

UNIVERSITATEA "BABEȘ-BOLYAI"  
CLUJ-NAPOCA

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ



Andrea-Éva MOLNÁR

# PRINCIPII VARIATIONALE CU APLICAȚII

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Conducător de doctorat:

Prof. Dr. CSABA GYÖRGY VARGA

Cluj-Napoca, 2013.

# Cuprins

<b>Introducere</b>	<b>4</b>
<b>1 Noțiuni și rezultate preliminare</b>	<b>14</b>
1.1 Noțiuni și proprietăți fundamentale în diferite spații metrice . . . . .	14
1.2 Elemente de analiză topologică și convexă . . . . .	15
1.3 Principii variaționale . . . . .	15
1.4 Teoreme de punct fix . . . . .	15
1.5 Puncte și probleme de echilibru . . . . .	15
1.6 Diferențiabilitate. Elemente ale teoriei dezvoltate de Clarke . . . . .	15
1.7 Spațiile $L^p$ și Sobolev . . . . .	15
<b>2 Principii variaționale în spații <math>b</math>-metrice cu aplicații în teoria punctului fix</b>	<b>16</b>
2.1 Principii variaționale în spații $b$ -metrice . . . . .	16
2.2 Aplicații în teoria punctului fix . . . . .	22
<b>3 Principii variaționale în spații <math>b</math>-metrice complete cu aplicații la probleme de echilibru</b>	<b>24</b>
3.1 Existența și localizarea punctelor de echilibru pentru funcții de două variabile . . . . .	25
3.2 Existența și localizarea punctelor de echilibru pentru sisteme de funcții	29
<b>4 Tehnici din teoria punctului fix utilizate în studiul diferitelor clase de inegalități și sistemelor de inegalități de tip hemivariațional</b>	<b>33</b>
4.1 Asupra unei probleme variațional-hemivariaționale fără proprietatea de compactitate . . . . .	33

---

4.2	Existența soluțiilor unui sistem de inegalități neliniare de tip hemivariațional . . . . .	37
4.3	Aplicații . . . . .	40
4.3.1	Puncte Nash generalizate . . . . .	40
4.3.2	Probleme de tip Schrödinger . . . . .	41
4.3.3	O problemă cu funcții radial simetrice . . . . .	44
	<b>Bibliografie</b>	<b>45</b>

# Introducere

Calculul variațional se ocupă de optimizarea unor variabile, care exprimă anumite dimensiuni fizice, de exemplu, timpul, suprafața, distanța etc. Problema caracteristică în domeniul calculului variațional este de a găsi minimumul unei funcționale de forma

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), Du(x)) dx,$$

unde  $u$  este o funcție reală sau vectorială, ce aparține anumitor clase de funcții.

Printre primele probleme formulate în teoria calculului variațional este *problema brachistocronei* formulată de Johann Bernoulli în anul 1696 (cuvântul grecesc ”brachistochrone” înseamnă ”timp minim”). Această problemă a stârnit interesul multor matematicieni din acea perioadă, precum Newton, Jacob Bernoulli, Euler, Lagrange, Laplace, L’Hospital, Leibnitz.

Tehnicile calculului variațional modern apar abia la mijlocul secolului al XIX-lea. Un pas important în trecerea de la fizica clasică la cea contemporană reprezintă caracterizarea fenomenelor folosind principiile variaționale.

Începând din anii 1950, principiile variaționale ocupă un loc important în studiul ecuațiilor diferențiale parțiale neliniare și au numeroase aplicații. A.D. Ioffe și V.M. Tikhomirov [54] afirmă: ”*principiile variaționale* se referă la rezultatele, care indică proprietatea unei funcții inferior semicontinue și mărginite inferior pe un spațiu metric complet de a poseda perturbații arbitrare de mici, iar funcția perturbată să aibă un minim absolut (și chiar strict).”

Principiul variațional al lui Ekeland, stabilit de I. Ekeland în lucrarea sa din 1974 [41], este unul din cele mai importante rezultate ale analizei matematice, fiind un instrument util pentru a rezolva probleme din teoria jocurilor, a controlului optimal, a ecuațiilor neliniare și a sistemelor dinamice; a se vedea, de exemplu, lucrările lui J.-P. Aubin, H. Frankowska [12], M. Bianchi și colab. [16], I. Ekeland [41], [42],

D. G. De Figueiredo [37] etc. Acest principiu furnizează un șir minimizant pentru orice funcțională inferior semicontinuuă și mărginită inferior, în care elementele șirului minimizează un șir corespunzător de perturbații ale lui  $f$ , ce converge uniform local către  $f$ .

După descoperirea acestui principiu al lui Ekeland, au apărut multe generalizări și formulări echivalente ale acestuia, ca "teorema drop" a lui Daneș sau teorema petală a lui Penot (a se vedea J. Daneș [34],[35], P.G. Georgiev [47], [48], A.H. Hamel [52], I. Meghea [72], W. Oettli, M. Théra [79], J.-P. Penot [83], L. Yongxing, S. Shuzhong [92] sau Secțiunea 1.3). Pe de altă parte, principiul variațional al lui Ekeland este echivalent cu teoremele de punct fix ale lui Caristi și ale lui Tarafdar (J. Caristi [25], E. Tarafdar [90]).

Pentru a obținerea unor aplicații noi, principiul variațional al lui Ekeland și multe alte principii variaționale binecunoscute (de exemplu, principiul variațional al lui Zhong) au fost extinse pentru cazul spațiilor având distanțe mult mai generale, de exemplu, spațiile cvasi-metriche. În literatura de specialitate există două tipuri de definiții pentru noțiunea de cvasi-metrică: 1) definiția în care se consideră asimetria metricii (a se vedea, de exemplu, S. Al-Homidana și colab. [1]); 2) definiția în care se impune o inegalitate relaxată a triunghiului, caz în care cvasi-metrică este numită și  $b$ -metrică (a se vedea I.A. Bakhtin [13], S. Czerwik [32], J. Heinonen [53]). În această teză vom lua în considerare  $b$ -metrici. Acest concept a fost introdus de către I.A. Bakhtin în [13] și S. Czerwik în [32]. În ultimii ani un interes din ce în ce mai mare a fost acordat spațiilor înzestrate cu  $b$ -metrici. Au fost stabilite rezultate importante cu aplicații în teoria punctului fix, geometrie, calculul variațional; a se vedea N. Bourbaki, I.A. Bakhtin [13], V. Berinde [15], S. Czerwik [32], S.L. Singh și colab. [89] etc.

Această teză are ca scop dezvoltarea teoriei referitoare la principiul variațional al lui Ekeland, precum și al generalizării acestuia, adică al principiului variațional al lui Zhong [93], [94]. De asemenea, vom stabili câteva aplicații ale acestor rezultate în teoria punctelor fixe și în studiul problemelor de echilibru.

Una dintre cele mai importante probleme în analiza neliniară este *problema de echilibru*, care se poate formula în felul următor: Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi nevide și  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție dată. Problema constă în găsirea unui element  $\bar{x} \in A$ ,

astfel încât

$$(EP) \quad f(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in B.$$

$\bar{x}$  se numește *punctul de echilibru al lui  $f$  pe  $A \times B$* .

Problema (EP) este un domeniu atractiv de cercetare, având numeroase aplicații: [16], [17], [21], [57], [18], [19], [20], [59], [71] etc.

În lucrarea [9], Q. H. Ansari și colab. au introdus și au investigat sisteme de probleme de echilibru (abreviat (SEP)).

De la apariția problemelor (EP) și (SEP), mulți autori au fost interesați în a extinde principiul variațional al lui Ekeland la probleme de tipul (EP) și (SEP). În studiul problemelor de echilibru, de multe ori ne întâlnim cu situații în care problema nu admite nicio soluție, nici chiar dacă este o problemă care apare în practică. Pentru astfel de cazuri principiul variațional al lui Ekeland oferă o soluție accesibilă, deoarece asigură existența soluțiilor aproximative ale problemelor minimizate pentru funcții inferior semicontinue (a se vedea, de exemplu, J.P. Aubin [11]). Pe de altă parte, este cunoscut faptul că problemele de minimizare sunt cazuri particulare ale problemelor de echilibru. Pentru detalii referitoare la relația dintre principiul variațional al lui Ekeland și problemele de echilibru a se vedea lucrările lui A. Amini-Harandi și colab. [3], Q.H. Ansari [5]-[7], Q.H. Ansari, L.-J. Lin [8], Y. Araya și colab. [10], M. Bianchi și colab. [16], respectiv lucrările de referință citate în aceste lucrări.

Principiul variațional al lui Ekeland poate fi aplicat în teoria punctului critic pentru a demonstra diferite rezultate de existență și de multiplicitate. Subliniem aici lucrarea lui D. G. De Figueiredo [37], unde autorul indică modul în care se poate folosi o consecință a acestui principiu pentru a deduce teorema Mountain-Pass a lui Ambrosetti și Rabinowitz [2], precum și teorema de punct șa și teorema generalizată Mountain-Pass, stabilită de Rabinowitz (a se vedea [84], respectiv [85]). Teorema Mountain-Pass a lui Ambrosetti și Rabinowitz pentru funcții local Lipschitz a fost demonstrată de P. Mironescu și V. Rădulescu (a se vedea [73], [86]).

Rezultatele menționate anterior sunt foarte utile în studiul inegalităților și sistemelor de inegalități de tip hemivariațional.

Inegalitățile hemivariaționale au fost introduse de către P.D. Panagiotopoulos la începutul anilor 1980 ([80],[81]) ca o generalizare a inegalităților variaționale.

De fapt, aceste inegalități sunt mult mai mult decât simple generalizări, deoarece o inegalitate hemivariațională nu este echivalentă cu o problemă de minim. O problemă de inegalitate hemivariațională devine o problemă de inegalitate variațională, dacă presupunem că funcțiile considerate sunt convexe.

În urma introducerii inegalităților hemivariaționale a apărut o ramură nouă în analiza neliniară și anume analiza nenetedă. Noțiunea de bază acestei ramuri este gradientul generalizat al lui Clarke pentru o funcție local Lipschitz (vezi F.H. Clarke [26]-[29]). Teoria inegalităților hemivariaționale a produs rezultate importante atât în matematica pură, cât și în cea aplicată; a se vedea monografiile lui Z. Nanievicz și P.D. Panagiotopoulos [78], D. Motreanu și P.D. Panagiotopoulos [76], D. Motreanu și V. Rădulescu [77] etc.

Inegalitățile hemivariaționale neliniare au fost introduse în anul 2010, de către N. Costea și V. Rădulescu [30] (vezi de asemenea I. Andrei și N. Costea [4]), în timp ce primul articol ce se ocupă cu sisteme de inegalități hemivariaționale neliniare este al lui N. Costea și Cs. Varga [31]. Pentru mai multe detalii în legătură cu studiul acestor sisteme de inegalități cititorul poate să consulte, de exemplu, lucrările: B.E. Breckner, A. Horváth și Cs. Varga [23], A. Kristály [60], [62] și D. Repovš, Cs. Varga [88].

În studiul acestor tipuri de inegalități putem distinge trei abordări diferite: 1) cu ajutorul operatorilor monotoni, respectiv pseudo-monotoni (Z. Liu și D. Motreanu [70], Z. Nanievicz și P.D. Panagiotopoulos [78]); 2) cu ajutorul teoriei punctului critic (F. Gazzola și V. Rădulescu [46], Z. Nanievicz și P.D. Panagiotopoulos [78], D. Motreanu și P.D. Panagiotopoulos [76], D. Motreanu and V. Rădulescu [77], A. Kristály [61], [63], Z. Dályai și Cs. Varga [33], Cs. Varga [91], F. Faraci și colab. [43]); 3) folosind teoria punctelor fixe (P. D. Panagiotopoulos și colab. [82], A. Kristály și Cs. Varga [65], V. Rădulescu și D. Repovš [87]). Urmărind ultima abordare, vom studia în această teză existența soluțiilor unor inegalități și a unor sisteme de inegalități de tip hemivariațional cu ajutorul unor teoreme de punct fix, fără a impune condiții de monotonicitate. De asemenea, vom sublinia posibilitățile de aplicabilitate a rezultatelor de existență obținute.

Teza cuprinde patru capitole.

## Capitolul 1: Noțiuni și rezultate preliminare

În acest capitol prezentăm noțiunile și rezultatele pe care le vom folosi în următoarele capitole ale lucrării.

## **Capitolul 2: Principii variaționale în spații $b$ -metrice cu aplicații în teoria punctului fix**

Acest capitol se ocupă cu prezentarea generalizărilor principiului variațional al lui Ekeland în contextul spațiilor  $b$ -metrice complete pentru funcții cu o singură, respectiv cu două variabile. De asemenea, se prezintă aplicabilitatea acestor principii variaționale generalizate în teoria punctului fix. Teorema principală a acestui capitol este principiul variațional al lui Ekeland stabilit în spații  $b$ -metrice complete pentru funcții univoce. În prima secțiune, urmând o generalizare comună a principiilor variaționale ale lui Ekeland și ale lui Borwein-Preiss, realizată de L. Yongxing și S. Shuzhong [92], formulăm și demonstrăm principiul variațional al lui Ekeland în contextul spațiilor  $b$ -metrice complete pentru funcții de o variabilă și apoi pentru funcții de două variabile. Ca o consecință, prezentăm o versiune slabă a principiului variațional al lui Zhong în spații  $b$ -metrice complete. O extensie a principiului variațional al lui Zhong pentru cazul spațiilor  $b$ -metrice complete este obținută. Secțiunea a doua este dedicată prezentării unor rezultate noi de punct fix în spații  $b$ -metrice complete, și anume teorema de punct fix a lui Caristi-Kirk pentru funcții de o variabilă și de două variabile. Aceste teoreme pot fi considerate de asemenea aplicații în teoria punctului fix ale versiunilor deja stabilite ale principiului variațional al lui Ekeland, respectiv, forma generalizată a acestuia, în contextul spațiilor  $b$ -metrice complete.

