UNIVERSITATEA "BABEŞ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

OBIECTE MORFICE ÎN CATEGORII

-Rezumatul tezei de doctorat-

Lavinia Silvia Pop

Conducător ştiinţific:

Prof. dr. Emerit Grigore Călugăreanu

©2013

CLUJ NAPOCA

*

Cuprins

CUVINTE CHEIE: endomorfism morfic, obiect morfic, endomorfism regular, endomorfism unit-regular, obiect regular, obiect unit-regular, obiect hopian, cohopian şi obiect dedekind finit, obiect relativ morfic, obiect dual relativ morfic, bimodul morfic, inel morfic, inel cu involuţie, inel skew, properietatea δ, $\delta-$modul, proprietatea γ, $\gamma-$modul.

Introducere

Endomorfismul morfic este caracterizat prin următoarea teoremă: un endomorfism α este morfic dacă şi numai dacă există un endomorfism β astfel încât Im$\alpha = Ker\beta$ şi Im$\beta = Ker\alpha$.

Extinzând noţiunea de şir exact de la o categorie exactă la o categorie cu imagini şi nuclee, teorema de caracterizare a endomorfismului morfic o folosim ca definiţie a endomorfismului morfic în categorii cu imagini şi nuclee.

În această lucrare, după descoperirea proprietăţilor de bază, caracterizăm obiectele morfice în categorii $p-$exacte şi în categorii abeliene, apoi cercetăm când un coprodus direct de obiecte morfice este morfic, studiem obiectele morfice în categoria $R-Mod-S$ şi în categoria $R-Mod$ introducem o nouă clasă de obiecte situată între clasa obiectelor morfice şi clasa obiectelor hopiene, totodată găsim exemple şi contraexemple.

Prezenta lucrare este împărţită în patru capitole, numerotate de la 1 la 4. La rândul lui, fiecare capitol este subîmpărţit în secţiuni, care sunt numerotate cu două numere: primul este numărul capitolului, iar cel de-al doilea este numărul de ordine al secţiunii în cadrul capitolului.

În **Preliminarii** fixăm limbajul şi notaţiile, reamintim unele rezultate cunoscute şi extindem unele noţiuni în categorii cu imagini şi nuclee. Rezultatele de aici vor fi folosite în capitolele următoare ale lucrării.

Capitolul 2 este dedicat studiului obiectului morfic în categorii cu imagini şi nuclee.

Capitolul 3 este dedicat studiului obiectelor morfice în categoria bimodulelor $R - Mod - S$. Un inel R este numit morfic dacă bimodulul ${}_RM_R$ este morfic.

În **capitolul 4** se studiază o nouă clasă de module numite $\delta-$module.

Capitolul 1

Preliminarii

Prezentăm în acest capitol obiecte matematice (categorie w-exactă, categorie p-exactă, categorie aditivă, categorie abeliană) şi câteva notaţii corespunzătoare pe care le vom folosi pe parcursul lucrării. Generalizăm unele noţiuni şi rezultate în categorii cu imagini şi nuclee cu scopul de a le folosi în capitolele următoare.

1.1 Categorii w-exacte

La început prezentăm definiţia categoriei $w-$**exacte**.

Spunem că o categorie $\mathcal{C}$ este $w^{*}-$**exactă** dacă duala sa $\mathcal{C}^{op}$ este $w-$exactă.

Spunem că o categorie $\mathcal{C}$ este $p-$**exactă** dacă este $w-$exactă şi $w^{*}-$exactă.

Se dă o teoremă de carecterizare a categoriei p-exacte.

Categoria $\mathcal{C}$ se numeşte **abeliană** dacă este aditivă, p exactă şi are produse finite.

În continuare se prezintă o teoremă de caracterizare a categoriei p-exacte şi respectiv abeliene.

1.2 Categorii cu imagini şi nuclee

Dăm definiţia categoriei cu imagini şi nuclee şi câteva proprietăţi imediate.

Orice categorie $w-$exactă $\mathcal{C}$ are imagini şi nuclee.

Orice categorie $p-$exactă are imagini, nuclee, coimagini şi conuclee şi cu atât mai mult categoriile abeliene.

Extindem definiţia şirul exact într-o categorie $\mathcal{C}$ cu imagini şi nuclee.

Se verifică uşor că:

Exemplul 1.2.1. Şirul $M \overset{0_M}{\to} M \overset{\alpha}{\to} M \overset{0_M}{\to} M$ din $\mathcal{C}$ unde 0_M este endomorfismul nul, iar α este automorfism, este exact.

Propoziţia 1.2.2. *Dacă şirul* $M \overset{\alpha}{\to} M \overset{\beta}{\to} M \overset{\alpha}{\to} M$ *din* $\mathcal{C}$ *este exact, atunci* $\beta\alpha = 0 = \alpha\beta$.

În continuare se prezintă teoreme referitoare la imagini şi nuclee care vor fi folosite în demonstraţiile din capitolul 2.

1.3 Endomorfisme

Se prezintă exemple de endomorfisme care vor fi folosite în capitolele următoare ale lucrării.

Un **endomorfism** $\alpha : M \to M$ se numeşte **regular** (**unit-regular)** dacă există endomorfismul (automorfismul) σ astfel încât $\alpha\sigma\alpha = \alpha$ şi **idempotent** dacă $\alpha^2 = \alpha$.

Într-o categorie aditivă, mulţimea $End_{\mathcal{C}}(M)$ împreună cu adunarea morfismelor şi compunerea lor este un inel asociativ cu unitate numit inelul endomorfismelor obiectului M.

Endomorfismul unit-regular este caracterizat prin următoarea propoziţie:

Propoziţia 1.3.1. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie aditivă. Atunci $\alpha \in End_{\mathcal{C}}(M)$ este unit-regular dacă şi numai dacă există $\sigma \in Aut_{\mathcal{C}}(M)$ şi $\pi \in End_{\mathcal{C}}(M)$ idempotent astfel încât $\alpha = \pi\sigma$.*

Inelul $(End_{\mathcal{C}}(M), +, \circ)$ se numeşte **regular (unit-regular)** dacă toate endomorfismele sunt regulare (unit-regulare).

Obiectul M se numeşte **regular (unit-regular)** dacă inelul $(End_{\mathcal{C}}(M), +, \circ)$ este regular (unit-regular).

1.4 Obiecte hopiene, cohopiene, dedekind finite

Obiectul M din categoria $\mathcal{C}$ se numeşte **hopian** dacă orice epimorfism $\alpha \in End_{\mathcal{C}}(M)$ este automorfism.

Obiectul M se numeşte **cohopian** dacă orice monomorfism $\alpha \in End_{\mathcal{C}}(M)$ este automorfism.

Obiectul M se numeşte **dedekind finit (DF)** dacă pentru orice endomorfisme $\alpha, \beta \in End_{\mathcal{C}}(M)$: $\alpha\beta = 1_M$ implică $\beta\alpha = 1_M$.

Propoziţia 1.4.1. *i)Dacă M este obiect hopian într-o categorie $\mathcal{C}$, atunci M este dedekind finit.*

ii)Dacă M este obiect cohopian într-o categorie $\mathcal{C}$, atunci M este dedekind finit.

