} \;\; \rho \in \mathbb{R}^n_+ \;\; \text{şi} \;\; M_0 \int_0^{t_0} \omega(t,\rho)dt \geq \rho, \;\; \text{atunci} \;\; \rho \leq R_0 \tag{3.4.21}$$

şi

$$\int_{t_0}^1 |\gamma(s)|\,ds = \int_{R_0^*}^{R_1} \frac{1}{\beta(\tau)} d\tau, \tag{3.4.22}$$

unde $R_0^* = \left| M_0 \int_0^{t_0} \omega(s,R_0)ds \right|$ *şi* M_0 *este dată de* (3.2.13). *Atunci problema* (3.1.3) *are cel puţin o soluţie* $u \in W^{1,1}((0,1);\mathbb{R}^n)$ *astfel încât*

$$\|u\|_{C[0,t_0]} \leq R_0 \;\; \text{şi} \;\; |u|_{C([t_0,1],\mathbb{R}^n)} \leq R_1. \tag{3.4.23}$$

Capitolul 4

Rezultate de existenţă pentru probleme la limită cu condiţii pe trei puncte pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul doi

4.1 Prezentare generală

Acest capitol este dedicat studiului ecuaţiilor şi sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul doi cu condiţii neliniare la limită pe trei puncte.

Fiind motivaţi de lucrarea lui E.V. Castelani şi T.F. Ma [23], în Secţiunea 4.2, studiem problema cu condiţii la limită pe trei puncte pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul doi:

$$\begin{cases} u'' = f\left(t, u, u'\right), \quad 0 < t < t_0 \\ u(0) = 0,\, u(t_0) = g(u(\eta)) \end{cases} \tag{4.1.1}$$

unde $0 < \eta < t_0 < 1$ şi f, g sunt funcţii continue. Instrumentele noastre de lucru sunt teoremele de punct fix ale lui Banach şi Schauder.

În Secţiunea 4.3, discutăm sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{cases} u''(t) = f\left(t, u(t), v(t)\right) \\ v''(t) = g\left(t, u(t), v(t)\right) \\ u(0) = 0,\; u(t_0) = \phi(u(\eta), v(\eta)) \\ v(0) = 0,\; v(t_0) = \psi(u(\eta), v(\eta)) \end{cases} \quad (0 < t < t_0)$$

prin utilizarea teoremelor de punct fix ale lui Perov şi Schauder precum şi tehnica bazată pe utilizarea matricelor convergente la zero şi a normelor vectoriale.

Secţiunea 4.4 este dedicată problemei

$$\begin{cases} u'' = f\left(t, u, u'\right), \quad 0 < t < 1 \\ u(0) = 0,\; u(t_0) = g(u(\eta)). \end{cases} \tag{4.1.2}$$

În comparaţie cu problema (4.1.1), chiar dacă condiţia la limită pe trei puncte este aceeaşi, ecuaţia (4.1.2) este considerată pe intervalul mai mare $[0, 1]$ ceea ce ne permite să combinăm metoda operatorială cu tehnica bazată pe norma Bielecki. În cele din urmă, în

Secţiunea 4.5, o strategie similară este aplicată unui sistem de două ecuaţii diferenţiale de ordinul doi.

4.2 Rezultate de existenţă pentru ecuaţii

Considerăm problema (4.1.1) cu $f : [0, t_0] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţii continue. Avem câteva ipoteze:

(H1) există $a, b, c > 0$ astfel încât

$$\begin{cases} |f(t,u,v) - f(t,\overline{u},\overline{v})| \leq a\,|u - \overline{u}| + b\,|v - \overline{v}| \\ |g(u) - g(\overline{u})| \leq c\,|u - \overline{u}|, \end{cases} \tag{4.2.1}$$

pentru $t \in [0, t_0]$ şi $u, v, \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}$.

(H2) există $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2 > 0$ astfel încât

$$|f(t,u,v)| \leq \alpha_1\,|u| + \alpha_2\,|v| + \alpha_3 \;\text{ şi }\; |g(u)| \leq \beta_1\,|u| + \beta_2, \tag{4.2.2}$$

pentru $t \in [0, t_0]$ şi $u, v \in \mathbb{R}$.

4.2.1 Aplicaţie a principiului contracţiilor al lui Banach

Începem această secţiune prin a sublinia faptul că problema (4.1.1) poate fi scrisă în mod echivalent

$$u(t) = \int_0^{t_0} G(t,s) f\left(s, u\left(s\right), u'(s)\right) ds + \frac{t}{t_0} g(u(\eta)) \tag{4.2.3}$$

unde G este funcţia Green pentru $u''(t) = f(t)$ cu $u(0) = u(t_0) = 0$, şi anume

$$G(t,s) = \begin{cases} -\frac{t(t_0-s)}{t_0}, & 0 \leq t \leq s \leq t_0 \\ -\frac{s(t_0-t)}{t_0}, & 0 \leq s \leq t \leq t_0. \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Observăm că u este o soluţie a (4.1.1) dacă şi numai dacă u este un punct fix al operatorului $T : C^1[0, t_0] \to C^1[0, t_0]$, definit prin

$$(Tu)(t) = \int_0^{t_0} G(t,s) f\left(s, u\left(s\right), u'(s)\right) ds + \frac{t}{t_0} g(u(\eta)). \tag{4.2.5}$$

Teorema 4.2.1 *Dacă f, g satisfac* (H1) *cu*

$$\frac{a+b}{2} t_0 + \frac{c}{t_0} < 1, \tag{4.2.6}$$

atunci problema (4.1.1) *are o soluţie unică. Mai mult, această soluţie poate fi obţinută ca limită a şirului aproximaţiilor succesive.*

4.2.2 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder

Folosind ipoteza (H2), avem următorul rezultat de existenţă ca o consecinţă a teoremei de punct fix a lui Schauder.

Teorema 4.2.2 *Presupunem că* (H2) *are loc cu*

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}t_0+\frac{\beta_1}{t_0}<1. \tag{4.2.7}$$

Atunci problema (4.1.1) *are cel puţin o soluţie.*

4.2.3 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Boyd-Wong

Teorema 4.2.3 (Principiul contracţiilor a lui Boyd-Wong) *Fie (X,d) un spaţiu metric complet şi presupunem că $T:X\to X$ satisface condiţia*

$$d(Tx,Ty)\le\Psi(d(x,y)) \qquad \text{oricare ar fi } x,y\in X,$$

unde $\Psi:[0,\infty)\to[0,\infty)\,,0\le\Psi(t)<t$ pentru $t>0$ şi Ψ este superior semicontinuă la dreapta, adică $r_j\searrow r\ge 0$ implică $\limsup_{j\to\infty}\Psi(r_j)\le\Psi(r)$. Atunci T are un unic punct fix x^* şi $(T^n(x))$ converge la x^* pentru orice $x\in X$.

