Universitatea Babeş-Bolyai

Facultatea de Matematică şi Informatică

Cluj-Napoca

OPERATORI DE APROXIMARE FUZZY

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Conducător Ştiințific

Prof. univ. dr. Petru Blaga

Student Doctorand

Lucian Coroianu

Cluj-Napoca 2013

Cuprins

Introducere

Această teză conţine o parte din rezultatele pe care le-am obţinut în studiul aproximării numerelor fuzzy. Acest domeniu s-a dezvoltat foarte mult în ultimul deceniu (vezi secţiunea 3.1 pentru mai multe detalii). Vom studia două tipuri de aproximări. Mai întâi vom studia aproximarea numerelor fuzzy prin numere fuzzy cu formă mai simplă cum ar fi numerele fuzzy trapezoidale sau numerele fuzzy parametrice. Acest tip de aproximare trebuie privit ca fiind o alternativă pentru a reprezenta numerele fuzzy într-o formă mai simplă mai ales în aplicaţiile unde nu avem nevoie de toată informaţia cuprinsă într-un număr fuzzy. Din acest motiv probabil că cea mai importantă parte a acestui tip de aproximare o reprezintă aproximarea numerelor fuzzy cu condiţii suplimentare cum ar fi conservarea intervalului de expectanţă sau conservarea ambiguităţii şi a a valorii. Aceste caracteristici sunt importante mai ales în probleme de statistică sau în probleme de ordonare a numerelor fuzzy. Astfel, este necesar să găsim reprezentări mai simple pentru numerele fuzzy şi astfel încât una sau mai multe caracteristici importante să fie conservate. Există foarte multe tipuri de structuri metrice care se pot defini pe spaţiul numerelor fuzzy (vezi secţiunea 1.9 pentru mai multe detalii). Unele sunt importante în rezolvarea de ecuaţii fuzzy, altele sunt importante în probleme de tip statistic iar altele sunt importante pentru probleme de ordonare a numerelor fuzzy. În prezenta lucrare vom studia problema aproximării numerelor fuzzy. Se pare că cea mai potrivită metrică pentru acest gen de probleme este o extindere a metricii Euclidiene introdusă în lucrarea [58]. Generalizări ale acestei metrici de tipul L_2 se găsesc în lucrările [85], [88], ele fiind numite metrici ponderate de tip L_2. Din acest motiv cercetarea noastră se orientează în jurul acestor metrici.

Al doilea tip de aproximare ce va fi studiat în această teză este aproximarea numerelor fuzzy folosind operatori de aproximare. Acest tip de aproximare este important de asemenea din moment ce spaţiul numerelor fuzzy poate fi identificat ca fiind un spaţiu de funcţii care verifică anumite proprietăţi. O altă motivaţie pentru acest studiu este că aproximarea numerelor fuzzy prin operatori de aproximare vine în completarea aproximării numerelor fuzzy prin numere fuzzy cu formă mai simplă. Sunt situaţii în care avem nevoie să păstrăm cât mai mult din informaţia conţinută într-un număr fuzzy şi operatorii de aproximare pot fi soluţia pentru astfel de probleme. După cum se va vedea în ultimul capitol al acestei teze, operatorii Bernstein de tip max-produs (introduşi în cartea [55]) sunt operatori de aproximare care satisfac această proprietate de conservare a informaţiei asociată unui număr fuzzy.

În continuare prezentăm structura acestei teze. Primul capitol prezintă pe scurt teoria mulţimilor fuzzy şi în detaliu noţiuni de bază despre numerele fuzzy. În capitolul 2 sunt prezentate multe rezultate importante care se vor folosi mai târziu pentru a demonstra rezultatele centrale din capitolele 3-4. În plus, ultimele 4 secţiuni ale capitolului sunt dedicate studiului ordonării numerelor fuzzy. În capitolul 3 discutăm despre aproximarea numerelor fuzzy prin numere fuzzy cu formă mai simplă. Mai întâi vom prezenta rezultate de existenţă şi unicitate în raport cu metrici prezentate într-un context general. Apoi discutăm cazuri particulare. Mai întâi demonstrăm existenţa şi unicitatea aproximării parametrice şi trapezoidale în raport cu metrici de tip L_2. Apoi vom demonstra existenţa şi unicitatea aproximării parametrice care conservă intervalul de expectanţă respectiv a aproximării parametrice care conservă ambiguitatea şi valoarea. Ca aplicaţie vom deduce algoritmii pentru a calcula aproximări trapezoidale (întotdeauna există şi sunt unice) care conservă intervalul de expectanţă respectiv aproximări trapezoidale care conservă ambiguitatea şi valoarea. Toate aceste aproximări se vor calcula în raport cu metrica Euclidiană. Apoi discutăm despre aproximări în raport cu metrici ponderate de tip L_2 care conservă intervalul de expectanţă ponderat respectiv aproximări (ponderate) care conservă nucleul. În final, operatorii de aproximare sunt testaţi pe câteva exemple numerice concrete. Deoarece calitatea unui operator de aproximare nu este mai puţin importantă, capitolul 4 al tezei este dedicat investigării unor proprietăţi de bază ale operatorilor de aproximare fuzzy. Mai întâi sunt prezentate rezultate generale în legătură cu invarianţa faţă de translaţii respectiv scalari. Apoi, considerând continuitatea ca o proprietate de bază pe care un operator de aproximare trebuie să o satisfacă, prezentăm un studiu detaliat în această privinţă. În primul rând demonstrăm că operatorii de aproximare fuzzy fără alte restricţii sunt neexpansivi în raport cu metricile de tip L_2. Apoi, în cazul operatorului de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă precum şi a celui care conservă ambiguitatea şi valoarea respectiv a acelui care conservă ambiguitatea, pentru fiecare în parte demonstrăm continuitatea Lipschitz. În cazul primilor 2 operatori vom găsi chiar cea mai bună constantă Lipschitz posibilă. Ca un rezultat negativ vom demonstra că orice operator fuzzy care ia valori numere fuzzy trapezoidale ce conservă nucleul are puncte de discontinuitate. O altă proprietate importantă este aditivitatea. Deoarece majoritatea operatorilor de aproximare fuzzy nu sunt aditivi, vom găsi pentru aceşti operatori estimări pentru defectul lor de aditivitate în sensul definiţiei care se găseşte în [29]. În cazul operatorului de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă vom găsi cea mai bună estimare posibilă. În ultima secţiune a capitolului vom discuta aproximarea trapezoidală în relaţie cu agregarea datelor, un alt topic important al zilelor noastre cu multe aplicaţii în analiza fuzzy. În ultimul capitol al tezei studiem aproximarea numerelor fuzzy prin intermediul operatorilor Bernstein de tip max-produs. Se pare că aceşti operatori sunt foarte utili pentru a aproxima numere fuzzy. Pe lângă convergenţa în norma uniformă în cazul numerelor fuzzy continue, aceşti operatori posedă importante proprietăţi de conservare a alurii cum ar fi conservarea suportului respectiv convergenţa nucleului. În final merită menţionat că în cazul caracteristicilor importante ale numerelor fuzzy cum ar fi intervalul de expectanţă, ambiguitatea sau valoarea, din nou avem convergenţă în aproximarea prin operatori Bernstein de tip max-produs. Teza se încheie cu o concluzie în care se face o recapitulare a rezultatelor obţinute şi se prezintă viitoare teme de cercetare.

În finalul acestei introduceri, doresc să menţionez că această teză conţine contribuţii originale din articolele sau manuscrisele [17]-[19], [21]-[28], [30], [40]-[41], [44], [46]-[48]. Cu excepţia secţiunilor 1.1-1.9 (aceste secţiuni conţin generalităţi), 3.3, 3.5 şi respectiv 3.9, restul secţiunilor se bazează aproape în întregime pe contribuţii originale. În plus, secţiunea 3.3 se bazează pe o abordare originală. Contribuţiile originale sunt indicate la începutul fiecărui capitol respectiv secţiuni şi apoi se fac referinţe adecvate în interiorul secţiunilor. Deasemenea, trebuie notat că lucrarea [47] este varianta extinsă a lucrării [46] şi va apare într-un număr special al revistei Fuzzy Sets and Systems, număr dedicat teoriei numerelor fuzzy, unde o parte din articole (inclusiv contribuţia noastră) sunt selecate de la Conferinţa EUSFLAT-LFA care s-a desfăşurat în anul 2011 la Aix-Les-Bains. Totuşi, trebuie menţionat că rezultatele centrale din [47] sunt mai bune (sau mai complete) în comparaţie cu cele din lucrarea [46] şi în plus se obţin multe alte rezultate teoretice cum ar fi aproximări cu metrici de tip L_1 sau rezultate de convergenţă în raport cu caracteristicile importante ale numerelor fuzzy. În plus, teza conţine rezultate originale nepublicate încă sau rezultate care îmbunătăţesc variantele publicate.

Cuvinte cheie: număr fuzzy, număr fuzzy trapezoidal, număr fuzzy parametric, metrici de tip L_2, interval de expectanţă, ambiguitate, valoare, funcţie de reducere, defuzificator, număr fuzzy extins, spaţii normate, spaţii Hilbert, aproximare trapezoidală, aproximare parametrică, aproximare

trapezoidală, aproximare parametrică extinsă, continuitatea Lipschitz, defect de aditivitate, agregare, operator Bernstein de tip max-produs.

Capitolul 1

Mulţimi fuzzy şi numere fuzzy

Conceptele de bază relativ la numerele fuzzy care se discută în acest capitol se găsesc în numeroase articole recente care studiază aproximarea sau ordonarea numerelor fuzzy (vezi de exemplu [5], [13], [58], [85]). În plus, secţiunile 1.10-1.12 conţin o parte din contribuţiile mele originale luate din articolele sau manuscrisele [19], [21], [25], [28], [48].

1.1 Definiţia unei mulţimi fuzzy

De multe ori în practică putem verifica cu precizie dacă un anume obiect aparţine sau nu unei mulţimi date. Să luăm ca exemplu mulţimea X a persoanelor cu vârsta de cel mult 40 de ani. Dacă $\mu_X : X \to \{0,1\}$ este funcţia caracteristică a lui X,

$$\mu_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } x \in X, \\ 0 & \text{dacă } x \notin X, \end{cases}$$

atunci putem spune fără dubii că $\mu_X(x) = 1$ dacă x este o persoana cu vârsta cel mult 40 de ani şi $\mu_X(x) = 0$ dacă x este o persoană cu vârsta peste 40 de ani.

Dar sunt situaţii când nu putem fi siguri dacă un obiect aparţine sau nu unei mulţimi, mai ales când există o doză de ambiguitate în descrierea acestui obiect. Următoarele două exemple sunt relevente pentru astfel de situaţii.

1) Opusul cuvântului "tânăr" este cuvântul "bătrân". În consecinţă, logica clasică ne încurajează să împărţim oamenii în două categorii: persoane bătrâne şi persoane tinere. Totuşi este dificil să decidem în care categorie s-ar încadra o persoană care are 35 de ani sau o persoană care are 52 de ani.

2) (exemplul lui Zadeh) Să considerăm mulţimea numerelor mult mai mari decât 1. Cu siguranţă, putem spune că numărul 100 aparţine acestei mulţimi dar ne este greu să ne decidem dacă numărul 10 aparţine sau nu acestei mulţimi.

Zadeh a observat că sunt situaţii în care logica clasică nu se poate aplica în anumite situaţii practice şi pentru a depăşi acest obstacol a introdus noţiunea de mulţime fuzzy în lucrarea [87].

Definiţia 1.1.1 *Fie X un univers de obiecte. O mulţime fuzzy A în X este caracterizată de o funcţie de apartenenţă (numită uneori funcţie caracteristică), $\mu_A : X \to [0,1]$, care asociază fiecărui obiect $x \in X$ un număr real din intervalul $[0,1]$, cu valoarea $\mu_A(x)$ reprezentând gradul de apartenenţă al lui x în A.*

Păstrând notaţiile de mai sus, mulţimea fuzzy A are forma explicită

$$A = \{(x, \mu_A(x)) : x \in X, \mu_A(x) \in [0,1]\}.$$

Mulţimea tuturor submulţimilor fuzzy ale unei mulţimi X se notează cu $\widetilde{\mathcal{P}}(X)$. Dacă pentru $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(X)$ avem $\mu_A = 0$, atunci spunem că A este o mulţime vidă şi scriem ca de obicei $A = \varnothing$. Dacă mulţimea $\{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$ este finită atunci spunem că A este o mulţime fuzzy discretă. În acest caz putem caracteriza mulţimea fuzzy A prin omiterea elementelor $x \in X$ pentru care $\mu_A(x) = 0$. De exemplu $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$, $A = \{(-3, 0.2), (0, 0.5), (2, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$ reprezintă o mulţime fuzzy discretă. Interpretarea valorii $\mu_A(x)$ este foarte naturală. Dacă $\mu_A(x)$ este foarte aproape de 1 atunci avem un grad foarte mare de apartenenţă al lui x la A, pe când, dacă $\mu_A(x)$ este foarte aproape de 0 atunci avem un grad de apartenenţă foarte scăzut al lui x la A. Dacă $\mu_A(x) = 1$ atunci avem apartenenţă totală şi putem spune că $x \in A$ iar dacă $\mu_A(x) = 0$ atunci avem excludere totală şi putem spune că $x \notin A$.

Dacă $\mu_A(x) \in \{0, 1\}$ pentru fiecare $x \in X$ atunci mulţimea fuzzy A devine o mulţime în sensul clasic.

1.2 Operaţii cu mulţimi fuzzy

Operaţiile de bază între mulţimi cum ar fi: egalitatea, complementaritatea, incluziunea, reuniunea sau intersecţia, se pot extinde în mod natural pentru cazul când avem de-a face cu mulţimi fuzzy. În cele ce urmează prezentăm aceste operaţii aşa cum au fost propuse de Zadeh în [87].

Definiţia 1.2.1 *Fie A şi B două submulţimi fuzzy ale aceleiaşi mulţimi X. Dacă $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, pentru fiecare $x \in X$ atunci spunem că A şi B sunt egale şi scriem $A = B$.*

Definiţia 1.2.2 *Fie A şi B două submulţimi fuzzy ale aceleiaşi mulţimi X. Dacă $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, pentru fiecare $x \in X$ atunci spunem că A este inclusă în B şi scriem $A \subseteq B$.*

Definiţia 1.2.3 *Fie A o submulţime fuzzy a lui X. Complementara lui A notată cu $\overline{A}$, este caracterizată de funcţia de apartenenţă $\mu_{\overline{A}} : X \to [0,1]$, $\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, pentru fiecare $x \in X$.*

Definiţia 1.2.4 *Dacă A şi B sunt două submulţimi fuzzy ale aceleiaşi mulţimi X atunci reuniunea dintre A şi B notată $A \cup B$, este caracterizată de funcţia de apartenenţă $\mu_{A\cup B} : X \to [0,1]$, $\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, pentru fiecare $x \in X$.*

Definiţia 1.2.5 *Dacă A şi B sunt două submulţimi fuzzy ale aceleiaşi mulţimi X atunci intersecţia dintre A şi B notată $A \cap B$, este caracterizată de funcţia de apartenenţă $\mu_{A\cap B} : X \to [0,1]$, $\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, pentru fiecare $x \in X$.*

1.3 Înălţimea, nucleul, suportul şi secţiunea α a unei mulţimi fuzzy

Înălţimea mulţimii fuzzy $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(X)$, este valoarea $hgt(A) = \sup_{x \in X} \mu_A(x)$. Din definiţia unei mulţimi fuzzy rezultă că $hgt(A) \leq 1$. Dacă există $x_0 \in X$ astfel încât $hgt(A) = \mu_A(x_0) = 1$, atunci spunem că mulţimea fuzzy A este normală.

Nucleul mulţimii fuzzy $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(X)$ se notează cu $core(A)$ şi este mulţimea $core(A) = \{x \in X : \mu_A(x) = 1\}$. Rezultă imediat că $core(A) \neq \varnothing$ dacă şi numai dacă A este normală.

Suportul mulţimii fuzzy $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(X)$ se notează $supp(A)$, unde $supp(A) = \{x \in X : \mu_A(x) > 0\}$. Observăm cu uşurinţă că $A \neq \varnothing$ dacă şi numai dacă $supp(A) \neq \varnothing$.

Pentru $\alpha \in [0,1]$, secţiunea α a mulţimii fuzzy $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(X)$ se va nota în această teză cu A_α, unde $A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$. Observăm că $A_0 = X$ şi $A_1 = core(A)$. Vom vedea în secţiunea 1.6 că în cazul numerelor fuzzy, secţiunea 0 are definiţia puţin modificată.

1.4 Mulţimi fuzzy convexe

În faimoasa sa lucrare, Zadeh a introdus noţiunea de mulţime fuzzy convexă într-un mod care permite conservarea proprietăţilor mulţimilor convexe clasice.

Definiţia 1.4.1 *Fie X o submulţime convexă a unui spaţiu vectorial real. Spunem că mulţimea fuzzy $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(X)$ este convexă dacă pentru fiecare $\alpha \in [0,1]$ mulţimea $A_\alpha = \{x \in X : \mu_A(x) \geq \alpha\}$ este o submulţime convexă a lui X.*

Prezentăm în continuare un concept care generalizează conceptul de convexitate precum şi conceptul de monotonie, concept care ne va ajuta să dăm o definiţie echivalentă pentru o mulţime fuzzy convexă.