## **Capitolul 3: Principii variaționale în spații metrice cu aplicații la probleme de echilibru**

Scopul principal al acestui capitol este extinderea unor rezultate stabilite de către M. Bianchi, G. Kassay și R. Pini în lucrarea [16] pentru cazul spațiilor metrice complete fără a impune condiții de convexitate. În literatura de specialitate, atunci când se studiază existența soluțiilor problemelor de echilibru, ipotezele utilizate cel mai frecvent sunt convexitatea domeniului, precum și convexitatea, monotonia și anumite condiții de continuitate slabă ale funcției (a se vedea M. Bianchi, R. Pini [18], [19], N. Hadjisavvas și colab. [51], G. Kassay, J.Kolumbán [58]). E. Blum, W. Oettli [21], precum și W. Oettli și M. Théra [79] au fost primii autori care au stabilit un rezultat de existență pentru soluția unei probleme de echilibru în contextul spații-



ilor metrice complete. Autorii au demonstrat acest rezultat cu ajutorul principiului variațional al lui Ekeland, dar fără a impune orice restricție de convexitate. Aproape zece ani mai târziu, M. Bianchi, G. Kassay și R. Pini în lucrarea [16] au extins principiul variațional al lui Ekeland pentru (EP) și (SEP) într-un spațiu euclidian fără a impune condiții de convexitate funcției implicate în formularea principiului sau mulțimii, pe care funcțiile sunt definite. Ei au demonstrat că aceste versiuni de echilibru ale principiului variațional al lui Ekeland asigură existența unui punct de echilibru aproximativ pentru problema (EP), respectiv (SEP). Folosind acest rezultat se poate arăta existența punctului de echilibru pe mulțimi general închise, eliminând ipoteza de convexitate a mulțimii și a funcției considerate (vezi Secțiunea 1.5). A. Amini-Harandi și colab. [3] au stabilit versiunea de echilibru a principiului variațional al lui Ekeland pentru spații metrice complete. Autorii s-au concentrat numai pe condițiile care nu implică niciun concept de semicontinuitate pentru funcții de două variabile.

Capitolul constă în două secțiuni. În prima secțiune se prezintă relația dintre problemele (EP) și principiul variațional al lui Ekeland, iar în a doua secțiune se extind toate teoremele obținute în secțiunea anterioară pentru sisteme. În continuare se indică principiul variațional al lui Ekeland pentru spații metrice complete (pentru problema (EP), respectiv pentru problema (SEP)), fără a impune condiții de convexitate funcțiilor incluse în formularea principiului, respectiv mulțimii, pe care funcțiile sunt definite. Cu ajutorul unei condiții de compactitate impusă anumitor mulțimi, care stau la baza problemei, se arăta că aceste principii garantează că mulțimea soluțiilor problemei (EP), respectiv (SEP), este nevidă. Un alt aspect considerat în studiul problemelor de echilibru constă în localizarea punctului de echilibru. Pornind de la principiul variațional al lui Zhong, ca o aplicație ulterioară a principiilor de bază, se demonstrează rezultate de tip localizare pentru problemele (EP) și (SEP). La sfârșitul fiecărei secțiuni este accentuată importanța teoremelor principale din acest capitol, arătând că aceste rezultate sunt tehnici utile în căutarea punctelor de echilibru al inecuațiilor diferențiale, respectiv, al sistemelor de inecuații diferențiale (în cazul spațiilor normate).

#### **Capitolul 4: Tehnici din teoria punctului fix utilizate în studierea unor clase de inegalități și sisteme de inegalități de tip hemivariațional**

În acest capitol se studiază o inegalitate variațional-hemivariațională, respectiv, un sistem neliniar de inegalități de tip hemivariațional pe mulțimi închise și convexe.

Referitor la aceste probleme, vom stabili rezultate de existență cu ajutorul unor teoreme de punct fix, fără a impune condiții de monotonie asupra funcțiilor.

În prima secțiune se studiază solvabilitatea unei inegalități variațional-hemivariaționale pe o mulțime închisă și convexă (mărginită sau nemărginită). Secțiunea începe cu detalierea ipotezelor și formularea problemei. Urmează teorema de existență a soluției sistemului studiat, demonstrația bazându-se pe o versiune a teoremei de punct fix a lui Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, dată de K. Fan.

În a doua secțiune se studiază un sistem neliniar de inegalități de tip hemivariațional. După enumerarea ipotezelor necesare și formularea problemei studiate, se demonstrează existența a cel puțin unei soluții a problemei fără a folosi teoria punctului critic pentru funcționale nenetede (se aplică teorema de punct fix a lui Lin) și fără a impune ipoteze de monotonicitate.

Capitolul se încheie cu o secțiune cu aplicații a rezultatelor obținute în secțiunile anterioare: puncte derivate Nash, probleme de tip Schrödinger, precum și probleme cu funcții radial simetrice.

Contribuțiile noastre proprii la această teză se bazează pe cinci articole:

- H. Lisei, A. É. Molnár, Cs. Varga [68] - publicat în *Journal of Mathematical Analysis and Applications* (2010);
- M. Bota, A. É. Molnár, Cs. Varga [22] - publicat în *Fixed Point Theory* (2011);
- Cs. Farkas, A. É. Molnár [44] - publicat în *Journal of Optimization Theory and Applications* (2013);
- A. É. Molnár, O. Vas [74] - acceptat în *Studia Universitatis Babeș-Bolyai Mathematica*;
- Cs. Farkas, A. É. Molnár [45] - trimis spre publicare la *Studia Universitatis Babeș-Bolyai Mathematica*.

În cele ce urmează vom specifica rezultatele noastre originale:

### **Capitolul 1:**

Lema 1.1.1.

**Capitolul 2:**

Teoremele: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4, 2.2.1, 2.2.2;

Lemele: 2.1.1, 2.1.2;

Corolariile: 2.1.1, 2.1.2;

Observațiile: 2.1.1, 2.1.2, 2.2.1, 2.2.2.

**Capitolul 3:**

Teoremele 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3;

Observațiile: 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.2.1;

Definițiile: 3.1.1, 3.2.1;

Exemplele: 3.1.1, 3.1.2, 3.1.3.

**Capitolul 4:**

Teoremele 4.1.1, 4.1.2, 4.2.1, 4.3.1, 4.3.2;

Lema: 4.1.1;

Corolariile: 4.3.1, 4.3.2;

Propozițiile: 4.2.1;

Observațiile: 4.1.1, 4.2.1, 4.2.2, 4.3.1, 4.3.2;

Exemplele: 4.1.1, 4.1.2, 4.2.1, 4.2.2.

În final, menționăm alte două articole, care conțin rezultate originale, dar care nu sunt incluse în această teză, deoarece aceste rezultate nu sunt legate în mod direct de subiectul tezei. Una dintre aceste lucrări [A. É. Molnár, *A Nonsmooth Sublinear Elliptic Problem in  $\mathbb{R}^N$  with Perturbations*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 57 (1) (2012), 61-68.] se ocupă cu studiul unei probleme de incluziune diferențială în  $\mathbb{R}^N$ , implicând operatorul  $p$ -Laplace și o expresie  $(p - 1)$ -subliniară,  $p > N > 1$ . Această problemă a fost studiată de către Kristály, Marzantowicz și Varga [J. Global Optim. 46 (1) (2010), 49-62.]. Scopul lucrării noastre este de a arăta că în aceleași condiții, o concluzie mai precisă poate fi obținută, profitând de un rezultat recent al lui Iannizzotto (a se vedea [Set-Valued and Variational Analysis, 19 (2) (2011), 311-327.]). În plus, se arată că problema studiată nu este sensibilă la perturbații mici.

În a doua lucrare [Cs. Farkas, A. É. Molnár, Cs. Varga, *Multiple symmetric solutions of the semilinear elliptic problem*, manuscris] studiem o problemă de incluziune

diferențială eliptică semiliniară cu o condiție de frontieră omogenă de tip Dirichlet pe bila unitate, care depinde de un parametru pozitiv  $\lambda$ . Demonstrăm că pentru valori mari ale lui  $\lambda$ , problema considerată admite cel puțin două soluții slab simetrice netriviiale. Demonstrația rezultatului de multiplicitate se bazează pe o teoremă generală de tip minimax pentru funcții local Lipschitz, stabilită în aceeași lucrare, precum și pe o versiune simetrică a principiului variațional al lui Ekeland, enunțată de M. Squassina [J. London Math. Soc. 85 (2012), 323-348.]

**Cuvinte cheie:** principiul variațional al lui Ekeland, principiul variațional al lui Zhong, teoreme de punct fix de tip Caristi, spații  $b$ -metrice, condiția Palais-Smale, problema de echilibru, sisteme de probleme de echilibru, soluție aproximativă, teoria punctului fix, funcționale local Lipschitz, inegalități variațional-hemivariaționale, sisteme de inegalități neliniare de tip hemivariaționale, puncte de echilibru Nash, probleme de tip Schrödinger, funcții radial simetrice, operator multivoc, funcții netede.

## Mulțumiri

În primul rând, aș dori să-mi exprim recunoștința față de conducătorul meu de doctorat, Prof. Dr. Varga György Csaba, atât pentru șansa de a realiza doctoratul în domeniul calculului variațional, cât și pentru ajutorul, răbdarea și încrederea acordate pe tot parcursul programului doctoral. A fost un privilegiu să studiez sub îndrumarea sa. De asemenea, aș dori să-i mulțumesc pentru oportunitatea de a fi membră în proiectul PN-II-ID-PCE-2008 No. 501, ID 2162 (2009, 2010, 2011).

Mă simt îndatorată membrilor Institutului de Matematică de la Universitatea din Debrecen (Ungaria) pentru amabilitatea lor. Îi sunt recunoscătoare domnului profesor Dr. Muzsnay Zoltán pentru ajutorul său și pentru îndrumarea profesională pe perioada stagiului de cercetare la această instituție.

Aș dori să mulțumesc membrilor Facultății de Matematică și Informatică a Universității Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca pentru oferirea unui mediu plăcut de cercetare. Îmi exprim recunoștința față de membrii comisiei de îndrumare pe perioada elaborării tezei de doctorat: Prof. Dr. Alexandru Kristály, Prof. Dr. Adrian Petrușel și Prof. Dr. Radu Precup pentru sugestiile lor valoroase.

Mulțumiri speciale le adresez doamnei Conf. Dr. Hannelore Lisei pentru ajutorul și îndrumarea ei.

Aș dori să adresez mulțumiri tuturor prietenilor mei, care m-au încurajat în această perioadă. O mulțumire specială este adresată lui Csaba Farkas pentru trei ani remarcabili de colaborare, precum și pentru prietenia lui. De asemenea, sunt recunoscătoare colegei mele de doctorat, Erika Nagy, prin prezența ei, această perioadă devenind mult mai plăcută.

Mulțumesc pentru suportul financiar în timpul studiilor doctorale, asigurat de Proiectul co-finanțat din Fondul Social European prin Programul Operațional Sectorial pentru Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013: POSDRU/107/1.5/S/76841, "Studii doctorale moderne: internaționalizare și interdisciplinaritate".

Mulțumirile cele mai calde sunt adresate mamei și bunicii mele pentru iubirea, înțelegerea și răbdarea lor nemărginită. Fără suportul lor, nu aș fi putut să termin teza și nu aș fi găsit curajul de a depăși dificultățile. De asemenea, aș dori să mulțumesc tatălui meu pentru tot. Lucrarea este dedicată *Memoriei Sale*. Sper că această lucrare îl face mândru.

# Capitolul 1

## Noțiuni și rezultate preliminare

Scopul acestui capitol este de a reaminti noțiunile și rezultatele de bază de care avem nevoie în următoarele capitole ale acestei lucrări. În vederea realizării acestui capitol au fost studiate următoarele lucrări: H. Brézis [24]; F.H. Clarke [26]-[29]; Z. Denkowski, S. Migórski, N. S. Papageorgiou, [39], [40]; A. Kristály, V. Rădulescu, Cs. Varga, [64]; A. Kristály, Cs. Varga, [66]; D. Motreanu, P.D. Panagiotopoulos, [76].

### 1.1 Noțiuni și proprietăți fundamentale în diferite spații metrice

În această secțiune reamintim definiția noțiunii de metrică și  $b$ -metrică, precum și câteva proprietăți ale acestora.

**Definiția 1.1.1** (I.A. Bakthin [13], S. Czerwik [32]) Fie  $X$  o mulțime și  $s \geq 1$  un număr real dat. Spunem că funcționala  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  este o  $b$ -metrică dacă și numai dacă pentru orice  $x, y, z \in X$  următoarele condiții sunt satisfăcute:

1.  $d(x, y) = 0$ , dacă și numai dacă  $x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
3.  $d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$ .

Cuplul  $(X, d)$  se numește spațiu  $b$ -metric.

**Lema 1.1.1** (*M. Bota, A. É. Molnár, Cs. Varga, [22]*) Fie  $(X, d)$  un spațiu b-metric. Presupunem că  $(X, d)$  este complet. Atunci, pentru orice șir descrescător  $\{F_n\}_{n \geq 1}$  de submulțimi nevide și compacte ale lui  $X$ , adică

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \supset F_n \supset \dots \quad (1.1.1)$$

astfel încât

$$\text{diam}(F_n) \rightarrow 0 \text{ când } n \rightarrow \infty, \quad (1.1.2)$$

intersecția  $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$  conține doar un singur element.

## 1.2 Elemente de analiză topologică și convexă

### 1.3 Principii variaționale

### 1.4 Teoreme de punct fix

### 1.5 Puncte și probleme de echilibru

### 1.6 Diferențiabilitate. Elemente ale teoriei dezvoltate de Clarke

### 1.7 Spațiile $L^p$ și Sobolev

## Capitolul 2

# Principii variaționale în spații $b$ -metrice cu aplicații în teoria punctului fix

În acest capitol se stabilesc extinderi ale principiului variațional al lui Ekeland în contextul spațiilor  $b$ -metrice complete pentru funcții de o variabilă și de două variabile. De asemenea, se indică aplicabilitatea acestor principii variaționale generalizate în teoria punctului fix.

Capitolul se bazează pe următoarele două lucrări: M. Bota, **A. É. Molnár**, Cs. Varga [22]; Cs. Farkas, **A. É. Molnár** [45].

### 2.1 Principii variaționale în spații $b$ -metrice

În acest paragraf prezentăm versiunile extinse ale unor principii variaționale binecunoscute - principiul variațional al lui Ekeland și al lui Zhong - în contextul spațiilor  $b$ -metrice complete pentru funcții de o singură și de două variabile.

Pentru a obține aceste rezultate considerăm spațiul  $b$ -metric complet  $(X, d)$  astfel încât  $b$ -metrica  $d$  este continuă. Impunem următoarele condiții:

(F) Fie  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} (= \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$  o funcție inferior semicontinuă, proprie și mărginită inferior.