În această secţiune, în loc de condiţia Lipschitz asupra lui f din (H1), considerăm condiţiile mai generale de tip Boyd-Wong, şi anume:

(H3) există $\psi_1,\psi_2:[0,\infty)\to[0,\infty)$ superior semicontinue la dreapta şi nedescrescătoare, şi $c>0$ astfel încât

$$\begin{cases} |f(t,u,v)-f(t,\overline{u},\overline{v})|\le\psi_1(|u-\overline{u}|)+\psi_2(|v-\overline{v}|)\\ |g(u)-g(\overline{u})|\le c\,|u-\overline{u}|\,,\end{cases} \tag{4.2.8}$$

pentru $t\in[0,t_0]$ şi $u,\overline{u},v,\overline{v}\in\mathbb{R}$.

Teorema 4.2.4 *Dacă f,g satisfac* (H3) *şi*

$$\Psi(t):=\frac{t_0}{2}(\psi_1+\psi_2)(t)+\frac{c}{t_0}t<t, \tag{4.2.9}$$

pentru $t>0$, atunci problema (4.1.1) *are o soluţie unică. Mai mult, această soluţie poate fi obţinută ca limită a şirului aproximaţiilor succesive.*

4.3 Rezultate de existenţă pentru sisteme

Tratăm în cele ce urmează problema cu condiţii la limită pe trei puncte pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale de tipul:

$$\begin{cases} u''(t)=f\left(t,u(t),v(t)\right)\\ v''(t)=g\left(t,u(t),v(t)\right)\\ u(0)=0,\ u(t_0)=\phi(u(\eta),v(\eta)poate)fi\\ v(0)=0,\ v(t_0)=\psi(u(\eta),v(\eta)),\end{cases}\quad,\quad 0<t<t_0 \tag{4.3.10}$$

unde $0<\eta<t_0<1$ şi f,g,ϕ,ψ sunt funcţii continue.

Aceasta poate fi văzută ca o problemă de punct fix în $C\,[0,t_0]^2$

$$\begin{cases} u=T_1(u,v)\\ v=T_2(u,v)\end{cases}$$

pentru un operator complet continuu $T=(T_1,T_2)$, $T:C[0,t_0]^2\to C[0,t_0]^2$ unde T_1,T_2 sunt daţi prin

$$\begin{aligned} T_1(u,v)(t) &= \int_0^{t_0} G(t,s)f(s,u(s),v(s))\,ds + \tfrac{t}{t_0}\phi(u(\eta),v(\eta)) \\ T_2(u,v)(t) &= \int_0^{t_0} G(t,s)g(s,u(s),v(s))\,ds + \tfrac{t}{t_0}\psi(u(\eta),v(\eta)). \end{aligned}$$

4.3.1 Neliniarităţi cu proprietatea Lipschitz. Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Perov

Aici existenţa soluţiilor pentru problema (4.3.10) este stabilită prin intermediul teoremei de punct fix a lui Perov. Pentru aceasta, impunem condiţii Lipschitz globale, mai exact

$$\begin{cases} |f(t,u,v)-f(t,\overline{u},\overline{v})| \le a_1|u-\overline{u}|+b_1|v-\overline{v}| \\ |g(t,u,v)-g(t,\overline{u},\overline{v})| \le a_2|u-\overline{u}|+b_2|v-\overline{v}| \\ |\phi(u,v)-\phi(\overline{u},\overline{v})| \le c_1|u-\overline{u}|+d_1|v-\overline{v}| \\ |\psi(u,v)-\psi(\overline{u},\overline{v})| \le c_2|u-\overline{u}|+d_2|v-\overline{v}|, \end{cases} \tag{4.3.11}$$

pentru $t\in[0,t_0]$, $u,v,\overline{u},\overline{v}\in\mathbb{R}$ şi $a_1,b_1,a_2,b_2,c_1,d_1,c_2,d_2\ge 0$.

Teorema 4.3.1 *Presupunem că are loc condiţia* (4.3.11)*. Dacă matricea*

$$M := \begin{bmatrix} \frac{a_1}{8}t_0^2+c_1 & \frac{b_1}{8}t_0^2+d_1 \\ \frac{a_2}{8}t_0^2+c_2 & \frac{b_2}{8}t_0^2+d_2 \end{bmatrix} \tag{4.3.12}$$

este convergentă la zero, atunci problema (4.3.10) *are soluţie unică în* $C[0,t_0]^2$.

4.3.2 Neliniarităţi cu creştere cel mult liniară. Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder

Aici existenţa soluţiilor pentru problema (4.3.10) este stabilită prin intermediul teoremei de punct fix a lui Schauder în cazul în care f,g,ϕ,ψ satisfac în loc de condiţii de tip Lipschitz condiţii mai relaxate de creştere cel mult liniară

$$\begin{cases} |f(t,u,v)| \le a_1|u|+b_1|v|+c_1 \\ |g(t,u,v)| \le a_2|u|+b_2|v|+c_2 \\ |\phi(u,v)| \le a_{01}|u|+b_{01}|v|+c_{01} \\ |\psi(u,v)| \le a_{02}|u|+b_{02}|v|+c_{02}, \end{cases} \tag{4.3.13}$$

oricare ar fi $t\in[0,t_0]$, $u,v\in\mathbb{R}$ şi $a_i,b_i,c_i,a_{0i},b_{0i},c_{0i}\ge 0, i=1,2$.

Teorema 4.3.2 *Dacă f,g,ϕ,ψ satisfac condiţiile* (4.3.13) *şi matricea*

$$M := \begin{bmatrix} \frac{a_1}{8}t_0^2+a_{01} & \frac{b_1}{8}t_0^2+b_{01} \\ \frac{a_2}{8}t_0^2+a_{02} & \frac{b_2}{8}t_0^2+b_{02} \end{bmatrix} \tag{4.3.14}$$

este convergentă la zero, atunci problema (4.3.10) *are cel puţin o soluţie în* $C[0,t_0]^2$.

4.4 Ecuaţii pe un interval mai mare

Prezentăm rezultate de existenţă pentru problema la limită cu condiţii pe trei puncte:

$$\begin{cases} u'' = f\,(t, u, u') \\ u(0) = 0,\, u(t_0) = g(u(\eta)) \end{cases}, \quad 0 < t < 1 \tag{4.4.15}$$

unde $0 < t_0 < \eta < 1$ şi f, g sunt funcţii continue. Problema (4.4.15) poate fi împărţită în două, o parte pentru subintervalul $[0, t_0]$ şi cealaltă pentru $[t_0, 1]$. Mai exact, căutăm un u astfel încât

$$u(t) = \begin{cases} v(t), & \text{dacă } t \in [0, t_0] \\ w(t), & \text{dacă } t \in [t_0, 1] \end{cases}$$

unde v este soluţie pentru

$$\begin{cases} v'' = f\,(t, v, v') \\ v(0) = 0,\, v(t_0) = g(v(\eta)) \end{cases}, \quad 0 < t < t_0 \tag{4.4.16}$$