Propoziţia 1.4.2. *i)Într-o categorie $p-$exactă, un produs infinit al aceluiaşi obiect (dacă există) diferit de zero nu este dedekind-finit.*

ii)Într-o categorie $p-$exactă, un coprodus infinit al aceluiaşi obiect (dacă există) diferit de zero nu este dedekind-finit.

1.5 Functori. Teorema lui Mitchell

Teorema 1.5.1. *(Mitchell) Pentru orice categorie abeliană mică $\mathcal{C}$ există un inel R şi un functor covariant $F : \mathcal{C} \to R - Mod$ aditiv, exact, plin şi fidel (de scufundare).*

Se dau exemple de functori care se vor folosi în capitolele 2 şi 3.

1.6 Laticea subobiectelor

Propoziţia 1.6.1. *i) Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie $p-$exactă, atunci $(\mathcal{S}(M), \leq)$ este o latice modulară.*

ii)Dacă M şi N două obiecte din categoria $p-$exactă $\mathcal{C}$ atunci $\inf(M, N) = M \cap N$ *şi* $\sup(M, N) = M \cup N$.

Spunem că un **obiect** M din $\mathcal{C}$ diferit de obiectul zero este **simplu** dacă singurele subobiecte ale lui M sunt $[M, 1_M]$ şi $[O, 0_{OM}]$ şi singurele obiecte cât sunt $[1_M, M], [0_{MO}, O]$.

Propoziţia 1.6.2. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie $w-$exactă. Orice endomorfism nenul al unui obiect simplu M în această categorie este automorfism.*

Următoarea afirmaţie este o consecinţă imediată a Propoziţiei 1.6.2.

Corolarul 1.6.3. *Dacă M este simplu într-o categorie $w-$exactă şi aditivă, atunci inelul endomorfismelor obiectului M este corp.*

1.7 Teoreme de izomorfism

Cele trei teoremele de izomorfism din categoriile abeliene se extind şi în categorii $p-$exacte.

Teorema 1.7.1. *(Prima teoremă de izomorfism a lui Nöether) Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie $p-$exactă, atunci pentru orice morfism $\alpha : M \to N$ avem $M/Ker\alpha \simeq \mathrm{Im}\alpha$.*

Propoziţia 1.7.2. *Următoarele şiruri*

$0 \to M_1 \overset{u_1}{\to} M_1 \oplus M_2 \overset{p_2}{\to} M_2 \to 0$

$0 \to M_2 \overset{u_2}{\to} M_1 \oplus M_2 \overset{p_1}{\to} M_1 \to 0$

sunt exacte.

Prin urmare $M_1 \oplus M_2/M_1 \simeq M_2$ şi $M_1 \oplus M_2/M_2 \simeq M_1$.

Propoziţia 1.7.3. *Dacă M, N, P sunt obiecte în categoria abeliană $\mathcal{C}$ şi $P \subset N$ atunci $(M \oplus N)/\ (M \oplus P) \simeq N/P$.*

Prima teoremă de izomorfism a lui Nöether va fi folosită frecvent în capitolul 2.

Capitolul 2

Obiecte morfice în categorii

În acest capitol definim şi studiem noţiunea de obiect morfic în categorii cu imagini şi nuclee.

Pentru început, definim noţiunea şi prezentăm proprietăţile ei de bază, apoi studiem, ca aplicaţii, obiectele morfice în categoriile $pEns$, Rng şi categoria asociată unui inel notată $\mathcal{C}_R$.

Studiem, de asemenea, obiectele morfice în categorii $p-$exacte şi abeliene. În aceste categorii un endomorfism este morfic dacă şi numai dacă pentru el are loc duala teoremei de izomorfism, iar un obiect este morfic dacă şi numai dacă pentru orice endomorfism are loc duala teoremei de izomorfism.

Dăm, de asemenea, o caracterizare laticială a obiectului morfic şi o generalizare teoremei lui Ehrlich, adică un endomorfism este unit-regular dacă şi numai dacă este regular şi morfic.

Vom enunţa şi demonstra o teoremă referitoare la comportamentul unui obiect morfic faţă de un functor.

2.1 Noţiunea de obiect morfic. Proprietăţi de bază

Definiţia 2.1.1. Fie M un obiect într-o categorie $\mathcal{C}$ cu imagini şi nuclee. Un **endomorfism** α al lui M se numeşte **morfic** dacă există un endomorfism β al lui M astfel încât următorul şir

$$M \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M \xrightarrow{\alpha} M$$

este exact.

Obiectul M se numeşte **morfic** dacă orice endomorfism α al lui M este morfic.

Endomorfismul β din diagramă se numeşte **endomorfism asociat lui** α.

Observaţia 2.1.2. 1)Dacă α este morfic şi β este endomorfismul asociat atunci avem $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$. Mai mult, dacă $\mathcal{C}$ este aditivă, β aparţine anulatorului stâng şi drept al lui α.

2) Translaţia $t_m, m \in \mathbb{Z}\backslash\{-1, 0, 1\}$ nu este un endomorfism morfic al grupului $(\mathbb{Z}, +)$ în categoria *Ab* şi $t_m t_0 = 0 = t_0 t_m$. Prin urmare din $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$ în categoria $\mathcal{C}$ nu rezultă în general că β este morfic.□

Exemplul 2.1.3. i) Obiectele morfice din categoria $R-Mod$ sunt modulele morfice.

ii) Obiectele morfice din categoria *Ab* sunt grupurile abeliene morfice.

iii) Obiectele morfice din categoria *Grp* sunt grupurile morfice.

iv) Obiectul V din categoria $K - Vect$ este morfic dacă şi numai dacă este de dimensiune finită.

v) Categoria spaţiilor vectoriale de dimensiune finită are toate obiectele morfice.

vi) Fie $\mathcal{T}$ subcategoria plină a $pTop$ (spaţii topologice punctate) a cărei obiecte sunt spaţiile punctate singleton arătă spre spaţiul $\{*\}$, şi un spaţiu punctat cu 3 elemente (T, a), cu mulţimile deschide: $\emptyset, T, \{a\}$ şi $\{b, c\}$ dacă $T = \{a, b, c\}$. Astfel, $\mathcal{T}$ are nuclee şi conuclee, este normală şi conormală, dar nu este p-exactă. Se poate verifica că (T, a) are numai 5 endomorfisme şi că toate obiectele din $\mathcal{T}$ sunt morfice. $\square$

Observaţia 2.1.4. 1) Compunerea a două endomorfisme morfice nu este în general morfică.

2) Subobiectele unui obiect morfic nu sunt neaparat morfice.

3) Obiectele factor ale obiectelor morfice nu sunt neaparat morfice.

4) Un obiect care nu este morfic în categoria $\mathcal{C}$ poate să fie morfic într-o subcategorie a sa.

5) Morfismul nul este morfic. Orice automorfism $\alpha : M \to M$ este morfic deoarece este asociat morfismului nul. În particular, endomorfismul identic este morfic. Este evident, conform definiţiei că dacă toate endomorfismele nenule ale unui obiect sunt morfice atunci obiectul este morfic. $\square$

Exemplul 2.1.5. 1). Obiectul nul este morfic.