Introducem următoarea notație:

$$\mathcal{F}[x; m] = f(x) + \sum_{n=0}^m \frac{1}{s^n} \cdot d(x, x_n).$$

Rezultatul principal este:

**Teorema 2.1.1** (*M. Bota, A. É. Molnár, Cs. Varga, [22]*) Fie  $(X, d)$  un spațiu  $b$ -metric complet cu  $b$ -metrica  $d$  continuă. Presupunem că funcția  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  îndeplinește condiția **(F)**. Atunci, pentru orice  $x_0 \in X$  și  $\varepsilon > 0$  astfel încât are loc inegalitatea

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon,$$

există un șir  $\{x_n\} \subset X$  și un element  $x_\varepsilon \in X$ , astfel încât

$$\begin{aligned} x_n &\rightarrow x_\varepsilon, \text{ când } n \rightarrow \infty \\ d(x_\varepsilon, x_n) &\leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ \mathcal{F}[x_\varepsilon; +\infty] &\leq f(x_0) \end{aligned}$$

și pentru orice  $x \neq x_\varepsilon$  avem

$$\mathcal{F}[x; +\infty] > \mathcal{F}[x_\varepsilon; +\infty]. \quad (2.1.1)$$

**Observația 2.1.1** Teorema 2.1.1 este versiunea extinsă a principiului variațional al lui Ekeland pentru spații  $b$ -metrice complete. În cazul, în care  $s = 1$ , obținem versiunea originală a principiului variațional al lui Ekeland, formulată pentru spații metrice complete.

Rezultatul următor este o consecință a teoremei precedente.

**Corolarul 2.1.1** (*M. Bota, A. É. Molnár, Cs. Varga, [22]*) Considerăm spațiul  $b$ -metric complet  $(X, d)$  astfel încât  $b$ -metrica  $d$  este continuă. Presupunem că funcția  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  satisface condiția **(F)**. Atunci, pentru orice  $\varepsilon > 0$  există un șir  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  și un element  $x_\varepsilon \in X$  astfel încât

$$\begin{aligned} x_n &\rightarrow x_\varepsilon, \text{ când } n \rightarrow \infty, \\ \mathcal{F}[x_\varepsilon; +\infty] &\leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon \end{aligned}$$

și pentru fiecare  $x \in X$  avem

$$\mathcal{F}[x; +\infty] \geq \mathcal{F}[x_\varepsilon; +\infty].$$

În continuare, ca o generalizare a Teoremei 2.1.1, stabilim un principiu variațional generalizat în spații  $b$ -metrice. Pentru a deduce acest rezultat impunem ipoteze adiționale. Presupunem din nou că  $(X, d)$  este un spațiu  $b$ -metric complet ( $b$ -metrica  $d$  este continuă) și  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  îndeplinește condiția **(F)**. Considerăm funcția continuă și necrescătoare  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  și șirul de numere nenegative  $\delta_n \subset \mathbb{R}_+$ , astfel încât  $\delta_0 > 0$ . De asemenea, presupunem următoarele:

**(R)** Funcția  $\rho : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  satisface

- (i) pentru orice  $x \in X$ , avem  $\rho(x, x) = 0$ ;
- (ii) pentru fiecare  $(y_n, z_n) \in X \times X$ , astfel încât  $\rho(y_n, z_n) \rightarrow 0$  când  $n \rightarrow \infty$ , avem  $d(y_n, z_n) \rightarrow 0$  când  $n \rightarrow \infty$ ;
- (iii) pentru orice  $z \in X$ , funcția  $y \mapsto \rho(y, z)$  este inferior semicontinuă.

Introducem următoarea notație:

$$\mathcal{F}_h[x; m] = f(x) + h(d(x_0, x)) \sum_{n=0}^m \delta_n \rho(x, x_n), m \in \overline{\mathbb{N}}.$$

O formă generalizată a Teoremei 2.1.1 este prezentată în continuare:

**Teorema 2.1.2** (*Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]*) *Presupunem că  $(X, d)$  este un spațiu  $b$ -metric complet,  $d$  este continuă, iar funcțiile  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  și  $\rho : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  satisfac ipotezele **(F)**, respectiv, **(R)**. Atunci, pentru orice  $x_0 \in X$  și  $\varepsilon > 0$  cu*

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon,$$

*presupunem existența unui șir  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  și al unui element  $x_\varepsilon \in X$  astfel încât*

$$x_n \rightarrow x_\varepsilon, \text{ când } n \rightarrow \infty$$

$$h(d(x_0, x_\varepsilon))\rho(x_\varepsilon, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

*Dacă  $\delta_n > 0$  pentru un număr infinit de  $n \in \mathbb{N}$ , atunci avem*

$$\mathcal{F}_h[x_\varepsilon; +\infty] \leq f(x_0),$$

*și pentru orice  $x \neq x_\varepsilon$  are loc*

$$\mathcal{F}_h[x; +\infty] > \mathcal{F}_h[x_\varepsilon; +\infty].$$

Dacă  $\delta_k > 0$  pentru  $k \in \mathbb{N}^*$  și  $\delta_j = 0$  pentru fiecare  $j > k$ , atunci pentru orice  $x \neq x_\varepsilon$ , există  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq k$ , astfel încât are loc

$$\mathcal{F}_h[x; k-1] + h(d(x_0, x))\delta_k\rho(x, x_m) > \mathcal{F}_h[x_\varepsilon; k-1] + h(d(x_0, x_\varepsilon))\delta_k\rho(x_\varepsilon, x_m).$$

**Observația 2.1.2** Dacă în teorema anterioară alegem  $h(x) \equiv 1$  și  $\delta_n = \frac{1}{s^n}$ , atunci obținem primul nostru rezultat (Teorema 2.1.1). Cu alte cuvinte, pentru orice  $x \neq x_\varepsilon$ , obținem inegalitatea (2.1.1), adică

$$f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^n} d(x, x_n) > f(x_\varepsilon) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{s^n} d(x_\varepsilon, x_n).$$

Ultima parte a secțiunii este dedicată prezentării versiunilor extinse ale Teoremelor 2.1.1 și 2.1.2 la funcții de două variabile. Similar cu cele prezentate mai sus, introducem câteva simboluri și notații, pe care le vom folosi în continuare. Fie  $C$  o submulțime a spațiului  $b$ -metric complet  $(X, d)$  (presupunem că  $d$  este continuă),  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  o funcție descrescătoare și  $\rho : X \times X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$  o funcție satisfăcând ipoteza **(R)**.

În loc de condiția **(F)**, vom presupune următoarele:

**(F2)** Funcția  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  satisface următoarele proprietăți:

- (i)  $f(x, \cdot)$  este inferior semicontinuuă și mărginită inferior, pentru orice  $x \in C$ ;
- (ii)  $f(z, z) = 0$ , pentru fiecare  $z \in C$ ;
- (iii)  $f(z, x) \leq f(z, y) + f(y, x)$ , pentru orice  $x, y, z \in C$ .

Vom folosi următoarea notație:

$$\overline{\mathcal{F}}_h[y, x; m] = f(y, x) + h(d(x_0, x)) \sum_{n=0}^m \delta_n \rho(x, x_n).$$

**Teorema 2.1.3** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) Considerăm spațiul  $b$ -metric complet  $(X, d)$  cu  $b$ -metrica  $d$  continuă și aplicația  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  ce îndeplinește condiția **(F2)**. Atunci pentru orice  $x_0 \in X$  și  $\varepsilon > 0$ , există un șir  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$  care converge la un element  $x_\varepsilon \in X$ , adică

$$x_n \rightarrow x_\varepsilon, \text{ când } n \rightarrow \infty,$$

astfel încât

$$h(d(x_0, x_\varepsilon))\rho(x_\varepsilon, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n \delta_0}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\overline{\mathcal{F}}_h[x_0, x_\varepsilon; 0] \leq 0.$$

Mai mult, pentru orice  $x \neq x_\varepsilon$ , avem

$$\overline{\mathcal{F}}_h[x_\varepsilon, x; +\infty] - h(d(x_0, x_\varepsilon)) \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \rho(x_\varepsilon, x_n) > 0.$$

Un caz particular al Teoremei 2.1.3 putem obține dacă alegem:  $h \equiv 1$ ,  $\delta_n = \frac{1}{s^n}$  și  $\rho = d$ . Se observă că acest rezultat este o generalizare a principiului variațional al lui Ekeland în spații  $b$ -metrice complete pentru funcții de o variabilă (vezi Teorema 2.1.1).

**Teorema 2.1.4** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) Fie  $(X, d)$  un spațiu  $b$ -metric complet cu  $s > 1$ , unde  $d$  este continuă. Fie  $C \subset X$  o mulțime închisă și  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție ce satisface **(F2)**. Atunci, pentru orice  $x_0 \in X$  și  $\varepsilon > 0$  există un șir  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C$  și un element  $x_\varepsilon \in C$  astfel încât  $x_n \rightarrow x_\varepsilon$ , când  $n \rightarrow \infty$  și

$$d(x_\varepsilon, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$f(x_0, x_\varepsilon) + d(x_\varepsilon, x_0) \leq 0,$$

și pentru orice  $x \neq x_\varepsilon$ ,

$$f(x_\varepsilon, x) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{s^i} d(x, x_i) - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{s^i} d(x_\varepsilon, x_i) > 0.$$

Încheiem această secțiune cu prezentarea unui caz special al Teoremei 2.1.2. De fapt, acest rezultat poate fi considerat un principiu variațional slab de tip Zhong (pentru afirmația originală a principiului variațional al lui Zhong a se vedea [93], [94]). Înainte de a prezenta acest rezultat, stabilim două leme tehnice care joacă un rol important în demonstrarea acestui principiu.

**Lema 2.1.1** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) Dacă  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  este o funcție continuă și nedescrescătoare și  $x \notin B(x_0; d(x_0, x_\varepsilon))$ , atunci

$$\frac{d(x_0, x)}{1 + g(d(x_0, x))} - s \cdot \frac{d(x_0, x_\varepsilon)}{1 + g(d(x_\varepsilon, x_0))} \leq s \cdot \frac{d(x, x_\varepsilon)}{1 + g(d(x_\varepsilon, x_0))}. \quad (2.1.2)$$

**Lema 2.1.2** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) *Dacă  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  este o funcție continuă și nedescrescătoare,  $\frac{g(x)}{x}$  este descrescătoare pe  $(0, d(x_0, x_\varepsilon)]$ , atunci*

$$\frac{d(x_0, x)}{1 + g(d(x_0, x))} - s \cdot \frac{d(x_0, x_\varepsilon)}{1 + g(d(x_\varepsilon, x_0))} \leq s \cdot \frac{d(x, x_\varepsilon)}{1 + g(d(x_\varepsilon, x_0))}.$$

În continuare arătăm, că în cazul special al Teoremei 2.1.2, putem obține versiunea originală a principiului variațional al lui Zhong (vezi, de exemplu C.-K. Zhong [93, 94]). Pentru a stabili acest rezultat alegem șirul  $\delta_n$  și funcțiile  $h, \rho$  în felul următor: Pentru  $n > 0$ , fie  $\delta_0 = 1$  și  $\delta_n = 0$ . Considerăm  $\varepsilon, \lambda > 0$  și  $h(t) = \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(t))}$ , unde  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  este o funcție nedescrescătoare. În acest caz, are loc următoarea relație:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \rho(x, x_n) = \delta_0 \rho(x, x_0) = \rho(x, x_0).$$

Dacă convenim ca  $\rho = d$ , atunci putem considera următoarea formă a Teoremei 2.1.2:

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(d(x_0, x_\varepsilon)))} d(x_\varepsilon, x_0) - \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(d(x_0, x)))} d(x, x_0).$$

Astfel, din Lema 2.1.1 și Lema 2.1.2, deducem următorul principiu variațional slab de tip Zhong în spații  $b$ -metrice complete.

**Corolarul 2.1.2** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]) *Fie  $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  o funcție continuă și nedescrescătoare. Fie  $(X, d)$  un spațiu  $b$ -metric complet ( $b$ -metrica  $d$  este continuă) și fie  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care îndeplinește ipoteza **(F)**. Atunci, pentru orice  $x_0 \in X$  și  $\varepsilon > 0$  cu*

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon,$$

*presupunem existența unui șir  $\{x_n\} \subset X$  care converge la un element  $x_\varepsilon \in X$  astfel încât*

$$h(d(x_0, x_n))d(x_\varepsilon, x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.1.3)$$

*Distingem două cazuri:*

1. *Dacă  $x \notin B(x_0, d(x_0, x_\varepsilon))$ , atunci are loc*

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) - s \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(d(x_0, x_\varepsilon)))} d(x, x_\varepsilon). \quad (2.1.4)$$

2. Dacă  $\frac{g(x)}{x}$  este descrescătoare pe  $(0, d(x_0, x_\varepsilon)]$ , atunci pentru orice  $x \neq x_\varepsilon$ , are loc

$$f(x) \geq f(x_\varepsilon) - s \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(d(x_0, x_\varepsilon)))} d(x, x_\varepsilon).$$

În cele ce urmează presupunem că  $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  este o funcție continuă și nedescrescătoare, aplicația  $\frac{g(x)}{x}$  este descrescătoare și funcția  $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  este inferior semicontinuă, diferențiabilă Gâteaux și nu este identică cu  $+\infty$ . În acest caz se poate extinde Teorema 2.1 din articolul lui Zhong [93], adică: dacă  $f$  este mărginită inferior, atunci pentru  $\varepsilon > 0$ , oricare ar fi  $y \in X$  astfel încât

$$f(y) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon, \quad (2.1.5)$$

și pentru fiecare  $\lambda > 0$ , există  $z \in X$  astfel încât

$$f(z) \leq f(y),$$

$$\|f'(z)\| \leq s \cdot \frac{\varepsilon}{\lambda(1 + g(\|z\|))}.$$

Așadar este posibil să extindem condiția (PS) slabă introdusă de Zhong în [93], și putem demonstra că o funcție mărginită inferior, ce îndeplinește condiția (PS) slabă, admite un punct minim.

## 2.2 Aplicații în teoria punctului fix

Această secțiune indică importanța versiunilor extinse ale principiului variațional al lui Ekeland prezentate în secțiunea precedentă. Vom stabili câteva aplicații ale acestor rezultate în teoria punctului fix în contextul spațiilor  $b$ -metrice complete. Vom arăta, că principiul variațional al lui Ekeland în spații  $b$ -metrice complete pentru funcții de o singură și de două variabile se poate aplica pentru a deduce teoreme de punct fix în contextul spațiilor  $b$ -metrice complete. Această utilitate este dovedită prin două versiuni ale teoremei de punct fix a lui Caristi, formulate în spații  $b$ -metrice complete, una pentru funcții de o variabilă, cealaltă pentru funcții de două variabile, deoarece demonstrarea acestor rezultate devine foarte simplă dacă invocăm versiunile extinse ale principiului variațional binecunoscut.

Vom folosi aceleași notații ca în secțiunea anterioară. Presupunem de asemenea că spațiul  $b$ -metric  $(X, d)$  este complet, iar  $b$ -metrica  $d$  este continuă.

Prezentăm o extensie a teoremei de punct fix a lui Caristi în contextul spațiilor  $b$ -metrice pentru funcții de o variabilă. Menționăm că principalul ingredient în demonstrația acestei teoreme este Corolarul 2.1.1.