Definiţia 1.4.2 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval. Spunem că f este:*

(i) cvasi-convexă pe I dacă

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}, x, y \in I, \lambda \in [0,1];$$

(ii) cvasi-concavă pe I dacă

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{f(x), f(y)\}, x, y \in I, \lambda \in [0,1].$$

Se ştie că funcţiile monotone sunt atât cvasi-convexe cât şi cvasi-concave. Apoi, se ştie că funcţiile convexe sunt cvasi-convexe iar funcţiile concave sunt cvasi-concave.

Propoziţia 1.4.3 *Fie $f : I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval. Atunci f este cvasi-convexă (cvasi-concavă) dacă şi numai dacă pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ mulţimea $\{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ $(\{x \in X : f(x) \geq \lambda\})$ este o submulţime convexă a lui $\mathbb{R}$.*

Precizăm că într-un context mai general o funcţie cvasi-convexă (cvasi-concavă) este o funcţie precum cele din Definiţia 1.4.2 dar cu domeniul o submulţime arbitrară a unui spaţiu vectorial real.

Din definiţia de mai sus rezultă că mulţimea fuzzy A este convexă dacă şi numai dacă fiecare secţiune α a lui A este o mulţime convexă în sensul clasic.

Din definiţia secţiunii α şi din Propoziţia 1.4.3, şi ţinând cont de discuţia de după această propoziţie, obţinem următoarea definiţie echivalentă a unei mulţimi fuzzy.

Definiţia 1.4.4 *Fie X o submulţime convexă a unui spaţiu vectorial real. Spunem că mulţimea fuzzy $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(X)$ este convexă dacă funcţia de apartenenţă μ_A este cvasi-concavă.*

Din definiţia de mai sus rezultă că $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(X)$ este convexă dacă şi numai dacă pentru fiecare $x_1, x_2 \in X$ şi $\lambda \in [0,1]$ avem $\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}$.

Observaţia 1.4.5 *În cazul particular când $X = \mathbb{R}$ şi mulţimea fuzzy $A \in \widetilde{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ are o funcţie de apartenenţă continuă şi supp(A) este mărginită, rezultă (vezi discuţia de după Definiţia 1.4.2) că A este convexă dacă şi numai dacă există $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \le c \le b$ astfel încât:*

1) $\mu_A = 0$ în afara intervalului $[a, b]$;
2) μ_A este crescătoare pe $[a, c]$;
3) μ_A este descrescătoare pe $[c, b]$.

Astfel, avem o interpretare clară a noţiunii de mulţime fuzzy convexă şi în plus putem găsi uşor exemple de mulţimi fuzzy care nu sunt convexe.

1.5 Principiul extinderii

Principiul extinderii propus de Zadeh în [87] permite extinderea conceptelor de bază ale matematicii pentru cazul când lucrăm cu cantităţi fuzzy. Avem următoarea definiţie a principiului extinderii (vezi de exemplu [64] pagina 41).

Definiţia 1.5.1 *Fie X_1, X_2, ..., X_n, Z, mulţimi nevide şi să considerăm funcţia $F : X \to Z$, unde $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. Mai departe, considerăm mulţimile fuzzy $\{A_i\}_{i \in \{1,2,...,n\}}$ astfel încât $A_i \in \widetilde{\mathcal{P}}(X_i)$ pentru fiecare $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Folosind funcţia F putem defini mulţimea fuzzy $F(A_1, A_2, ...A_n) \in \widetilde{\mathcal{P}}(Z)$, caracterizată prin funcţia de apartenenţă $\mu_{F(A_1,A_2,...A_n)} \to [0, 1]$,*

$$\mu_{F(A_1,A_2,...A_n)}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,x_2,...,x_n) \in F^{-1}(z)} \min\{\mu_{A_1}(x), .., \mu_{A_n}(x)\}, \text{ dacă } z \in F(X), \\ 0, \text{ în rest.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Particularizând funcţia F putem defini operaţii algebrice între mulţimi fuzzy după cum se poate vedea în următorul exemplu.

Exemplul 1.5.2 *Considerăm funcţia $F : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $F(x, y) = x+y$ şi mulţimile fuzzy A, $B \in \widetilde{\mathcal{P}}(\mathbb{Z})$,*

$$\begin{aligned} A &= \{(-1, 0.2),\ (0, 0.5),\ (2, 1),\ (3, 0.6),\ (6, 0.2)\}, \\ B &= \{(-2, 0.3),\ (-1, 0.5),\ (0, 0.8),\ (1, 1),\ (3, 0.7),\ (5, 0.4)\}. \end{aligned}$$

Aplicând formula (1.1) obţinem $F(A, B) = A + B$, unde

$$\begin{aligned} A + B = \{&(-3, 0.2),\ (-2, 0.3),\ (-1, 0.5),\ (0, 0.5),\ (1, 0.5),\ (2, 0.8),\ (3, 1), \\ &(4, 0.6),\ (5, 0.7),\ (6, 0.6),\ (7, 0.4),\ (8, 0.4),\ (9, 0.2),\ (11, 0.2)\}. \end{aligned}$$

Principiul extinderii stă la baza operaţiilor între numere fuzzy după cum se va vedea în secţiunea 1.7.

1.6 Definiţia unui număr fuzzy. Reprezentarea L-R respectiv reprezentarea L-U

Dubois şi Prade au introdus noţiunea de număr fuzzy deoarece au observat că în multe aplicaţii apar parametri care nu pot fi exprimaţi ca variabile reale ("uncertain parameters" în terminologia curentă). De aceea, în opinia lor un număr fuzzy u este o submulţime fuzzy a lui $\mathbb{R}$ a cărei funcţie de apartenenţă $\mu_u : \mathbb{R} \to [0, 1]$, are proprietăţile:

i) există $c, d \in \overline{\mathbb{R}}$, $c \leq d$ pentru care $\mu_u(x) = 0$ în afara intervalului $[c, d]$.
ii) există $a, b \in \mathbb{R}$, $c \leq a \leq b \leq d$ astfel încât:
ii_1) μ_u este strict crescătoare pe $[c, a]$;
ii_2) $\mu_u(x) = 1$ pentru fiecare $x \in [a, b]$;
ii_3) μ_u este strict descrescătoare pe $[b, d]$.

Din motive de ordin practic, între timp această definiţie a suferit unele modificări. În această teză vom folosi următoarea definiţie pentru un număr fuzzy, definiţie acceptată de majoritatea covârşitoare a cercetătorilor.

Definiţia 1.6.1 *Un număr fuzzy u este caracterizat de o funcţie de apartenenţă $\mu_u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, de forma:*

$$\mu_u(x) = \begin{cases} 0, & \textit{dacă} \quad x \leq a_1, \\ l_u(x), & \textit{dacă} \quad a_1 \leq x \leq a_2, \\ 1 & \textit{dacă} \quad a_2 \leq x \leq a_3, \\ r_u(x), & \textit{dacă} \quad a_3 \leq x \leq a_4, \\ 0, & \textit{dacă} \quad a_4 \leq x, \end{cases} \tag{1.2}$$

unde a_1, a_2, a_3, a_4, $\in \mathbb{R}$, $l_u : [a_1, a_2] \longrightarrow [0, 1]$ este o funcţie crescătoare şi superior semicontinuă, $l_u(a_1) = 0$, $l_u(a_2) = 1$, numită partea stângă a numărului fuzzy şi $r_u : [a_3, a_4] \longrightarrow [0, 1]$ este o funcţie descrescătoare şi superior semicontinuă, $r_u(a_3) = 1$, $r_u(a_4) = 0$, numită partea dreaptă a numărului fuzzy.

Pentru simplitate, de acum înainte vom folosi aceeaşi notaţie pentru un număr fuzzy precum şi pentru funcţia sa de apartenenţă. Dacă funcţia de apartenenţă a numărului fuzzy este continuă atunci tot pentru simplitate vom spune că numărul fuzzy este continuu. Următoarele noţiuni sunt similare celor prezentate în contextul general al mulţimilor fuzzy.

Secţiunea α, $\alpha \in (0, 1]$, a unui număr fuzzy u este mulţimea (în sens clasic) $u_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}$. Suportul sau secţiunea 0, u_0, a unui număr fuzzy u, este definită prin $u_0 = cl\left(\{x \in \mathbb{R} : u(x) > 0\}\right)$. Deseori vom folosi notaţia $u_0 = supp(u)$.

Comparând definiţia suportului unei mulţimi fuzzy cu definiţia suportului unui număr fuzzy, observăm că în cazul mulţimilor fuzzy, pentru suport nu se ia închiderea. Din moment ce un număr fuzzy este de fapt o mulţime fuzzy rezultă că suportul se poate defini în două moduri. Totuşi, în această teză vom adopta formula din această secţiune, formulă folosită în prezent de către majoritatea cercetătorilor.

Nucleul sau secţiunea 1, u_1, a numărului fuzzy u, se va nota de acum înainte cu $core(u)$. Dacă $core(u)$ are un singur element atunci u se numeşte număr fuzzy unimodal şi în acest caz valoarea $core(u)$ se numeşte valoare modală.

Din Definiţia 1.6.1, rezultă că fiecare secţiune α, $\alpha \in [0, 1]$, a unui număr fuzzy u, este un interval compact $u_\alpha = [u_L(\alpha), u_U(\alpha)]$, unde $u_L(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}$ şi $u_U(\alpha) = \sup\{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}$, pentru fiecare $\alpha \in (0, 1]$. Dacă părţile laterale ale numărului fuzzy sunt strict monotone atunci se demonstrează uşor că u_L şi u_U sunt inversele funcţiilor l_u şi respectiv r_u. Mai mult, se poate demonstra că funcţiile u_L şi u_U sunt continue la stânga pe $[0, 1]$.

Ţinând cont de cele de mai sus obţinem următoarea definiţie echivalentă a numărului fuzzy propusă de Goetschel şi Voxman în lucrarea [56].

Definiţia 1.6.2 *Un număr fuzzy u este o pereche ordonată de funcţii continue la stânga pe $[0, 1]$, $[u_L(\alpha), u_U(\alpha)]$, $0 \leq \alpha \leq 1$, care verifică:*
i) u_L este crescătoare pe $[0, 1]$;
ii) u_U este descrescătoare pe $[0, 1]$;

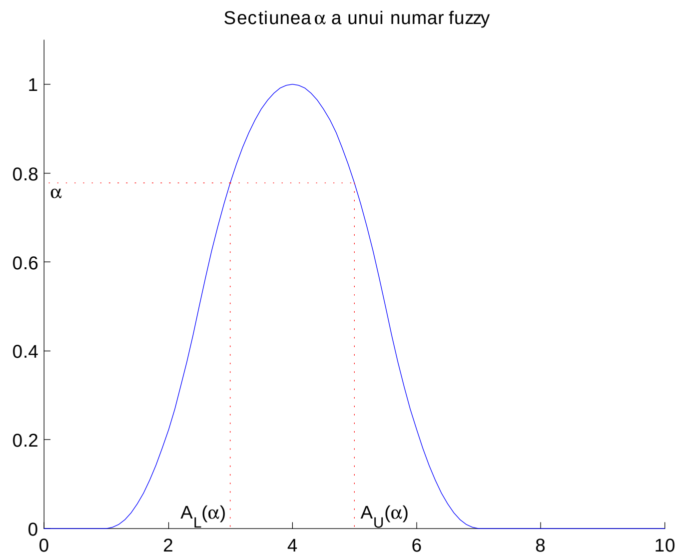

Fig. 1.1

iii) $u_L(1) \leq u_U(1)$.
Folosim notaţia $u = (u_L, u_U)$.

Dacă u este definit folosind Definiţia 1.6.1, spunem că u este dat în forma $L - R$. Altfel, dacă u este definit folosind Definiţia 1.6.2, spunem că u este dat în forma $L - U$.

De acum înainte, în această teză folosim notaţia $F(\mathbb{R})$ pentru spaţiul numerelor fuzzy. De asemenea, folosim notaţia $UF(\mathbb{R})$ pentru spaţiul numerelor fuzzy unimodale.

O clasă importantă de numere fuzzy (deoarece se folosesc deseori în aplicaţii) este clasa numerelor fuzzy simetrice.

Definiţia 1.6.3 *Un număr fuzzy* u *se numeşte simetric dacă* $u_L(1) - u_L(\alpha) = u_U(\alpha) - u_U(1)$, *pentru fiecare* $\alpha \in [0, 1]$.

Notăm cu $F^S(\mathbb{R})$ clasa numerelor fuzzy simetrice.

În finalul acestei secţiuni vom discuta despre egalitatea a două numere fuzzy. Deoarece majoritatea rezultatelor principale sunt în legătură cum metricile de tipul L_p, vom adopta următoarea definiţie.

Definiţia 1.6.4 *Spunem că numerele fuzzy* A *şi* B *sunt egale şi scriem* $A = B$, *dacă* $A_L = B_L$ *şi* $A_U = B_U$ *a.p.t.* $\alpha \in [0, 1]$.

Definiţia de mai sus ar trebui să conteze doar când lucrăm în spaţii de tipul L_p.

1.7 Operaţii de bază între numere fuzzy

Din moment ce numerele fuzzy reprezintă o extindere a numerelor reale, în mod natural putem introduce operaţii algebrice între numere fuzzy cum ar fi adunarea, scăderea, înmulţirea sau împărţirea. Aceste operaţii se obţin din principiul extinderii prezentat pe scurt într-o secţiune anterioară.

Dacă u şi v reprezintă două numere fuzzy atunci notăm cu $u+v$ suma lor, unde

$$(u+v)(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}}\{u(y)\wedge v(x-y)\}, x\in\mathbb{R},$$

iar $\wedge$ înseamnă minimum. Rezultă imediat că dacă $u_\alpha = [u_L(\alpha), u_U(\alpha)]$ şi $v_\alpha = [v_L(\alpha), v_U(\alpha)]$, $\alpha\in[0,1]$, atunci

$$(u+v)_\alpha = u_\alpha + v_\alpha = [u_L(\alpha)+v_L(\alpha), u_U(\alpha)+v_U(\alpha)],$$

pentru fiecare $\alpha\in[0,1]$.

Dacă $\lambda = 0$ atunci prin definiţie considerăm $\lambda\cdot u = 0$, pentru fiecare $u\in F(\mathbb{R})$. Aici 0 reprezintă elementul neutru din $F(\mathbb{R})$ faţă de adunare, adică $0(0)=1$ şi $0(x)=0$ în rest.

Dacă $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ şi $u\in F(\mathbb{R})$ atunci $\lambda\cdot u$ reprezintă înmulţirea scalară dintre λ şi u, unde

$$(\lambda\cdot u)(x) = u(x/\lambda),\ x\in\mathbb{R}.$$

Rezultă că dacă $u_\alpha = [u_L(\alpha), u_U(\alpha)]$, $\alpha\in[0,1]$, atunci

$$(\lambda\cdot A)_\alpha = \lambda A_\alpha = \begin{cases} [\lambda A_L(\alpha), \lambda A_U(\alpha)], & \text{dacă } \lambda\geq 0, \\ [\lambda A_U(\alpha), \lambda A_L(\alpha)], & \text{dacă } \lambda < 0, \end{cases}$$

pentru fiecare $\alpha\in[0,1]$.

Cele mai importante proprietăţi ale adunării şi ale înmulţirii cu scalari a numerelor fuzzy sunt prezentate mai jos.

Propoziţia 1.7.1 *Avem:*

i) $u+v=v+u$, $(\forall)$ $u,v\in F(\mathbb{R})$;
ii) $(u+v)+w=u+(v+w)$, $(\forall)$ $u,v,w\in F(\mathbb{R})$;
iii) pentru fiecare $u,v,w\in F(\mathbb{R})$ *astfel încât* $u+w=v+w$ *avem* $u=v$;
iv) $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$, $(\forall)$ $u,v\in F(\mathbb{R})$, $(\forall)$ $\lambda\in\mathbb{R}_+$;
v) $(\lambda+\beta)\cdot u=\lambda\cdot u+\beta\cdot u$, $(\forall)$ $u\in F(\mathbb{R})$, $(\forall)$ $\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+$;
vi) $\lambda\cdot(\beta\cdot u)=\beta\cdot(\lambda\cdot u)=(\lambda\beta)\cdot u$, $(\forall)$ $\lambda,\beta\in\mathbb{R}_+$, $(\forall)$ $u\in F(\mathbb{R})$;
vii) $1\cdot u=u$, $(\forall)$ $u\in F(\mathbb{R})$.

Este uşor de verificat că un număr fuzzy u are opus faţă de adunare dacă şi numai dacă funcţiile de nivel u_L şi u_U sunt constante şi egale. Vom vedea în secţiunea următoare că un astfel de număr fuzzy se identifică cu un număr real. De fapt, în general, proprietatea $u+(-u)=0$ nu are loc pentru numere fuzzy. De aceea tripletul $(F(\mathbb{R}),+,\cdot)$ nu formează un spaţiu vectorial şi ne vom referi la el ca fiind un spaţiu semiliniar din moment ce această referire se face frecvent în literatura de specialitate.