2). Dacă $U(End_{\mathcal{C}}(M)) = End_{\mathcal{C}}(M) \setminus \{0\}$ atunci M este obiect morfic în $\mathcal{C}$.

3). Orice obiect simplu într-o categorie $w-$exactă este morfic.

4). Obiectul $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ din categoria Rng este morfic. $\square$

Propoziţia 2.1.6. *Fie $\mathcal{C}$ o categorie aditivă, cu imagini şi nuclee, iar M un obiect din $\mathcal{C}$. Dacă $\alpha : M \to M$ este un endomorfism idempotent, atunci α este morfic.*

Lema 2.1.7. *Fie $\alpha \in End_{\mathcal{C}}(M)$ un endomorfism morfic într-o categorie cu imagini şi nuclee $\mathcal{C}$. Dacă $\sigma : M \to M$ este un automorfism, atunci $\alpha\sigma$ este morfic. Mai mult, dacă $\mathcal{C}$ este aditivă, orice endomorfism unit-regular este morfic.*

Exemplul 2.1.8. i) Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot), n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ este obiect morfic în categoria Rng.

ii) Fie M un obiect în categoria aditivă $\mathcal{C}$. Dacă inelul $End_{\mathcal{C}}(M)$ este unit-regular (M este obiect unit-regular) atunci M este obiect morfic.$\square$

Observaţia 2.1.9. În general nu se poate spune nimic despre generatorul proiectiv (sau cogeneratorul injectiv) referitor la faptul că este morfic sau nu.

2.2 Exemple şi aplicaţii

i) Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{D}$ două categorii cu imagini şi nuclee. În situaţia în care $\mathcal{C}$ este o subcategorie plină a lui $\mathcal{D}$, se constată uşor că, dacă $M \in Ob(\mathcal{C})$ este morfic în $\mathcal{C}$, *atunci* M este morfic şi în $\mathcal{D}$.

Categoria *Ab* este o subcategorie plină a categoriei *Grp*. Deci, dacă grupul G este morfic în *Ab*, el este morfic şi în *Grp*.

În continuare se dau exemple de categorii în care nu se poate defini obiectul morfic.

ii) Obiecte morfice în categoria $pEns$.

Teorema 2.2.1. *O mulţime punctată (A, a) este morfică dacă şi numai dacă A este finită.*

Următoarea propoziţie este o consecinţă imediată a acestei teoreme:

Corolarul 2.2.2. ***1)*** *Produsul infinit de mulţimi punctate nu este morfic.*

2) Coprodusul infinit de mulţimi punctate nu este morfic.

3) Un produs finit este morfic dacă şi numai dacă toţi factorii (termenii) produsului sunt morfici.

4) Un coprodus finit este morfic dacă şi numai dacă toţi factorii (termenii) produsului sunt morfici.

iii) Obiecte morfice în categoria inelelor

Lema 2.2.3. *Fie $R \in Rng$. Endomorfismul $\alpha \in End_{Rng}(R)$ este morfic dacă şi numai dacă* $\mathrm{Im}\alpha$ *este ideal în R şi $R/\mathrm{Im}\alpha \simeq Ker\alpha$.*

Următoarea propoziţie este o consecinţă imediată a L. 2.2.4.:

Corolarul 2.2.4. *Inelul R este obiect morfic în categoria Rng dacă şi numai dacă pentru orice $\alpha \in End_{Rng}(R)$,* $\mathrm{Im}\alpha$ *este ideal în R şi $R/\mathrm{Im}\alpha \simeq Ker\alpha$.*

Obiectul morfic este caracterizat laticial de următoarea propoziţie:

Teorema 2.2.5. *Inelul R este obiect morfic în categoria Rng dacă şi numai dacă pentru orice ideale I şi J: $R/I \simeq J$, implică $R/J \simeq I$.*

Următoarea afirmaţie este o consecintă imediată teoremei 2.2.5.:

Exemplul 2.2.6. Orice inel simplu este obiect morfic în categoria *Rng*. În particular, orice corp este obiect morfic.

Observaţia 2.2.7. În general într-o categorie w-exactă un obiect morfic nu este cohopian. Într-adevăr corpul funcţiilor raţionale cu un număr finit de nedeterminate este morfic dar nu este cohopian.

iv) Obiecte morfice în categoria asociată unui inel

Fie R un inel. Notăm cu $\mathcal{C}_R$ categoria asociată inelului $(R, +, \cdot)$.

Fie $(R, +, \cdot)$ un **domeniu de integritate**. Atunci $(R \backslash \{0\}, \cdot)$ este un monoid cu simplificare la stâga şi la dreapta. Deci orice $a \in R \backslash \{0\}$ este bimorfism.

Automorfismele lui R sunt elementele inversabile ale inelului, adică $Aut(R) = U(R, +, \cdot)$.

Subobiectele obiectului R sunt: $0_{OR}, a \in R \backslash \{0\}$.

Se constată uşor că $\mathcal{C}_R$ este o categorie cu imagini şi nuclee.

Dacă R are bimorfisme care nu sunt automorfisme, acestea nu sunt morfice, iar toate bimorfismele automorfisme sunt morfice.

Exemplul 2.2.8. Fie $(R, +, \cdot)$ un domeniu de integritate.

i) Dacă R este corp, atunci R este morfic în categoria $\mathcal{C}_R$.

ii) Dacă R nu este corp, atunci R nu este morfic în $\mathcal{C}_R$.

iii) $\mathbb{Z}$ nu este morfic în categoria $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}}$.

iv) Dacă R este finit, atunci R este morfic în $\mathcal{C}_R$.

v) Dacă R este infinit, dar nu este corp, atunci R nu este morfic în $\mathcal{C}_R$.

vi) Dacă p este prim, atunci corpul $\mathbb{Z}_p$ este obiect morfic în categoria $\mathcal{C}_{\mathbb{Z}_p}$.$\square$

În următoarea propoziţie vom caracteriza monomorfismele şi epimorfismele categoriei $\mathcal{C}_R$.

Lema 2.2.9. *Fie R un inel oarecare asociativ şi cu unitate. Atunci*

i) $a \in R$ este monomorfism dacă şi numai dacă anulatorul la dreapta a lui a este zero (notăm acest anulator prin $r(a)$).

ii) $a \in R$ este epimorfism dacă şi numai dacă anulatorul la stânga a lui a este zero (notăm acest anulator prin $l(a)$).

Observăm că în $\mathcal{C}_R$ nondivizorii lui zero la stânga sunt monomorfisme, şi nondivizorii lui zero la dreapta sunt epimorfisme.

Dacă R este un corp necomutativ, evident că R este morfic în $\mathcal{C}_R$.

Dacă R este un inel comutativ cu divizori ai lui zero, atunci $\mathcal{C}_R$ nu este o categorie cu nuclee.

Exemplul 2.2.10. Fie inelul triunghiular $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Z}_2 \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$. R este un inel necomutativ şi cu divizori ai lui zero.

Matricea $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ este epimorfism şi nu este monomorfism în categoria $\mathcal{C}_R$.