**Teorema 2.2.1** (*M. Bota, A. É. Molnár, Cs. Varga, [22]*) Fie  $(X, d)$  un spațiu  $b$ -metric complet (cu  $s > 1$ ), astfel încât  $b$ -metrica  $d$  este continuă. Considerăm operatorul  $\varphi : X \rightarrow X$  pentru care există o aplicație inferior semicontinuă  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , astfel încât

$$\begin{aligned} d(u, v) + s d(u, \varphi(u)) &\geq d(\varphi(u), v) \\ \frac{s^2}{s-1} d(u, \varphi(u)) &\leq f(u) - f(\varphi(u)), \forall u, v \in X \end{aligned}$$

Atunci,  $\varphi$  admite cel puțin un punct fix.

**Observația 2.2.1** Dacă alegem  $s = 1$ , atunci obținem teorema de punct fix a lui Caristi în spații metrice complete (vezi articolele [25], [42]).

Similar putem formula următoarea teoremă de punct fix de tip Caristi în spații  $b$ -metrice complete pentru funcții de două variabile. Menționăm că vom nota cu  $\xi$  suma seriilor convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} \delta_n$ .

**Teorema 2.2.2** (*Cs. Farkas, A. É. Molnár, [45]*) Fie  $(X, d)$  un spațiu  $b$ -metric complet,  $d$  fiind o  $b$ -metrică continuă, și fie  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+$  o funcție continuă. Considerăm operatorul  $\varphi : X \rightarrow X$  astfel încât există o aplicație inferior semicontinuă  $f : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfăcând următoarele ipoteze:

$$h(d(x_0, \varphi(x)))\rho(\varphi(x), y) - h(d(x_0, x))\rho(x, y) \leq \rho(x, \varphi(x)), \quad (2.2.1)$$

$$\xi\rho(u, \varphi(u)) \leq f(u) - f(\varphi(u)). \quad (2.2.2)$$

Atunci,  $\varphi$  admite cel puțin un punct fix.

**Observația 2.2.2** Teorema 2.2.1 este caz particular al Teoremei 2.2.2, deoarece alegând în mod adecvat funcțiile  $\rho$  și  $h$ , respectiv, șirul  $\delta_n$  în Teorema 2.2.2, adică  $h \equiv 1, \rho = d$ , și  $\delta_n = \frac{1}{s^n}$ , obținem Teorema 2.2.1.

## Capitolul 3

# Principii variaționale în spații $b$ -metrice complete cu aplicații la probleme de echilibru

Scopul principal al acestui capitol este studiul legăturii dintre celebrul principiu variațional al lui Ekeland și problema (EP), respectiv (SEP). Inspirați de articolul lui M. Bianchi, G. Kassay și R. Pini [16], stabilim două versiuni ale principiului variațional al lui Ekeland în spații  $b$ -metrice complete (una pentru probleme de echilibru, cealaltă pentru sisteme de probleme de echilibru) fără a impune condiții de convexitate funcției implicate în formularea principiului sau mulțimii, pe care funcția de două sau de mai multe variabile este definită. Ca aplicații ale acestor principii, deducem rezultate de existență pentru soluția problemei de echilibru (EP), respectiv a sistemului de probleme de echilibru (SEP) cu ajutorul condițiilor de compactitate pe mulțimile pe care lucrăm.

Rezultatele acestui capitol sunt incluse în următoarea lucrare: Cs. Farkas, **A. É. Molnár**, [44].



### 3.1 Existența și localizarea punctelor de echilibru pentru funcții de două variabile

Fie  $(X, d)$  un spațiu metric complet,  $C$  o submulțime închisă a lui  $X$ , și  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție. Fie  $h : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  o funcție necrescătoare. Vom utiliza notațiile introduse în Capitolul 2.

Mai întâi definim noțiunea de *punct de echilibru*  $(x_0, h)$ . Denumirea provine din faptul că acest punct de echilibru depinde de un element  $x_0 \in C$  și de o funcție  $h$ .

**Definiția 3.1.1** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție și  $x_0 \in C$ . Spunem că  $\tilde{x} \in C$  este un punct de echilibru  $(x_0, h)$  al lui  $f$ , dacă și numai dacă

$$f(\tilde{x}, y) + h(d(x_0, y))d(\tilde{x}, y) \geq 0, \forall y \in C. \quad (3.1.1)$$

Rezultatul principal al acestei secțiuni este următoarea teoremă:

**Teorema 3.1.1** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $(X, d)$  un spațiu metric complet,  $C \subset X$  o mulțime închisă, iar  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  o aplicație pentru care ipoteza **(F2)** este îndeplinită. Fie funcția necrescătoare  $h : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  și punctul  $x_0 \in X$ . Atunci, există  $\tilde{x} \in C$  astfel încât

- (a)  $f(x_0, \tilde{x}) + h(d(x_0, \tilde{x}))d(x_0, \tilde{x}) \leq 0$ ,
- (b)  $f(\tilde{x}, x) + h(d(x_0, x))d(x, \tilde{x}) > 0, \forall x \in C, x \neq \tilde{x}$ .

În cele ce urmează, vom arăta că există o funcție ce satisface condiția **(F2)**, dar nu admite niciun punct de echilibru în sensul clasic.

**Exemplul 3.1.1** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x, y) = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{y+1}$ . Este ușor de observat că funcția  $f$  îndeplinește toate ipotezele Teoremei 3.1.1. Dacă există un element  $x_0 \in \mathbb{R}_+$  astfel încât  $f(x_0, y) \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}_+$ , atunci deducem că  $x_0 \geq y, \forall y \in \mathbb{R}_+$ . Am ajuns astfel la o contradicție. Astfel, mulțimea soluțiilor problemei de echilibru (EP) este vidă, dar cu ajutorul Teoremei 3.1.1, putem garanta că există un punct de echilibru  $(x_0, h)$  al lui  $f$ .

Așadar am obținut un punct de echilibru "aproiat", realizând o perturbare mică asupra funcției inițiale de două variabile.

În următoarele exemple prezentăm câteva funcții care admit puncte de echilibru.

**Exemplul 3.1.2** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $X = \mathbb{R}$ . Fie  $C$  o submulțime închisă și mărginită a lui  $\mathbb{R}$  și  $h : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  definită prin  $h(x) = 1 + e^{-x}$ . Alegem  $x_0 = 0$ . Considerăm  $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = y - x + (1 + e^{-y})|x - y|$  și  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = y - x$ . Din Teorema 3.1.1 rezultă că  $F$  admite un punct de echilibru.

**Exemplul 3.1.3** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  și  $C$  o submulțime închisă și mărginită a lui  $\mathbb{R}$ . Considerăm funcția  $h : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$ ,  $h(x) = \frac{1}{1+x}$ , și fie  $x_0 = 0_{\mathbb{R}^2}$ . De asemenea considerăm  $F : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x, y) = y^N - x^N + \frac{1}{1+\|y\|}\|x - y\|$  și  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = y^N - x^N$ , unde  $N \geq 1$  este un număr natural. Folosind Teorema 3.1.1,  $F$  admite un punct echilibru.

**Observația 3.1.1** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Oare o funcție de două variabile  $f$ , care satisface toate ipotezele Teoremei 3.1.1, ar trebui să fie de forma  $g(y) - g(x)$ ? În acest caz, Teorema 3.1.1 s-ar reduce la o versiune îmbunătățită a principiului variațional clasic al lui Ekeland.

Răspunsul este negativ, cum arată următorul exemplu: Fie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-|x-y|} + 1 + \sin(y) - \sin(x), & x \neq y, \\ 0, & x = y, \end{cases}$$

și fie  $h : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  definită prin  $h(x) = \frac{1}{1+x}$ . Din Teorema 3.1.1 deducem că funcția

$$F(x, y) = f(x, y) + \frac{1}{1+\|y\|}\|x - y\|$$

admite un punct de echilibru  $(x_0, h)$ , însă funcția  $f$  nu poate fi reprezentată în forma menționată în întrebare. În acest caz  $C = \mathbb{R}$ .

**Observația 3.1.2** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $X = \mathbb{R}^n$  înzestrat cu norma euclidiană  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Presupunem că ipotezele Teoremei 3.1.1 au loc. Cu ajutorul acestei teoreme obținem că există  $\tilde{x} \in C$  astfel încât

(i)  $f(x_0, \tilde{x}) + h(\|x_0 - \tilde{x}\|)\|x_0 - \tilde{x}\| \leq 0$ ,

(ii)  $f(\tilde{x}, x) + h(\|x_0 - x\|)\|x - \tilde{x}\| > 0, \forall x \in C, x \neq \tilde{x}$ .

Importanța Teoremei 3.1.1 constă în faptul că, folosind acest rezultat, putem stabili următorul rezultat de existență, asigurând astfel existența soluțiilor problemei (EP) pe mulțimi compacte fără a impune cerințe de convexitate. Impunem însă următoarea cerință suplimentară:

( $\tilde{\mathbf{F2}}$ ) Funcția  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  satisface următoarea condiție:

(iv)  $f(\cdot, y)$  este superior semicontinuuă, pentru orice  $y \in C$ .

**Teorema 3.1.2** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $C$  o submulțime compactă (convexitatea nu este necesară) a unui spațiu euclidian și fie  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție. Dacă condițiile ( $\mathbf{F2}$ ) și ( $\tilde{\mathbf{F2}}$ ) sunt satisfăcute, atunci mulțimea soluțiilor problemei (EP) este nevidă, adică există  $\tilde{x} \in C$  astfel încât  $f(\tilde{x}, y) \geq 0, \forall y \in C$ .

**Observația 3.1.3** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Menționăm că în cazul în care alegem  $h \equiv \varepsilon$  în Teorema 3.1.1, obținem [16, Teorema 2.1], stabilită de M. Bianchi, G. Kassay și R. Pini. Acest lucru subliniază faptul că rezultatul nostru principal (adică Teorema 3.1.1) este o generalizare a Teoremei 2.1 din [16].

Observația următoare accentuează chiar mai mult importanța Teoremei 3.1.1, arătând că acest rezultat este o tehnică utilă în căutarea punctelor de echilibru ale inecuațiilor diferențiale în cazul spațiilor normate.

**Observația 3.1.4** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Considerăm spațiul normat  $X$ . De asemenea fie  $h : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  o funcție continuă necrescătoare și  $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție ce îndeplinește ipotezele Teoremei 3.1.1. Dacă, în plus, presupunem că  $f$  este diferențiabilă Gâteaux în a doua variabilă, atunci rezultă din Teorema 3.1.1 că

$$f(\tilde{x}, x) + h(d(x_0, x))d(\tilde{x}, x) > 0.$$

Fie  $\phi \in X$ ,  $t > 0$ , și  $x = \tilde{x} + t\phi$ , atunci inegalitatea anterioară se poate scrie sub forma

$$f(\tilde{x}, \tilde{x} + t\phi) + h(\|\tilde{x} + t\phi\|)t\|\phi\| > 0,$$

deci

$$\frac{f(\tilde{x}, \tilde{x} + t\phi)}{t} + h(\|\tilde{x} + t\phi\|)\|\phi\| > 0.$$

Din condiția **(F2)** – **(ii)**, avem  $f(\tilde{x}, \tilde{x}) = 0$ , prin urmare

$$\frac{f(\tilde{x}, \tilde{x} + t\phi) - f(\tilde{x}, \tilde{x})}{t} + h(\|\tilde{x} + t\phi\|)\|\phi\| > 0.$$

Dacă  $t \rightarrow 0$ , rezultă că

$$\partial_2 f(\tilde{x}, \tilde{x})(\phi) + h(\|\tilde{x}\|)\|\phi\| \geq 0 \text{ pentru orice } \phi \in X. \quad (3.1.2)$$

Deci există un punct de echilibru în sensul Definiției 3.1.1, pentru inecuații diferențiale având forma de mai sus.

Ca o consecință a Teoremei 3.1.1, prezentăm un principiu variațional de tip Zhong pentru funcții de două variabile (pentru principiul original al lui Zhong, a se vedea [93], [94]). Acest rezultat poate fi important din punct de vedere algoritmic, deoarece localizează poziția punctului de echilibru corespunzător pe o anumită sferă.

**Teorema 3.1.3** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $(X, d)$  un spațiu metric complet,  $C \subset X$  o mulțime închisă, și  $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$  o aplicație ce îndeplinește condiția **(F2)**. Fie  $g : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  o funcție continuă nedescrescătoare astfel încât

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1 + g(r)} dr = \infty. \quad (3.1.3)$$

Fie  $x_0 \in C$  un punct fixat. Atunci, pentru orice  $\varepsilon > 0$  și  $y \in C$  pentru care avem

$$\inf_{z \in C} f(y, z) > -\varepsilon, \quad (3.1.4)$$

și pentru fiecare  $\lambda > 0$ , există  $x_\varepsilon \in C$  astfel încât

- (a)  $d(x_0, x_\varepsilon) < r_0 + \bar{r}$
- (b)  $f(x_0, x_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\lambda(1+g(d(x_0, x_\varepsilon)))} d(x_0, x_\varepsilon) \leq 0$ ,
- (c)  $f(x_\varepsilon, x) + \frac{\varepsilon}{\lambda(1+g(d(x_0, x)))} d(x, x_\varepsilon) > 0, \forall x \in C, x \neq x_\varepsilon$ ,

unde  $r_0 = d(x_0, y)$  și  $\bar{r}$  sunt alese în felul următor

$$\int_{r_0}^{r_0 + \bar{r}} \frac{1}{1 + g(r)} dr \geq \lambda.$$

## 3.2 Existența și localizarea punctelor de echilibru pentru sisteme de funcții

În acest capitol extindem rezultatele obținute în secțiunea anterioară la un sistem de probleme de echilibru. De-a lungul acestui paragraf vom utiliza notațiile introduse în Capitolul 2, respectiv în secțiunea anterioară.

Fie  $m$  un întreg pozitiv și fie  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ . Fie  $C = \prod_{j \in I} C_j$  cu  $C_j \subset X_j$  submulțime închisă a spațiului metric complet  $(X_j, d_j)$ . Considerăm un sistem de bile deschise  $(B_j)$ ,  $j \in I$ , în  $X_j$  și vom nota pentru orice  $j \in I$  a  $j$ -a bilă deschisă cu centrul  $x_j^0$  și de rază  $r_j$ , cu  $B_j(x_j^0, r_j) = \{z_j \in X_j \mid d(x_j^0, z_j) < r_j\}$ . Considerăm funcțiile  $f_j : C \times C_j \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in I$ . Un element al mulțimii  $C^j = \prod_{j \neq i} C_i$  va fi reprezentat prin  $x^j$ ; astfel,  $x \in C$  poate fi scris  $x = (x^j, x_j) \in C^j \times C_j$ . Pentru  $x \in \prod_{i \in I} X_i$  notația  $d^*(x_0, x)$  reprezintă distanța Cebîșev a lui  $x$  la  $x_0$ , adică,

$$d^*(x_0, x) = \max_{j \in I} d_j(x_0^j, x_j),$$

și vom considera spațiul metric  $\prod_{i \in I} X_i$ , înzestrat cu această metrică.