1.8 Clase remarcabile de numere fuzzy

Spunem că numărul fuzzy u este un număr real dacă există $c\in[0,1]$ astfel încât $u(c)=1$ şi $u(x)=0$ pentru fiecare $x\in\mathbb{R}\setminus\{c\}$. Rezultă imediat că $u_L=u_U=c$. Pentru simplitate, dacă u este un număr real atunci valoarea constantă a funcţiei de apartenenţă o vom nota tot cu u.

Un număr fuzzy u se numeşte un interval dacă există $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leq b$, astfel încât $u(x)=1$ pentru fiecare $x\in[a,b]$ şi $u(x)=0$ pentru fiecare $x\in\mathbb{R}\setminus[a,b]$. Rezultă imediat că $u_L=a$ şi $u_U=b$. Folosim notaţia $u=[a,b]$.

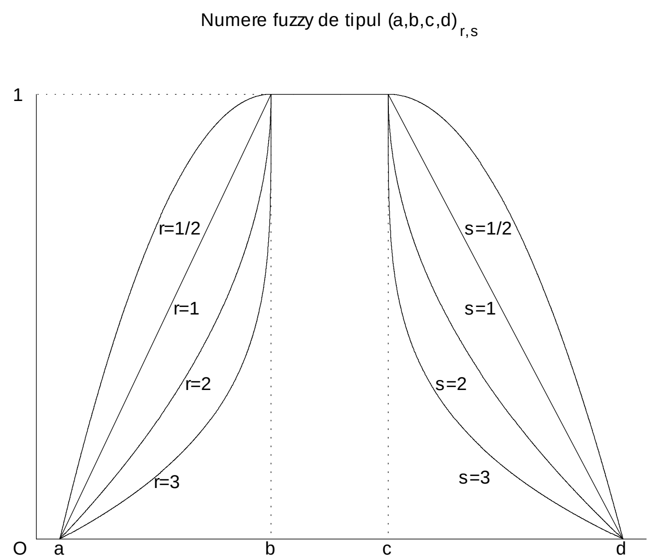

Fig. 1.2

Un număr fuzzy A se numeşte triunghiular dacă există $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ astfel încât

$$A_\alpha = [t_1 + (t_2 - t_1)\alpha, t_3 - (t_3 - t_2)\alpha], \alpha \in [0,1].$$

Folosim notaţia $A = (t_1, t_2, t_3)$. Notăm cu $F^\Delta(\mathbb{R})$ clasa numerelor fuzzy triunghiulare şi cu $F^{S\Delta}(\mathbb{R})$ clasa numerelor fuzzy triunghiulare simetrice.

O generalizare a noţiunii de număr fuzzy triunghiular este numărul fuzzy trapezoiadal. Un număr fuzzy trapezoidal T este determinat complet de numerele reale $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ astfel încât

$$T_\alpha = [t_1 + (t_2 - t_1)\alpha, t_4 - (t_4 - t_3)\alpha], \alpha \in [0,1]. \tag{1.3}$$

Folosim notaţia $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)$. Dacă $t_2 = t_3$, atunci T devine un număr fuzzy triunghiular. Dacă $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$ atunci obţinem un număr fuzzy trapezoidal simetric. Notăm cu $F^T(\mathbb{R})$ clasa numerelor fuzzy trapezoidale şi cu $F^{ST}(\mathbb{R})$ clasa numerelor fuzzy trapezoidale simetrice. Se observă uşor că dacă T este un număr fuzzy trapezoidal atunci funcţiile l_T şi r_T sunt liniare.

În lucrarea [68] autorii au introdus numerele fuzzy parametrice cu scopul de a generaliza problema aproximării trapezoidale. Un număr fuzzy parametric de tipul (s_L, s_R) sau simplu un număr fuzzy (s_L, s_R) este un număr fuzzy A, unde $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)], \alpha \in [0,1]$, şi

$$A_L(\alpha) = a - \sigma(1-\alpha)^{1/s_L} \text{ şi } A_U(\alpha) = b + \beta(1-\alpha)^{1/s_R}, \alpha \in [0,1],$$

unde $a, b, \sigma, \beta, s_L, s_R \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, $\sigma \geq 0$, $\beta \geq 0$, $s_L > 0$, $s_R > 0$. Condiţia $a \leq b$ este impusă deoarece altfel nu obţinem un număr fuzzy. Folosim notaţia $A = (a, b, \sigma, \beta)_{s_L, s_R}$.

Dacă $s_L = s_R = 1$ atunci A devine un număr fuzzy trapezoidal. Notăm cu $F^{s_L, s_R}(\mathbb{R})$ clasa numereor fuzzy de tipul (s_L, s_R). În Fig. 1.2 considerăm diferite cazuri de numere fuzzy parametrice. Încheiem această discuţie despre numere fuzzy parametrice precizând că recent (vezi [84]) numerele fuzzy parametrice au fost denumite numere fuzzy semi-trapezoidale. Totuşi, în această teză ne vom referi la ele doar ca numere fuzzy parametrice.

O altă clasă importantă de numere fuzzy se găseşte în lucrarea [36]. Fie $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ astfel încât $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. Un număr fuzzy$A$ de forma

$$A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)] = [a_1 + \alpha^{1/r}(a_2 - a_1), a_4 - \alpha^{1/r}(a_4 - a_3)], \alpha \in [0,1], \tag{1.4}$$

unde $r > 0$, se notează cu $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)_r$.

Există şi alte clase importante de numere fuzzy dintre care menţionăm numerele fuzzy Gaussiene sau numerele fuzzy cuadratice folosite cu succes în ştiinţe inginereşti. Pentru mai multe detalii ne referim din nou la cartea lui Hanss ([64]) unde acest gen de probleme sunt intens studiate.

1.9 Metrici definite pe spaţiul numerelor fuzzy

Deoarece ne putem raporta la spaţiul numerelor fuzzy ca la un spaţiu de funcţii cu suport mărginit, prima metrică la care ne putem gândi este metrica generată de norma uniformă, adică o metrică de tip Chebyshev. Notăm această metrică cu D_C. Atunci avem

$$D_C(A, B) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |A(x) - B(x)|, A, B \in F(\mathbb{R}). \tag{1.5}$$

Chiar dacă nu putem considera perechea $(F(\mathbb{R}),D_C)$ un spaţiu normat, pentru simplitate uneori preferăm notaţia $\|A - B\|_C = \sup_{x\in\mathbb{R}} |A(x) - B(x)|$. În particular avem

$$\|A\|_C = \sup_{x \in \mathbb{R}} |A(x)|. \tag{1.6}$$

Grzegorzewski ([58]) a observat că pentru un număr fuzzy A, funcţiile A_L şi A_U sunt L_p-integrabile. Astfel, a introdus metricile $\delta_{p,q}$, definite prin

$$\delta_{p,q}(A, B) = \left[(1-q)\int_0^1 |A_L(\alpha) - B_L(\alpha)|^p \, d\alpha + q\int_0^1 |A_U(\alpha) - B_U(\alpha)|^p \, d\alpha\right]^{1/p},$$

unde $1 \leq p < \infty$ şi $0 < q < 1$. Dacă $p = 2$ şi $q = 1/2$ atunci folosind notaţia $d = (1/2)^{-1/2}\delta_{p,q}$, obţinem aşa-numita metrică Euclidiană definită prin

$$d(A, B) = \left[\int_0^1 (A_L(\alpha) - B_L(\alpha))^2 \, d\alpha + \int_0^1 (A_U(\alpha) - B_U(\alpha))^2 \, d\alpha\right]^{1/2}. \tag{1.7}$$

Ca o aplicaţie, dacă $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ şi $T' = (t'_1, t'_2, t'_3, t'_4)$, atunci după calcule simple obţinem

$$\begin{aligned} d^2(T, T') &= \frac{1}{3}(t_1 - t'_1)^2 + \frac{1}{3}(t_2 - t'_2)^2 + \frac{1}{3}(t_1 - t'_1)(t_2 - t'_2) \\ &+ \frac{1}{3}(t_3 - t'_3)^2 + \frac{1}{3}(t_4 - t'_4)^2 + \frac{1}{3}(t_3 - t'_3)(t_4 - t'_4). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Mai general, Yeh ([85]) propune metrica ponderată de tip L_2, d_λ,

$$d_\lambda(A, B) = \left[\int_0^1 (A_L(\alpha) - B_L(\alpha))^2 \lambda_L(\alpha) d\alpha + \int_0^1 (A_U(\alpha) - B_U(\alpha))^2 \lambda_U(\alpha) d\alpha\right]^{1/2}, \tag{1.9}$$

unde, pentru a obţine într-adevăr o metrică, se presupune că $\lambda_L, \lambda_U : [0,1] \to \mathbb{R}$ sunt strict pozitive a.p.t. în $[0,1]$ şi integrabile. Folosim notaţia $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$.

Mai general, considerând $p \geq 1$ şi ponderea $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$, obţinem metrica ponderată de tip L_p, $\delta_{p,\lambda}$,

$$\delta_{p,\lambda}(A,B) = \left[\int_0^1 |(A_L(\alpha) - B_L(\alpha))|^p \lambda_L(\alpha) d\alpha + \int_0^1 |(A_U(\alpha) - B_U(\alpha))|^p \lambda_U(\alpha) d\alpha\right]^{1/p}. \tag{1.10}$$

Dacă $\lambda_L(\alpha) = \lambda_U(\alpha) = 1$, $\alpha \in [0,1]$, atunci folosim notaţia

$$d_p(A,B) = \left[\int_0^1 |(A_L(\alpha) - B_L(\alpha))|^p d\alpha + \int_0^1 |(A_U(\alpha) - B_U(\alpha))|^p d\alpha\right]^{1/p}. \tag{1.11}$$

Sunt numeroase alte metrici ce se pot defini pe spaţiul numerelor fuzzy cum ar fi metricile de tip Hausdorff dar deoarece nu le vom folosi în această teză nu intrăm în detalii.

1.10 Numere fuzzy extinse

Această secţiune conţine contribuţii originale din articolul [21]. În plus, Definiţia 1.10.1 este nouă din ceea ce cunosc eu.

Yeh a fost primul care a introdus conceptul de număr fuzzy extins. În articolul [82] el a introdus aşa-numitele numere fuzzy trapezoidale extinse deoarece cu ajutorul lor se simplifică algoritmii pentru calculul aproximărilor trapezoidale în raport cu metrica Euclidiană. De asemenea, numerele fuzzy trapezoidale extinse sunt utile pentru a demonstra continuitatea operatorilor de aproximare trapezoidală. Pentru a include toate tipurile de numere fuzzy extinse care vor fi folosite în această teză, dăm următoarea definiţie.

Definiţia 1.10.1 *O pereche ordonată de funcţii continue la stânga pe* $[0,1]$*,* $A = (A_L, A_U)$*, se numeşte număr fuzzy extins dacă sunt verificate următoarele proprietăţi:*
i) A_L *este crescătoare pe* $[0,1]$*;*
ii) A_U *este descrescătoare pe* $[0,1]$*.*

Ca şi în cazul numerelor fuzzy obişnuite folosim notaţia $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$,$\alpha \in [0,1]$. Menţionăm că A_α poate să nu fie un interval pentru un anumit $\alpha \in [0,1]$. Notăm cu $F_e(\mathbb{R})$ spaţiul numerelor fuzzy extinse. Adunarea şi înmulţirea cu scalari se definesc pe $F_e(\mathbb{R})$ analog definiţiei pe $F(\mathbb{R})$.

Comparând definiţia de mai sus cu reprezentarea parametrică a numerelor fuzzy (vezi Definiţia 1.6.2) rezultă imediat că $F(\mathbb{R}) \subset F_e(\mathbb{R})$. Mai mult, se observă cu uşurinţă că toate metricile de tip L_p din secţiunea anterioară se pot extinde pe spaţiul $F_e(\mathbb{R})$. De exemplu, dacă ne raportăm la metrica Euclidiană, distanţa dintre două numere fuzzy extinse sau dintre un număr fuzzy şi un număr fuzzy extins este dată de formula (1.7).

Dacă

$$A_L(\alpha) = t_1 + (t_2 - t_1)\alpha \text{ şi } A_U(\alpha) = t_4 - (t_4 - t_3)\alpha, \alpha \in [0,1],$$

cu $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$, atunci A devine un număr fuzzy trapezoidal extins şi se va nota cu $A = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ ca şi în cazul numerelor fuzzy trapezoidale. Mulţimea numerelor fuzzy trapezoidale extinse o notăm cu $F_e^T(\mathbb{R})$. Evident avem $F^T(\mathbb{R}) \subset F_e^T(\mathbb{R})$.

Dacă
$$A_L(\alpha) = a - \sigma(1-\alpha)^{1/s_L} \text{ şi } A_U(\alpha) = b + \beta(1-\alpha)^{1/s_R}, \alpha \in [0,1],$$
unde $a, b, \sigma, \beta, s_L, s_R \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$, $\beta \geq 0$, $s_L > 0$, $s_R > 0$, atunci A devine un număr fuzzy parametric extins de tipul (s_L, s_R). Numerele fuzzy parametrice extinse au fost introduse în lucrarea [21]. Notăm cu $F_e^{s_L, s_R}(\mathbb{R})$ mulţimea numerelor fuzzy parametrice extinse.

1.11 Alte notaţii pentru numere fuzzy extinse

Această secţiune conţine contribuţii originale din articolul [21].

Notaţiile pentru numere fuzzy trapezoidale sunt consacrate din moment ce numeroşi cercetători le folosesc. Totuşi, uneori alte notaţii sunt mai potrivite, de exemplu când lucrăm cu metrici de tipul L_2. În această secţiune folosim pentru numere fuzzy trapezoidale notaţii noi introduse de Yeh în lucrările [82] şi [85]. Apoi, pentru numere fuzzy parametrice de tipul (s_L, s_R) folosim notaţii noi introduse de Ban şi Coroianu în lucrarea [21]. Începem cu notaţii noi pentru numere fuzzy trapezoidale, notaţii compatibile cu metrica Euclidiană d. Observăm că un număr fuzzy trapezoidal extins $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ se poate scrie sub forma

$$T_\alpha = \left[l + x\left(\alpha - \frac{1}{2}\right), u - y\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \right], \alpha \in [0,1], \tag{1.12}$$

unde din relaţia (1.3) obţinem cu uşurinţă că

$$l = \frac{t_1 + t_2}{2}, \quad u = \frac{t_3 + t_4}{2}, \tag{1.13}$$
$$x = t_2 - t_1, \quad y = t_4 - t_3, \tag{1.14}$$

sau, echivalent

$$t_1 = \frac{2l - x}{2}, \quad t_2 = \frac{2l + x}{2}, \tag{1.15}$$
$$t_3 = \frac{2u - y}{2}, \quad t_4 = \frac{2u + y}{2}. \tag{1.16}$$

Un număr fuzzy trapezoidal extins T dat prin (1.12) se notează cu $T = [l, u, x, y]$. Din cele de mai sus rezultă că T este număr fuzzy trapezoidal dacă şi numai dacă avem

$$x \geq 0, y \geq 0, 2u - 2l \geq x + y.$$

Acum, dacă $T = [l, u, x, y]$ şi $T' = [l', u', x', y']$ atunci din (1.7) şi din (1.12), după calcule simple rezultă că

$$d^2(T, T') = (l - l')^2 + (u - u')^2 + \frac{1}{12}(x - x')^2 + \frac{1}{12}(y - y')^2. \tag{1.17}$$

În mod clar, expresia de mai sus a distanţei Euclidiene dintre două numere fuzzy trapezoidale extinse este mai convenabilă decât formula (1.8). Alte beneficii se vor vedea în capitolul 3 unde vom investiga aproximarea numerelor fuzzy prin numere fuzzy trapezoidale.