în timp ce w este soluţie pentru

$$\begin{cases} w'' = f\,(t, w, w') \\ w(t_0) = v(t_0) \\ w'(t_0) = v'(t_0). \end{cases}, \quad t_0 < t < 1 \tag{4.4.17}$$

Problema (4.4.16) a fost deja discutată în *Secţiunea 4.2*. Aici vom sublinia faptul că este echivalentă cu o problemă de punct fix pentru operatorul de tip Fredholm $T_F : C^1[0, t_0] \to C^1[0, t_0]$,

$$(T_F v)(t) = \int_0^{t_0} G(t, s) f\left(s, v\,(s)\,, v'(s)\right) ds + \frac{t}{t_0} g(v(\eta)).$$

Pentru (4.4.17) construim un operator integral de tip Volterra $T_V : C^1[t_0, 1] \to C^1[t_0, 1]$ dat prin

$$(T_V w)(t) = v(t_0) + (t - t_0)v'(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\sigma} f\left(s, w\,(s)\,, w'(s)\right) ds d\sigma. \tag{4.4.18}$$

Să subliniem faptul că w este soluţie pentru (4.4.17) dacă şi numai dacă w este un punct fix al operatorului T_V.

4.4.1 Aplicaţie a principiului contracţiilor al lui Banach

Presupunem că au loc condiţii Lipschitz globale, adică există $\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1 > 0$ astfel încât

$$|f(t, u, v) - f(t, \overline{u}, \overline{v})| \leq \widetilde{a}_1 |u - \overline{u}| + \widetilde{b}_1 |v - \overline{v}|, \tag{4.4.19}$$

oricare ar fi $t \in [t_0, 1]$ şi $u, v, \overline{u}, \overline{v} \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.4.1 *Dacă f satisface* (4.4.19) *pentru anumite numere $\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1 > 0$, atunci problema* (4.4.17) *are soluţie unică.*

4.4.2 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder

Presupunem că f satisface condiţii mai generale decât (4.4.19), şi anume

$$|f(t,u,v)| \leq \widetilde{\alpha}_1 |u| + \widetilde{\alpha}_2 |v| + \widetilde{\alpha}_3 \tag{4.4.20}$$

oricare ar fi $t \in [t_0, 1]$ şi $u, v \in \mathbb{R}$, unde $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3 \geq 0$.

Teorema 4.4.2 *Dacă are loc condiţia* (4.4.20) *pentru anumite numere* $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3 \geq 0$, *atunci problema* (4.4.17) *are cel puţin o soluţie.*

Punând împreună rezultatele din Secţiunea 4.2.1, Secţiunea 4.4.1 şi rezultatele din Secţiunea 4.2.2, Secţiunea 4.4.2 respectiv, obţinem următoarele rezultate pentru ecuaţii pe întreg intervalul $[0, 1]$:

Teorema 4.4.3 *Dacă* f, g *satisfac* (H1) *cu* (4.2.6) *şi condiţia* (4.4.19), *atunci problema* (4.4.15) *are soluţie unică pe* $[0, 1]$.

Teorema 4.4.4 *Presupunem că* (H2) *are loc cu* (4.2.7)*. Dacă, în plus, are loc condiţia* (4.4.20)*, atunci problema* (4.4.15) *are cel puţin o soluţie pe* $[0, 1]$.

4.5 Sisteme pe un interval mai mare

Aici considerăm problemele la limită pe trei puncte pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale, de tipul:

$$\begin{cases} u''(t) = f\left(t, u(t), v(t)\right) \\ v''(t) = g\left(t, u(t), v(t)\right) \\ u(0) = 0,\ u(t_0) = \phi(u(\eta), v(\eta)) \\ v(0) = 0,\ v(t_0) = \psi(u(\eta), v(\eta)), \end{cases} \quad 0 < t < 1 \tag{4.5.21}$$

unde $0 < \eta < t_0 < 1$. Aceste sisteme pot fi împărţite în două, o parte pentru subintervalul $[0, t_0]$ şi cealaltă pentru $[t_0, 1]$, respectiv. O abordare similară a fost dată pentru ecuaţii în *Secţiunea 4.4*. Sistemele pe $[0, t_0]$ au fost deja discutate în *Secţiunea 4.3*.

Rămâne să considerăm sistemul:

$$\begin{cases} x''(t) = f\left(t, x(t), y(t)\right) \\ y''(t) = g\left(t, x(t), y(t)\right) \\ x(t_0) = u_0(t_0),\ x'(t_0) = u_0'(t_0) \\ y(t_0) = v_0(t_0),\ y'(t_0) = v_0'(t_0), \end{cases} \quad t_0 \leq t \leq 1 \tag{4.5.22}$$

unde prin (u_0, v_0) înţelegem soluţia (4.5.21) pe intervalul $[0, t_0]$.

Aceasta poate fi văzută ca o problemă de punct fix în $C\,[t_0, 1]^2$ pentru operatorul complet continuu $T = (T_1, T_2)$, $T : C\,[t_0, 1]^2 \to C\,[t_0, 1]^2$, unde

$$T_1(x, y)(t) = u_0(t_0) + (t - t_0)u_0'(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\sigma} f\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds d\sigma,$$

$$T_2(x, y)(t) = v_0(t_0) + (t - t_0)v_0'(t_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\sigma} g\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds d\sigma.$$

4.5.1 Neliniarităţi cu proprietatea Lipschitz. Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Perov

Vom demonstra existenţa soluţiilor pentru problema (4.5.22) prin intermediul teoremei de punct fix a lui Perov. Pentru aceasta, impunem condiţii globale de tip Lipschitz, adică presupunem că există numerele $\widetilde{a}_1, \widetilde{b}_1, \widetilde{c}_1, \widetilde{d}_1 > 0$ astfel încât:

$$\begin{cases} |f(t,x,y) - f(t,x,y)| \leq \widetilde{a}_1 |x - \overline{x}| + \widetilde{b}_1 |y - \overline{y}| \\ |g(t,x,y) - g(t,x,y)| \leq \widetilde{c}_1 |x - \overline{x}| + \widetilde{d}_1 |y - \overline{y}|, \end{cases} \tag{4.5.23}$$

pentru $t \in [t_0, 1]$ şi $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.5.1 *Dacă au loc condiţiile* (4.5.23)*, atunci problema* (4.5.22) *are soluţie unică în* $C[t_0, 1]^2$.

4.5.2 Neliniarităţi cu creştere cel mult liniară. Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder

Arătăm că existenţa soluţiilor pentru problema (4.5.22) este stabilită prin intermediul teoremei de punct fix a lui Schauder în cazul în care f, g satisfac în loc de condiţii Lipschitz, condiţii mai relaxate de creştere cel mult liniară

$$\begin{cases} |f(t,x,y)| \leq \widetilde{a}_1 |x| + \widetilde{b}_1 |y| + \widetilde{c}_1 \\ |g(t,x,y)| \leq \widetilde{a}_2 |x| + \widetilde{b}_2 |y| + \widetilde{c}_2, \end{cases} \tag{4.5.24}$$

pentru $t \in [t_0, 1]$; $x, y \in \mathbb{R}$ şi $\widetilde{a}_i, \widetilde{b}_i, \widetilde{c}_i \geq 0, i = 1, 2$.