Fie  $h^i : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  o funcție continuă, necrescătoare, pentru orice  $i \in I$ , și  $h : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$  definită prin  $h = (h^1, \dots, h^m)$ . Definiția unui punct de echilibru  $(x_0, h)$  pentru un sistem de probleme de echilibru este următoarea:

**Definiția 3.2.1** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Pentru  $i \in I$ , fie  $C_i$  o submulțime a unui spațiu oarecare și fie  $C = \prod_{i \in I} C_i$  și fie  $f_i : C \times C_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ . Spunem că  $\tilde{x} \in C$  este un punct de echilibru  $(x_0, h)$  al funcțiilor  $\{f_1, \dots, f_m\}$ , dacă și numai dacă

$$f_i(\tilde{x}, y_i) + h^i(d_i(x_i^0, y_i))d(\tilde{x}^i, y_i)_i \geq 0, \forall y_i \in C_i \text{ și } i \in I.$$

Presupunem că următoarele ipoteze au loc:

(F2<sub>i</sub>) Fie funcțiile  $f_i : C \times C_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , astfel încât

- (i)  $f_i(x, \cdot) : C_i \rightarrow \mathbb{R}$  este inferior semicontinuu și mărginită inferior, pentru orice  $i \in I$ ;
- (ii)  $f_i(x, x_i) = 0$ , pentru fiecare  $i \in I$ , și  $x = (x_1, \dots, x_m) \in C$ ;
- (iii)  $f_i(z, x_i) \leq f_i(z, y_i) + f_i(y, x_i)$ , pentru orice  $x, y, z \in C$ , orice  $i \in I$ , iar  $y = (y^i, y_i)$ .

Rezultatul principal al acestei secțiuni este următorul:

**Teorema 3.2.1** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $h_i : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  o funcție necrescătoare pentru fiecare  $i \in I$  și fie  $h : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$  definită prin  $h = (h^1, \dots, h^m)$ . Considerăm funcțiile  $f_i : C \times C_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , unde  $C = \prod_{i \in I} C_i$ ,  $C_i \subset X_i$  fiind o submulțime închisă a spațiului metric complet  $(X_i, d_i)$ . Presupunem că pentru orice  $i \in I$ , condiția  $(\mathbf{F2}_i)$  este îndeplinită de funcțiile  $f_i$ . Fie  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$  un element fixat în  $C$ . Atunci, există  $\tilde{x} \in C$  astfel încât pentru orice  $i \in I$ :

1.  $f_i(x^0, \tilde{x}^i) + h^i(\tilde{x}^i)d_i(x_i^0, \tilde{x}^i) \leq 0$ ,
2.  $f_i(\tilde{x}, x_i) + h^i(x_i)d_i(\tilde{x}^i, x_i) > 0$ , când  $x_i \neq \tilde{x}_i$ ,

Ca o aplicație a Teoremei 3.2.1, prezentăm următorul rezultat de existență, rezultat ce garantează, fără nici o restricție de convexitate, că mulțimea soluțiilor problemei (SEP) pe mulțimi compacte este nevidă. Este necesară următoarea cerință:

$(\tilde{\mathbf{F2}}_i)$  Funcția  $f_i : C \times C_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in I$  satisface ipoteza următoare:

- (iv)  $f_i(\cdot, y_i)$  este superior semicontinuu pentru orice  $y_i \in C_i$ .

**Teorema 3.2.2** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Dacă, pe lângă cerințele Teoremei 3.2.1, presupunem că pentru orice  $i \in I$ ,  $C_i$  este compactă și pentru  $f_i : C \times C_i \rightarrow \mathbb{R}$  condiția este satisfăcută  $(\tilde{\mathbf{F2}}_i)$ , atunci următorul sistem de probleme de echilibru

$$f_i(\tilde{x}, y_i) \geq 0 \quad \forall i \in I, \quad \forall y_i \in C_i,$$

admite o soluție  $\tilde{x} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m) \in C$ .

Luând în considerare Observația 3.1.4, putem deduce un rezultat similar cu cel prezentat în Observația 3.1.4, dar mult mai general pentru sisteme de inecuații diferențiale.

**Observația 3.2.1** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $i \in I$ . Fie  $X_i$  un spațiu normat și  $h^i : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  o funcție continuă necrescătoare și alegem  $x_i^0 = 0_{X_i}$ . Considerăm funcția  $f_i : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât cerințele Teoremei 3.2.1 să fie

îndeplinite. În plus, presupunem că  $f_i$  este diferențiabilă Gâteaux în a doua variabilă, pentru orice  $i \in I$ . Atunci, din Teorema 3.2.1 rezultă că

$$f_i(\tilde{x}, x_i) + h(d_i(x_i^0, x_i))d(\tilde{x}_i, x_i) > 0.$$

Fie  $\phi_i \in X_i$  un element arbitrar și alegem  $t > 0$  și  $x_i = \tilde{x}_i + t\phi_i$ . Inegalitatea anterioară se poate scrie sub forma următoare

$$f_i(\tilde{x}, \tilde{x}_i + t\phi_i) + h^i(\|\tilde{x}_i + t\phi_i\|_i)t\|\phi_i\|_i > 0.$$

Astfel,

$$\frac{f_i(\tilde{x}, \tilde{x}_i + t\phi_i)}{t} + h^i(\|\tilde{x}_i + t\phi_i\|_i)\|\phi_i\|_i > 0.$$

Din  $(\tilde{\mathbf{F}}2_i) - (\mathbf{ii})$ , rezultă că  $f_i(\tilde{x}, \tilde{x}_i) = 0$ , prin urmare

$$\frac{f_i(\tilde{x}, \tilde{x}_i + t\phi_i) - f_i(\tilde{x}, \tilde{x}_i)}{t} + h^i(\|\tilde{x}_i + t\phi_i\|_i)\|\phi_i\|_i > 0.$$

Dacă  $t \rightarrow 0$ , obținem

$$\partial_2 f_i(\tilde{x}, \tilde{x})(\phi_i) + h^i(\|\tilde{x}_i\|_i)\|\phi_i\|_i > 0 \text{ for all } \phi_i \in X_i. \text{ pentru orice } i \in I. \quad (3.2.1)$$

Prin urmare există un punct de echilibru în sensul Definiției 3.2.1, pentru un sistem de inecuații diferențiale având forma de mai sus.

Încheiem această secțiune cu un rezultat de localizare pentru punctul  $\tilde{x}$  construit în Teorema 3.2.1.

**Teorema 3.2.3** (Cs. Farkas, A. É. Molnár, [44]) Fie  $g_i : [0, \infty[ \rightarrow ]0, \infty[$  o funcție nedescrescătoare, pentru orice  $i \in I$ , fie  $g : \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}_+^m$  definită prin  $g = (g_1, \dots, g_m)$  și

$$\int_0^\infty \frac{1}{1 + g^i(r)} dr = \infty, \text{ pentru fiecare } i \in I. \quad (3.2.2)$$

Considerăm funcțiile  $f_i : C \times C_i \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , unde  $C = \prod_{i \in I} C_i$  și  $C_i \subset X_i$  este o submulțime închisă a spațiului metric complet  $(X_i, d_i)$ . Presupunem că  $f_i$  satisface condiția  $(\mathbf{F}2_i)$ , pentru fiecare  $i \in I$ . Fie  $x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in C$  un element fixat arbitrar. Atunci, pentru orice  $\varepsilon_i > 0$ ,  $i = \overline{1..m}$  și  $y \in C$  pentru care avem

$$\inf_{z_i \in C_i} f_i(y, z_i) > -\varepsilon_i, \quad (3.2.3)$$

și pentru fiecare  $\lambda_i > 0$ , există  $\tilde{x} \in C$  astfel încât

1.  $d_i(x_i^0, \tilde{x}_i) \leq r_i^0 + \bar{r}_i$

2.  $f_i(x^0, \tilde{x}^i) + \frac{\varepsilon_i}{\lambda_i(1+g^i(d_i(x_i^0, \tilde{x}_i)))} d_i(x_i^0, \tilde{x}_i) \leq 0,$

3.  $f_i(\tilde{x}, x_i) + \frac{\varepsilon_i}{\lambda_i(1+g^i(d_i(x_i^0, x_i)))} d_i(\tilde{x}_i, x_i) > 0, \forall i \in I,$

unde  $r_i^0 = d_i(x_i^0, y_i)$  și  $\bar{r}_i$  sunt alese astfel încât

$$\int_{r_i^0}^{r_i^0 + \bar{r}_i} \frac{1}{1 + g^i(r)} dr \geq \lambda_i.$$



# Capitolul 4

## Tehnici din teoria punctului fix utilizate în studiul diferitelor clase de inegalități și sistemelor de inegalități de tip hemivariațional

În acest capitol vom studia câteva inegalități și sisteme de inegalități de tip hemivariațional cu ajutorul teoriei punctului fix, dar fără a impune ipoteze de monotonie. În primele două secțiuni prezentăm contextul abstract în care lucrăm, formulăm problemele ce le vom studia, precum și rezultatele principale. Ultima secțiune conține aplicații ale rezultatelor obținute în secțiunile anterioare.

Aceste rezultate apar în următoarele lucrări: H. Lisei, **A. É. Molnár**, Cs. Varga [68], **A. É. Molnár**, O. Vas, [74], cel de-al doilea articol fiind un rezultat al colaborării noastre cu Institutul de Matematică al Universității din Debrecen (Ungaria).

### 4.1 Asupra unei probleme variațional-hemivariaționale fără proprietatea de compactitate

În această secțiune se cercetează solvabilitatea unei probleme variațional-hemivariaționale pe o mulțime închisă și convexă (fie mărginită sau nemărginită) fără a utiliza teoria punctului critic.

Fie  $(X, \|\cdot\|)$  un spațiu Banach și  $X^*$  dualul topologic al lui  $X$ . Notăm cu  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  perechea de dualitate între  $X$  și  $X^*$ . Fie  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  un domeniu nemărginit. Alegem  $p$  astfel încât  $1 < p < n$  și  $p^* = \frac{np}{n-p}$ . Vom studia problema următoare:

**(V-HI)** Se caută  $u \in K$  astfel încât

$$\langle Au, v - u \rangle + \int_{\Omega} f(x, u(x))(v(x) - u(x))dx + \int_{\Omega} j^0(x, u(x); v(x) - u(x))dx \geq 0,$$

pentru orice  $v \in K$ , unde  $K \subseteq X$  este o mulțime, iar  $A, f, j$  sunt funcționale date, care satisfac anumite condiții.

Pentru a stabili existența a cel puțin unei soluții pentru problema **(V-HI)**, impunem următoarele ipoteze:

**(CT)** Presupunem că pentru  $s \in [p, p^*]$  scufundarea  $X \hookrightarrow L^s(\Omega)$  este *continuă*, adică există  $C \geq 0$  astfel încât  $\|x\|_{L^s(\Omega)} \leq C\|x\|, \forall x \in X$ .

**(CP)** Presupunem că pentru  $s \in (p, p^*)$  scufundarea  $X \hookrightarrow L^s(\Omega)$  este *compactă*, ceea ce înseamnă că există un operator liniar și compact  $T : X \rightarrow L^s(\Omega)$ , adică pentru orice șir mărginit  $\{x_n\}$  în  $X$  există un subșir  $\{Tx_n\}$ , care este convergent în  $L^s(\Omega)$ . Pentru simplitate vom scrie  $x_n$  în loc de  $Tx_n$ .

**(A1)** Fie  $A : X \rightarrow X^*$  un operator cu proprietatea: pentru orice șir  $\{u_n\}_n$  în  $X$ , care converge slab la  $u \in X$ , are loc inegalitatea

$$\langle Au, u - w \rangle \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle Au_n, u_n - w \rangle, \text{ pentru fiecare } w \in X.$$

**(A2)** Există  $\lambda := \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle Au, u \rangle}{\|u\|^p} > 0$ .

**(f1)** Fie  $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție Carathéodory astfel încât pentru  $\alpha > 0$  are loc

$$|f(x, y)| \leq \alpha|y|^{p-1} + \beta(x),$$

pentru a.p.t.  $x \in \Omega$  și pentru orice  $y \in \mathbb{R}$ , unde  $\beta \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ .

**(f2)** Presupunem că constantele din condițiile **(f1)** și **(A1)** satisfac relația  $\alpha C_p^p < \lambda$ .

**(j1)** Presupunem că  $j : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție Carathéodory, local Lipschitz în raport cu a doua variabilă, și că există  $c > 0, r \in [p, p^*)$  astfel încât

$$|\xi| \leq c(|y|^{p-1} + |y|^{r-1})$$

pentru a.p.t.  $x \in \Omega$ , pentru orice  $y \in \mathbb{R}$  și  $\xi \in \partial j(x, y)$ , unde  $\partial j(x, y)$  este gradientul generalizat al lui  $j(x, \cdot)$  în  $y \in \mathbb{R}$ ;

(j2) Există  $k \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$  astfel încât

$$|j^0(x, y; -y)| \leq k(x)|y| \text{ pentru orice } x \in \Omega, y \in \mathbb{R},$$

unde  $j^0(x, u; z)$  reprezintă derivata direcțională generalizată în punctul  $u \in \mathbb{R}$  în direcția  $z \in \mathbb{R}$ .

Pezentăm în continuare două exemple de operatori, care satisfac condiția (A1).

**Exemplul 4.1.1** (H. Lisei, A. É. Molnár, Cs. Varga, [68]) Fie  $A' : X \rightarrow X^*$  un operator liniar, continuu și pozitiv (adică  $\langle A'u, u \rangle \geq 0$  pentru orice  $u \in X$ ). Din aceste ipoteze rezultă că  $A'$  este slab secvențial continuu și condiția (A1) este satisfăcută.

**Exemplul 4.1.2** (H. Lisei, A. É. Molnár, Cs. Varga, [68]) Presupunem că forma biliniară  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  este compactă, adică pentru orice șiruri  $\{u_n\}$  și  $\{v_n\}$  din  $X$  astfel încât  $u_n \rightarrow u$  și  $v_n \rightarrow v$  ( $u, v \in X$ ) rezultă că  $a(u_n, v_n) \rightarrow a(u, v)$ . Operatorul  $A'' : X \rightarrow X^*$  definit prin  $\langle A''u, v \rangle = a(u, v)$  pentru orice  $u, v \in X$  satisface ipoteza (A1).