Să considerăm acum în spaţiul numerelor fuzzy metrica ponderată d_λ dată prin (1.9). Introducem notaţiile:

$$a = \int_0^1 \lambda_L(\alpha) d\alpha, \quad b = \int_0^1 \lambda_U(\alpha) d\alpha, \tag{1.18}$$

$$\omega_L = \frac{1}{a}\int_0^1 \alpha\lambda_L(\alpha)d\alpha, \quad \omega_U = \frac{1}{b}\int_0^1 \alpha\lambda_u(\alpha)d\alpha, \tag{1.19}$$

$$c = \int_0^1 (\alpha-\omega_L)^2\lambda_L(\alpha)d\alpha, \quad d = \int_0^1 (\alpha-\omega_U)^2\lambda_U(\alpha)d\alpha. \tag{1.20}$$

Se verifică uşor că integralele de mai sus sunt strict pozitive. Apoi, fie T un număr fuzzy trapezoidal extins definit prin

$$T_\alpha = [l + x(\alpha-\omega_L), u - y(\alpha-\omega_U)], \alpha \in [0,1]. \tag{1.21}$$

Pentru simplitate un astfel de număr fuzzy trapezoidal extins se notează cu $T = [l,u,x,y]_\lambda$ (λ este o notaţie generică pentru perechea (λ_L, λ_U)). Dacă $T = [l,u,x,y]_\lambda$ şi $T' = [l',u',x',y']_\lambda$, distanţa ponderată dintre T şi T' devine (vezi Propoziţia 2.2 în [85])

$$d_\lambda^2(T,T') = a(l-l')^2 + b(u-u')^2 + c(x-x')^2 + d(y-y')^2. \tag{1.22}$$

În ceea ce urmează prezentăm notaţii noi pentru numere fuzzy parametrice de tipul (s_L, s_R), notaţii introduse în lucrarea [21]. Pentru acest scop fie $A = (a,b,\sigma,\beta)_{s_L,s_R}$ un număr fuzzy (s_L,s_R) extins. Rezultă că

$$A_L(\alpha) = a - \sigma(1-\alpha)^{1/s_L} \text{ şi } A_U(\alpha) = b + \beta(1-\alpha)^{1/s_R}, \alpha \in [0,1].$$

Deoarece funcţiile A_L şi A_U se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} A_L(\alpha) &= a - \sigma\frac{s_L}{s_L+1} - \sigma\left((1-\alpha)^{1/s_L} - \frac{s_L}{s_L+1}\right), \\ A_U(\alpha) &= b + \beta\frac{s_R}{s_R+1} + \beta\left((1-\alpha)^{1/s_R} - \frac{s_R}{s_R+1}\right), \end{aligned}$$

obţinem

$$A_L(\alpha) = l - x\left((1-\alpha)^{1/s_L} - \frac{s_L}{s_L+1}\right), \tag{1.23}$$

$$A_U(\alpha) = u + y\left((1-\alpha)^{1/s_R} - \frac{s_R}{s_R+1}\right), \tag{1.24}$$

o nouă reprezentare a numărului fuzzy extins A, unde

$$l = a - \sigma\frac{s_L}{s_L+1}, \quad u = b + \beta\frac{s_R}{s_R+1}, x = \sigma, \quad y = \beta. \tag{1.25}$$

Notăm cu $[l,u,x,y]_{s_L,s_R}$ un număr fuzzy parametric extins reprezentat în (1.23)-(1.24). Când $s_L = s_R = 1$, obţinem reprezentarea pentru numere fuzzy trapezoidale extinse şi omitem să mai folosim indicii s_L, s_R. Dacă $A = [l,u,x,y]_{s_L,s_R}$ şi $B = [l',u',x',y']_{s_L,s_R}$, distanţa Euclidiană dintre A şi B devine (vezi [21], Propoziţia 2)

$$\begin{aligned} & d^2(A,B) \\ = \ & (l-l')^2 + (u-u')^2 + \frac{s_L}{(s_L+2)(s_L+1)^2}(x-x')^2 + \frac{s_R}{(s_R+2)(s_R+1)^2}(y-y')^2. \end{aligned} \tag{1.26}$$

În final, să notăm că $A = [l,u,x,y]_{s_L,s_R}$ este un număr fuzzy parametric de tipul (s_L,s_R) dacă şi numai dacă

$$x \geq 0, y \geq 0, x \cdot \frac{s_L}{s_L+1} + y \cdot \frac{s_R}{s_R+1} \leq u - l. \tag{1.27}$$

1.12 Caracteristici importante ale numerelor fuzzy

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [28]. În plus, începând cu Teorema 1.12.2 şi până la final, secţiunea conţine rezultate originale nepublicate iar unele dintre ele ar putea fi incluse în unele proiecte aflate în derulare cum ar fi aproximarea numerelor fuzzy folosind transformata fuzzy (vezi [48]).

Intervalul de expectanţă al unui număr fuzzy A a fost introdus independent de Dubois şi Prade ([53]) şi Heilpern ([65]). Este intervalul real

$$EI(A) = \left[\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha, \int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha\right]. \tag{1.28}$$

Valoarea de expectanţă a unui număr fuzzy A se calculează cu formula

$$EV(A) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha\right). \tag{1.29}$$

O funcţie de reducere ([49]) este o funcţie crescătoare $s : [0,1] \to [0,1]$ care verifică $s(0) = 0$ şi $s(1) = 1$. Totuşi, în această teză, prin funcţie de reducere vom înţelege o funcţie care este crescătoare şi pozitivă. Ambiguitatea lui A în raport cu s este

$$Amb_s(A) = \int_0^1 s(\alpha)(A_U(\alpha) - A_L(\alpha))d\alpha \tag{1.30}$$

iar valoarea lui A în raport cu s este

$$Val_s(A) = \int_0^1 s(\alpha)(A_U(\alpha) + A_L(\alpha))d\alpha. \tag{1.31}$$

Când $s = 1_{[0,1]}$, pentru simplitate notăm $Amb_s(A) = Amb(A)$ şi $Val_s(A) = Val(A)$. Astfel,

$$Amb(A) = \int_0^1 (A_U(\alpha) - A_L(\alpha))d\alpha \tag{1.32}$$

şi

$$Val(A) = \int_0^1 (A_U(\alpha) + A_L(\alpha))d\alpha. \tag{1.33}$$

Caracteristicile introduse în această secţiune se definesc în mod identic dacă în loc de numere fuzzy considerăm numere fuzzy extinse cu excepţia intervalului de expectanţă unde o mică modificare este necesară şi anume dacă A este un număr fuzzy extins astfel încât $\int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha < \int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha$, atunci $EI(A) = \left[\int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha, \int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha\right]$. Altfel, dacă $\int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha \geq \int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha$, atunci $EI(A)$ are definiţia clasică $EI(A) = \left[\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha, \int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha\right]$.

În cele ce urmează prezentăm o interpretare pentru intervalul de expectanţă şi apoi vom generaliza acest concept. Grzegorzewski ([59]) a demonstrat că pentru un număr fuzzy A, $EI(A)$ este cel mai apropiat număr fuzzy de tip interval de numărul fuzzy A în raport cu metrica Euclidiană şi în plus este unic cu această proprietate. Astfel, $d(A, EI(A)) = \min_{B \in Int(\mathbb{R})} d(A, B)$. Mai mult, se poate demonstra că valoarea de expectanţă a lui A este elementul de cea mai bună aproximare a lui A din mulţimea numerelor reale şi este unic cu această proprietate. Consideraţiile anterioare sugerează că în cazul unei metrici ponderate de tip L_2 este necesar să adaptăm definiţia intervalului de expectanţă astfel încât interpretarea să fie aceeaşi.

Definiţia 1.12.1 *([28], Definiţia 9) Fie d_λ, $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$ o metrică ponderată de tip L_2 definită pe $F(\mathbb{R})$ prin formula (1.9). Pentru un număr fuzzy A definim intervalul de expectanţă ponderat al lui A, ca fiind intervalul*

$$EI^\lambda(A) = \left[\frac{1}{a}\int_0^1 A_L(\alpha)\lambda_L(\alpha)d\alpha, \frac{1}{b}\int_0^1 A_U(\alpha)\lambda_U(\alpha)d\alpha\right],$$

unde a şi b sunt introduse în relaţia (1.18).

Avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{a}\int_0^1 A_L(\alpha)\lambda_L(\alpha)d\alpha &\leq \frac{1}{a}\int_0^1 A_L(1)\lambda_L(\alpha)d\alpha = A_L(1) \\ \leq \quad A_U(1) = \frac{1}{b}\int_0^1 A_U(1)\lambda_U(\alpha)d\alpha &\leq \frac{1}{b}\int_0^1 A_U(\alpha)\lambda_U(\alpha)d\alpha, \end{aligned}$$

astfel $EI^\lambda(A)$ este bine definit. Valoarea de expectanţă ponderată a lui A este dată prin

$$EV^\lambda(A) = \frac{1}{a+b}\left(a\int_0^1 A_L(\alpha)\lambda_L(\alpha)d\alpha + b\int_0^1 A_U(\alpha)\lambda_U(\alpha)d\alpha\right).$$

Se poate demonstra că în cazul intervalului de expectanţă ponderat şi a valorii de expectanţă ponderată, avem aceeaşi interpretare în raport cu metrica ponderată d_λ ca şi în cazul obişnuit. Extinderea intervalului de expectanţă ponderat şi a valorii de expectanţă ponderată pentru numere fuzzy extinse se face ca şi în cazul obişnuit.

Tot ce urmează în această secţiune sunt rezultate originale nepublicate.

Până acum, în această secţiune am exprimat intervalul de expectanţă, ambiguitatea şi valoarea, folosind reprezentarea parametrică a numerelor fuzzy. Dacă numărul fuzzy este continuu atunci putem exprima aceste caracteristici folosind funcţia de apartenenţă. Mai precis avem următorul rezultat.

Teorema 1.12.2 *Fie u un număr fuzzy continuu astfel încât $supp(u) = [a, b]$ şi $core(u) = [c, d]$. În plus, să presupunem că $s : [0, 1] \to [0, 1]$ este o funcţie de reducere continuă. Atunci avem*

$$\int_0^1 s(\alpha)u_L(\alpha)d\alpha = \int_a^c xd(S(u(x)) \text{ şi } \int_0^1 s(\alpha)u_U(\alpha)d\alpha = -\int_d^b xd(S(u(x)) \tag{1.34}$$

În plus obţinem

$$Amb_s(u) = -\int_a^c xd(S(u(x)) - \int_d^b xd(S(u(x)) \text{ şi } Val_s(u) = \int_a^c xd(S(u(x)) - \int_d^b xd(S(u(x)), \tag{1.35}$$

unde $S(x) = \int_0^x s(t)dt$, $x \in [0, 1]$.

Merită să menţionăm că formulele de mai sus sunt imediate dacă funcţiile u_L şi u_U sunt strict monotone. E suficient să folosim schimbarea de variabilă în integrala Riemann-Stieltjes. Totuşi, dacă u_L şi u_U nu sunt strict monotone atunci demonstraţia este mult mai tehnică şi necesită multe rezultate auxiliare.

Să presupunem că numărul fuzzy v aproximează numărul fuzzy u în raport cu metrica D_C dată în (1.5), cu o anumită precizie. Cum influenţează asta calitatea aproximării caracteristicilor importante ale lui u folosind caracteristicile lui v? Când spunem caracteristici importante ne referim la intervalul de expectanţă, ambiguitate respectiv valoare. Folosind concluzia teoremei precedente obţinem următorul rezultat.

Teorema 1.12.3 *Fie u şi v două numere fuzzy continue astfel încât $supp(u) = [a, b]$, $core(u) = [c, d]$ şi $supp(v) = [a', b']$, $core(v) = [c', d']$. Să presupunem că $D_C(u, v) \leq M$. Dacă $s : [0, 1] \to [0, 1]$, este o funcţie de reducere continuă şi $S(x) = \int_0^x s(t)dt$, $x \in [0, 1]$, atunci*

$$\left| \int_a^c xd(S(u(x)) - \int_{a'}^{c'} xd(S(v(x)) \right| \leq M_1(u, v)M; \left| \int_d^b xd(S(u(x)) - \int_{d'}^{b'} xd(S(v(x)) \right| \leq M_2(u, v)M, \tag{1.36}$$

unde $M_1(u, v) = c - a + 3|a| + 3|c| + |a'| + 2|c'|$ *şi* $M_2(u, v) = b - d + 3|b| + 3|d| + |b'| + 2|d'|$.

În plus obţinem

$$\max\{|Amb_s(u) - Amb_s(v)|, |Val_s(u) - Val_s(v)|\} \leq (M_1(u, v) + M_2(u, v))M. \tag{1.37}$$

Când v conservă mai bine forma lui u, obţinem estimări mai bune.

Corolarul 1.12.4 *Să presupunem că ne aflăm sub aceleaşi ipoteze ca în Teorema 1.12.3.*

(i) Dacă $supp(u) = supp(v)$ atunci

$$\left| \int_a^c xd(S(u(x)) - \int_{a'}^{c'} xd(S(v(x)) \right| \leq M_3(u, v)M \text{ şi } \left| \int_d^b xd(S(u(x)) - \int_{d'}^{b'} xd(S(v(x)) \right| \leq M_4(u, v)M,$$

unde

$$M_3(u,v) = c - a + |c| + \min\{2|c| + 2|c'|, 2|c - c'| + |c|\}$$

şi

$$M_4(u,v) = b - d + |d| + \min\{2|d| + 2|d'|, 2|d - d'| + |d|\}.$$

În plus avem

$$\max\{|Amb_s(u) - Amb_s(v)|, |Val_s(u) - Val_s(v)|\} \leq (M_3(u,v) + M_4(u,v))\, M.$$

(ii) Dacă $supp(u) = supp(v)$ şi $core(u) \subseteq core(v)$ atunci

$$\left| \int_a^c x\ (S(u(x)) - \int_{a'}^{c'} xd(S(v(x)) \right| \leq (c - a + |c|)\, M; \quad \left| \int_d^b xd(S(u(x)) - \int_{d'}^{b'} xd(S(v(x)) \right| \leq (b - d + |d|)\, M.$$

În plus avem

$$\max\{|Amb_s(u) - Amb_s(v)|, |Val_s(u) - Val_s(v)|\} \leq (c - a + |c| + b - d + |d|)\, M.$$

(iii) Dacă $supp(u) = supp(v)$ şi $core(v) \subseteq core(u)$ atunci

$$\left| \int_a^c x\ (S(u(x)) - \int_{a'}^{c'} xd(S(v(x)) \right| \leq (c' - a + |c'|)\, M$$

şi

$$\left| \int_d^b xd(S(u(x)) - \int_{d'}^{b'} xd(S(v(x)) \right| \leq (b - d' + |d'|)\, M.$$

În plus avem

$$\max\{|Amb_s(u) - Amb_s(v)|, |Val_s(u) - Val_s(v)|\} \leq (c' - a + |c'| + b - d' + |d'|)\, M. \tag{1.38}$$

Analizând rezultatele de mai sus concluzionăm că aproximarea caracteristicii este cu atât mai bună cu cât v conservă mai bine forma lui u.

Capitolul 2

Aproximări extinse, convergenţă, convexitate şi ordonare în spaţiul numerelor fuzzy

Acest capitol conţine contribuţii originale din articolele [19], [21], [25], [41].

2.1 Aproximarea numerelor fuzzy prin numere fuzzy extinse cu formă mai simplă

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [21].

În această secţiune vom determina algoritmii pentru a calcula aproximarea parametrică extinsă a unui număr fuzzy dat. Apoi, ca o consecinţă a acestui fapt, vom determina algoritmii pentru a calcula aproximarea trapezoidală extinsă a unui număr fuzzy dat. În ambele cazuri aproximările se vor calcula în raport cu metrica Euclidiană. Mai general, vom determina algoritmii pentru a calcula aproximarea trapezoidală ponderată a unui număr fuzzy dat. O numim aproximare trapezoidală ponderată deoarece aproximarea se face în raport cu metrica ponderată de tip L_2 introdusă de Yeh. În final, vom prezenta proprietăţi metrice importante în raport cu aceste aproximări. Tehnica folosită pentru a demonstra aceste proprietăţi este similară celei din articolul [81]. Deseori vom folosi notaţiile din secţiunea 1.11 şi de aceea sperăm că cititorul le va recunoaşte cu uşurinţă.

Să considerăm un număr fuzzy oarecare A, $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$, $\alpha \in [0,1]$. Pentru $s_L > 0$ şi

$s_R > 0$ fixate, introducem numărul fuzzy parametric extins $A^e_{s_L,s_R} = [l_e, u_e, x_e, y_e]_{s_L,s_R}$, unde

$$l_e = \int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha, \quad u_e = \int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha, \tag{2.1}$$

$$x_e = -\frac{(s_L+2)(s_L+1)^2}{s_L}\int_0^1 \left((1-\alpha)^{1/s_L} - \frac{s_L}{s_L+1}\right) A_L(\alpha)d\alpha, \tag{2.2}$$

$$y_e = \frac{(s_R+2)(s_R+1)^2}{s_R}\int_0^1 \left((1-\alpha)^{1/s_R} - \frac{s_R}{s_R+1}\right) A_U(\alpha)d\alpha. \tag{2.3}$$

Când $s_L = s_R = 1$ atunci obţinem un număr fuzzy trapezoidal extins $T_e(A) = [l_e, u_e, x_e, y_e]$, dat prin relaţiile

$$l_e = \int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha, \quad u_e = \int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha, \tag{2.4}$$

$$x_e = 12\int_0^1 (\alpha - 1/2)A_L(\alpha)d\alpha, \quad y_e = -12\int_0^1 (\alpha - 1/2)A_U(\alpha)d\alpha. \tag{2.5}$$

Din Propoziţia 2.1 din [81] sau pe baza unor calcule simple obţinem

$$T_e(\alpha A + \beta B) = \alpha T_e(A) + \beta T_e(B), \tag{2.6}$$

pentru fiecare $A, B \in F(\mathbb{R})$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ceea ce înseamnă că operatorul $T_e : F(\mathbb{R}) \to F_e^T(\mathbb{R})$, $A \to T_e(A)$ este liniar în raport cu adunarea şi înmulţirea cu scalari a numerelor fuzzy.

În continuare prezentăm câteva leme şi propoziţii utile.