Teorema 4.5.2 *Dacă f, g satisfac condiţiile* (4.5.24)*, atunci problema* (4.5.22) *are cel puţin o soluţie în* $C[t_0, 1]^2$.

Punând împreună rezultatele din Secţiunea 4.3.1, Secţiunea 4.5.1 şi rezultatele din Secţiunea 4.3.2, Secţiunea 4.5.2 respectiv, obţinem următoarele rezultate pentru sisteme pe întreg intervalul $[0, 1]$:

Teorema 4.5.3 *Presupunem că au loc condiţiile* (4.3.11) *şi* (4.5.23)*. Dacă matricea* (4.3.12) *este convergentă la zero, atunci problema* (4.5.21) *are soluţie unică în* $C[0, 1]^2$.

Teorema 4.5.4 *Dacă f, g satisfac condiţiile* (4.3.13) *şi* (4.5.24) *şi matricea* (4.3.14) *este convergentă la zero, atunci problema* (4.5.21) *are cel puţin o soluţie în* $C[0, 1]^2$.

Capitolul 5

Probleme nelocale neliniare

5.1 Prezentare generală

Scopul capitolului de faţă este acela de a studia existenţa soluţiilor problemelor cu valori iniţiale cu condiţii la limită nelocale neliniare de tip funcţional pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale.

Astfel, considerăm problema nelocală pentru sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)), \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)), & \text{pe } [0,1], \\ x(0) = \alpha[x, y], \\ y(0) = \beta[x, y]. \end{cases} \tag{5.1.1}$$

Aici, $f_1, f_2 : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue şi $\alpha, \beta : C[0,1]^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţionale neliniare continue.

Abordarea noastră constă în a rescrie problema (5.1.1) ca un sistem de forma

$$x_a = \left(a + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s))\, ds,\ \alpha[x, y]\right),$$
$$y_b = \left(b + \int_0^t f_2(s, x(s), y(s))\, ds,\ \beta[x, y]\right),$$

unde prin x_a, y_b înţelegem perechile $(x, a), (y, b) \in C[0,1] \times \mathbb{R}$.

Aceasta, la rândul său, poate fi văzută ca o problemă de punct fix în $(C[0,1] \times \mathbb{R})^2$ pentru operatorul complet continuu

$$T = (T_1, T_2) : (C[0,1] \times \mathbb{R})^2 \to (C[0,1] \times \mathbb{R})^2,$$

unde T_1 şi T_2 sunt daţi de

$$T_1[x_a, y_b] = \left(a + \int_0^t f_1(s, x(s), y(s))\, ds,\ \alpha[x, y]\right),$$
$$T_2[x_a, y_b] = \left(b + \int_0^t f_2(s, x(s), y(s))\, ds,\ \beta[x, y]\right).$$

În acest capitol, prin $|x|_C$, unde $x \in C[0,1]$, vom înţelege $|x|_C = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$.

5.2 Existenţă şi unicitate

În cadrul acestei secţiuni arătăm că existenţa soluţiilor pentru problema (5.1.1) rezultă din teorema de punct fix a lui Perov în cazul în care neliniarităţile f_1, f_2 şi de asemenea funcţionalele α, β satisfac condiţiile Lipschitz de tipul:

$$\begin{cases} |f_1(t,x,y) - f_1(t,\overline{x},\overline{y})| \leq a_1 |x-\overline{x}| + b_1 |y-\overline{y}| \\ |f_2(t,x,y) - f_2(t,\overline{x},\overline{y})| \leq a_2 |x-\overline{x}| + b_2 |y-\overline{y}|, \end{cases} \tag{5.2.1}$$

oricare ar fi $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$, şi

$$\begin{cases} |\alpha[x,y] - \alpha[\overline{x},\overline{y}]| \leq A_1 |x-\overline{x}|_C + B_1 |y-\overline{y}|_C \\ |\beta[x,y] - \beta[\overline{x},\overline{y}]| \leq A_2 |x-\overline{x}|_C + B_2 |y-\overline{y}|_C, \end{cases} \tag{5.2.2}$$

oricare ar fi $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in C[0,1]$.

Pentru un număr $\theta > 0$ dat, notăm

$$\begin{array}{ll} m_{11}(\theta) = \max\left\{\frac{1}{\theta}, a_1 + \theta A_1\right\}, & m_{12}(\theta) = b_1 + \theta B_1, \\ m_{21}(\theta) = a_2 + \theta A_2, & m_{22}(\theta) = \max\left\{\frac{1}{\theta}, b_2 + \theta B_2\right\}. \end{array}$$

Teorema 5.2.1 *Considerăm că f_1, f_2 satisfac condiţiile Lipschitz* (5.2.1), *α, β satisfac condiţiile* (5.2.2). *În plus, presupunem că pentru $\theta > 0$, matricea*

$$M_\theta = \begin{bmatrix} m_{11}(\theta) & m_{12}(\theta) \\ m_{21}(\theta) & m_{22}(\theta) \end{bmatrix} \tag{5.2.3}$$

este convergentă la zero. Atunci problema (5.1.1) *are soluţie unică.*

Exemplul 5.2.2 Considerăm problema nelocală

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}\sin x + ay + g(t) \equiv f_1(t,x,y), \\ y' = \cos\left(ax + \frac{1}{4}y\right) + h(t) \equiv f_2(t,x,y), \\ x(0) = \frac{1}{8}\sin\left(x\left(\frac{1}{4}\right) + y\left(\frac{1}{4}\right)\right), \\ y(0) = \frac{1}{8}\cos\left(x\left(\frac{1}{4}\right) + y\left(\frac{1}{4}\right)\right), \end{cases} \tag{5.2.4}$$

unde $t \in [0,1]$, $a \in R$ şi $g, h \in L^1(0,1)$. Avem $a_1 = 1/4,\ b_1 = |a|,\ a_2 = |a|,\ b_2 = 1/4$ şi $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 1/8$. Considerăm $\theta = 2$. Atunci

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & |a| + \frac{1}{4} \\ |a| + \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{5.2.5}$$

Cum valorile proprii ale lui M_θ sunt $\lambda_1 = -|a| + \frac{1}{4},\ \lambda_2 = |a| + \frac{3}{4}$, matricea (5.2.5) este convergentă la zero dacă $|\lambda_1| < 1$ şi $|\lambda_2| < 1$. Este de asemenea cunoscut faptul că o matrice de acest tip este convergentă la zero dacă $|a| + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 1$ (a se vedea R. Precup [65]). Aşadar, dacă $|a| < \frac{1}{4}$, matricea (5.2.5) este convergentă la zero şi din Teorema 5.2.1 problema (5.2.4) are soluţie unică.