În cele ce urmează vom stabili două rezultate de existență referitoare la problema (V-HI), demonstrațiile bazându-se pe teorema Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz (vezi [49, Teorema 8.2]). O altă metodă este folosirea unui principiu elementar de aplicații KKM dat de A. Granas și M. Lassonde în [50, Teorema 5.2] în contextul spațiilor Banach super-reflexive. Pe lângă versiunea lui K. Fan a teoremei Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, vom avea nevoie de lema următoare pentru a demonstra rezultatele principale.

**Lema 4.1.1** (H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]) Fie  $X$  un spațiu Banach.

- (1) Presupunem că ipoteza (j1) este satisfăcută și că  $X_1$  și  $X_2$  sunt submulțimi nevide ale lui  $X$ .

(1a) Dacă scufundarea  $X \hookrightarrow L^s(\Omega)$  este continuă pentru orice  $s \in [p, p^*]$ , atunci aplicația

$$(u, v) \in X_1 \times X_2 \mapsto \int_{\Omega} j^0(x, u(x); v(x)) dx \in \mathbb{R}$$

este superior semicontinuă.

(1b) În plus, dacă scufundarea  $X \hookrightarrow L^s(\Omega)$  este compactă, pentru orice  $s \in [p, p^*]$ , atunci aplicația precedentă este slab superior semicontinuă.

(2) Presupunem că are loc cerința **(f1)** și scufundarea  $X \hookrightarrow L^p(\Omega)$  este compactă. Atunci, pentru orice  $v \in X$  aplicația

$$u \in X \mapsto \int_{\Omega} f(x, u(x))(v(x) - u(x)) dx \in \mathbb{R}$$

este slab superior semicontinuă.

Primul rezultat de existență este următorul:

**Teorema 4.1.1** (*H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]*) Presupunem că  $X$  este un spațiu Banach reflexiv și  $K \subseteq X$  este o mulțime nevidă, închisă, convexă și mărginită și că ipotezele **(CT)**, **(CP)**, **(A1)**, **(f1)**, **(j1)** sunt îndeplinite. Atunci, problema **(V-HI)** admite cel puțin o soluție.

Observăm că în teorema anterioară mulțimea  $K$  este mărginită. În cele ce urmează, vom discuta cazul când  $K$  este nemărginită. Fără a pierde din generalitate, presupunem că  $0 \in K$  și pentru orice număr întreg pozitiv  $n$  fie  $K_n := \{w \in K : \|w_n\| \leq n\}$ . Astfel,  $0 \in K_n$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

Fixăm  $n \in \mathbb{N}$ . Deoarece  $K$  este o submulțime nevidă, închisă, convexă și nemărginită a lui  $X$ , utilizând Teorema 4.1.1 rezultă că există  $u_n \in K_n$  astfel încât pentru orice  $v \in K_n$  are loc următoarea inegalitate:

$$\begin{aligned} \langle Au_n, v - u_n \rangle + \int_{\Omega} f(x, u_n(x))(v(x) - u_n(x)) dx \\ + \int_{\Omega} j^0(x, u_n(x); v(x) - u_n(x)) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

**Teorema 4.1.2** (*H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]*) Presupunem că  $X$  este un spațiu Banach reflexiv și  $K \subseteq X$  este o mulțime nevidă, închisă și convexă și că

ipotezele  $(CT)$ ,  $(CP)$ ,  $(A1)$ ,  $(A2)$ ,  $(f1)$ ,  $(f2)$ ,  $(j1)$ ,  $(j2)$  sunt îndeplinite. De asemenea considerăm șirul  $u_n \in K_n$  astfel încât inegalitatea (4.1.1) are loc pentru orice  $n \geq 1$ . Atunci, problema  $(V-HI)$  are cel puțin o soluție.

**Observația 4.1.1** (*H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]*) Dacă  $0 \in K$  și

$$\langle A0, v \rangle + \int_{\Omega} f(x, 0)v(x)dx + \int_{\Omega} j^0(x, 0; v(x))dx \geq 0 \text{ pentru orice } v \in K, \quad (4.1.2)$$

atunci este evident că zero este o soluție a inegalității (4.1.2). Dacă aplicăm Teoremele 4.1.1 și 4.1.2 pentru (4.1.2), existența soluției netriviiale nu poate fi asigurată fără condiții suplimentare specifice.

## 4.2 Existența soluțiilor unui sistem de inegalități neliniare de tip hemivariațional

Scopul principal al acestei secțiuni este studiul unui sistem de inegalități neliniare de tip hemivariațional și demonstrarea existenței a cel puțin unei soluții pentru sistemul studiat pe o mulțime închisă și convexă (fie mărginită sau nemărginită) fără a impune ipoteze de monotonie sau a utiliza teoria nenetedă a punctului critic.

Fie  $X_1, \dots, X_n$  spații Banach reflexive,  $Y_1, \dots, Y_n$  spații Banach și  $D_i \subseteq X_i$ , pentru  $i \in \{1, \dots, n\}$  mulțimi mărginite, închise și convexe, unde  $n \in \mathbb{Z}_+$ . În cele ce urmează vom nota cu  $X_i^*$  și  $Y_i^*$  spațiile duale topologice ale lui  $X_i$ , respectiv  $Y_i$ , pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Presupunem că pentru  $i \in \{1, \dots, n\}$  există operatori liniari și compacti  $A_i : X_i \rightarrow Y_i$ , funcționale neliniare  $\phi_i : X_1 \times \dots \times X_i \times \dots \times X_n \times X_i \rightarrow \mathbb{R}$  și funcționale de o variabilă  $\eta_i : X_i \times X_i \rightarrow X_i$ . Fie  $J : Y_1 \times \dots \times Y_n \rightarrow \mathbb{R}$  o funcțională local Lipschitz regulată. În această secțiune vom folosi următoarele notații:

- $X = X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $Y = Y_1 \times \dots \times Y_n$  și  $D = D_1 \times \dots \times D_n$ ;
- $\bar{u}_i = A_i(u_i)$ ,  $\bar{\eta}_i(u_i, v_i) = A_i(\eta_i(u_i, v_i))$ , pentru orice  $i = \overline{1, n}$ ;
- $u = (u_1, \dots, u_n)$  și  $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ ;
- $\eta(u, v) = (\eta_1(u_1, v_1), \dots, \eta_n(u_n, v_n))$  și  $\bar{\eta}(u, v) = (\bar{\eta}_1(u_1, v_1), \dots, \bar{\eta}_n(u_n, v_n))$ ;

$$\bullet \Phi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(u, v) = \sum_{i=1}^n \phi_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n, \eta_i(u_i, v_i)).$$

Impunem următoarele condiții:

**(H)** Pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ , aplicația  $\eta_i(\cdot, \cdot) : X_i \times X_i \rightarrow X_i$  satisface condițiile următoare:

- (i)  $\eta_i(u_i, u_i) = 0$ , pentru orice  $u_i \in X_i$ ;
- (ii)  $\eta_i(u_i, \cdot)$  este un operator liniar pentru orice  $u_i \in X_i$ ;
- (iii) pentru orice  $v_i \in X_i$ ,  $\eta_i(u_i^m, v_i) \rightarrow \eta(u_i, v_i)$  dacă  $u_i^m \rightarrow u_i$ .

**(Φ)** Pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ , funcționala  $\phi_i : X_1 \times \dots \times X_i \times \dots \times X_n \times X_i \rightarrow \mathbb{R}$  satisface

- (i)  $\phi_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n, 0) = 0$  pentru orice  $u_i \in X_i$ ;
- (ii) pentru orice  $v_i \in X_i$ , aplicația  $(u_1, \dots, u_n) \rightsquigarrow \phi_i(u_1, \dots, u_n; \eta_i(u_i, v_i))$  este slab superior semicontinuuă;
- (iii) aplicația  $v_i \rightsquigarrow \sum_{i=1}^n \phi_i(u_1, \dots, u_n; \eta_i(u_i, v_i))$  este convexă pentru orice  $(u_1, \dots, u_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Observația 4.2.1** (*A. É. Molnár, O. Vas, [74]*) Deoarece  $J_{,i}^0(u_1, \dots, u_n; v_i)$  este convexă și  $\eta_i(u_i, \cdot)$  este liniară, pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$  și pentru orice  $(u_1, \dots, u_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , rezultă că aplicația  $v_i \rightsquigarrow J_{,i}^0(u_1, \dots, u_n; \eta_i(u_i, v_i))$  este convexă.

Folosind următoarele două exemple, arătăm că există o funcție care satisface condițiile **(H)** (i)-(iii).

**Exemplul 4.2.1** (*A. É. Molnár, O. Vas, [74]*) Pentru  $i \in \{1, \dots, n\}$  alegem funcția  $\eta_i : X_i \times X_i \rightarrow X_i$  în felul următor:

$$\eta_i(u_i, v_i) = v_i - u_i, \text{ pentru orice } u_i, v_i \in X_i.$$

În acest caz  $\eta_i(u_i, v_i)$  satisface condițiile **(H)** (i)-(iii). Cu ajutorul acestei alegeri obținem problema formulată în articolul lui D. Repovš și Cs. Varga [88].

**Exemplul 4.2.2** (*A. É. Molnár, O. Vas, [74]*) Fie  $B_i : X_i \rightarrow X_i$  un operator liniar compact,  $\alpha_i > 0, \beta_i \in X_i, i \in \{1, \dots, n\}$ . Definim funcția  $f : X_i \rightarrow X_i$  prin  $f_i(x) = \alpha_i B_i(x) + \beta_i$ . Dacă considerăm funcția  $\eta_i : X_i \times X_i \rightarrow X_i$  în felul următor:

$$\eta_i(u_i, v_i) = f_i(v_i) - f_i(u_i), \text{ pentru orice } u_i, v_i \in X_i, i \in \{1, \dots, n\},$$

atunci este evident că ipotezele **(H)** **(i)**-**(iii)** rămân adevărate pentru  $\eta_i$ .

În această secțiune studiem existența a cel puțin unei soluții pentru următorul sistem de inegalități neliniare de tip hemivariațional:

**(NHLIS)** Se caută  $(u_1, \dots, u_n) \in D_1 \times \dots \times D_n$  astfel încât

$$\begin{cases} \phi_1(u_1, \dots, u_n, \eta_1(u_1, v_1)) + J_{,1}^0(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n; \bar{\eta}_1(u_1, v_1)) \geq 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \phi_n(u_1, \dots, u_n, \eta_n(u_n, v_n)) + J_{,n}^0(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n; \bar{\eta}_n(u_n, v_n)) \geq 0 \end{cases}$$

pentru orice  $(v_1, \dots, v_n) \in D_1 \times \dots \times D_n$ .

D. Repovš și Cs. Varga au stabilit în articolul [88] un rezultat de existență pentru o clasă generală de sisteme de inegalități hemivariaționale. Teorema următoare extinde acest rezultat și furnizează condiții suficiente pentru existența soluțiilor problemei **(NHLIS)**. În articolul [88] autorii furnizează două demonstrații: una folosește versiunea Ky Fan a teoremei Knaster-Kuratowsky-Mazurkiewicz, iar cealaltă este bazată pe teorema de punct fix a lui Tarafdar pentru multifuncții (vezi E. Tarafdar [90]). Abordarea noastră este puțin diferită, deoarece noi folosim teorema de punct fix a lui Lin (a se vedea [67, Theorem 1.]).

În continuare prezentăm rezultatul principal al acestei secțiuni pentru cazul în care mulțimile  $D_i$  sunt nevide, mărginite, închise și convexe.

**Teorema 4.2.1** (*A. Molnár, O. Vas [74]*) Considerăm mulțimile nevide, mărginite, închise și convexe  $D_i \subset X_i$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Dacă condițiile **(H)** și **(Φ)** sunt îndeplinite, atunci sistemul **(NHLIS)** admite cel puțin o soluție.

Pentru a demonstra această teoremă trebuie mai întâi să formulăm următoarea inegalitate hemivariațională:

**(VHI)** Se caută  $u \in D$  astfel încât

$$\Phi(u, v) + J^0(\bar{u}; \bar{\eta}(u, v)) \geq 0,$$

pentru orice  $v \in D$ .

Următoarea propoziție demonstrează că problema **(VHI)** este strâns legată de problema **(NHLIS)**:

**Propoziția 4.2.1** (*A. É. Molnár, O. Vas, [74]*) *Dacă condițiile **(H)**-(i) și **(Φ)**-(i) sunt adevărate și  $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0) \in D_1 \times \dots \times D_n$  este o soluție a inegalității **(VHI)**, atunci  $u^0$  este de asemenea o soluție a sistemului **(NHLIS)**.*

Observăm că este suficient să demonstrăm că problema **(VHI)** admite cel puțin o soluție.

**Observația 4.2.2** (*A. É. Molnár, O. Vas, [74]*) *Este cunoscut faptul că sistemele de inegalități de tip hemivariaționale pe domenii nemărginite admit soluții, dacă adăugăm condiții de coercivitate. Astfel, dacă impunem anumite condiții de coercivitate, Teorema 4.2.1 va rămâne adevărată și în cazul în care mulțimile  $D_i$  sunt nemărginite (pentru detalii, va se vedea [88, Remark 3.3]).*

## 4.3 Aplicații

Aplicabilitatea rezultatelor prezentate în Secțiunile 4.1 și 4.2 este detaliată în această secțiune.

### 4.3.1 Puncte Nash generalizate

Considerăm spațiile Banach  $E_1, \dots, E_n$  pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$  și mulțimile nevide  $D_i \subset E_i$ . Fie  $D'_i \subset E_i$  o mulțime deschisă astfel încât pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$  să avem  $D_i \subset D'_i$ . Fie  $f_i : D_1 \times \dots \times D'_i \times \dots \times D_n \rightarrow \mathbb{R}$  o funcțională cu proprietatea că pentru fiecare  $i \in \{1, \dots, n\}$  aplicația  $u_i \rightsquigarrow f_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$  este continuă și local Lipschitz.

În cele ce urmează, vom arăta aplicabilitatea Teoremei 4.2.1. Alegem mai întâi

$$\phi_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n, \eta_i(u_i, v_i)) = f_{i,i}^0(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n; \eta_i(u_i, v_i)), \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

și  $J = 0$ . Mai mult, presupunem că funcția  $(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n; v_i) \rightsquigarrow f_{i,i}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n; \eta_i(u_i, v_i))$  este slab superior semicontinuă pentru orice  $v_i \in D_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . În aceste condiții obținem următorul rezultat de existență pentru un nou tip de puncte Nash generalizate.