Lema 2.1.1 *([21], Propoziţia 3) Pentru orice număr fuzzy A avem:*

(i)

$$\int_0^1 \left(A_L(\alpha) - \left(A^e_{s_L,s_R}\right)_L(\alpha)\right) d\alpha = \int_0^1 \left(A_U(\alpha) - \left(A^e_{s_L,s_R}\right)_U(\alpha)\right) d\alpha = 0;$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left((1-\alpha)^{1/s_L} - \frac{s_L}{s_L+1}\right)\left(A_L(\alpha) - \left(A^e_{s_L,s_R}\right)_L(\alpha)\right) d\alpha &= 0,\\
\int_0^1 \left((1-\alpha)^{1/s_R} - \frac{s_R}{s_R+1}\right)\left(A_U(\alpha) - \left(A^e_{s_L,s_R}\right)_U(\alpha)\right) d\alpha &= 0.
\end{aligned}$$

Propoziţia 2.1.2 *([21], Propoziţia 4) Avem*

$$d^2(A,B) = d^2(A, A^e_{s_L,s_R}) + d^2(A^e_{s_L,s_R}, B), (\forall)\ A \in F(\mathbb{R}), (\forall)\ B \in F_e^{s_L,s_R}(\mathbb{R}). \tag{2.7}$$

Corolarul 2.1.3 *([81], Propoziţia 4.2.) Avem*

$$d^2(A,B) = d^2(A,T_e(A)) + d^2(T_e(A),B), (\forall)\ A \in F(\mathbb{R}), (\forall)\ B \in F_e^{s_L,s_R}(\mathbb{R}). \tag{2.8}$$

De aici, obţinem uşor următoarea.

Teorema 2.1.4 *(vezi de asemenea Teorema 3 în [21]) Dacă $A \in F(\mathbb{R})$ este ales arbitrar, atunci $A^e_{s_L,s_R}$ este cea mai bună aproximare a lui A în mulţimea numerelor fuzzy parametrice extinse de tipul (s_L, s_R) în raport cu metrica Euclidiană şi în plus este unic cu această proprietate.*

Din teorema de mai sus rezultă uşor următorul corolar cunoscut şi din alte articole (vezi de exemplu [82]).

Corolarul 2.1.5 *Dacă $A \in F(\mathbb{R})$ este ales arbitrar, atunci $T_e(A)$ este cea mai bună aproximare a lui A în mulţimea numerelor fuzzy trapezoidale extinse în raport cu metrica Euclidiană şi în plus este unic cu această proprietate.*

În cazul metricilor ponderate de tip L_2, ţinând cont de notaţiile din secţiunea 1.11, prezentăm rezultate similare după cum urmează.

Teorema 2.1.6 *([85], Propoziţia 3.2) Fie d_λ o metrică ponderată de tip L_2 precum cea din formula (1.9), cu $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$ şi fie A un număr fuzzy oarecare. Folosind relaţiile (1.18)-(1.20) introducem următoarele cantităţi:*

$$l_e = \frac{1}{a}\int_0^1 A_L(\alpha)\lambda_L(\alpha)d\alpha, \quad u_e = \frac{1}{b}\int_0^1 A_U(\alpha)\lambda_U(\alpha)d\alpha, \tag{2.9}$$

$$x_e = \frac{1}{c}\int_0^1 A_L(\alpha)(\alpha-\omega_L)\lambda_L(\alpha)d\alpha, \quad y_e = \frac{1}{d}\int_0^1 A_U(\alpha)(\alpha-\omega_U)\lambda_U(\alpha)d\alpha. \tag{2.10}$$

Atunci, notând $T_{e,\lambda}(A) = [l_e, u_e, x_e, y_e]_\lambda$ (vezi din nou reprezentarea (1.21)), avem

$$d^2_\lambda(A,B) = d^2_\lambda(A,T_{e,\lambda}(A)) + d^2_\lambda(T_{e,\lambda}(A),B), (\forall)\ A \in F(\mathbb{R}), (\forall)\ B \in F_e^T(\mathbb{R}). \tag{2.11}$$

Raţionând ca şi în cazul metricii Euclidiene obţinem următorul corolar.

Corolarul 2.1.7 *([85], Propoziţia 3.3) Dacă $A \in F(\mathbb{R})$ este ales arbitrar, atunci $T_{e,\lambda}(A)$ este cea mai bună aproximare a lui A în mulţimea numerelor fuzzy trapezoidale extinse în raport cu metrica d_λ şi în plus este unic cu această proprietate.*

Fie A un număr fuzzy oarecare. Apoi fie s_L, s_R numere reale strict pozitive şi fie d_λ, $\lambda = (\lambda_L, \lambda_R)$ o metrică ponderată. În cele ce urmează, $A^e_{s_L,s_R}$ se va numi aproximarea parametrică extinsă de tipul (s_L, s_R) a lui A, $T_e(A)$ se va numi aproximarea trapezoidală extinsă a lui A iar $T_{e,\lambda}(A)$ se va numi aproximarea trapezoidală ponderată extinsă a lui A.

Prezentăm în continuare proprietăţi de continuitate Lipschitz.

Lema 2.1.8 *(vezi şi Teorema 8 în [21]) Fie φ operatorul de aproximare trapezoidală extinsă, trapezoidală ponderată extinsă sau parametrică extinsă. De asemenea să notăm cu D metrica Euclidiană sau ponderată corespunzătoare. Atunci avem $D(\varphi(A), \varphi(B)) \le D(A,B)$, pentru fiecare $A, B \in F(\mathbb{R})$.*

Menţionăm că lema de mai sus generalizează Propoziţia 4.4 din [81] iar demonstraţia ei este similară cu cea a propoziţiei menţionată anterior.

În final, prezentăm o proprietate importantă de conservare a operatorului de aproximare parametrică extinsă iar în particular a operatorului de aproximare trapezoidală extinsă.

Propoziţia 2.1.9 *([21], Propoziţia 7) Aproximarea parametrică extinsă de tipul* (s_L, s_R) *a unui număr fuzzy* A *are acelaşi interval de expectanţă ca şi* A*, adică* $EI\left(A^e_{s_L,s_R}\right) = EI(A)$*. Considerând funcţia de reducere* $S : [0,1] \to [0,1]$*,* $S(\alpha) = 1 - (1-\alpha)^{1/s}$*,* $s > 0$*, aproximarea parametrică extinsă de tipul* (s,s) *a unui număr fuzzy* A *are aceeaşi ambiguitate şi valoare ca şi* A *în raport cu* S*. Astfel,* $Val_S\left(A^e_{s,s}\right) = Val_S(A)$ *şi* $Amb_S\left(A^e_{s,s}\right) = Amb_S(A)$*.*

2.2 Proprietăţi de convergenţă în spaţiul numerelor fuzzy extinse

Toate rezultatele din această secţiune se pot găsi în lucrarea [19] pentru cazul particular al unei metrici ponderate d_λ, $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$, $\lambda_L = \lambda_U$ şi unde proprietăţile de convergenţă se dau doar pentru numere fuzzy trapezoidale. Rezultatul central al acestei secţiuni, Lema 2.2.2, se va folosi mai târziu la studiul continuităţii operatorilor de aproximare trapezoidală care conservă nucleul.

Lema 2.2.1 *([19], Lema 2) Dacă* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *,* $T_n = (t_1(n), t_2(n), t_3(n), t_4(n))$*, este un şir de numere fuzzy trapezoidale extinse astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} t_i(n) = t_i < \infty$*,* $i = \overline{1,4}$*, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$*, în raport cu orice metrică* d_λ*,* $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$*, unde* T *este numărul fuzzy trapezoidal extins* $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)$*.*

Lema 2.2.2 *([19], Lema 3) Dacă* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *,* $T_n = (t_1(n), t_2(n), t_3(n), t_4(n))$*, este un şir convergent de numere fuzzy în raport cu metrica ponderată* d_λ*, atunci limita sa este un număr fuzzy trapezoidal extins* $T = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ *şi în plus avem* $\lim\limits_{n\to\infty} t_i(n) = t_i$ *,* $i = \overline{1,4}$*.*

Folosind relaţiile (1.13)-(1.14) şi cele două leme de mai sus, obţinem cu uşurinţă corolarul de mai jos.

Corolarul 2.2.3 *Dacă* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *,* $T_n = [l(n), u(n), x(n), y(n)]$*, este un şir convergent de numere fuzzy trapezoidale extinse în raport cu metrica ponderată* d_λ*, atunci limita sa este un număr fuzzy trapezoidal extins* $T = [l, u, x, y]$ *şi în plus avem* $\lim\limits_{n\to\infty} l(n) = l$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} u(n) = u$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = x$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = y$*. Reciproc, dacă* $T_n = [l(n), u(n), x(n), y(n)]$*, este un şir de numere fuzzy trapezoidale extinse astfel încât* $\lim\limits_{n\to\infty} l(n) = l$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} u(n) = u$*,* $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = x$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} y(n) = y$*, atunci* $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = [l, u, x, y]$*, în raport cu metrica* d_λ*.*

Observaţia 2.2.4 *Rezultate similare se pot obţine pentru numere fuzzy parametrice extinse.*

2.3 Convexitate în spaţiul numerelor fuzzy

Această secţiune conţine rezultate originale din lucrarea [41].

De obicei conceptul de mulţime convexă este în strânsă legătură cu structura de spaţiu vectorial. Deja ştim că adunarea şi înmulţirea cu scalari a numerelor fuzzy nu formează un spaţiu vectorial. Totuşi, din moment ce aceste operaţii sunt închise în $F(\mathbb{R})$ şi mai ales pentru că ne va fi de mare folos mai târziu pentru obţinerea unor rezultate de bază ale tezei, avem nevoie de noţiunea de mulţime convexă în spaţiul numerelor fuzzy.

Definiţia 2.3.1 *([41], Definiţia 1) O mulţime nevidă $\Omega \subseteq F(\mathbb{R})$ se numeşte submulţime convexă a alui $F(\mathbb{R})$, dacă pentru oricare $A, B \in \Omega$ şi $\gamma \in [0,1]$, avem $((1-\gamma)A + \gamma B) \in \Omega$.*

În lucrarea [41] sunt demonstrate câteva rezultate utile în cazul mulţilor convexe din $F(\mathbb{R})$. De exemplu, dacă $A, B \in F(\mathbb{R})$, $0 \leq \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq ... \leq \gamma_n \leq 1$ şi $C_i = (1-\gamma_n)A + \gamma_n B$ pentru fiecare $i \in \{1,2,...,n\}$, atunci $[A,B] = [A,C_1] \cup [C_1,C_2] \cup ... \cup [C_{n-1},C_n] \cup [C_n,B]$. Apoi, pentru fiecare $C \in [A,B]$ avem $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$ (aici, d este metrica Euclidiană). În final, dacă $A, B \in F(\mathbb{R})$, $A \neq B$ atunci $cl((A,B)) = cl((A,B]) = cl([A,B)) = [A,B]$ (în raport cu metrica Euclidiană). Trebuie menţionat că întrucât $F(\mathbb{R})$ nu este spaţiu normat, demonstraţiile sunt mai tehnice decât cele folosite în cazul spaţiilor normate.

2.4 O caracterizare a funcţiilor Lipschitz cu valori numere fuzzy

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [41]. Lema următoare se poate demonstra folosind rezultatele din secţiunea precedentă.

Lema 2.4.1 *([41], Lema 8) Fie $A, B \in F(\mathbb{R})$, $A \neq B$. Mai departe, considerăm familia de submulţimi convexe din $F(\mathbb{R})$, $\mathcal{F} = \{\Omega_i : i \in \{1,2,...,n\}\}$, astfel încât $[A,B] \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$. Atunci există $k \in \{1,2,...,n\}$, $\{C_j : j \in \{0,1,...,k\}\} \subseteq [A,B]$, cu $C_0 = A$ şi $C_k = B$, şi $\{\Omega_{l_j} : j \in \{1,2,...,k\}\} \subseteq \mathcal{F}$, astfel încât: i) $[A,B] = \bigcup_{j=1}^{k} [C_{j-1}, C_j]$; ii) $d(A,B) = \sum_{j=1}^{k} d(C_{j-1}, C_j)$; iii) $[C_{j-1}, C_j] \subseteq \Omega_{l_j}$, pentru fiecare $j \in \{1,2,...,k\}$.*

Folosind rezultatul de mai sus obţinem următoarea caracterizare a funcţiilor Lipschitz cu valori numere fuzzy.

Teorema 2.4.2 *([41], Teorema 9) Fie $\mathcal{F} = \{\Omega_i : i \in \{1,2,...,n\}\}$, o familie de submulţimi convexe a lui $F(\mathbb{R})$ astfel încât există constantele pozitive c_i, $i \in \{1,2,...,n\}$, cu proprietatea că pentru fiecare $i \in \{1,2,...,n\}$ şi $A, B \in \Omega_i$, avem $d(f(A), f(B)) \leq c_i d(A,B)$. Atunci $d(f(A), f(B)) \leq c d(A,B)$, $(\forall) A, B \in F(\mathbb{R})$, unde $c = \max\{c_i : i \in \{1,2,...,n\}\}$.*

2.5 Proprietăţi rezonabile pentru ordonarea numerelor fuzzy

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [25].

În ultimele decenii în nenumărate articole autorii studiază ordonarea numerelor fuzzy. Ordonarea numerelor fuzzy este o necesitate importantă în teoria numerelor fuzzy dar din păcate se pare că încă nu există o metodă eficientă de ordonare a numerelor fuzzy. Varianta extinsă a tezei prezintă un studiu detaliat al acestei probleme şi în plus conţine o trecere în revistă a principalelor rezultate şi abordări în acest topic. În acest rezumat vom insista doar pe rezultatele principale pe care le-am obţinut.

Să presupunem că $\mathcal{S}$ este o submulţime a lui $F(\mathbb{R})$. Să considerăm apoi un defuzificator $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ care induce pe $\mathcal{S}$ o ordine după cum urmează:

(i) $P(A) > P(B)$ dacă şi numai dacă $A \succ B$,

(ii) $P(A) < P(B)$ dacă şi numai dacă $A \prec B$,

(iii) $P(A) = P(B)$ dacă şi numai dacă $A \sim B$,
(iv) $P(A) \geq P(B)$ dacă şi numai dacă $A \succ B$ sau $A \sim B$,
(v) $P(A) \leq P(B)$ dacă şi numai dacă $A \prec B$ sau $A \sim B$.

Dacă $A \succ B$ sau $A \sim B$ atunci deseori notăm $A \succeq B$ iar dacă $A \prec B$ sau $A \sim B$ atunci putem nota $A \preceq B$.

Pentru găsirea unor procedee eficiente de ordonare a numerelor fuzzy, considerăm următoarele proprietăţi rezonabile ale unei ordini $\succeq$ pe mulţimea $\mathcal{S}$.

A_1) $A \succeq A$ pentru fiecare $A \in \mathcal{S}$.
A_2) Pentru fiecare $(A, B) \in \mathcal{S}^2$, din $A \succeq B$ şi $B \succeq A$ rezulă $A \sim B$.
A_3) Pentru fiecare $(A, B, C) \in \mathcal{S}^3$, din $A \succeq B$ şi $B \succeq C$ rezultă $A \succeq C$.
A_4) Pentru fiecare $(A, B) \in \mathcal{S}^2$, din *inf supp*$(A) \geq$*sup supp*(B) rezultă $A \succeq B$.
A'_4) Pentru fiecare $(A, B) \in \mathcal{S}^2$, din *inf supp*$(A) >$*sup supp*(B) rezultă $A \succ B$.
A_5) Fie $A, B, A + C$ şi $B + C$ elemente ale lui $\mathcal{S}$. Dacă $A \succeq B$, atunci $A + C \succeq B + C$.
A'_5) Fie $A, B, A + C$ şi $B + C$ elemente ale lui $\mathcal{S}$. Dacă $A \succ B$, atunci $A + C \succ B + C$.
A_6) Pentru fiecare $(A, B) \in \mathcal{S}^2$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lambda A, \lambda B \in \mathcal{S}$, din $A \succeq B$ rezultă $\lambda A \succeq \lambda B$ dacă $\lambda \geq 0$ şi $\lambda A \preceq \lambda B$ dacă $\lambda \leq 0$.

Să observăm că dacă A_3) are loc atunci din $A \sim B$ şi $B \sim C$ obţinem $A \sim C$.

Cerinţele $A_1) - A'_5$) se găsesc într-un context mai general (şi anume procedeul de ordonare nu este generat neapărat de un defuzificator) în lucrarea lui Wang şi Kerre ([78]). Din acest motiv, în această lucrare cerinţele de mai sus sunt prezentate într-un mod mai abstract. Apoi se observă că dacă ordinea $\succeq$ este generată de un defuzificator atunci proprietăţile $A_1) - A_3$) au loc. Proprietatea A_6) înlocuieşte proprietatea A_7) din aceeaşi lucrarea a lui Wang şi Kerre. Ei au propus o cerinţă mai restrictivă într-un anume sens, înlocuind λ în A_6) cu numere fuzzy pozitive (adică numere fuzzy al căror suport este inclus în $[0, \infty)$). Totuşi, din moment ce înmulţirea numerelor fuzzy nu are o formulă acceptată fără echivoc, preferăm cerinţa A_6) în forma considerată în această teză. Un alt motiv pentru care considerăm A_6) în această formă este că dacă $\mathcal{S}$ coincide cu mulţimea numerelor fuzzy trapezoidale atunci dacă A, B sunt numere fuzzy trapezoidale, în general $A \cdot B$ nu este un număr fuzzy trapezoidal. În particular, dacă A_6) are loc atunci din $A \preceq B$ rezultă că $-A \succeq -B$, o proprietate considerată foarte importantă în multe articole (vezi de exemplu [5], [11], [54]). De asemenea trebuie să menţionăm că la prima impresie cerinţa A_4) din [78] pare să difere puţin de A_4) din această teză. În [78] în cerinţă se spune că din *inf supp*$(A) >$*sup supp*(B) trebuie să rezulte că $A \succeq B$. Dar se demonstrează foarte uşor că dacă $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{S}$ şi $\succeq$ este generată de un defuzificator P a cărui restricţie la $\mathbb{R}$, $P\mid_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, este o funcţie continuă, atunci A_4) din [78] şi A_4) din această teză sunt echivalente. O demonstraţie foarte simplă a acestui fapt se găseşte în lucrarea [25]. În câteva lucrări de dată recentă (vezi de exemplu [5], [12]) următoarea cerinţă este considerată o proprietate rezonabilă importantă pentru un defuzificator $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$.