5.3 Rezultate de existenţă

La începutul acestei secţiuni, vom da o aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder. Mai exact, arătăm că existenţa soluţiilor pentru problema (5.1.1) rezultă din teorema de punct fix a lui Schauder în cazul în care f_1, f_2 şi de asemenea funcţionalele α, β satisfac condiţii de creştere de tipul:

$$\begin{cases} |f_1(t,x,y)| \leq a_1 |x| + b_1 |y| + c_1, \\ |f_2(t,x,y)| \leq a_2 |x| + b_2 |y| + c_2, \end{cases} \tag{5.3.1}$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$, şi

$$\begin{cases} |\alpha [x,y]| \leq A_1 |x|_C + B_1 |y|_C + C_1, \\ |\beta [x,y]| \leq A_2 |x|_C + B_2 |y|_C + C_2, \end{cases} \tag{5.3.2}$$

oricare ar fi $x, y \in C[0,1]$.

Teorema 5.3.1 *Dacă au loc condiţiile* (5.3.1), (5.3.2) *şi matricea* (5.2.3) *este convergentă la zero pentru un anumit $\theta > 0$, atunci problema* (5.1.1) *are cel puţin o soluţie.*

Exemplul 5.3.2 Considerăm problema nelocală

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4} x \sin\left(\frac{y}{x}\right) + ay \sin\left(\frac{x}{y}\right) + g(t) \equiv f_1(t,x,y), \\ y' = ax \sin\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{4} y \sin\left(\frac{x}{y}\right) + h(t) \equiv f_2(t,x,y), \\ x(0) = \frac{1}{8} \sin\left(x\left(\frac{1}{4}\right) + y\left(\frac{1}{4}\right)\right), \\ y(0) = \frac{1}{8} \cos\left(x\left(\frac{1}{4}\right) + y\left(\frac{1}{4}\right)\right), \end{cases} \tag{5.3.3}$$

unde $t \in [0,1]$, $a \in R$ şi $g, h \in L^1(0,1)$. Cum

$$|f_1(t,x,y)| \leq \frac{1}{4} |x| + |a| |y| + |g(t)|, \qquad |f_2(t,x,y)| \leq |a| |x| + \frac{1}{4} |y| + |h(t)|$$

ne aflăm în condiţiile din prima parte a Secţiunii 5.3. De asemenea, matricea M_θ este cea din Exemplul 5.2.2 dacă se consideră $\theta = 2$. Aşadar, potrivit Teoremei 5.3.1, dacă respectiva matrice este convergentă la zero, atunci problema (5.3.3) are cel puţin o soluţie. Este de subliniat faptul că funcţiile $f_1(t,x,y)$, $f_2(t,x,y)$ din acest exemplu nu satisfac condiţiile Lipschitz în x, y şi în consecinţă Teorema 5.2.1 nu se aplică.

În cele ce urmează, dăm o aplicaţie a principiului Leray-Schauder, presupunând că neliniarităţile f_1, f_2 şi de asemenea funcţionalele neliniare α, β satisfac condiţii de creştere mai generale, şi anume:

$$\begin{cases} |f_1(t,x,y)| \leq \omega_1(t, |x|, |y|), \\ |f_2(t,x,y)| \leq \omega_2(t, |x|, |y|), \end{cases} \tag{5.3.4}$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} |\alpha [x,y]| \leq \omega_3(|x|_C, |y|_C), \\ |\beta [x,y]| \leq \omega_4(|x|_C, |y|_C), \end{cases} \tag{5.3.5}$$

oricare ar fi $x, y \in C[0,1]$. Aici ω_1, ω_2 sunt funcţii L^1-Carathéodory pe $[0,1]\times\mathbb{R}_+^2$, nedescrescătoare în cel de-al doilea şi al treilea argument, şi ω_3, ω_4 sunt funcţii continue pe $\mathbb{R}_+^2$, nedescrescătoare în ambele variabile.

Teorema 5.3.3 *Presupunem că au loc condiţiile* (5.3.4), (5.3.5). *În plus, presupunem că există* $R_0 = \left(R_0^1, R_0^2\right) \in (0,\infty)^2$ *astfel încât pentru* $\rho = (\rho_1, \rho_2) \in (0,\infty)^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \omega_1(s,\rho_1,\rho_2)ds + \omega_3(\rho_1,\rho_2) \geq \rho_1 \\ \int_0^1 \omega_2(s,\rho_1,\rho_2)ds + \omega_4(\rho_1,\rho_2) \geq \rho_2 \end{array} \right. \quad \textit{implică} \ \ \rho \leq R_0. \tag{5.3.6}$$

Atunci problema (5.1.1) *are cel puţin o soluţie.*

Capitolul 6

Sisteme cu impulsuri cu condiţii nelocale

6.1 Prezentare generală

În acest capitol vom studia un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi având termeni cu impulsuri, supus unor condiţii nelocale, şi anume

$$\begin{cases} x'(t) = f_1(t, x(t), y(t)) \\ y'(t) = f_2(t, x(t), y(t)) \\ \quad \Delta x|_{t=t_0} = I_1(x(t_0)), \quad \Delta y|_{t=t_0} = I_2(y(t_0)), \\ \quad x(0) = \alpha_1[x], \qquad\qquad y(0) = \alpha_2[y]. \end{cases} \quad t \in (0,1),\ t \neq t_0, \tag{6.1.1}$$

Aici $\Delta v|_{t=t_0}$ semnifică “saltul” funcţiei v în $t = t_0$, adică $\Delta v|_{t=t_0} = v(t_0^+) - vt_0^-)$, unde $v(t_0^-), v(t_0^+)$ sunt limitele la stînga şi la dreapta ale lui v în $t = t_0$ şi α_i, $i = 1, 2$ sunt funcţionale liniare şi continue pe $C[0,1]$ care satisfac condiţia (2.3.14).

Rescriem sistemul (6.1.1) ca un sistem de ecuaţii integrale

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{1-\alpha_1[1]}\alpha_1[g_1] + g_1(x,y)(t) + G_1(x)(t), \\ y(t) = \dfrac{1}{1-\alpha_2[1]}\alpha_2[g_2] + g_2(x,y)(t) + G_2(y)(t), \end{cases} \tag{6.1.2}$$

unde termenii G_i iau în considerare efectul impulsiv.

De asemenea, vom beneficia de o descompunere similară cu cea propusă în lucrarea A. Boucherif şi R. Precup [17] şi utilizată ulterior în O. Nica şi R. Precup [52], O. Nica [53], de asemenea prezentată în Capitolul 2 şi Capitolul 3. Aceasta este prima dată când această abordare este utilizată în contextul sistemelor nelocale cu impulsuri.