**Teorema 4.3.1** (*A. Molnár, O. Vas [74]*) Pentru orice  $i \in \{1, \dots, n\}$  fie  $D_i \subset X_i$  o mulțime nevidă, mărginită, închisă și convexă. Presupunem că ipotezele **(H)** și **(Φ)** rămân adevărate. Atunci, există un punct  $(u_1^0, \dots, u_i^0, \dots, u_n^0) \in D_1 \times \dots \times D_n$  astfel încât pentru fiecare  $(u_1, \dots, u_n) \in D_1 \times \dots \times D_n$  și  $i \in \{1, \dots, n\}$  avem

$$g_{i,i}^0(u_1^0, \dots, u_i^0, \dots, u_n^0; \eta_i(u_i^0, v_i)) \geq 0.$$

Următoarea observație subliniază importanța teoremei anterioare:

**Observația 4.3.1** (*A. Molnár, O. Vas, [74]*) Dacă alegem  $\eta(u_i^0, v_i) = v_i - u_i^0$  pentru  $i \in \{1, \dots, n\}$ , atunci obținem rezultatul de existență pentru puncte Nash generalizate din articolul lui D. Repovš and Cs. Varga [88].

Pentru o a doua aplicație a Teoremei 4.2.1 impunem ca funcționalele  $\phi_i : Y_1 \times \dots \times Y_i \times \dots \times Y_n \times Y_i \rightarrow \mathbb{R}$  să fie diferențiabile în a  $i$ -a variabilă pentru  $i \in \{1, \dots, n\}$  și derivatele lor  $\phi_i' : Y_1 \times \dots \times Y_i \times \dots \times Y_n \times Y_i \rightarrow \mathbb{R}$  să fie continue pentru  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Următorul rezultat arată că există cel puțin o soluție a sistemului neliniar general de inegalități de tip hemivariațional:

**Corolarul 4.3.1** (*A. Molnár, O. Vas, [74]*) Considerăm funcția regulară și local Lipschitz  $J : Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_i \times \dots \times Y_n \rightarrow \mathbb{R}$  și funcționalele neliniare  $\phi_i : Y_1 \times \dots \times Y_i \times \dots \times Y_n \times Y_i \rightarrow \mathbb{R}$  cu derivatele continue  $\phi_i' : Y_1 \times \dots \times Y_i \times \dots \times Y_n \times Y_i \rightarrow \mathbb{R}$  pentru  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Fie, de asemenea,  $D_i \subset X_i$  mulțimi mărginite, închise și convexe pentru  $i \in \{1, \dots, n\}$  și presupunem că sunt îndeplinite condițiile **(H)** și **(Φ)**. Atunci, există un punct  $u^0 = (u_1^0, \dots, u_n^0) \in D_1 \times \dots \times D_n$  astfel încât

$$\Phi_i'(\bar{u}^0, \bar{\eta}_i(u_i^0, u_i)) + J_i'(\bar{u}^0; \bar{\eta}_i(u_i^0, u_i)) \geq 0,$$

pentru fiecare  $u = (u_1, \dots, u_n) \in D_1 \times \dots \times D_n$  și  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

### 4.3.2 Probleme de tip Schrödinger

Următoarele trei exemple arată aplicabilitatea rezultatelor principale obținute în Secțiunile 4.1 și 4.2 pentru probleme de tip Schrödinger:

**a)** Fie  $a_1, a_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ( $n > 2$ ) două funcții continue care satisfac următoarele condiții:

- $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} a_i(x) > 0, i = 1, 2;$
- $\text{măsura}(\{x \in \mathbb{R}^n : a_i(x) \leq M_i\}) < \infty,$  pentru fiecare  $M_i > 0, i = 1, 2.$

Spațiile

$$X_1 := \left\{ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u(x)|^2 + a_1(x)u^2(x)) dx < \infty \right\}$$

și

$$X_2 := \left\{ u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u(x)|^2 + a_2(x)u^2(x)) dx < \infty \right\}$$

înzestrate cu produsele scalare

$$\langle u, v \rangle_{X_1} = \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u(x) \nabla v(x) + a_1(x)u(x)v(x)] dx,$$

respectiv,

$$\langle u, v \rangle_{X_2} = \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u(x) \nabla v(x) + a_2(x)u(x)v(x)] dx,$$

sunt spații Hilbert.

Se știe că spațiul  $W^{1,2}(\mathbb{R}^n)$  este scufundat continuu în  $L^p(\mathbb{R}^n), p \in [2, 2^*]$ . Prin urmare, dacă  $q, r \in [2, 2^*]$ , atunci spațiul produs  $X_1 \times X_2$  este scufundat continuu în spațiul  $L^q(\mathbb{R}^n) \times L^r(\mathbb{R}^n)$ . Pe de altă parte, T. Bartsch și Z.-Q. Wang au demonstrat în articolul [14] că pentru  $q, r \in [2, 2^*)$ ,  $X_1$  și  $X_2$  sunt scufundate compact în  $L^q(\mathbb{R}^n)$ , respectiv, în  $L^r(\mathbb{R}^n)$ . Așadar,  $X_1 \times X_2$  este scufundat compact în  $L^q(\mathbb{R}^n) \times L^r(\mathbb{R}^n)$ .

Fie  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție regulată și local Lipschitz care satisface condițiile următoare:

**(G1)** Există  $c > 0$  și  $q \in (2, 2^*), r \in (2, 2^*)$  astfel încât

$$|w_u| \leq c(|u| + |v| + |u|^{q-1}),$$

$$|w_v| \leq c(|v| + |u| + |v|^{r-1}),$$

pentru fiecare  $(u, v) \in \mathbb{R}^2, w_u \in \partial_1 G(u, v), w_v \in \partial_2 G(u, v), i = \overline{1, 2}$ , unde prin  $\partial_1 G(u, v)$  și  $\partial_2 G(u, v)$  notăm gradientii (parțiali) generalizați ai lui  $G(\cdot, v)$  în punctele  $u$  și  $v$ , în timp ce  $2^* = \frac{2N}{N-2}, N > 2$  este exponentul critic Sobolev.

Fie  $K_1$ , respectiv,  $K_2$ , submulțime nevidă, mărginită, închisă și convexă a lui  $X_1$ , respectiv, a lui  $X_2$ . Vom nota cu  $G_1^0(u(x), v(x); w_1(x))$  și  $G_2^0(u(x), v(x); w_2(x))$  derivatele direcționale ale lui  $G$  în prima, respectiv în a doua variabilă după direcția

$w_1$ , respectiv,  $w_2$ . Prima noastră problemă de tip Schrödinger este formulată astfel:

**(Sch-S)** Se caută  $(u_1, u_2) \in K_1 \times K_2$  astfel încât

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \bar{u}_1, \bar{\eta}_1(u_1, v_1) \rangle + \int_{\mathbb{R}^n} G_1^0(\bar{u}_1(x), \bar{v}_1(x), \bar{\eta}_1(u_1(x), v_1(x))) dx \geq 0, \forall v_1 \in K_1; \\ \langle \bar{u}_2, \bar{\eta}_2(u_2, v_2) \rangle + \int_{\mathbb{R}^n} G_2^0(u_2(x), v_2(x), \bar{\eta}_2(\bar{u}_2(x), \bar{v}_2(x))) dx \geq 0, \forall v_2 \in K_2. \end{array} \right. ,$$

pentru orice  $(v_1, v_2) \in K_1 \times K_2$ .

Ca o altă aplicație a Teoremei 4.2.1, arătăm existența a cel puțin unei soluții a problemei **(Sch-S)**.

**Corolarul 4.3.2** (*A. Molnár, O. Vas [74]*) *Dacă  $K_1 \subset X_1$  și  $K_2 \subset X_2$  sunt două mulțimi nevide, convexe, închise și mărginite,  $\eta_1, \eta_2$  satisfac condiția (H) și  $G$  satisface ipoteza (G1), atunci problema (Sch-S) admite cel puțin o soluție.*

**b)** Fie  $n > 2$ . Considerăm funcția  $a_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  și spațiul  $X_1$ , înzestrat cu produsul scalar  $\langle u, v \rangle_{X_1}$ , definite în același mod ca la punctul a). Pentru  $p = 2$  condițiile **(CT)** și **(CP)** sunt satisfăcute.

Fie funcția  $A : X_1 \rightarrow X_1$  definită prin  $\langle Au, v \rangle := (u, v)_{X_1}$ . În urma proprietăților normei și a convergenței slabe, rezultă că **(A1)** și **(A2)** sunt satisfăcute. În acest caz, dacă presupunem că  $K \subseteq X_1$  este ales în mod corespunzător, iar  $f$  și  $j$  satisfac aceleași condiții ca în Teoremele 4.1.1 și 4.1.2, atunci folosind aceste rezultate, deducem că problema **(V-HI)** admite cel puțin o soluție.

**c)** Similar cu exemplul anterior, putem formula o altă problemă de tip Schrödinger, dacă considerăm pentru  $n > 2$  spațiul Hilbert

$$H := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u(x)|^2 + |x|^2 u^2(x)] dx < \infty\}$$

înzestrat cu produsul scalar

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u(x) \nabla v(x) + |x|^2 u(x) v(x)] dx.$$

Scufundarea  $H \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^n)$  este compactă pentru  $s \in [2, 2^*)$  (a se vedea O. Kavian, [56]). Prin urmare condițiile **(CT)** și **(CP)** rămân adevărate. Așadar, dacă considerăm spațiul  $H$  în loc de spațiul  $X_1$  din punctul **b)**, putem deduce rezultatele Teoremelor 4.1.1 și 4.1.2.

### 4.3.3 O problemă cu funcții radial simetrice

În Teoremele 4.1.1 și 4.1.2 ipotezele **(CP)**, **(j1)** și **(j2)** sunt esențiale. În cele ce urmează, cercetăm cazul în care înlocuim **(j1)** și **(j2)** cu alte condiții și vom demonstra că în acest caz afirmațiile Teoremelor 4.1.1 și 4.1.2 rămân adevărate.

Fie  $a : \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  ( $L \geq 2$ ) funcție nenegativă care satisface următoarele condiții:

- (a<sub>1</sub>)  $a(x, y) \geq a_0 > 0$  dacă  $|(x, y)| \geq R$ , iar  $R > 0$  este suficient de mare;
- (a<sub>2</sub>)  $a(x, y) \rightarrow +\infty$ , când  $|y| \rightarrow +\infty$  uniform la  $x \in \mathbb{R}^L$ ;
- (a<sub>3</sub>)  $a(x, y) = a(x', y)$  pentru fiecare  $x, x' \in \mathbb{R}^L$  cu  $|x| = |x'|$  și orice  $y \in \mathbb{R}^M$ .

Considerăm următoarele subspații ale lui  $W^{1,p}(\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M)$

$$\tilde{E} = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M) : u(s, t) = u(s', t) \forall s, s' \in \mathbb{R}^L, |s| = |s'|, \forall t \in \mathbb{R}^M\},$$

$$E = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M) : \int_{\mathbb{R}^{L+M}} a(x)|u(x)|^p dx < \infty\},$$

$$X := \tilde{E} \cap E = \{u \in \tilde{E} : \int_{\mathbb{R}^{L+M}} a(x)|u(x)|^p dx < \infty\}$$

înzestrate cu norma

$$\|u\|^p = \int_{\mathbb{R}^{L+M}} |\nabla u(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^{L+M}} a(x)|u(x)|^p dx.$$

D. C. de Moraes Filho, M. A. S. Souto, J. Marcos Do au demonstrat în [75] că scufundarea  $X \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M)$  este continuă dacă  $s \in [p, p^*]$ , și compactă dacă  $s \in (p, p^*)$ .

Fie

$$\Gamma = \left\{ g : E \rightarrow E : g(v) = v \circ \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & Id_{\mathbb{R}^M} \end{pmatrix}, R \in O(\mathbb{R}^L) \right\},$$

unde  $O(\mathbb{R}^L)$  este mulțimea tuturor rotațiilor pe  $\mathbb{R}^L$  și prin  $Id_{\mathbb{R}^M}$  notăm matricea identică de ordin  $M$ .

În continuare presupunem că  $j : \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție Carathéodory, care este local Lipschitz în variabila din  $\mathbb{R}$  și satisface următoarele condiții:

(j1')  $j(x, 0) = 0$ , și există  $c > 0$  și  $q \in (p, p^*)$  astfel încât

$$|\xi| \leq c(|y|^{p-1} + |y|^{q-1}), \quad \forall \xi \in \partial j(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{L+M} \times \mathbb{R};$$

(j3)  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\max\{|\xi| : \xi \in \partial j(x, y)\}}{|y|^{p-1}} = 0$  uniform pentru fiecare  $x \in \mathbb{R}^{L+M}$ ;

(j4)  $j(\cdot, y)$  este  $\Gamma$ -invariantă pentru orice  $y \in \mathbb{R}$ .

Pentru a deduce rezultate noi vom folosi lema următoare în loc de Lema 4.1.1:

**Propoziția 4.3.1** (*H. Lisei, Cs. Varga, [69]*) Dacă  $j : \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verifică condițiile (j1'), (j3) și (j4), atunci funcția

$$u \in X \mapsto \int_{\mathbb{R}^{L+M}} j(x, u(x)) dx$$

este slab secvențial continuuă.

Are loc următorul rezultat de existență:

**Teorema 4.3.2** (*H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]*)

(i) Fie  $K \subset X$  o mulțime nevidă, închisă, convexă și mărginită. Fie  $A : E \rightarrow E^*$  un operator satisfăcând condiția (A1). Presupunem că  $j$  satisface ipotezele (j1'), (j3) și (j4). Atunci, există  $u \in K$  astfel încât

$$\langle Au, v - u \rangle + \int_{\mathbb{R}^{L+M}} j^0(x, u(x); v(x) - u(x)) dx \geq 0 \quad \text{pentru orice } v \in K. \quad (4.3.1)$$

(ii) Mai mult, dacă  $K \subset X$  este o mulțime nevidă, închisă și convexă,  $A : X \rightarrow X^*$  este un operator ce satisface (A1), (A2) și dacă presupunem că  $j$  satisface (j1'), (j2), (j3) și (j4), atunci există  $u \in K$  astfel încât relația (4.3.1) rămâne adevărată.

**Observația 4.3.2** (*H. Lisei, A. Molnár, Cs. Varga, [68]*) În [69, Teorema 3.1] autorii au demonstrat, folosind o teoremă Mountain-Pass combinată cu principiul simetriei critice pentru funcționale de tip Motreanu-Panagiotopoulos, existența soluțiilor netriviiale pozitive, atunci când  $K$  este un con  $\{v \in E : v \geq 0 \text{ a.p.t. în } \mathbb{R}^L \times \mathbb{R}^M\}$ , iar  $A : X \rightarrow X^*$  este operatorul de dualitate.