$A"_4$) Pentru fiecare $A \in \mathcal{S}$, $P(A) \in$ *supp*(A).

Într-un fel putem spune că este suficient să studiem doar defuzificatori care satisfac cerinţa $A"_4$). Asta rezultă din următoarea teoremă.

Teorema 2.5.1 *([25], Teorema 1) Să presupunem că $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ este un defuzificator care induce pe $\mathcal{S}$ o ordine $\succeq$ ce satisface cerinţele $A_4) - A'_4$) pe S. Dacă $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{S}$ şi restricţia lui P la $\mathbb{R}$, $P\mid_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie continuă, atunci există un defuzificator $P_1 : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ care satisface cerinţa $A"_4$) şi care generează pe $\mathcal{S}$ o ordine $\succeq^1$care este echivalentă cu $\succeq$, ceea ce înseamnă că pentru fiecare $A, B \in \mathcal{S}$, din $A \succeq B$ rezultă că $A \succeq^1 B$ şi din $A \succ B$ rezultă că $A \succ^1 B$.*

În teorema de mai sus am presupus continuitatea funcţiei $P\mid_{\mathbb{R}}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dar această cerinţă nu este deloc restrictivă din moment ce majoritatea defuzificatorilor folosiţi pentru a ordona numere fuzzy sunt funcţii continue.

În cele ce urmează vom vedea că în funcţie de proprietăţile rezonabile satisfăcute de o ordine generată de un defuzificator, putem determina anumite proprietăţi importante ale acestui defuzificator.

Teorema 2.5.2 *([25], Teorema 2) Să presupunem că $\mathcal{S}$ este o submulţime a lui $F(\mathbb{R})$ astfel încât $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{S}$ şi $\mathcal{S} + \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$. Apoi să presupunem că $R : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ este un defuzificator care verifică cerinţa $A"_4$) şi astfel încât ordinea $\succeq$ generată de R pe $\mathcal{S}$ satisface cerinţa A_5) pe $\mathcal{S}$. Atunci R este aditiv pe $\mathcal{S}$ şi în plus $\succeq$ satisface cerinţa A'_5) pe $\mathcal{S}$.*

Din teorema de mai sus obţinem uşor următoarele corolare.

Corolarul 2.5.3 *([25], Corolarul 3) Să presupunem că $\mathcal{S}$ este o submulţime a lui $F(\mathbb{R})$ astfel încât $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{S}$ şi $\mathcal{S} + \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$. Apoi să presupunem că $R : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ este un defuzificator care verifică cerinţa $A"_4$). Atunci ordinea $\succeq$ generată de R pe $\mathcal{S}$ satisface cerinţa A_5) pe $\mathcal{S}$ dacă şi numai dacă satisface cerinţa A'_5) pe $\mathcal{S}$.*

Corolarul 2.5.4 *([25], Corolarul 4) Să presupunem că $\mathcal{S}$ este o submulţime a lui $F(\mathbb{R})$ astfel încât $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{S}$ şi $\mathcal{S} + \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$. Dacă $R : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ este un defuzificator care generează o ordine $\succeq$ ce satisface cerinţele A_4), A'_4) şi A_5) pe $\mathcal{S}$, atunci A'_5) este de asemenea satisfăcută de $\succeq$ pe $\mathcal{S}$. În plus, există un defuzificator $R_1 : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ ce satisface $A"_4$) pe $\mathcal{S}$ şi care generează pe $\mathcal{S}$ o ordine echivalentă cu $\succeq$.*

Teorema 2.5.5 *([25], Teorema 5) Să presupunem că $\mathcal{S}$ este o submulţime a lui $F(\mathbb{R})$ astfel încât $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{S}$ şi $\lambda \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$, pentru fiecare $\lambda \in \mathbb{R}$. Apoi să presupunem că $R : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ este un defuzificator care verifică cerinţa $A"_4$) şi astfel încât ordinea $\succeq$ generată de R pe $\mathcal{S}$ satisface cerinţa A_6) pe $\mathcal{S}$. Atunci R este invariant faţă de scalari.*

Corolarul 2.5.6 *([25], Corolarul 6) Să presupunem că $\mathcal{S}$ este o submulţime a lui $F(\mathbb{R})$ astfel încât $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{S}$ şi $\lambda \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$, pentru fiecare $\lambda \in \mathbb{R}$. Dacă $R : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ este un defuzificator care generează o ordine $\succeq$ ce satisface cerinţele A_4), A'_4) şi A_6) pe $\mathcal{S}$, atunci există un defuzificator invariant faţă de scalari $R_1 : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ ce satisface $A"_4$) pe $\mathcal{S}$ şi care generează pe $\mathcal{S}$ o ordine echivalentă cu $\succeq$.*

Să notăm cu $M(\mathcal{S})$ mulţimea defuzificatorilor continui definiţi pe $\mathcal{S}$ şi care generează pe $\mathcal{S}$ o ordine care verifică cerinţele $A_1) - A_6)$. Apoi, inspiraţi de Teorema 2.5.1, considerăm mulţimea $M_1(\mathcal{S})$ a defuzificatorilor continui unde $P \in M_1(\mathcal{S})$ dacă şi numai dacă $A"_4$) are loc pentru P iar ordinea generată de P pe $\mathcal{S}$ satisface cerinţele $A_1) - A_3)$ şi $A_5) - A_6)$. Din cele de mai sus obţinem următoarea teoremă utilă în găsirea metodelor de ordonare eficientă a numerelor fuzzy.

Teorema 2.5.7 *([25], Teorema 7) Să presupunem că $\mathcal{S}$ este o submulţime a lui $F(\mathbb{R})$ astfel încât $\mathbb{R} \subseteq \mathcal{S}$, $\mathcal{S} + \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ şi $\lambda \cdot \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}$ pentru fiecare $\lambda \in \mathbb{R}$. Pentru un defuzificator $R : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$, avem:*

(i) $R \in M_1(\mathcal{S})$ dacă şi numai dacă R satisface $A"_4$) pe $\mathcal{S}$ şi R este liniar pe $\mathcal{S}$;

(ii) $R \in M(\mathcal{S})$ dacă şi numai dacă există $R_1 \in M_1(\mathcal{S})$ astfel încât R şi R_1 generează ordini echivalente pe $\mathcal{S}$.

2.6 Determinarea clasei $M_1(F^T(\mathbb{R}))$

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [25].

După cum spune şi titlul, în această secţiune vom determina (Teorema 2.6.2) toţi defuzificatorii continui ai clasei $M_1(F^T(\mathbb{R}))$ şi deci, făcând abstracţie de ordini echivalente pe $F^T(\mathbb{R})$, vom determina toţi defuzificatorii ce generează metode de ordonare a numerelor fuzzy ce verifică proprietăţile $A_1) - A_6)$.

Atât în această secţiune cât şi în următoarele două, vom folosi notaţii noi pentru numerele fuzzy trapezoidale ce sunt convenabile pentru obţinerea rezultatelor centrale legate de ordonarea numerelor fuzzy.

Secţiunea α a unui număr fuzzy trapezoidal T se poate scrie sub forma (vezi [5])

$$T_\alpha = (x_0 - \sigma + \sigma\alpha, y_0 + \beta - \beta\alpha), \tag{2.12}$$

unde $x_0, y_0, \sigma, \beta \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0, \beta \geq 0$ şi $x_0 \leq y_0$. Folosim notaţia $T = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$.

Pentru un număr fuzzy trapezoidal $T = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$, considerăm cantitatea

$$R(T) = ax_0 + by_0 + c\sigma + d\beta, \tag{2.13}$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sunt fixate. Se observă imediat că funcţia $R : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ este aditivă şi pozitiv omogenă. Să considerăm mulţimea $\Omega = \{R : R : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ şi R este de forma (2.13)$\}$. În versiunea extinsă a tezei se demonstrează că $M_1(F^T(\mathbb{R})) \subseteq \Omega$. De aceea, în teză, mai întâi se studiază defuzificatorii din mulţimea Ω. Cel mai important rezultat este următorul corolar care sintetizează mai multe rezultate de caracterizare a unor defuzificatori din mulţimea Ω.

Corolarul 2.6.1 *([25], Corolarul 12) Să considerăm un defuzificator $R \in \Omega$, $R(T) = ax_0 + by_0 + c\sigma + d\beta$, pentru $T = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$. Atunci $R \in M_1(F^T(\mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă $a = b = \frac{1}{2}$, $c \in [-1, 0]$, $c + d = 0$.*

Spuneam mai sus că $M_1(F^T(\mathbb{R})) \subseteq \Omega$. Mai exact avem următoarea.

Teorema 2.6.2 *([25], Teorema 13) Să considerăm un defuzificator $R : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Atunci $R \in M_1(F^T(\mathbb{R}))$ dacă şi numai dacă există $c \in [-1, 0]$ astfel încât dacă $T \in F^T(\mathbb{R})$, $T = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$, atunci*

$$R(T) = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 + c\sigma - c\beta. \tag{2.14}$$

În plus este uşor de verificat (vezi şi Teorema 2.5.7) că R este liniar pe $F^T(\mathbb{R})$.

În cele ce urmează vom caracteriza clase de defuzificatori peste $F^T(\mathbb{R})$ ce generează ordini care verifică în întregime sau doar o parte a cerinţelor $A_1) - A_6)$ pe $F^T(\mathbb{R})$. Mai mult, ţinând cont şi de Teorema 2.5.1 putem simplifica căutarea unor astfel de ordini prin găsirea ordinilor echivalente ce satisfac cerinţa $A_4^{"})$ pe $F^T(\mathbb{R})$.

Corolarul 2.6.3 *([25], Corolarul 14) (i) Dacă $R \in M(F^T(\mathbb{R}))$ atunci există $R_1 \in M_1(F^T(\mathbb{R}))$ astfel încât procedeele de ordonare $\succeq$ şi $\succeq^1$ pe $F^T(\mathbb{R})$ generate de R şi respectiv R_1, sunt echivalente. În plus (din Teorema 2.6.2) există $c \in [-1, 0]$ astfel încât dacă $T \in F^T(\mathbb{R})$, $T = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$, avem $R_1(T) = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 + cx - cy$.*

(ii) Dacă $R : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, este un defuzificator pentru care ordinea $\succeq$ generată de R pe $F^T(\mathbb{R})$ satisface cerinţele $A_4), A_4')$ şi $A_5)$, atunci $\succeq$ satisface şi $A_5')$ şi mai mult, există un defuzificator aditiv $R_1 : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, care satisface $A_4^{"})$ pe $F^T(\mathbb{R})$ şi care generează pe $F^T(\mathbb{R})$ o ordine echivalentă cu $\succeq$.

(iii) Dacă $R : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, este un defuzificator pentru care ordinea $\succeq$ generată de R pe $F^T(\mathbb{R})$ satisface cerinţele $A_4), A_4')$ şi $A_6)$, atunci există un defuzificator invariant faţă de scalari, $R_1 : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, care satisface $A_4^{"})$ pe $F^T(\mathbb{R})$ şi care generează pe $F^T(\mathbb{R})$ o ordine echivalentă cu $\succeq$.

2.7 Exemple de metode de ordonare

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [25].

Exemplul 2.7.1 *([25], Exemplul 16) Fie funcţia $EV : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, care fiecărui număr fuzzy trapezoidal $T = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$, îi asociază valoarea sa de expectanţă, $EV(T) = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{4}\sigma + \frac{1}{4}\beta$. Rezultă imediat că $EV \in M_1(F^T(\mathbb{R}))$. Se pare că Yagger ([79]) a fost primul care a ordonat numerele fuzzy prin intermediul valorii lor de expectanţă. Această metodă se foloseşte şi în articolul [12].*

Exemplul 2.7.2 *([25], Exemplul 17) În lucrarea [5], a fost introdusă magnitudinea unui număr fuzzy trapezoidal şi anume funcţia $Mag : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,*

$$Mag(T) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 (T_L(\alpha) + T_U(\alpha) + x_0 + y_0) f(\alpha) d\alpha\right),$$

unde $T = (x_0, y_0, \sigma, \beta)$, este un număr fuzzy trapezoidal oarecare iar f este o funcţie pozitivă şi crescătoare pe $[0,1]$ cu $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ şi $\int_0^1 f(\alpha)d\alpha = 1/2$. Deoarece după calcule simple obţinem $Mag(T) = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 + \frac{\sigma}{2}\int_0^1 f(\alpha)(\alpha - 1)d\alpha + \frac{\beta}{2}\int_0^1 f(\alpha)(1-\alpha)d\alpha$, rezultă uşor că $Mag \in M_1(F^T(\mathbb{R}))$. În articolul [5], autorii au considerat cazul particular $f(\alpha) = \alpha$, când se obţine $Mag(T) = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{12}\sigma + \frac{1}{12}\beta$.

Exemplul 2.7.3 *([25], Exemplul 20) În lucrarea [3] autorii propun ordonarea numerelor fuzzy prin intermediul metricilor de tipul L_p. Apoi, în lucrarea [7] se foloseşte aceeaşi abordare cu o mică modificare. În cele ce urmează vom descrie această metodă. Să considerăm un număr real $p \geq 1$ fixat şi fie un număr fuzzy arbitrar A. Dacă $\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha > 0$, considerăm cantitatea $\delta_p(A) = \left(\int_0^1 |A_L(\alpha)|^p d\alpha + \int_0^1 |A_U(\alpha)|^p d\alpha\right)^{1/p}$. Dacă $\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha < 0$ atunci fie $\delta_p(A) = -\left(\int_0^1 |A_L(\alpha)|^p d\alpha + \int_0^1 |A_U(\alpha)|^p d\alpha\right)^{1/p}$. În final, dacă $\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha = 0$ atunci considerăm $\delta_p(A) = 0$. Trebuie notat că în lucrarea [3] acest ultim caz este inclus în primul. Acum, putem defini defuzificatorul $\delta_p : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, pentru care $\succeq$ reprezintă ordinea generată de δ_p pe $F^T(\mathbb{R})$. Să vedem acum care sunt proprietăţile rezonabile satisfăcute de $\succeq$ pe $F^T(\mathbb{R})$. Evident, cerinţele $A_1)-A_3)$ sunt satisfăcute. Din păcate niciuna din cerinţele $A_4)$ sau $A_4')$ nu este îndeplinită după cum va rezulta din următorul contraexemplu. Pentru $\varepsilon > 0$ fixat considerăm numărul fuzzy trapezoidal (folosim notaţii standard) $T_\varepsilon = (-11, 1, 5+\varepsilon, 5+\varepsilon)$. Se observă că $\int_0^1 (T_\varepsilon)_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 (T_\varepsilon)_U(\alpha)d\alpha > 0$ şi deci $\delta_p(T_\varepsilon) = \left(\int_0^1 |(T_\varepsilon)_L(\alpha)|^p d\alpha + \int_0^1 |(T_\varepsilon)_U(\alpha)|^p d\alpha\right)^{1/p}$. Din inegalitatea lui Hölder obţinem*