6.2 Un rezultat de existenţă şi unicitate

Vom lucra în spaţiul Banach $PC_{t_0}[0,1]^2$, unde

$$\begin{aligned} PC_{t_0}[0,1] := \{x : [0,1] \to \mathbb{R}|,\ & x \text{ este continuă pentru } t \in [0,1]\backslash\{t_0\}, \\ & \text{există } x(t_0^-) = x(t_0) \text{ şi } |x(t_0^+)| < \infty\}. \end{aligned}$$

A rezolva (6.1.1), echivalent (6.1.2), se reduce la studiul existenţei unui punct fix al operatorului

$$T = T_F + T_V + G, \tag{6.2.3}$$

unde

$$T_F(x,y)(t) = \begin{pmatrix} T_{F_1}(x,y)(t) \\ T_{F_2}(x,y)(t) \end{pmatrix}, \quad T_V(x,y)(t) = \begin{pmatrix} T_{V_1}(x,y)(t) \\ T_{V_2}(x,y)(t) \end{pmatrix},$$

iar pentru $i = 1, 2$

$$T_{F_i}(x,y)(t) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha_i[1]}\alpha_i[g_i] + \int_0^t f_i\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds, & \text{dacă } t < t_0, \\ \frac{1}{1-\alpha_i[1]}\alpha_i[g_i] + \int_0^{t_0} f_i\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds, & \text{dacă } t \geq t_0, \end{cases}$$

$$T_{V_i}(x,y)(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \ t < t_0, \\ \int_{t_0}^t f_i\left(s, x\left(s\right), y(s)\right) ds, & \text{dacă } \ t \geq t_0, \end{cases}$$

şi

$$G(x,y)(t) = \begin{pmatrix} G_1(x)(t) \\ G_2(y)(t) \end{pmatrix}, \quad G_i(v)(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \ t \leq t_0, \\ I_i(v(t_0)), & \text{dacă } \ t > t_0. \end{cases}$$

Iniţial, prin intermediul teoremei de punct fix a lui Perov, obţinem un rezultat de existenţă şi unicitate, considerând că f_1, f_2 şi de asemenea termenii cu impulsuri I_i satisfac condiţiile Lipschitz

$$|f_1(t,x,y) - f_1(t,\overline{x},\overline{y})| \leq \begin{cases} a_1\left|x-\overline{x}\right| + b_1\left|y-\overline{y}\right|, & \text{dacă } t \in [0, t_0] \\ a_2\left|x-\overline{x}\right| + b_2\left|y-\overline{y}\right|, & \text{dacă } t \in [t_0, 1], \end{cases} \tag{6.2.4}$$

$$|f_2(t,x,y) - f_2(t,\overline{x},\overline{y})| \leq \begin{cases} A_1\left|x-\overline{x}\right| + B_1\left|y-\overline{y}\right|, & \text{dacă } \ t \in [0, t_0] \\ A_2\left|x-\overline{x}\right| + B_2\left|y-\overline{y}\right|, & \text{dacă } t \in [t_0, 1], \end{cases} \tag{6.2.5}$$

şi de asemenea

$$|I_i(v) - I_i(\overline{v})| \leq d_i\left|v-\overline{v}\right|, \text{ pentru } i = 1, 2, \tag{6.2.6}$$

oricare ar fi $x, y, \overline{x}, \overline{y}, v, \overline{v} \in \mathbb{R}$.

În cele ce urmează notăm prin

$$\begin{aligned} A_{\alpha_i} \quad &: \ = \frac{\|\alpha_i\|}{|1-\alpha_i[1]|} + 1, \ i = 1, 2. \\ M \quad &: \ = t_0 \begin{bmatrix} a_1\left(\frac{\|\alpha_1\|}{|1-\alpha_1[1]|} + 1\right) & b_1\left(\frac{\|\alpha_1\|}{|1-\alpha_1[1]|} + 1\right) \\ A_1\left(\frac{\|\alpha_2\|}{|1-\alpha_2[1]|} + 1\right) & B_1\left(\frac{\|\alpha_2\|}{|1-\alpha_2[1]|} + 1\right) \end{bmatrix}, \quad M_I := \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Teorema 6.2.1 *Dacă au loc condiţiile* (6.2.4), (6.2.5), (6.2.6) *şi matricea*

$$M_0 := M + M_I \tag{6.2.7}$$

este convergentă la zero, atunci problema (6.1.1) are o soluţie unică.

Exemplul 6.2.2 Considerăm problema cu valori iniţiale

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2} y \left[1 + e^{-\frac{4}{5}(x-1)} \right]^{-1} \equiv f_1(x,y), \\ y' = \frac{1}{10} x \left[1 + e^{-\frac{2}{5}(y-1)} \right]^{-1} \equiv f_2(x,y), \\ \Delta x|_{t=\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \cos \left(x \left(\frac{3}{4} \right) \right), \qquad \Delta y|_{t=\frac{3}{4}} = \frac{1}{5} \sin \left(y \left(\frac{3}{4} \right) \right), \\ x(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} x(s) ds, \qquad y(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} y(s) ds. \end{cases}, \; t \in [0,1] \tag{6.2.8}$$

Aici avem matricea

$$M_0 = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

care este convergentă la zero întrucât valorile sale proprii satisfac $\lambda_1 = 0.17 < 1, \lambda_2 = 0.5 < 1$. Din Teorema 6.2.1, problema (6.2.8) are soluţie unică.

6.3 Un rezultat de existenţă

Arătăm acum că existenţa soluţiilor pentru problema (6.1.1) rezultă din teorema de punct fix a lui Schauder atunci când f_1, f_2 satisfac condiţii de creştere de tipul: există coeficienţi nenegativi $a_i, b_i, c_i, A_i, B_i, C_i$ astfel încât

$$|f_1(t,x,y)| \le \begin{cases} a_1 |x| + b_1 |y| + c_1, & \text{dacă } t \in [0, t_0] \\ a_2 |x| + b_2 |y| + c_2, & \text{dacă } t \in [t_0, 1], \end{cases} \tag{6.3.9}$$

$$|f_2(t,x,y)| \le \begin{cases} A_1 |x| + B_1 |y| + C_1, & \text{dacă } t \in [0, t_0] \\ A_2 |x| + B_2 |y| + C_2, & \text{dacă } t \in [t_0, 1], \end{cases} \tag{6.3.10}$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Presupunem de asemenea că impulsurile satisfac condiţii de creştere, i.e. există $d_i, e_i \in [0, \infty)$ astfel încât pentru oricare $v \in \mathbb{R}$ avem

$$|I_i(v)| \le d_i |v| + e_i, \quad \text{pentru } i = 1, 2. \tag{6.3.11}$$

Teorema 6.3.1 *Dacă sunt satisfăcute condiţiile* (6.3.9), (6.3.10), (6.3.11) *şi matricea* (6.2.7) *este convergentă la zero, atunci problema* (6.1.1) *are cel puţin o soluţie.*

Exemplul 6.3.2 Considerăm problema cu valori iniţiale

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4} x \sin \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{1}{3} y \sin \left(\frac{x}{y} \right) + g(t) \equiv f_1(t,x,y), \\ y' = \frac{1}{3} x \sin \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{1}{6} y \sin \left(\frac{x}{y} \right) + h(t) \equiv f_2(t,x,y), \\ \Delta x|_{x=\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \sin \left(x \left(\frac{3}{4} \right) \right), \qquad \Delta y|_{y=\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cos \left(y \left(\frac{3}{4} \right) \right), \\ x(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} x(s) ds, \qquad y(0) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} y(s)\, ds, \end{cases}, \; t \in [0,1] \tag{6.3.12}$$

unde $g, h \in L^1(0,1)$. Obţinem

$$M_0 = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix},$$

care este convergentă la zero deoarece valorile proprii ale sale (aproximate cu trei zecimale) sunt $|\lambda_1| = 0.485 < 1, |\lambda_2| = 0.237 < 1$. Din Teorema 6.3.1, problema (6.3.12) are cel puţin o soluţie.