2.3 Obiecte morfice în categorii p-exacte

Într-o categorie $p-$exactă, endomorfismul morfic se caracterizează astfel:

Lema 2.3.1. *(duala teoremei de izomorfism) Într-o categorie $p-$exactă, un endomorfism $M \overset{\alpha}{\to} M$ este morfic dacă şi numai dacă $M/\mathrm{Im}\alpha \simeq Ker\alpha$.*

Evident că obiectul M este morfic dacă şi numai dacă pentru orice endomorfism α al lui M avem $M/\mathrm{Im}\alpha \simeq Ker\alpha$.

O altă caracterizare a obiectului morfic este dată de următoarea teoremă:

Lema 2.3.2. *(Caracterizarea laticială) Într-o categorie $p-$exactă, pentru un obiect M următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) M este morfic.

(2) Pentru orice subobiecte K şi N : $M/K \simeq N$ implică $M/N \simeq K$.

Propoziţia 2.3.3. *Dacă M este un obiect morfic într-o categorie p-exactă $\mathcal{C}$, atunci M este hopian şi cohopian.*

Corolarul 2.3.4. *Dacă M este un obiect morfic într-o categorie p-exactă $\mathcal{C}$, atunci M este dedekind-finit.*

Propoziţia 2.3.5. *Într-o categorie $p-$exactă, coprodusul infinit, (dacă există) al aceluiaşi obiect nu este morfic.*

Propoziţia 2.3.6. *Dacă M este un obiect morfic şi K este un subobiect al lui M, atunci:*

1. *Dacă $M \simeq K$ atunci subobiectele K şi M coincid.*
2. *Dacă $M \simeq M/K$ atunci K este obiectul zero.*

Un **obiect** morfic care satisface condiţia: pentru orice subobiect al lui M există un obiect cât al lui M izomorf cu el se numeşte **morfic tare**.

Teorema 2.3.7. ***i.*** *Într-o categorie $p-$exactă, pentru un obiect morfic M următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) M este morfic tare.

(2) Pentru orice obiect cât al lui M există un subobiect al lui M izomorf cu el.

ii. *Fie M un obiect morfic tare. Atunci dacă N şi N' sunt subobiecte ale lui M avem $M/N \simeq M/N'$ dacă şi numai dacă $N \simeq N'$.*

Exemplul 2.3.8. 1) Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Grupul $(\mathbb{Z}_n, +)$ este morfic tare în categoria Ab

2) Grupul $(\mathbb{Q}, +)$ este morfic în Ab dar nu este morfic tare.

3) $(\mathbb{Z}, +)$ nu este morfic în Ab. Pentru $m, n \in \mathbb{N}, n, m \geq 2, m \neq n$ avem: $(n\mathbb{Z}, +) \simeq (m\mathbb{Z}, +)$, iar $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +) \not\simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$.

Definiţia 2.3.9. Un subobiect N al obiectului M din categoria $\mathcal{C}$ se numeşte **relativ morfic** dacă oricare ar fi K subobiect al lui M, $M/K \simeq N$ implică $M/N \simeq K$.

Avem următoarea teoremă de caracterizare a obiectului morfic folosind subobiectele relativ morfice.

Teorema 2.3.10. *Un obiect M dintr-o categorie exactă $\mathcal{C}$ este morfic dacă şi numai dacă orice subobiect al obiectului M este relativ morfic.*

Definiţia 2.3.11. Un subobiect N al obiectului M din categoria $\mathcal{C}$ se numeşte dual relativ morfic dacă oricare ar fi K subobiect al lui M, $M/N \simeq K$ implică $M/K \simeq N$.

Are loc o teoremă analoagă Teoremei 2.3.10.

Observaţia 2.3.12. 1) Subobiectul nul al obiectului M este relativ morfic.

2) Subobiectul M al obiectului M este dual relativ morfic.

2.4 Obiecte morfice în categorii abeliene

Teorema 2.4.1. *Fie $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor exact, plin şi fidel între două categorii abeliene şi $M \in Ob\mathcal{C}$. Atunci M este morfic în $\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă $F(M)$ este morfic în $\mathcal{D}$.*

Observaţia 2.4.2. i) Fie $\mathcal{C}$ o categorie abeliană. Atunci M este morfic în $\mathcal{C}$ dacă şi numai dacă M^0 este morfic în categoria duală $\mathcal{C}^{op}$.

Mai mult, această afirmaţie are loc şi în situaţia în care $\mathcal{C}$ este doar categorie $p-$exactă.

ii) Fie $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{D}$ două categorii abeliene. Dacă $\mathcal{C}$ este subcategorie plină a lui $\mathcal{D}$, atunci obiectul M din $\mathcal{C}$ este morfic dacă şi numai dacă M este obiect morfic în $\mathcal{D}$.

iii) Dacă $\mathcal{C}$ este o categorie abeliană mică, atunci există un inel R şi un functor exact, plin şi fidel $F : \mathcal{C} \to R - Mod$ astfel încât $M \in Ob\mathcal{C}$ este morfic dacă şi numai dacă $F(M)$ este $R-$modul morfic.

iv) Grupul abelian $(M, +)$ este morfic dacă şi numai dacă este M este $\mathbb{Z}-$modul morfic. $\square$

Teorema 2.4.3. *Într-o categorie abeliană orice sumand direct al unui obiect morfic este de asemenea morfic.*

Observaţia 2.4.4. i) Clasa modulelor morfice nu este închisă la suma directă. Într-adevăr $\mathbb{Z}-$modulele $\mathbb{Z}_2$ şi $\mathbb{Z}_4$ sunt morfice în Ab, dar suma lor $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ nu este morfică.

ii) Grupuri numerice

Singurul grup numeric morfic este grupul $(\mathbb{Q}, +)$. Suma directă finită $\mathbb{Q} \oplus ... \oplus \mathbb{Q}$ este morfică ([9]).

Propoziţia 2.4.5. *Dacă M şi N sunt obiecte morfice pentru care $Hom_{\mathcal{C}}(M, N) = 0 = Hom_{\mathcal{C}}(N, M)$, atunci $M \oplus N$ este morfic.*

Propoziţia 2.4.6. *Fie M şi N obiecte cu $Hom_{\mathcal{C}}(M, N) = 0$. Dacă există un epimorfism $\pi : N \to M$, atunci suma directă $S = M \oplus N$ nu este morfică.*

Lema 2.4.7. *Într-o categorie abeliană, fie $\alpha \in EndM$ şi $M = N \oplus Ker\alpha$. Atunci $\alpha M = \alpha N$.*

Observaţia 2.4.8. Scufundând această diagramă într-o diagramă tip Lema celor 9 (0 produse fibrate pentru pătratul din stânga sus) avem că $\overline{\alpha} : N \to M \to I$ este un izomorfism. $\square$

Următoarea teoremă generalizează un rezultat al lui Ehrlich:

Teorema 2.4.9. *Într-o categorie abeliană $\mathcal{C}$, un endomorfism $\alpha \in End_{\mathcal{C}}(M)$ este unit-regular dacă şi numai dacă este regular şi morfic.*

Următoarea propoziţie este o consecinţă imediată a T. 2.4.9:

Corolarul 2.4.10. *Într-o categorie abeliană $\mathcal{C}$, obiectul M este unit-regular dacă şi numai dacă este regular şi morfic.*

Un obiect M se numeşte **cu nucleu direct** (respectiv **cu imagine directă**) dacă pentru orice $\alpha \in End_{\mathcal{C}}(M), Ker\alpha$ (respectiv Imα) este sumand direct în M

Teorema 2.4.11. *Pentru un obiect M într-o categorie abeliană, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(1) $EndM$ este unit-regular.