$\int_0^1 |(T_\varepsilon)_L(\alpha)|^p d\alpha \geq \left(\int_0^1 |(T_\varepsilon)_L(\alpha)| d\alpha\right)^p$ *şi cum* $\int_0^1 |(T_\varepsilon)_L(\alpha)| d\alpha = 5.083$ *şi* $\int_0^1 |(T_\varepsilon)_U(\alpha)|^p d\alpha = (5+\varepsilon)^p$, *obţinem* $\delta_p(T_\varepsilon) \geq ((5.083)^p + (5+\varepsilon)^p)^{1/p}$. *Pe de altă parte, considerând numărul real* $5+\varepsilon$ *obţinem uşor că* $\delta_p(5+\varepsilon) = 2^{1/p}(5+\varepsilon)$. *Evident că pentru* ε *suficient de mic avem* $\delta_p(T_\varepsilon) > \delta_p(5+\varepsilon)$, *de unde rezultă că* $T_\varepsilon \succ 5+\varepsilon$. *Deoarece* $sup\,(supp(T_\varepsilon)) = 5+\varepsilon$, *rezultă uşor că* $A_4)$ *nu are loc pe* $F^T(\mathbb{R})$ *în general. Considerând acum numărul real* $5+2\varepsilon$, *din nou, pentru* ε *suficient de mic obţinem* $\delta_p(T_\varepsilon) > \delta_p(5+2\varepsilon)$ *şi astfel rezultă că nici* $A_4')$ *nu are loc în general. În primul rând vom face modificări în formula defuzificatorului astfel încât să rezulte că atât* $A_4)$ *cât şi* $A_4')$ *sunt satisfăcute. Astfel, vom face trecerea de la defuzificatorul* δ_p *la defuzificatorul* $\overline{\delta}_p$ *după cum urmează. Dacă* T *este fie un număr fuzzy trapezoidal pozitiv (adică* $T_L(0) \geq 0$*) fie unul negativ (adică* $T_U(0) \leq 0$*) atunci luăm* $\overline{\delta}_p(T) = \delta_p(T)$. *Dacă* T *nu este nici pozitiv nici negativ (adică* $T_L(0) < 0 < T_U(0)$*) atunci distingem trei cazuri. Dacă* $\int_0^1 T_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 T_U(\alpha)d\alpha = 0$ *atunci luăm* $\overline{\delta}_p(T) = \delta_p(T) = 0$. *Dacă* $\int_0^1 T_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 T_U(\alpha)d\alpha > 0$ *atunci luăm* $\overline{\delta}_p(T) = \min(\delta_p(T), 2^{1/p}T_U(0))$. *În final, dacă* $\int_0^1 T_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 T_U(\alpha)d\alpha < 0$ *atunci considerăm* $\overline{\delta}_p(T) = \max(\delta_p(T), 2^{1/p}T_L(0))$. *Se verifică uşor că ordinea* $\succeq^1$ *generată de* $\overline{\delta}_p$ *pe* $F^T(\mathbb{R})$ *verifică ambele cerinţe* $A_4)$ *şi* $A_4')$. *Rămâne de studiat care din proprietăţile* $A_5), A_5')$ *respectiv* $A_6)$ *sunt verificate de* $\succeq^1$. *Să considerăm defuzificatorul* $\widetilde{\delta}_p : F^T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\widetilde{\delta}_p = 2^{-1/p}\ \overline{\delta}_p$ *şi fie* $\succeq^2$ *ordinea generată de* $\widetilde{\delta}_p$ *pe* $F^T(\mathbb{R})$. *Evident,* $\succeq^2$ *şi* $\succeq^1$ *sunt echivalente. Apoi, după calcule simple rezultă că* $\widetilde{\delta}_p$ *satisface* $A_4'')$ *pe* $F^T(\mathbb{R})$. *Pe de altă parte observăm că* $\widetilde{\delta}_p$ *nu este nici aditiv şi nici invariant faţă de scalari pe* $F^T(\mathbb{R})$ *şi astfel, din Teoremele 2.5.2 respectiv 2.5.5, rezultă că niciuna din proprietăţile* $A_5)$ *sau* $A_6)$ *nu sunt în general satisfăcute de* $\succeq^2$ *pe* $F^T(\mathbb{R})$. *Apoi, din Corolarul 2.5.3 rezultă că nici proprietatea* $A_5')$ *nu este satisfăcută în general de* $\succeq^2$ *pe* $F^T(\mathbb{R})$. *Datorită faptului că* $\succeq^1$ *şi* $\succeq^2$ *sunt echivalente rezultă că în general, niciuna din proprietăţile* $A_5), A_5')$ *sau* $A_6)$, *nu sunt satisfăcute de* $\succeq^1$ *pe* $F^T(\mathbb{R})$.

2.8 Ordonarea numerelor fuzzy folosind numere fuzzy trapezoidale

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [25].

Până acum, am determinat clasa $M_1(F^T(\mathbb{R}))$ conţinând toţi defuzificatorii ce generează ordini care verifică cerinţele $A_1) - A_3)$, $A_4'')$ şi $A_5) - A_6)$. În cele ce urmează vom demonstra că pentru orice $R \in M_1(F^T(\mathbb{R}))$ există $\overline{R} \in M_1(F(\mathbb{R}))$ astfel încât $\overline{R}(T) = R(T)$ pentru fiecare număr fuzzy trapezoidal T . Asta înseamnă că $\overline{R}$ este o extindere a lui R pe $F(\mathbb{R})$ astfel încât toate proprietăţile rezonabile sunt conservate.

Teorema 2.8.1 *([25], Teorema 21) Să considerăm operatorul* $T : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$ *şi să considerăm defuzificatorii* $\overline{R} : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *şi* $R \in M_1(F^T(\mathbb{R}))$. *Să presupunem că sunt verificate următoarele cerinţe:*

(i) T *este liniar;*

(ii) $supp(T(A)) \subseteq supp(A)$, *pentru fiecare* $A \in F(\mathbb{R})$;

(iii) $\overline{R}(A) = R(T(A))$*, pentru fiecare* $A \in F(\mathbb{R})$*.*
Atunci $\overline{R}$ *este liniar pe* $F(\mathbb{R})$ *şi în plus avem* $\overline{R} \in M_1(F(\mathbb{R}))$*.*

Acum, obţinem uşor următorul corolar.

Corolarul 2.8.2 *([25], Corolarul 22) Să considerăm operatorul* $EV : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*, care asociază fiecărui număr fuzzy valoarea sa de expectanţă. Atunci* $EV \in M_1(F(\mathbb{R}))$*.*

Metoda de ordonare de mai sus are anumite limite deoarece uneori se ajunge la integrale care se calculează cu dificultate. Propunem acum un rezultat care este mai convenabil din punct de vedere al calculelor.

Corolarul 2.8.3 *([25], Corolarul 23) Să considerăm defuzificatorul* $\overline{R} : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$*,*

$$\overline{R}(A) = \left(A_L(0) + A_L(1) + A_U(0) + A_U(1)\right)/4.$$

Atunci $\overline{R} \in M_1(F(\mathbb{R}))$*.*

Asemănător corolarului de mai sus, putem extinde orice ordine generată de un defuzificator $R \in M_1(F^T(\mathbb{R}))$ la o ordine peste $F(\mathbb{R})$, care este uşor de mânuit din punct de vedere al calculelor şi care în plus satisface proprietăţile rezonabile considerate în această teză.

Teorema 2.8.4 *([25], Teorema 24) Dacă* $R \in M_1(F^T(\mathbb{R}))$ *atunci există* $\overline{R} : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *astfel încât* $\overline{R} \in M_1(F(\mathbb{R}))$ *şi în plus* $\overline{R}(T) = R(T)$*, pentru fiecare* $T \in F^T(\mathbb{R})$*.*

Capitolul 3

Aproximarea numerelor fuzzy prin numere fuzzy cu formă mai simplă

În acest capitol propunem metodele de bază pentru a determina algoritmii cu ajutorul cărora putem calcula diferite tipuri de aproximări parametrice sau trapezoidale.

Acest capitol conţine contribuţii originale din articolele [17], [21]-[22], [27]-[28], [40]. În plus, acest capitol conţine rezultate originale nepublicate şi care vor fi menţionate la momentul potrivit.

3.1 Aproximarea numerelor fuzzy; o trecere în revistă

Această secţiune prezintă principalele realizări în topicul aproximării numerelor fuzzy. În plus, menţionăm că această discuţie se găseşte şi în lucrarea [40].

În ultimii ani multe articole studiază aproximarea numerelor fuzzy în raport cu metrici de tipul L_2. De obicei, două tipuri de aproximare sunt investigate: aproximări fără alte restricţii şi aproximări cu restricţii. Mai întâi discutăm problema aproximării fără alte restricţii. În mod independent, Chanas ([38]) şi Grzegorzewski ([59]) au propus aproximarea numerelor fuzzy prin numere fuzzy de tip interval. Grzegorzewski a demonstrat că în cazul metricii Euclidiene această aproximare coincide chiar cu intervalul de expectanţă. Abbasbandy şi Asady ([4]) au propus aproximarea trapezoidală a numerelor fuzzy în raport cu aceeaşi metrică Euclidiană. Yeh ([82]) propune noi algoritmi pentru calculul aproximărilor trapezoidale şi triunghiulare în raport cu metrica Euclidiană. Zeng şi Li ([88]) propun aproximarea triunghiulară în raport cu o metrică ponderată de tip L_2. Totuşi, algoritmul propus de ei nu produce întotdeauna numere fuzzy triunghiulare fapt menţionat în lucrările [16] şi [82]. Algoritmul corect este dat de Ban în lucrarea [16]. Cel mai general rezultat de aproximare trapezoidală sau triunghiulară este dat de Yeh în lucrarea [85] unde se propun algoritmi de calcul al aproximărilor trapezoidale sau triunghiulare în raport cu metrici generale ponderate de tip L_2. Nasibov şi Peker propun o abordare mai generală în articolul [68] şi anume aproximări parametrice a numerelor fuzzy în raport cu metrica Euclidiană. Rezultatele lor sunt îmbunătăţite de Ban în lucrarea [14]. Apoi, Yeh ([84]) generalizează aceste rezultate considerând metrici generale ponderate de tip L_2. Recent, în lucrarea [43] autorii propun aproximarea numerelor fuzzy (în raport cu metrica Euclidiană) prin numere fuzzy liniare pe porţiuni şi care depind de 6 parametri. Acesta este un prim pas spre aproximarea numerelor fuzzy prin numere fuzzy care depind de n parametri. În secţiunea de concluzii se găsesc mai multe detalii despre aproximarea prin numere fuzzy liniare pe porţiuni.

Să discutăm acum despre aproximarea cu restricţii. Grzegorzewski şi Mrówka ([62], [63]) propun aproximarea numerelor fuzzy (în raport cu metrica Euclidiană) prin numere fuzzy trapezoidale care conservă intervalul de expectanţă. Rezultatele lor sunt îmbunătăţite în mod independent de Ban ([13]) şi Yeh ([83]). Algoritmi pentru calculul acestor aproximări se găsesc în lucrările [60] şi [61]. Apoi, Abbasbandy şi Hajjari ([6]) propun aproximarea trapezoidală care conservă nucleul în raport cu metrici ponderate de tipul L_2. Recent, în lucrarea [17] autorii propun aproximarea trapezoidală (în raport cu metrica Euclidiană) care conservă ambiguitatea şi valoarea. Mai recent, Ban şi Coroianu ([21]) găsesc metode mai simple pentru a calcula aproximări parametrice în raport cu metrica Euclidiană care conservă caracteristici importante cum ar fi intervalul de expectanţă, ambiguitatea sau valoarea. Alte tipuri de aproximări neliniare se găsesc în lucrarea lui Grzegorzewski şi Stefanini ([77]) unde se propun clase de numere fuzzy care depind de $4-5$ parametri şi care permit aproximări care conservă mai multe caracteristici cum ar fi suportul şi nucleul sau ambiguitatea şi valoarea.

3.2 Rezultate de existenţă şi aplicaţii pentru clase importante de numere fuzzy

Această secţiune conţine în întregime contribuţii originale. O parte din rezultate se găsesc în lucrarea [27] dar în majoritatea cazurilor fără demonstraţie. În plus, Teoremele 3.2.5 şi 3.2.7 sunt complet noi.

Pentru a obţine rezultatele de bază ale acestei secţiuni avem nevoie de un rezultat vechi al lui Rådström şi de câteva rezultate ce ţin de problema celei mai bune aproximări şi care vor fi omise în acest rezumat.

Teorema 3.2.1 *([72], Teorema 1) Să considerăm un triplet $(M,+,\cdot)$ care formează o structură semiliniară. Atunci există un spaţiu vectorial $(\widetilde{M},\oplus,\odot)$ şi o aplicaţie injectivă (incluziune) $i:M\to\widetilde{M}$ şi, privind pe M ca pe o submulţime a lui $\widetilde{M}$ (convenim că $i(x)=x$ pentru fiecare $x\in M$), avem $a\oplus b=a+b$, $\lambda\odot a=\lambda\cdot a$, pentru fiecare $a,b\in M$ şi $\lambda\in[0,\infty)$. Dacă în plus există o metrică d definită pe M care satisface:*

(i) $d(a+c,b+c)=d(a,b)$, pentru fiecare $a,b,c\in M$;

(ii) $d(\lambda a,\lambda b)=\lambda d(a,b)$, pentru fiecare $\lambda\in[0,\infty)$ şi $a,b\in M$;

(iii) $+:M\times M\to M$ şi $\cdot:[0,\infty)\times M\to M$, sunt continue în topologia generată de metrica d pe M,

atunci există o normă $\|\cdot\|:\widetilde{M}\to[0,\infty)$ astfel încât metrica $\widetilde{d}$ pe $\widetilde{M}$ generată de $\|\cdot\|$ satisface $d(a,b)=\widetilde{d}(a,b)$, pentru fiecare $a,b\in M$.

Înainte de a da rezultate de existenţă pentru problema aproximării parametrice sau trapezoidale, prezentăm câteva rezultate teoretice care ne vor ajuta să obţinem rezultatele de existenţă menţionate anterior.

Teorema 3.2.2 *(vezi şi [27], Teorema 9) Fie d o metrică definită pe $F(\mathbb{R})$ care satisface cerinţele (i)-(iii) ale Teoremei 3.2.1 şi fie $\left(\widetilde{F(\mathbb{R})},\widetilde{d},\oplus,\odot\right)$ spaţiul normat în care se scufundă $(F(\mathbb{R}),d,+,\cdot)$ conform Teoremei 3.2.1 (putem folosi această teoremă deoarece din secţiunea 1.7 se ştie că spaţiul numerelor fuzzy are o structură semiliniară). Apoi, să considerăm submulţimea $\mathcal{A}\subseteq F(\mathbb{R})$, cu proprietatea că există $\{v_2,v_3,...,v_m\}\subseteq\mathcal{A}$, astfel încât:*

(i) sistemul $\{1,v_2,...,v_m\}$ este liniar independent în spaţiul vectorial $\left(\widetilde{F(\mathbb{R})},\oplus,\odot\right)$;

(ii) $\mathcal{A}=\left\{\lambda_1\cdot 1+\sum_{k=2}^{m}\lambda_i v_i:\lambda_1\in\mathbb{R}\text{ şi }\lambda_i\in[0,\infty),i\in\{2,...,m\}\right\}$.

Atunci $\mathcal{A}$ este o submulţime închisă a lui $F(\mathbb{R})$ în topologia generată de metrica d.

Un alt rezultat util este dat în următoarea teoremă.

Teorema 3.2.3 *(vezi şi [27], Teorema 12) Fie Ω una din următoarele submulţimi ale lui $F(\mathbb{R})$: $F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ (pentru s_L şi s_R fixate), $F^T(\mathbb{R})$, $F^\Delta(\mathbb{R})$, $Int(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^c$. Dacă d este o metrică pe $F(\mathbb{R})$ care satisface cerinţele (i)-(iii) ale Teoremei 3.2.1 atunci Ω este o submulţime închisă a lui $F(\mathbb{R})$ în topologia generată de d şi, dacă $\left(\widetilde{F(\mathbb{R})}, \widetilde{d}, \oplus, \odot\right)$ este un spaţiu normat astfel încât $(F(\mathbb{R}), d, +, \cdot)$ poate fi scufundat în $\left(\widetilde{F(\mathbb{R})}, \widetilde{d}, \oplus, \odot\right)$, atunci Ω este o submulţime închisă a lui $\widetilde{F(\mathbb{R})}$ în topologia generată de $\widetilde{d}$.*

Folosind cele două teoreme de mai sus precum şi mai multe rezultate ajutătoare, obţinem următorul rezultat central al acestei secţiuni.

Teorema 3.2.4 *(vezi şi [27], Teorema 13) Fie Ω una din următoarele submulţimi ale lui $F(\mathbb{R})$: $F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ (pentru s_L şi s_R fixate), $F^T(\mathbb{R})$, $F^\Delta(\mathbb{R})$, $Int(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^c$. Dacă d este o metrică pe $F(\mathbb{R})$ care satisface cerinţele (i)-(iii) ale Teoremei 3.2.1, atunci pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$ există $A^* \in \Omega$ astfel încât $d(A, A^*) = \inf_{B\in\Omega} d(A, B)$.*

Rezultatul de existenţă de mai sus este foarte general din moment ce aproape toate metricile definite pe spaţiul numerelor fuzzy verifică ipotezele teoremei anterioare. Folosind ipoteze mai tari obţinem în plus şi unicitatea.

Teorema 3.2.5 *Fie Ω una din următoarele submulţimi ale lui $F(\mathbb{R})$: $F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ (pentru s_L şi s_R fixate), $F^T(\mathbb{R})$, $F^\Delta(\mathbb{R})$, $Int(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^c$. Dacă d este o metrică pe $F(\mathbb{R})$ şi dacă există un spaţiu Hilbert $\left(\widetilde{F(\mathbb{R})}, \widetilde{d}, \oplus, \odot\right)$ ($\widetilde{d}$ este metrica generată de produsul scalar care induce pe $\widetilde{F(\mathbb{R})}$ o structură de spaţiu Hilbert) astfel încât $(F(\mathbb{R}), d, +, \cdot)$ se poate scufunda în $\left(\widetilde{F(\mathbb{R})}, \widetilde{d}, \oplus, \odot\right)$, atunci pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$ există un unic $A^* \in \Omega$ astfel încât $d(A, A^*) = \inf_{B\in\Omega} d(A, B)$.*

Următorul corolar este foarte important deoarece în această teză vom studia operatori de aproximare în raport cu metrici de tipul L_2.