Bibliografie

[1] R. P. Agarwal, M. Meehan and D. O'Regan, *Fixed Point Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] R. P. Agarwal, D. O'Regan and S. Staněk, *General existence principles pentru nonlocal boundary value problems with φ-Laplacian and their applications*, Abstr. Appl. Anal. **2006** (2006), Article ID 96826, 30 pages.

[3] S. Aizicovici and Y. Gao, *Functional differential equations with nonlocal initial conditions*, J. Appl. Math. Stochastic Anal. **10** (1997), 145-156.

[4] S. Aizicovici and H. Lee, *Nonlinear nonlocal Cauchy problems in Banach spaces,* Appl. Math. Lett. **18** (2005), 401-407.

[5] S. Aizicovici and M. McKibben, *Existence results for a class of abstract nonlocal Cauchy problems*, Nonlinear Anal. **39** (2000), 649-668.

[6] D. Baĭnov and P. Simeonov, *Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications*, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 66, Longman Scientific & Technical, New York, 1993.

[7] M. Benchohra and A. Boucherif, *On first order multivalued initial and periodic value problems*, Dynam. Systems Appl. **9** (2000), 559-568.

[8] M. Benchohra, E. P. Gatsori, L. Gorniewicz and S. K. Ntouyas, *Nondensely defined evolution impulsive differential equations with nonlocal conditions*, Fixed Point Theory **4** (2003), 185-204.

[9] M. Benchohra, J. Henderson and S. Ntouyas, *Impulsive Differential Equations and Inclusions*, Contemporary Mathematics and Its Applications, Volume 2, Hindawi Publishing Corporation, New York, 2006.

[10] A. Berman and R. J. Plemmons, *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[11] O. Bolojan-Nica, G. Infante and R. Precup, *Existence results for systems with coupled nonlocal initial conditions,* Nonlinear Anal. **94** (2014), 231-242.

[12] O. Bolojan-Nica, G. Infante and P. Pietramala, *Existence results for impulsive systems with initial nonlocal conditions,* Math. Model. Anal., to appear.

[13] O. Bolojan-Nica, G. Infante and R. Precup, *Existence results for systems with coupled nonlocal nonlinear initial conditions,* submitted.

[14] A. Boucherif, *Differential equations with nonlocal boundary conditions*, Nonlinear Anal. **47** (2001), 2419-2430.

[15] A. Boucherif, *First-order differential inclusions with nonlocal initial conditions*, Appl. Math. Letters **15** (2002), 409-414.

[16] A. Boucherif, *Nonlocal Cauchy problems for first-order multivalued differential equations,* Electron. J. Differential Equations **2012** (2012), No. 47, 1-9.

[17] A. Boucherif and R. Precup, *On the nonlocal initial value problem for first order differential equations,* Fixed Point Theory **4** (2003), 205-212.

[18] A. Boucherif and R. Precup, *Semilinear evolution equations with nonlocal initial conditions*, Dynamic Systems Appl. **16** (2007), 507-516.

[19] L. Byszewski, *Theorems about the existence and uniqueness of solutions of a semilinear evolution nonlocal Cauchy problem*, J. Math. Anal. Appl. **162** (1991), 494-505.

[20] L. Byszewski, *Abstract nonlinear nonlocal problems and their physical interpretation*, in "Biomathematics, Bioinformatics and Applications of Functional Differential Difference Equations", H.Akca, V.Covachev and E. Litsyn Eds., Akdeniz Univ. Publ., Antalya, Turkey, 1999.

[21] L. Byszewski and V. Lakshmikantham, *Theorem about the existence and uniqueness of a solution of a nonlocal abstract Cauchy problem in a Banach space*, Appl. Anal. **40** (1990), 11-19.

[22] A. Cabada, *An overview of the lower and upper solutions method with nonlinear boundary value conditions*, Bound. Value Probl. (2011), Art. ID 893753, 18 pp.

[23] E. V. Castelani and T. F. Ma, *Numerical soluitions for a second order three-point boundary value problem*, Communications in Applied Analysis **11** (1) (2007), 87-95.

[24] S. H. Chen, T. Hu, L. Chen, et al., *Existence results for n-point boundary value problem of second order ordinary differential equations*, J. Comput. Appl. Math. **180** (2005), 425-432.

[25] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed Point Theory*, Monografie Matematyczne, PWN, Warsaw, 1982.

[26] M. Eggensperger and N. Kosmatov, *A higher-order nonlocal boundary value problem*, Int. J. Appl. Math. Sci. **2** (2) (2005), 196-206.

[27] A. M. A. El-Sayed and E. O. Bin-Taher, *Positive nondecreasing solutions for a multi-term fractional-order differential equation with integral conditions*, Electron. J. Differential Equations **2011** (166) (2011), 1-8.

[28] D. Franco and D. O'Regan, *Existence of solutions to second order problemswith nonlinear boundary conditions*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (Suppl.) (2005), 273-280.

[29] C. S. Goodrich, *On nonlocal BVPs with nonlinear boundary conditions with asymptotically sublinear or superlinear growth*, Math. Nachr. **285** (2012), 1404-1421.

[30] C. S. Goodrich, *On nonlinear boundary conditions satisfying certain asymptotic behavior*, Nonlinear Anal. **76** (2013), 58-67.

[31] A. Granas and J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[32] D. Guo, V. Lakshmikanthan and X. Lin, *Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.

[33] C. P. Gupta, S. K. Ntouyas and P. Ch. Tsamatos, *On an m-point boundary value problem for second order ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. TMA. **23** (11) (1994), 1427-1436.

[34] H. -K. Han and J. -Y. Park, *Boundary controllability of differential equations with nonlocal conditions*, J. Math. Anal. Appl. **230** (1999), 242-250.

[35] G. Infante, *Positive solutions of nonlocal boundary value problems with singularities*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Supplement (2009), 377-384.

[36] G. Infante, F. M. Minhós and P. Pietramala, *Non-negative solutions of systems of ODEs with coupled boundary conditions,* Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **17** (2012), 4952-4960.

[37] G. Infante and P. Pietramala, *Eigenvalues and non-negative solutions of a system with nonlocal BCs,* Nonlinear Stud. **16** (2009), 187-196.