(2) M este morfic şi cu nucleu direct.

(3) M este morfic şi cu imagine directă.

Capitolul 3

Bimodule morfice. Inele morfice

În acest capitol sunt definite şi studiate bimodulele şi inelele morfice. De asemenea se studiază clase speciale de inele cu involuţie şi module peste inele grupale skew.

Capitolul debutează cu prezentarea noţiunii de bimodul morfic şi proprietăţilor lui de bază. Particularizarea acestei noţiuni în categoria $R - Mod - S$ conduce la noţiunea de inel morfic. Se arată că bimodulul ${}_RM_S$ este morfic dacă şi numai dacă modulul ${}_{R\otimes S^{op}}M$ este morfic şi în particular, inelul R este morfic dacă şi numai dacă modulul ${}_{R\otimes R^{op}}R$ este morfic. Sunt date apoi caracterizări pentru inelul morfic, sunt studiate inelele care admit o involuţie, acţiunile unui grup pe un inel, punând în evidenţă condiţii în care un astfel de inel este morfic.

Vom vedea că pentru inele comutative şi principale noţiunea de inel morfic este echivalentă cu noţiunea de inel dual. Vom vedea, de asemenea, în ce condiţii subinelele speciale ale unui inel sunt morfice.

3.1 Noţiunea de bimodul morfic. Proprietăţi de bază

Definiţia 3.1.1. Fie R şi S două inele asociative şi unitale şi M un (R, S)-bimodul. Un **endobimorfism** $f \in End_{R,S}(M)$ se numeşte **morfic**, dacă este endomorfism morfic în categoria $R - Mod - S$. Un M - (R, S)-**bimodul** se numeşte **morfic** dacă este obiect morfic în categoria $R - Mod - S$.

Exemple de (R, S)-endomorfisme:

Propoziţia 3.1.2. *Dacă $a \in Z(R)$ şi $b \in Z(S)$, atunci aplicaţia $t_{a,b} : {}_RM_S \to {}_RM_S$ dată de $t_{a,b}(x) = axb$ este un $(R, S)-$endobimorfism.*

Un element $e \in M, e \neq 0$ se numeşte **liber** dacă satisface condiţia: pentru $r \in R, s \in S$, $res = 0$ implică $r = 0$ sau $s = 0$.

Propoziţia 3.1.3. *Fie M un $(R, S)-$bimodul care conţine elemente libere. Fie $a \in R, a \neq 0$ şi $b \in S, b \neq 0$ şi $t_{a,b} : M \to M$ dată de $t_{a,b}(x) = axb$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) $t_{a,b} \in End_{R,S}(M)$.

2) $a \in Z(R)$ şi $b \in Z(S)$.

Propoziţia 3.1.4. *Fie M un $(R, S)-$bimodul şi $a, c \in Z(R), b, d \in Z(S)$, atunci*

1. *Dacă $t_{a,b}, t_{c,d} \in End_{R,S}(M)$, atunci $t_{a,b} \circ t_{c,d} = t_{ac,db}$.*
2. *Dacă $a \in U(R)$ şi $b \in U(S)$, atunci $t_{a,b}$ este automorfism.*

Endomorfismele morfice se caracterizează folosind Lema 2.3.1 astfel:

Lema 3.1.5. *Fie* $f : M \to M$ *un endomorfism de* $(R, S)-$*bimodule. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Endomorfismul* $f : M \to M$ *este morfic.*

2. *Există endomorfismul* $g : M \to M$ *astfel încât* $\mathrm{Im} f = Ker g, \mathrm{Im} g = Ker f$.

3. $M/\mathrm{Im} f \simeq K\mathrm{er} f$.

4. *Există endomorfismul* $g : M \to M$ *astfel încât* $\mathrm{Im} g \simeq Ker f, \mathrm{Im} f = Ker g$.

Bimodulele morfice se caracterizează folosind Lema 2.3.2 astfel:

Teorema 3.1.6. *Fie* M *un* (R, S)*-bimodul. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. M *este morfic.*

2. *Pentru orice endomorfism* $f : M \to M$ *există un endomorfism* $g : M \to M$ *astfel încât* $\mathrm{Im} f = Ker g, \mathrm{Im} g = Ker f$.

3. *Pentru orice endomorfism* $f : M \to M$ *avem* $M/\mathrm{Im} f \simeq K\mathrm{er} f$.

4. *Pentru orice* N *şi* K *subbimodule ale lui* M*:* $M/N \simeq K$ *implică* $M/K \simeq N$.

Considerăm **functorul** $F : R - Mod - S \to R \otimes S^{op} - Mod$ definit în 1.5.

Deoarece acest functor F este izomorfism de categorii (T1.5.5), bimodulul ${}_R M_S$ este morfic dacă şi numai dacă modulul ${}_{R\otimes S^{op}} M$ este morfic.

Exemplul 3.1.7. Există (R, S)-bimodule care sunt morfice ca $R-$module stângi dar nu sunt morfice ca $S-$module drepte.

3.2 Inele morfice

Definiţia 3.2.1. Spunem că inelul R **este morfic** dacă bimodulul ${}_R R_R$ este morfic în categoria $R - Mod - R$.

Este uşor de văzut că produsul direct de inele morfice este morfic dacă şi numai dacă fiecare factor este morfic.

Definiţia 3.2.2. Un element $a \in Z(R)$ se numeşte **morfic** dacă t_a este endomorfism morfic pentru obiectul ${}_R R_R$ în categoria $R - Mod - R$.

Observaţia 3.2.3. 1) Inelul R este morfic dacă şi numai dacă modulul ${}_{R\otimes R^{op}}R$ este morfic.

2) $\mathrm{Im}t_a = Ra$ şi $Kert_a = Ann_R(a)$ pentru orice $a \in Z(R)$.

Elementele morfice sunt caracterizate cu

Lema 3.2.4. *Pentru $a \in Z(R)$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1) Elementul a este morfic.

2) $R/Ra \simeq Ann_R(a)$.

3) $\exists b \in Z(R)$ aî $Ra = Ann_R(b)$ şi $Ann_R(a) = Rb$.