# Bibliografie

- [1] S. Al-Homidana, Q.H. Ansaria, J.-C. Yao: *Some generalizations of Ekeland-type variational principle with applications to equilibrium problems and fixed point theory*, Nonlinear Analysis 69 (2008), 126-139.
- [2] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz: *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Anal 14 (1973), 349-381.
- [3] A. Amini-Harandi, Q. H. Ansari, A. P. Farajzadeh: *Existence of equilibria in complete metric spaces*, Taiwanese Journal of Mathematics 16 (2) (2012), 777-785.
- [4] I. Andrei, N. Costea: *Nonlinear hemivariational inequalities and applications to nonsmooth mechanics*, Adv. Nonlinear Var. Ineq. 13 (2010), 1-17.
- [5] Q.H. Ansari: *Metric Spaces - Including Fixed Point Theory and Set-Valued Maps*, Narosa Publishing House, New Delhi, 2010.
- [6] Q.H. Ansari (Editor): *Topics in Nonlinear Analysis and Optimization*, World Education, Delhi, 2012
- [7] Q.H. Ansari: *Vectorial form of Ekeland-type variational principle with applications to vector equilibrium problems and fixed point theory*, J. Math. Anal. Appl. 334 (2007), 561-575.
- [8] Q.H. Ansari, L.-J. Lin: *Ekeland type Variational Principle and Equilibrium Problems*, Topics in Nonconvex Optimization, Theory and Applications. Edited by S.K. Mishra, Springer-Verlag, New York, Berlin, 2011.

- 
- [9] Q. H. Ansari, S. Schaible, J.-C. Yao: *System of Vector Equilibrium Problems and Its Applications*, Journal of Optimization Theory and Applications 107 (2000), 547-557.
- [10] Y. Araya, K. Kimura, T. Tanaka: *Existence of Vector Equilibria Via Ekeland's Variational Principle*, Taiwanese Journal of Mathematics 12 (8) (2008), 1991-2000.
- [11] J.P. Aubin: *Optima and Equilibria: An introduction to Nonlinear Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1993.
- [12] J.-P. Aubin, H. Frankowska: *Set-Valued Analysis*, Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1990.
- [13] I.A. Bakhtin: *The contraction mapping principle in almost metric spaces*,
- [14] T. Bartsch, Z-Q. Wang: *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems in  $\mathbb{R}^n$* , Comm. Partial Differential Equations 20 (1995), 1725-1741.
- [15] V. Berinde: *Generalized contractions in quasimetric spaces*, Seminar on Fixed Point Theory (Preprint), Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca 3 (1993), 3-9.
- [16] M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: *Existence of Equilibria via Ekeland's Principle*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 305 (2005), 502-512.
- [17] M. Bianchi, G. Kassay, R. Pini: *Ekeland's principle for vector equilibrium problems*, Nonlinear Analysis 66 (2007), 1454-1464.
- [18] M. Bianchi, R. Pini: *A Note on Equilibrium Problems with Properly Quasimonotone Bifunctions*, Journal of Global Optimization 20 (2001), 67-76.
- [19] M. Bianchi, R. Pini: *Coercivity conditions for equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications 124 (2005), 79-92.
- [20] M. Bianchi, S. Schaible: *Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems*, Journal of Optimization Theory and Applications 90 (1996), 31-43.

- 
- [21] E. Blum, W. Oettli: *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, The Mathematics Student 63(1-4) (1994), 123-145.
- [22] M. Bota, **A. É. Molnár**, Cs. Varga: *On Ekeland's variational principle in  $b$ -metric spaces*, Fixed Point Theory 12 (1) (2011), 21-28.
- [23] B.E. Breckner, A. Horváth, Cs. Varga: *A multiplicity results for a special class of gradient-type systems with non-differentiable term*, Nonlinear Anal. 70 (2009), 606-620.
- [24] H. Brezis: *Functional analysis, Sobolev spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.
- [25] J. Caristi: *Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976), 241-251.
- [26] F.H. Clarke: *Generalized Gradients and Applications*, Trans. Amer. Math. Soc. 205 (1975), 247-262.
- [27] F.H. Clarke: *A New Approach to Lagrange Multipliers*, Math. Oper. Res. 1 (1976), 165-174.
- [28] F.H. Clarke: *Generalized Gradients of Lipschitz Functionals*, Adv. Math. 40 (1981), 52-67.
- [29] F.H. Clarke: *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [30] N. Costea, V. Rădulescu: *Existence results for hemivariational inequalities involving relaxed  $\eta - \alpha$  monotone mappings*, Communications in Applied Analysis 13(3) (2009), 293-304.
- [31] N. Costea, Cs. Varga: *Systems of nonlinear hemivariational inequalities and applications*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 41 (2013), 39-65.
- [32] S. Czerwik: *Nonlinear set-valued contraction mappings in  $B$ -metric spaces*, Atti Sem. Mat. Univ. Modena 46 (1998), 263-276.



- 
- [33] Z. Dályai, Cs. Varga: *An existence result for hemivariational inequalities*, Electron. J. Differential Equations 37 (2004), 1-17.
- [34] J. Daneš: *A geometric theorem useful in nonlinear functional analysis*, Boll. Un. Mat. Ital. 6 (1972), 369-375.
- [35] J. Daneš: *Equivalence of some Geometric and Related Results of Nonlinear Functional Analysis*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 26 (3) (1985), 443-454.
- [36] M.M. Day: *The spaces  $L_p$  for  $0 < p < 1$* , Bull. Amer. Math. Soc. 46 (1940), 816-823.
- [37] D. G. De Figueiredo: *Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Springer-Verlag, Heidelberg, West Germany, 1989.
- [38] D.G. De Figueiredo, *The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1989.
- [39] Z. Denkowski, S. Migórski, N. S. Papageorgiou: *An introduction to Nonlinear Analysis: Theory*, Kluwer Academic Publishers, New York, 2003.
- [40] Z. Denkowski, S. Migórski, N. S. Papageorgiou: *An introduction to Nonlinear Analysis: Applications*, Kluwer Academic Publishers, New York, 2002.
- [41] I. Ekeland: *On the variational principle*, J. Math. Anal. App. 47 (1974), 324-353.
- [42] I. Ekeland: *Nonconvex minimization problems*, Bulletin Of American Mathematical Society 1 (3) (1979), 443-474.
- [43] F. Faraci, A. Iannizzotto, H. Lisei, Cs. Varga: *A multiplicity result for hemivariational inequalities*, Journal of Math. Anal. and Appl. 330 (2007), 683-698.
- [44] Cs. Farkas, **A. É. Molnár**: *A Generalized Variational Principle and Its Application to Equilibrium Problems*, Journal of Optimization Theory and Applications 156 (2) (2013), 213-231.

- [45] Cs. Farkas, **A. É. Molnár**: *A Generalized Variational Principle and Its Applications to Fixed Point Theory in b-metric spaces*, submitted
- [46] F. Gazzola, V. Rădulescu: *A non-smooth critical point theory approach elliptic equations in  $R^N$* , Differential Integral Equations 13 (2000), 47-60.
- [47] P.G. Georgiev: *The Strong Ekeland Variational Principle, the Strong Drop Theorem and applications*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 131 (1988), 1-21.
- [48] P.G. Georgiev: *Parametric Ekeland's Variational Principle*, Applied Mathematical Letters 14 (2001), 691-696.
- [49] A. Granas, J. Dugundji: *Fixed Point Theory*, Springer Verlag, New-York, 2003.
- [50] A. Granas, M. Lassonde: *Some elementary general principles of convex analysis*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 5 (1995), 23-37.
- [51] N. Hadjisavvas, S. Komlosi, S. Schaible (Editors): *Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [52] A.H. Hamel: *Equivalents to Ekeland's variational principle in uniform spaces*, Nonlinear Anal. 62 (2005), 913-924.
- [53] J. Heinonen: *Lectures on Analysis on Metric Spaces*, Springer Berlin, 2001.
- [54] A.D. Ioffe, V.M. Tikhomirov: *Some remarks on variational principles*, Mathematical Notes 61 (1997), 248-253.
- [55] N.J. Kalton: *Quasi-Banach spaces*, *Handbook of Banach Spaces II*, Editors W.B. Johnson and J.Lindenstrauss, Elsevier (2003), 1099-1130.
- [56] O. Kavian: *Introduction á la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [57] G. Kassay: *The Equilibrium Problem and Related Topics*, Risoprint, Cluj-Napoca, 2000.
- [58] G. Kassay, J.Kolumbán: *On a generalized sup-inf problem*, Journal of Optimization Theory and Applications 91 (1996), 651-670.

- 
- [59] I.V. Konnov: *Regularization method for nonmonotone equilibrium problems*, J. Nonlinear Convex Anal. 10 (2009), 93-101.
- [60] A. Kristály: *An existence result for gradient-type systems with a non-differentiable term on unbounded strips*, J. Math. Anal. Appl. 229 (2004), 186-204.
- [61] A. Kristály: *Infinitely many radial and non-radial solutions for a class of hemivariational inequalities*, Rocky Mountain J. Math. 35 (2005), 1173-1190.
- [62] A. Kristály, *Hemivariational inequalities systems and applications*, Mathematica 46 (2004), 161-168.
- [63] A. Kristály, *Multiplicity results for an eigenvalue problem for hemivariational inequalities in strip-like domains*, Set-Valued Anal. 13 (2005), 8-103.
- [64] A. Kristály, V. Rădulescu, Cs. Varga: *Variational principles in mathematical physics, geometry and economics: qualitative analysis of nonlinear equations and unilateral problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [65] A. Kristály, Cs. Varga: *A setvalued approach to hemivariational inequalities*, Topological Methods in Nonlinear Analysis, 24 (2004), 297-307.
- [66] A. Kristály and Cs. Varga: *An introduction to critical point theory for non-smooth functions*, Casa Cărții de Știință, Cluj, 2004.
- [67] T.C. Lin: *Convex sets, fixed points, variational and minimax inequalities*, Bull. Austral. Math. Soc. 34 (1986), 107-117.
- [68] H. Lisei, **A. É. Molnár**, Cs. Varga: *On a class of inequality problems with lack of compactness*, J. Math. Anal. Appl. 378 (2) (2011) 741-748.
- [69] H. Lisei, Cs. Varga: *Some applications to variational-hemivariational inequalities of the principle of symmetric criticality for Motreanu-Panagiotopoulos type functionals*, J. Global Optim. 36 (2006) 283-305.
- [70] Z. Liu, D. Motreanu: *A class of variational-hemivariational inequalities of elliptic type*, Nonlinearity 23 (2010), 1741-1752.

- [71] G. Mastroeni: *On auxiliary principle for equilibrium problems*, in "Equilibrium problems and Variational models", P. Daniele, F. Giannessi, A. Maugeri (Editors), 289-298, Kluwer, Dordrecht, 2003.
- [72] I. Meghea: *Ekeland variational principle with generalizations and variants*, Old City Publishing, Philadelphia, Editions des Archives Contemporaines, Paris, 2009.
- [73] P. Mironescu, V. Rădulescu: *A multiplicity theorem for locally Lipschitz periodic functionals*, J. Math. Anal. Appl. 195 (1995), 621-637.
- [74] **A. É. Molnár**, O. Vas: *An existence result for a class of generalized hemivariational inequality systems*, accepted in Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica
- [75] D.C. de Morais Filho, J. Souto, O. Marcos Do: *A compactness embedding lemma, a principle of symmetric critically and applications to elliptic problems*, Univ. Cat. del Norte, Antofagasta, Chile, 19 (1) (2000), 1-17.
- [76] D. Motreanu, P.D. Panagiotopoulos: *Minimax Theorems and Qualitative Properties of the Solutions of Hemivariational Inequalities and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Nonconvex Optimization and its Applications, vol. 29, Boston/Dordrecht/London, 1999.
- [77] D. Motreanu, V. Rădulescu: *Variational and Non-variational Methods in Non-linear Analysis and Boundary Value Problems*, Kluwer Academic Publishers, Boston/Dordrecht/London, 2003.
- [78] Z. Naniewicz, P.D. Panagiotopoulos: *Mathematical theory of hemivariational inequalities and applications*, Marcel Dekker, New York, 1995.
- [79] W. Oettli, M. Théra: *Equivalents of Ekeland's Principle*, Bull. Austral. Math. Soc. 48 (1993), 385–392.
- [80] P.D. Panagiotopoulos: *Inequality Problems in Mechanics and Applications*, Convex and Nonconvex Energy Functions, Birkhauser, Basel, 1985.

- 
- [81] P.D. Panagiotopoulos: *Hemivariational Inequalities: Applications to Mechanics and Engineering*, Springer-Verlag, New York/Boston/Berlin, 1993.
- [82] P. D. Panagiotopoulos, M. Fundo, V. Rădulescu: *Existence theorems of Hartman–Stampacchia type for hemivariational inequalities and applications*, J. Global Optim. 15 (1999), 41-54.
- [83] J.-P. Penot: *The Drop Theorem, the Petal Theorem and Ekeland’s Variational Principle*, Nonlinear Analysis. Theory, Methods & Applications 10 (9) (1986), 813-822.
- [84] P. H. Rabinowitz: *Some minimax theorems and applications to nonlinear partial differential equations*, Nonlinear Analysis: a collection of papers in honor of E. H. Rothe, L. Cesari, R. Kannan and H. F. Weinberger (Editors), Academic Press (1978), 161-177.
- [85] P. H. Rabinowitz: *Some critical point theorems and applications to semilinear elliptic partial differential equations*, Ann. Scuola Norm Sup. Pisa, Ser. IV, 5 (1978), 215-223.
- [86] V. Rădulescu: *Mountain pass type theorems for non-differentiable functions and applications*, Proc. Japan Acad. 69A (1993), 193-198.
- [87] V. Rădulescu, D. Repovš: *Existence results for variational–hemivariational problems with lack of convexity*, Nonlinear Anal. 73 (2010), 99–104.
- [88] D. Repovš, Cs. Varga: *A Nash type solution for hemivariational inequality systems*, Nonlinear Analysis 74 (2011), 5585-5590.
- [89] S.L.Singh, C. Bhatnagar, S.N. Mishra: *Stability of iterative procedures for multivalued maps in metric spaces*, Demonstration Math. 37(2005), 905-916.
- [90] E. Tarafdar: *A fixed point theorem equivalent to the Fan-Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz theorem*, J. Math. Anal. Appl. 128 (1987), 457-497.
- [91] Cs. Varga: *Existence and infinitely many solutions for an abstract class of hemivariational inequalities*, J. Inequal. Appl. 2 (2005), 89-105.

- [92] L. Yongxing, S. Shuzhong: *A generalization of Ekeland's  $\varepsilon$ -variational principle and its Borwein-Preiss variant*, J.M.A.T.A. 246(1) (2000), 308-319.
- [93] C.-K. Zhong: *On Ekeland's Variational Principle and Minimax Theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 205 (1997), 239-250.
- [94] C.-K. Zhong: *A Generalization of Ekeland's Variational Principle and Application to the Study of the Relation between the P.S. Condition and Coercivity*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications 29 (1997), 1421-1431.