[38] G. Infante and P. Pietramala, *Existence and multiplicity of non-negative solutions for systems of perturbed Hammerstein integral equations*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 1301-1310.

[39] G. Infante and P. Pietramala, *Multiple positive solutions of systems with coupled nonlinear BCs*, Math. Methods Appl. Sci., to appear.

[40] G. Infante and J. R. L. Webb, *Loss of positivity in a nonlinear scalar heat equation*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **13** (2006), 249-261.

[41] D. Jackson, *Existence and uniqueness of solutions to semilinear nonlocal parabolic equations*, J. Math. Anal. Appl. **172** (1993), 256-265.

[42] G. L. Karakostas and P. Ch. Tsamatos, *Existence of multiple positive solutions for a nonlocal boundary value problem*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **19** (2002), 109-121.

[43] V. Lakshmikantham and S. Leela, *Nonlinear Differential Equations in Abstract Spaces*, Pergamon, Oxford, 1981.

[44] V. Lakshmikantham, D. D. Baĭnov and P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, Series in Modern Applied Mathematics, 6, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989.

[45] H. C. Lee, *Analysis of some nonlocal boundary value problems associated with feedback control*, Bull. Korean Math. Soc. **35** (1998), 325-338.

[46] J. Liang, J. Liu and T. -J. Xiao, *Nonlocal Cauchy problems governed by compact operators families*, Nonlinear Anal. **57** (2004), 183-189.

[47] J. H. Liu, *A remark on the mild solutions of non-local evolution equations*, Semigroup Forum **66** (2003), 63-67.

[48] R. Ma, *Positive solutions for a nonlinear three-point boundary value problem*, Electron. J. Differential Equations Appl. Math. Comput. **34** (1999), 1-8.

[49] R. Ma, *Existence of solutions of nonlinear m-point boundary value problem*, J. Math. Anal. Appl. **256** (2001), 556-567.

[50] R. Ma, *A survey on nonlocal boundary value problems*, Appl. Math. E-Notes **7** (2001), 257-279.

[51] S. Mureşan and O. Nica, *Comparing two integral operators in the approach of Cauchy problems*, Annals of Oradea University, Fascicola Mathematica, Tom. XIX (2012), 197-205.

[52] O. Nica and R. Precup, *On the nonlocal initial value problem for first order differential systems*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **56** (2011), No. 3, 125-137.

[53] O. Nica, *Initial-value problems for first-order differential systems with general nonlocal conditions,* Electron. J. Differential Equations **2012** (2012), No. 74, 1-15.

[54] O. Nica, *Existence results for second order three-point boundary value problems*, Differ. Equ. Appl. **4** (2012), 547-570.

[55] O. Nica, *Nonlocal initial value problems for first order differential systems,* Fixed Point Theory **13** (2012), 603-612.

[56] O. Nica, *A fixed point approach to first order differential equations and systems*, Ann. Tiberiu Popoviciu Semin. Funct. Equ. Approx. Convexity **10** (2012), 141-153.

[57] O. Nica, *Extensions of the Leray-Schauder Principle for integral systems*, An. Univ. Oradea Fasc. Mat. **9** (2012), No. 2, 63-81.

[58] S. K. Ntouyas and P. Ch. Tsamatos, *Global existence for semilinear evolution equations with nonlocal conditions,* J. Math. Anal. Appl. **210** (1997), 679-687.

[59] S. K. Ntouyas, *Nonlocal initial and boundary value problems: a survey*, Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. II, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005, 461-557.

[60] D. O'Regan and R. Precup, *Theorems of Leray-Schauder Type and Applications*, Gordon and Breach, Amsterdam, 2001.

[61] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables,* Academic Press, New York, 1970.

[62] P. Pietramala, *A note on a beam equation with nonlinear boundary conditions*, Bound. Value Probl. (2011), Art. ID 376782, 14 pp.

[63] A. I. Perov, *On Cauchy problem for a system of ordinary differential equations*, Pviblizhen.Met. Reshen. Differ. Uvavn., **2** (1964), 115-134.

[64] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations*, Kluwer, Dordrecht-Boston-London, 2002.

[65] R. Precup, *The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems*, Math. Comp. Modelling **49** (2009), 703-708.

[66] R. Precup and D. Trif, *Multiple positive solutions of non-local initial value problems for first order differential systems*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 5961–5970.

[67] F. Robert, *Matrices non-negatives et normes vectorielles,* Université Scientifique et Médicale, Lyon, 1973.

[68] I. A. Rus, *Generalized contractions and applications*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001.

[69] I. A. Rus, A. Petruşel and G. Petruşel, *Fixed Point Theory*, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2008.

[70] A. M. Samoĭlenko and N. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995.

[71] S. Staněk, *Existence principles for singular vector nonlocal boundary value problems with φ-Laplacian and their applications*, Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rerum Natur. Math. **50** (2011), 99-118.

[72] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis, Second Edition,* Springer, Berlin, 2000.

[73] A. Viorel, *Contributions to the study of nonlinear evolution equations*, PhD Thesis, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, 2011.

[74] J. R. L. Webb, *A unified approach to nonlocal boundary value problems*, Dynamic systems and applications. Vol. 5. Proceedings of the 5th international conference, Morehouse College, Atlanta, GA, USA, May 30-June 2, 2007, 510-515.

[75] J. R. L. Webb and G. Infante, *Positive solutions of nonlocal initial boundary value problems involving integral conditions*, Nonlinear Diff. Eqn. Appl. **15** (2008), 45-67.

[76] J. R. L. Webb and G. Infante, *Non-local boundary value problems of arbitrary order,* J. London Math. Soc. (2) **79** (2009), 238-258.

[77] J. R. L. Webb and G. Infante, *Positive solutions of nonlocal boundary value problems: a unified approach*, J. London Math. Soc. **74** (2006), 673-693.

[78] J. R. L. Webb and G. Infante, *Semi-positone nonlocal boundary value problems of arbitrary order*, Commun. Pure Appl. Anal. **9** (2) (2010), 563-581.

[79] J. R. L. Webb and K. Q. Lan, *Eigenvalue criteria for existence of multiple positive solutions of nonlinear boundary value problems of local and nonlocal type*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **27** (2006), 91-115.

[80] J. R. L. Webb, G. Infante, D. Franco, *Positive solutions of nonlinear fourth-order boundary-value problems with local and non-local boundary conditions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **138** (2008), 427-446.

[81] X. Xue, *Existence of solutions for semilinear nonlocal Cauchy problems in Banach spaces*, Electron. J. Differential Equations **2005** (2005), No. 64, 1-7.

[82] X. M. Xue, *Existence of semilinear differential equations with nonlocal initial conditions,* Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **23** (6) (2007), 983-988.

[83] Z. Yang, *Positive solutions to a system of second-order nonlocal boundary value problems*, Nonlinear Anal. **62** (2005), 1251-1265.