În mod clar $End_{R\otimes R^{op}}(R) = \{t_a/a \in Z(R)\}$

Propoziţia 3.2.5. *Modulul ${}_{R\otimes R^{op}}R$ este morfic dacă şi numai dacă pentru orice $a \in Z(R)$, există $b \in Z(R)$ astfel încât $Ra = Ann_R(b)$ şi $Rb = Ann_R(a)$.*

Propoziţia 3.2.6. *Fie R un inel comutativ şi principal. Atunci R este morfic dacă şi numai dacă R este un inel dual.*

Propoziţia 3.2.7. *Modulul ${}_{R\otimes R^{op}}R$ este cu imagine proiectivă dacă şi numai dacă oricare ar fi $a \in Z(R) : Za = Ra \cap Z$ (unde cu Z se notează $Z(R)$).*

Propoziţia 3.2.8. *Dacă ${}_{R\otimes R^{op}}R$ este morfic şi cu imagine proiectivă atunci inelul $Z = Z(R)$ este morfic.*

Propoziţia 3.2.9. *Dacă* $Z(R)$ *este morfic, atunci modulul* ${}_{R\otimes R^{op}}R$ *este cu imagine proiectivă.*

Corolarul 3.2.10. *Dacă* R *este inel morfic, atunci* $Z(R)$ *este morfic dacă şi numai dacă* ${}_{R\otimes R^{op}}R$ *este cu imagine proiectivă.*

Propoziţia 3.2.11. *Dacă* $Z = Z(R)$ *este inel morfic cu proprietatea că oricare ar fi* $x, y \in Z : Zx = Ann_Z(y)$ *implică* $Rx = Ann_R(y)$ *atunci* ${}_{R\otimes R^{op}}R$ *este morfic.*

Propoziţia 3.2.12. *Dacă* ${}_{R\otimes R^{op}}R$ *este morfic atunci* $\forall a \in Z(R) : Ra = Ann(Ann(a))$

Propoziţia 3.2.13. *Dacă* $(Z(R), +, \cdot)$ *este inel divizibil, atunci* R *este inel morfic.*

Exemplul 3.2.14. Fie K un corp şi $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$. Atunci inelul matricilor pătratice $(M_n(K), +, \cdot)$ este morfic, precum şi centrul său.

Propoziţia 3.2.15. *Dacă elementele din* $Z(R)$ *nu sunt divizori ai lui zero în* R*, atunci* ${}_{R\otimes R^{op}}R$ *este semiproiectiv (adică pentru orice* $a \in Z(R) : Ra \cap Z = Za$*).*

Teorema 3.2.16. *Fie* R *un inel care verifică condiţia: elementele din* $Z(R)$ *nu sunt divizori ai lui zero în* R*. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *R este morfic.*

2. *$Z(R)$ este morfic.*

3. *$Z(R)$ este corp.*

Corolarul 3.2.17. *Dacă* R *este fără divizori ai lui zero, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *R este morfic.*

2. *$Z(R)$ este morfic.*

3. *$Z(R)$ este corp.*

Propoziţia 3.2.18. *Dacă inelul* $Z = Z(R)$ *este unit-regular, atunci modulul* ${}_{R\otimes R^{op}}R$ *este morfic.*

3.3 Inele morfice cu involuţie

$Z_0 = \{x \in Z/\rho(x) = x\}$ mulţimea elementelor simetrice relativ la involuţia ρ .

$Z_1 = \{x \in Z/\rho(x) = -x\}$ mulţimea elementelor antisimetrice relativ la involuţia ρ.

Propoziţia 3.3.1. *Dacă* $1 + 1 = 2$ *este inversabil, atunci* $Z = Z_0 \oplus Z_1$ *(sumă directă de subgrupuri).*

Propoziţia 3.3.2. *Dacă* $char R \neq 2$ *şi aplicaţia* $a \in Z \to 2a \in Z$ $(2a = a + a)$ *este surjectivă atunci* $Z = Z_0 \oplus Z_1$.

Propoziţia 3.3.3. $End_T(R) = \{t_a/a \in Z_0\}$.

Propoziţia 3.3.4. *Funcţia* $\phi : End_T(R) \to R, \phi(\psi) = \psi(1)$ *este un morfism injectiv şi* $\mathrm{Im}\psi = Z_0$.

Observaţia 3.3.5. $(End_T(R), +, \circ) \simeq (Z_0, +, \cdot)$.□

Propoziţia 3.3.6. *Modulul* ${}_TR$ *este morfic dacă şi numai dacă pentru orice* $a \in Z_0 = Z(R, \rho)$, *există* $b \in Z_0$ *astfel încât* $Ra = Ann_R(b)$ *şi* $Rb = Ann_R(a)$.

Propoziţia 3.3.7. *Modulul* ${}_TR$ *este cu imagine proiectivă dacă şi numai dacă pentru orice* $a \in Z_0 = Z(R, \rho)$ *avem* $Z_0a = Ra \cap Z_0$.

Propoziţia 3.3.8. *Dacă* ${}_TR$ *este morfic şi cu imagine proiectivă atunci inelul* $Z_0 = Z(R, \rho)$ *este morfic.*

Teorema 3.3.9. *Fie R un inel cu involuţia $\rho : R \to R$ cu proprietatea că elementele din Z_0 nu sunt divizori ai lui zero în Z. Dacă modulele ${}_{R\otimes R^{op}}R, {}_T R$ sunt cu imagine proiectivă, atunci R este inel morfic dacă şi numai dacă ${}_T R$ este morfic.*

Propoziţia 3.3.10. *Dacă Z_0 este morfic, atunci ${}_T R$ este cu imagine proiectivă.*

Exemplul 3.3.11. Fie D un inel cu diviziune şi $R = M_n(D), n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ inelul matricilor pătratice de ordin n cu elemente în D şi involuţia $\rho : R \to R, \forall A \in R, \rho(A) = A^t$ (transpusa matricilor). Atunci R este morfic ca $T-$modul.

Propoziţia 3.3.12. *Dacă inelul $Z_0 = Z(R, \rho)$ este unit-regular, atunci modulul ${}_T R$ este morfic.*

3.4 Acţiunea unui grup de automorfisme a unui inel pe inelul însuşi

Considerăm mulţimea $R^G = \{a \in Z(R) / \forall \sigma \in G : \sigma(a) = a\} \subseteq Z(R)$, unde σ este o acţiune a grupului G pe inelul R şi modulul $R * G$ peste R.

Reamintim că $(End_{R*G}(R), +, \circ) \simeq (R^G, +, \cdot)$.

Propoziţia 3.4.1. *Modulul ${}_{R*G}R$ este morfic dacă şi numai dacă pentru orice $a \in R^G$ există $b \in R^G$ astfel încât $Ra = Ann_R(b)$ şi $Ann_R(a) = Rb$.*

Propoziţia 3.4.2. *${}_{R*G}R$ este cu imagine proiectivă dacă şi numai dacă oricare ar fi $a \in R^G$ avem $R^G a = Ra \cap R^G$.*

Propoziţia 3.4.3. *Dacă ${}_{R*G}R$ este morfic şi cu imagine proiectivă (modul semiproiectiv) atunci inelul R^G este morfic.*

Propoziţia 3.4.4. *Dacă inelul R^G este unit-regular, atunci modulul ${}_{R*G}R$ este morfic.*

Capitolul 4

Între morfic şi hopian

În acest capitol, definim şi studiem submodulele relativ morfice, respectiv dual relativ morfice. Apoi cu ajutorul acestei noţiuni definim $\delta-$modulul (respectiv $\gamma-$modulul) şi îi studiem proprietăţile.

Vom constata că clasa $\delta-$modulelor (respectiv clasa $\gamma-$modululelor) este situată între clasa modulelor morfice şi clasa modulelor hopiene (respectiv cohopiene).

Particularizând noţiunea de $\delta-$modul (respectiv $\gamma-$modulul) introducem noţiunea de $\delta-$grup (respectiv $\gamma-$grup).

Deoarece grupurile abeliene morfice sunt rare (de exemplu există un singur grup numeric morfic şi acesta este $(\mathbb{Q},+)$), iar grupurile hopiene (respectiv cohopiene sunt numeroase) găsirea $\delta-$modulelor (respectiv $\gamma-$modulelor) prezintă interes.

Vom studia în detaliu $\delta-$grupurile respectiv $\gamma-$grupurile.

4.1 Submodule relativ morfice

Definiţia 4.1.1. Un **submodul** N al lui $_RM$ se numeşte **relativ morfic** dacă pentru orice submodul K: $M/K \simeq N$ implică $M/N \simeq K$.

Submodulul nul este relativ morfic în orice $R-$modul M.

Lema 4.1.2. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *M este relativ morfic în M.*

2. *M nu are grupuri factor izomorfe cu M.*

3. *M este hopian.*

Submodulele unui modul morfic sunt relativ morfice, iar dacă M este hopian, mulţimea submodulelor relativ morfice ale lui M cuprinde submodulele improprii.

Exemplul 4.1.3. 1) Submodulele proprii $N < M$ cu $N \simeq M$ nu sunt relativ morfice ($M/0 \simeq N$, dar $M/N \not\simeq 0$).

2) Dacă modulul M nu are submodule N, K unde K este propriu cu $M/K \simeq N$, atunci toate submodulele sale sunt relativ morfice în M.

Dacă A este grup abelian liber de torsiune de rang 1, atunci toate subgrupurile proprii în A sunt relativ morfice în A.

3) $n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ este un subgrup al grupului $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ care nu este relativ morfic.

4) Proprietatea de a fi relativ morfic nu este o relaţie tranzitivă, adică dacă L este relativ morfic în H şi H este relativ morfic în M, atunci L nu este în general relativ morfic în M.

5) Condiţiile [N este relativ morphic în M] şi [M/N este morphic] sunt independente logic.

6) Nu toţi sumanzii direcţi sunt relativ morfici.

Propoziţia 4.1.4. *N este relativ morfic în M dacă şi numai dacă orice endomorfism $\alpha \in End(M)$ cu $Im\alpha = N$ este morfic.*

4.2 Proprietatea (δ)

Propoziţia 4.2.1. *Pentru un modul M următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Toţi sumanzii direcţi sunt relativ morfici.*

(ii) *Pentru orice sumand direct C şi un submodul K: $M/K \simeq M/C$ implică $K \simeq C$.*

Definiţia 4.2.2. Un modul cu toţi sumanzii direcţi relativ morfici se numeşte $\delta-$modul.

Afirmaţia: "Orice sumand direct al modulului M este relativ morfic$''$ se numeşte proprietatea δ. O notăm cu (δ).

Propoziţia 4.2.3. *Un modul indecompozabil are proprietatea (δ) ($\delta-$modul) dacă şi numai dacă este hopian.*

Deoarece $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ sunt hopiane şi ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$,${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ sunt indecompozabile, rezultă că $\mathbb{Z}$ şi $\mathbb{Q}$ au proprietatea (δ). (mai mult, toate grupurile abeliene libere de torsiune de rang 1 au proprietatea (δ)).

Propoziţia 4.2.4. *i) Dacă M este morfic, atunci M este $\delta-$modul.*

ii) *Dacă M este $\delta-$modul atunci M este hopian.*

Adică avem $morfic \Rightarrow (\delta) \Rightarrow hopian$.

Afirmaţiile i) şi ii) nu au în general reciprocă.

Clasa modulelor morfice este inclusă în clasa $\delta-$modulelor, iar aceasta în clasa modulelor hopiane.

Propoziţia 4.2.5. *Dacă M are proprietatea (δ), atunci orice sumand direct are proprietatea (δ).*

Propoziţia 4.2.6. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *M este hopian.*

(ii) *Dacă $\mathrm{Im}\alpha = M$ atunci $Ker\alpha = 0$.*

(iii) *Orice epiendomorfism al lui M este morfic.*

Propoziţia 4.2.7. *Inelul endomorfismelor unui modul M este dedekind finit dacă şi numai dacă toate retracţiile (endomorfismele inversabile la dreapta) din $End(M)$ sunt morfice.*

4.3 δ-grupuri abeliene

Un grup abelian G se numeşte $\delta-$grup dacă $\mathbb{Z}-$modulul G este $\delta-$modul.

i)δ-grupuri divizibile

Deoarece $\mathbb{Z}_{p^\infty}/\mathbb{Z}_{p^n} \simeq \mathbb{Z}_{p^\infty}$ rezultă că $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ nu este hopian, deci nici $\delta-$grup. Grupul $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este grup divizibil de torsiune.

Propoziţia 4.3.1. *Grupurile divizibile de torsiune nu sunt hopiane.*

Observaţia 4.3.2. 1) Deoarece grupurile divizibile de torsiune nu sunt hopiane, ele nu sunt nici $\delta-$grupuri, nici morfice.

2) Dacă grupul divizibil M este grup hopian atunci M este liber de torsiune

3) Dacă grupul divizibil M este $\delta-$ grup (sau morfic), atunci M este liber de torsiune.

Propoziţia 4.3.3. *Dacă un grup fără torsiune este morfic atunci el este divizibil.*

Observaţia 4.3.4. Afirmaţia de la P. 4.3.3 nu este în general adevărată pentru $\delta-$grupuri sau grupuri hopiane.

ii)δ-grupuri libere de torsiune

Grupul $\mathbb{Z}$ este liber de torsiune, are proprietatea (δ) şi este liber de rang 1.

Propoziţia 4.3.5. *Grupurile libere de torsiune şi de rang finit sunt δ-grupuri.*

Observaţia 4.3.6. 1) Condiţia ca cel puţin unul dintre subgrupurile H şi K să fie sumand direct nu a fost utilizată. Astfel, grupurile libere de rang finit au o proprietate mai puternică decât (δ): pentru oricare două subgrupuri H, K din G astfel încât $H \simeq K$ avem $G/H \simeq G/K$.

2) Deoarece grupurile libere de torsiune şi de rang finit sunt finit generate, ele sunt hopiene.

3) Un grup liber de rang infinit nu este hopian şi deci nu are prop (δ).

Toate grupurile libere de torsiune de rang finit sunt hopiane (conform formulei rangului pentru grupuri libere de torsiune). Totuşi, deoarece subgrupurile neizomorfe pot avea acelaşi rang, acest lucru nu are loc pentru $\delta-$grupuri.

Propoziţia 4.3.7. *Dacă $Hom(M, N) = 0 = Hom(N, M)$ are loc pentru $\delta-$modulele M şi N, atunci, $M \oplus N$ satisface (δ).*

Propoziţia 4.3.8. *Orice grup abelian de rang finit, complet decompozabil (liber de torsiune) cu sumanzi de tip necomparabil este δ-grup.*

iii)δ -grupuri de torsiune

Propoziţia 4.3.9. *Un grup de torsiune este $\delta-$grup dacă şi numai dacă toate componentele sale primare sunt $\delta-$grupuri.*

Lema 4.3.10. *Dacă $m < n$ sunt numerele întregi pozitive, suma directă $A = \mathbb{Z}_{p^m} \oplus \mathbb{Z}_{p^n}$ nu este (δ).*

Teorema 4.3.11. *Un p-grup (redus) G are proprietatea (δ) dacă şi numai dacă este finit şi omogen.*

Corolarul 4.3.12. *Un $p-$grup este (δ) dacă şi numai dacă este morfic. Deci $\delta-$grupurile de torsiune sunt exact grupurile morfice de torsiune.*

Exemplul 4.3.13. Grupul $\underset{p \in \boldsymbol{P}}{\oplus} \mathbb{Z}_p$, unde $\boldsymbol{P}$ este o mulţime finită de numere prime, este morfic şi deci este $\delta-$grup şi hopian.

iv) δ-grupuri mixte

Propoziţia 4.3.14. *Dacă G este (δ), atunci partea de torsiune $T(G)$ este de asemenea (δ).*

Observaţia 4.3.15. În orice $\delta-$grup mixt scindabil $G = T(G) \oplus F$ partea de torsiune şi $F \simeq G/T(G)$, ca sumanzi direcţi sunt de asemenea $\delta-$grupuri.

Lema 4.3.16. *Dacă suma directă de $R-$module $N \oplus K$ este morfică şi există un epimorfism $R-$liniar $\lambda : K \to N$ atunci $K \simeq N \oplus \ker \lambda$.*

4.4 Subgrupuri speciale relativ morfice

Propoziţia 4.4.1. ***(i)*** *Dacă G este un grup de torsiune cu componentele primare cel mult numărabile şi hopiane atunci orice componentă primară este relativ morfică.*

(ii) *Dacă G este un $\delta-$grup de torsiune cu componentele primare cel mult numărabile, atunci toate componentele primare sunt morfice.*

Observaţia 4.4.2. Deoarece partea de torsiune $T(G)$ al δ-grup mixt scindabil G este sumand direct în G, $T(G)$ este subgrup relativ morfic al grupului G.

Propoziţia 4.4.3. *Dacă partea divizibilă $D(G)$ a unui grup G are rang finit, atunci $D(G)$ este relativ morfic.*

Exemplul 4.4.4. $\mathbb{Q}^n$ este relativ morfic în $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}^n$ oricare ar fi n întreg pozitiv.

Corolarul 4.4.5. *Dacă partea redusă a unui grup este de rang 1 şi grupul G este liber de torsiune, atunci partea divizibilă $D(G)$ este relativ morfică.* $\square$

4.5 Module morfice simple

Definiţia 4.5.1. Un modul M se numeşte morfic simplu dacă nu are submodule proprii relativ morfice.

Evident că, un modul simplu este morfic simplu.

Propoziţia 4.5.2. *Dacă M este modul morfic simplu, atunci modulul M este indecompozabil.*

Observaţia 4.5.3. Grupurile abeliene indecompozabile sunt cociclice sau grupuri libere de torsiune.

Propoziţia 4.5.4. *Grupul cociclic finit $\mathbb{Z}_{p^n}$ nu este morfic simplu, iar grupul cociclic infinit $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este morfic simplu.*

Observaţia 4.5.5. Grupurile cociclice finite nu sunt morfice simple, iar grupurile cociclice infinite sunt grupuri morfice simple. Grupul $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ este morfic simplu fără să fie grup simplu.

Propoziţia 4.5.6. *Grupul $\mathbb{Z}$ este singurul grup morfic simplu liber de torsiune (idecompozabil) de rang1*

4.6 Dualitate

Definiţia 4.6.1. Spunem că un submodul K este dual relativ morfic dacă pentru orice submodul N: $M/K \simeq N$ implică $M/N \simeq K$.

Propoziţia 4.6.2. *Submodulul M este dual relativ morfic în orice modul M.*

Propoziţia 4.6.3. *Orice submodul al unui modul morfic este relativ morfic şi dual relativ morfic.*

Propoziţia 4.6.4. *K este dual relativ morfic dacă şi numai dacă pentru orice endomorfism $\alpha \in End(M)$ cu $Ker\alpha = K$, α este morfic.*

Lema 4.6.5. *Pentru un modul M, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

i. *0 este dual relativ morfic în M.*

ii. *M nu are subgrupuri proprii izomorfe cu M.*

iii. *M este cohopian.*

Propoziţia 4.6.6. *Pentru module următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *Toţi sumanzii direcţi ai lui M sunt dual relativ morfici.*

(ii) *Pentru un sumand direct C şi un submodul K: $K \simeq C$ implică $M/K \simeq M/C$.*

Notăm cu (γ) proprietatea de mai sus.

Definiţia 4.6.7. Un modul cu toţi sumanzii direcţi dual relativ morfici se numeşte $\gamma-$modul.

Exemplul 4.6.8. 1) $\mathbb{Z}$ nu este (γ) şi nu este cohopian deoarece 0 nu este dual relativ morfic în $\mathbb{Z}$

2) Subgrupurile esenţiale ale unui grup abelian liber de torsiune sunt dual relativ morfice.

Clasa modulelor morfice este inclusă în clasa $\gamma-$modulelor, iar aceasta în clasa modulelor cohopiene.

Propoziţia 4.6.9. *Fie $M = H \oplus C$. Dacă M este un δ-modul şi C este dual relativ morfic, atunci H este relativ morfic. Dacă M este o γ-modul şi H este relativ morfic, atunci C este dual relativ morfic.*

Propoziţia 4.6.10. *Dacă modulul M se simplifică cu sumanzii direcţi, atunci sumanzii direcţi au proprietatea (γ).*

Propoziţia 4.6.11. *Un modul M are proprietatea (γ) dacă şi numai dacă orice endomorfism nucleu direct α al lui M este morfic.*

Propoziţia 4.6.12. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(i) *M este cohopian.*

(ii) $Ker\alpha = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\alpha = M$.

(iii) *Endomorfismele monice ale lui M sunt morfice.*

Propoziţia 4.6.13. *Un modul M are inelul de endomorfisme dedekind-finit dacă şi numai dacă toate secţiunile (endomorfismele inversabile la stânga) din $End(M)$ sunt morfice.*

4.7 γ-grupuri abeliene

Propoziţia 4.7.1. *γ-grupurile fără torsiune sunt divizibile.*

Corolarul 4.7.2. *Singurele γ-grupuri libere de torsiune sunt sumele directe finite de $\mathbb{Q}$.*

Corolarul 4.7.3. *Orice γ-grup mixt scindabil G, descompus ca $G = T(G) \oplus D(G)$, unde $D(G)$ este sumă directă finită de $\mathbb{Q}$.*

Propoziţia 4.7.4. *$\gamma-$grupurile divizibile de torsiune sunt exact grupurile de torsiune divizibile cu $p-$ranguri finite.*

Corolarul 4.7.5. *Grupurile de torsiune cu $p-$componentele omogene sunt $\gamma-$grupuri dacă şi numai dacă fiecare $p-$componentă este un $\gamma-$grup.*

Corolarul 4.7.6. *Grupurile de torsiune cu $p-$componentele omogene de rang finit sunt $\gamma-$grupuri.*

Lema 4.7.7. *Dacă $m < n$ sunt numerele întregi pozitive, suma directă $A = \mathbb{Z}_{p^m} \oplus \mathbb{Z}_{p^n}$ nu este (γ).*