Corolarul 3.2.6 *(vezi şi [84] Propoziţia 4.1. pentru cazul când $\Omega = F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$) Fie Ω una din următoarele submulţimi ale lui $F(\mathbb{R})$: $F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ (pentru s_L şi s_R fixate), $F^T(\mathbb{R})$, $F^\Delta(\mathbb{R})$, $Int(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^c$. Dacă d_λ este o metrică ponderată de tip L_2 definită pe $F(\mathbb{R})$ (vezi (1.9)), atunci pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$ există un unic $A^* \in \Omega$ astfel încât $d_\lambda(A, A^*) = \inf_{B\in\Omega} d_\lambda(A, B)$.*

În final, prezentăm un rezultat de existenţă şi unicitate în aproximarea cu metricile $\delta_{p,\lambda}$ date prin formula (1.10). Demonstraţia foloseşte remarcabilele inegalităţi ale lui Clarkson ([39]).

Teorema 3.2.7 *Fie Ω una din următoarele submulţimi ale lui $F(\mathbb{R})$: $F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ (pentru s_L şi s_R fixate), $F^T(\mathbb{R})$, $F^\Delta(\mathbb{R})$, $Int(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}^c$. Dacă $\delta_{p,\lambda}$, $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$, este o metrică ponderată de tip L_p definită pe $F(\mathbb{R})$ (vezi (1.10)) astfel încât $p > 1$, atunci pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$ există un unic $A^* \in \Omega$ astfel încât $\delta_{p,\lambda}(A, A^*) = \inf_{B\in\Omega} \delta_{p,\lambda}(A, B)$.*

3.3 Aproximări parametrice şi trapezoidale fără alte restricţii

În această secţiune vom demonstra (folosind o abordare generală) existenţa şi unicitatea aproximării parametrice sau trapezoidale fără alte restricţii. Elementul cheie în obţinerea acestor rezultate este Corolarul 3.2.6 din secţiunea precedentă.

Să considerăm în spaţiul numerelor fuzzy metrica d_λ, dată prin

$$d_\lambda(A,B) = \left[\int_0^1 (A_L(\alpha)-B_L(\alpha))^2 \lambda_L(\alpha)d\alpha + \int_0^1 (A_U(\alpha)-B_U(\alpha))^2 \lambda_U(\alpha)d\alpha\right]^{1/2}, A,B\in F(\mathbb{R}),$$

unde $\lambda=(\lambda_L,\lambda_U)$, $\lambda_L,\lambda_U:[0,1]\to\mathbb{R}$, sunt ponderi strict pozitive a.p.t. în $[0,1]$ şi integrabile. Apoi, să fixăm $s_L>0$ şi $s_R>0$.

Fie acum A un număr fuzzy oarecare. Din Corolarul 3.2.6 ştim că există un unic număr fuzzy parametric de tipul (s_L,s_R) notat de acum înainte cu $A^*_{s_L,s_R}$ astfel încât

$$d_\lambda(A,A^*_{s_L,s_R}) = \inf_{B\in F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})} d_\lambda(A,B).$$

Astfel, putem defini operatorul $\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}: F(\mathbb{R}) \to F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$, $\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}(A)=A^*_{s_L,s_R}$. Acest operator se va numi operatorul de aproximare ponderată parametrică de tipul (s_L,s_R) sau doar operator de aproximare ponderată parametrică atunci când nu există pericol de confuzie. În particular, dacă $\lambda_L=\lambda_U=1$ şi astfel d_λ devine metrica Euclidiană d, vom nota $\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}=\Psi_{s_L,s_R}$. În cazul particular când $s_L=s_R=1$, folosim notaţia $\Psi_{d_\lambda,1,1}=T_{d_\lambda}$ iar operatorul T_{d_λ} se va numi operatorul de aproximare ponderată trapezoidală. Cel mai particular caz de aproximare trapezoidală este când $\lambda_L=\lambda_U=1$ şi $s_L=s_R=1$, când obţinem aşa-numitul operator de aproximare trapezoidală notat cu T_d.

Se pune problema dacă putem găsi algoritmi să calculăm Ψ_{d_λ,s_L,s_R} pentru fiecare $A\in F(\mathbb{R})$. O soluţie foarte tehnică a acestei probleme este dată de Yeh în lucrarea [84] unde el obţine algoritmi de calcul al aproximărilor ponderate parametrice folosind algebră liniară şi multe caracterizări ale celei mai bune aproximări în spaţii Hilbert.

3.4 Aproximări parametrice cu condiţii suplimentare

Conţinutul acestei secţiuni se bazează pe contribuţiile originale din lucrarea [21]. Totuşi, Teoremele 3.4.1-3.4.2 precum şi raţionamentele folosite în demonstrarea lor sunt rezultate originale nepublicate.

Pe parcursul acestei secţiuni şi până la finalul acestui capitol, folosim formulele (1.28), (1.30)-(1.33) pentru a calcula intervalul de expectanţă, valoarea sau ambiguitatea. În particular, dacă $B=[l,u,x,y]_{s,s}$ este un număr fuzzy parametric extins de tipul (s,s) (pentru un $s>0$ fixat) astfel încât $l\le u$, şi dacă $S(\alpha)=1-(1-\alpha)^{1/s}, \alpha\in[0,1]$, este o funcţie de reducere, atunci prin calcule simple (vezi şi demonstraţiile Lemei 2.1.1 (i), (iii) respectiv a Propoziţiei 2.1.9) obţinem

$$\begin{aligned} EI(B) &= [l,u], \\ Val_S(B) &= \frac{1}{1+s}(u+l)+\frac{s}{(1+s)^2(2+s)}(x-y), \\ Amb_S(B) &= \frac{1}{1+s}(u-l)-\frac{s}{(1+s)^2(2+s)}(x+y). \end{aligned}$$

Astfel, dacă A este un număr fuzzy şi $A^e_{s,s} = [l_e, u_e, x_e, y_e]_{s,s}$ reprezintă aproximarea parametrică extinsă de tipul (s, s) a lui A, atunci

$$\begin{aligned} EI(A^e_{s,s}) &= [l_e, u_e], \\ Val_S(A^e_{s,s}) &= \frac{1}{1+s}(u_e + l_e) + \frac{s}{(1+s)^2(2+s)}(x_e - y_e), \\ Amb_S(A^e_{s,s}) &= \frac{1}{1+s}(u_e - l_e) - \frac{s}{(1+s)^2(2+s)}(x_e + y_e). \end{aligned}$$

După cum ştim din secţiunea precedentă, când $s = 1$ atunci $A^e_{s,s}$ coincide cu aproximarea trapezoidală extinsă a lui A notată $T_e(A)$ şi astfel obţinem

$$\begin{aligned} EI(T_e(A)) &= [l_e, u_e], \\ Val_S(T_e(A)) &= \frac{1}{2}(u_e + l_e) + \frac{1}{12}(x_e - y_e), \\ Amb_S(A^e_{s,s}) &= \frac{1}{2}(u_e - l_e) - \frac{1}{12}(x_e + y_e). \end{aligned}$$

În multe articole aflarea aproximărilor parametrice sau trapezoidale care conservă anumite caracteristici se bazează pe teorema Karush-Kuhn-Tucker (vezi [13], [14], [62]), metodă propusă de Grzegorzewski şi Mrówka ([62]). Metoda este sofisticată, cu calcule complicate, deoarece trebuie rezolvat un sistem de ecuaţii şi inecuaţii cu număr mare de necunoscute. Proprietăţile din Propoziţiile 2.1.2 şi 2.1.9 ne dau posibilitatea să simplificăm calculele după cum urmează.

Să considerăm problema aflării celui mai apropiat număr fuzzy parametric (în raport cu metrica Euclidiană d) de tipul (s_L, s_R) de numărul fuzzy A astfel încât parametrii $P_k, k \in \{1, ..., n\}$ să fie conservaţi, adică să căutăm soluţia problemei

$$\begin{gathered} \min_{B \in F^{s_L, s_R}(\mathbb{R})} d(A, B), \\ P_k(A) = P_k(B), (\forall) k \in \{1, ..., n\}. \end{gathered} \tag{3.1}$$

Aici, parametrul P_K este o funcţie (defuzificator) $P_K : F_e(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Dacă aproximarea parametrică extinsă de tipul (s_L, s_R), $A^e_{s_L,s_R}$ (vezi secţiunea 2.1) a lui A conservă parametrii $P_k, k \in \{1, ..., n\}$, adică

$$P_k\left(A^e_{s_L,s_R}\right) = P_k(A), (\forall) k \in \{1, ..., n\},$$

atunci datorită relaţiei (2.7), problema (3.1) este echivalentă cu

$$\begin{gathered} \min_{B \in F^{s_L, s_R}(\mathbb{R})} d\left(A^e_{s_L,s_R}, B\right), \\ P_k\left(A^e_{s_L,s_R}\right) = P_k(B), (\forall) k \in \{1, ..., n\}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

A) Aproximare parametrică ce conservă intervalul de expectanţă

Pentru $s_L > 0$, $s_R > 0$ fixate, considerăm problema

$$\begin{gathered} \min_{B \in F^{s_L, s_R}(\mathbb{R})} d(A, B), \\ EI(A) = EI(B), \end{gathered} \tag{3.3}$$

unde $A \in F(\mathbb{R})$ este fixat, $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)], \alpha \in [0, 1]$. Am putea încerca să rezolvăm această problemă folosind teorema Karush-Kuhn-Tucker dar metoda pare să fie foarte complicată pentru această problemă. De aceea, propunem o altă abordare care va implica existenţa şi unicitatea soluţiei. Ţinând cont de discuţia precedentă şi Propoziţia 2.1.9, (3.3) este echivalentă cu

$$\min_{B\in F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})} d\left(A^e_{s_L,s_R}, B\right), \qquad (3.4)$$
$$EI\left(A^e_{s_L,s_R}\right) = EI\left(B\right),$$

unde $A^e_{s_L,s_R} = [l_e, u_e, x_e, y_e]_{s_L,s_R}$ este aproximarea parametrică extinsă de tipul (s_L, s_R) a lui A. După calcule simple (vezi din nou relaţiile (1.27) care caracterizează mulţimea numerelor fuzzy parametrice de tipul (s_L, s_R)) (3.4) este echivalentă cu (folosim (1.26) pentru a exprima $d\left(A^e_{s_L,s_R}, B\right)$)

$$\min_{l,u,x,y\in\mathbb{R}} \left((l_e - l)^2 + (u_e - u)^2 + \tfrac{s_L}{(s_L+2)(s_L+1)^2}(x_e - x)^2 + \tfrac{s_R}{(s_R+2)(s_R+1)^2}(y_e - y)^2\right), \qquad (3.5)$$
$$l = l_e, u = u_e, x \geq 0, y \geq 0, l + \tfrac{s_L}{s_L+1}x \leq u - \tfrac{s_R}{s_R+1}y. \qquad (3.6)$$

Astfel, dacă (l_0, u_0, x_0, y_0) este o soluţie a problemei de mai sus atunci în mod necesar $l_0 = l_e$, $u_0 = u_e$ şi (x_0, y_0) este o soluţie a problemei

$$\min_{x,y\in\mathbb{R}} \left(\tfrac{s_L}{(s_L+2)(s_L+1)^2}(x_e - x)^2 + \tfrac{s_R}{(s_R+2)(s_R+1)^2}(y_e - y)^2\right)$$
$$x \geq 0, y \geq 0, \tfrac{s_L}{s_L+1}x + \tfrac{s_R}{s_R+1}y \leq u_e - l_e,$$

care este o problemă de minim în $\mathbb{R}^2$. În cele ce urmează demonstrăm că această problemă are (întotdeauna) soluţie unică. Într-adevăr, problema se poate scrie în forma echivalentă

$$\min_{(x,y)\in M_A} \left(\tfrac{s_L}{(s_L+2)(s_L+1)^2}(x_e - x)^2 + \tfrac{s_R}{(s_R+2)(s_R+1)^2}(y_e - y)^2\right)$$

unde $M_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, \frac{s_L}{s_L+1}x + \frac{s_R}{s_R+1}y \leq u_e - l_e\}$. Dar din moment ce $u_e - l_e \geq 0$ se observă uşor că M_A este nevidă. Mai mult, se verifică uşor că M_A este o submulţime convexă şi închisă în $\mathbb{R}^2$. Apoi, să definim pe $\mathbb{R}^2$ produsul scalar $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\langle(x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = \tfrac{s_L}{(s_L+2)(s_L+1)^2}x_1x_2 + \tfrac{s_R}{(s_R+2)(s_R+1)^2}y_1y_2.$$

Acest produs scalar generează metrica $D : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dată prin

$$D^2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \tfrac{s_L}{(s_L+2)(s_L+1)^2}(x_1 - x_2)^2 + \tfrac{s_R}{(s_R+2)(s_R+1)^2}(y_1 - y_2)^2.$$

Deoarece această metrică este de tip Euclidian (se demonstrează cu uşurinţă că D este echivalentă cu metrica Euclidiană pe $\mathbb{R}^2$), rezultă că $\left(\mathbb{R}^2, D\right)$ este un spaţiu Hilbert. Pe scurt, problema de minim este echivalentă cu

$$\min_{(x,y)\in M_A} D((x, y), (x_e, y_e)),$$

şi reamintind că M_A este o submulţime nevidă convexă şi închisă în $\mathbb{R}^2$, din analiza convexă elementară rezultă că această problemă are o soluţie unică (x_0, y_0) reprezentând proiecţia ortogonală a lui (x_e, y_e) pe mulţimea M_A în raport cu metrica D. În concluzie obţinem următoarea teoremă de existenţă şi unicitate a aproximării parametrice care conservă intervalul de expectanţă.

Teorema 3.4.1 *Fie $s_L > 0$ şi $s_R > 0$ arbitrar fixate. Atunci pentru orice număr fuzzy A există un unic număr fuzzy parametric de tipul (s_L, s_R) notat cu $\Psi^{s_L,s_R}_{EI}(A)$, astfel încât $EI(A) = EI(\Psi^{s_L,s_R}_{EI}(A))$ şi* *care satisface proprietatea că dacă B este un număr fuzzy parametric de tipul (s_L, s_R) cu proprietatea că $EI(A) = EI(B)$, atunci $d(A, \Psi_{EI}^{s_L,s_R}(A)) \leq d(A, B)$. Astfel, $\Psi_{EI}^{s_L,s_R}(A)$ este cel mai apropiat număr fuzzy parametric de tipul (s_L, s_R) de A în raport cu metrica d care conservă intervalul de expectanţă al lui A.*

Operatorul $\Psi_{EI}^{s_L,s_R} : F(\mathbb{R}) \to F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ se va numi operator de aproximare parametrică (de tipul (s_L, s_R)) ce conservă intervalul de expectanţă.

B) Aproximare parametrică ce conservă valoarea şi ambiguitatea

Considerăm problema

$$\min_{B \in F^{s,s}(\mathbb{R})} d(A, B),$$
$$Val_S(A) = Val_S(B), Amb_S(A) = Amb_S(B), \tag{3.7}$$

unde $A \in F(\mathbb{R})$ este fixat, $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)], \alpha \in [0, 1]$ iar funcţia de reducere S este dată prin $S(\alpha) = 1 - (1 - \alpha)^{1/s}, s > 0$. Ţinând cont de discuţia de la începutul acestei secţiuni precum şi de Propoziţia 2.1.9, problema de minim este echivalentă cu

$$\min_{B \in F^{s,s}(\mathbb{R})} d\left(A_{s,s}^e, B\right),$$
$$Val_S\left(A_{s,s}^e\right) = Val_S(B), Amb_S\left(A_{s,s}^e\right) = Amb_S(B), \tag{3.8}$$

unde $A_{s,s}^e = [l_e, u_e, x_e, y_e]_{s,s}$ este aproximarea parametrică extinsă de tipul (s, s) a lui A. După calcule simple, (3.8) devine o problemă de minim în $\mathbb{R}^4$,

$$\min_{l,u,x,y \in \mathbb{R}} \left((l_e - l)^2 + (u_e - u)^2 + \tfrac{s}{(s+2)(s+1)^2}\left((x_e - x)^2 + (y_e - y)^2\right)\right), \tag{3.9}$$

$$u + l + \frac{s}{(1+s)(2+s)}(x - y) = u_e + l_e + \frac{s}{(1+s)(2+s)}(x_e - y_e), \tag{3.10}$$

$$u - l - \frac{s}{(1+s)(2+s)}(x + y) = u_e - l_e - \frac{s}{(1+s)(2+s)}(x_e + y_e), \tag{3.11}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, l + \frac{s}{s+1}x \leq u - \frac{s}{s+1}y. \tag{3.12}$$

Condiţiile (3.10) şi (3.11) implică $u - u_e = \frac{s}{(1+s)(2+s)}(y - y_e)$ şi $l - l_e = \frac{s}{(1+s)(2+s)}(x_e - x)$, astfel, dacă (l_0, u_0, x_0, y_0) este o soluţie a problemei (3.9)-(3.12) atunci în mod necesar (x_0, y_0) este o soluţie a problemei

$$\min_{x,y \in \mathbb{R}} \left((x_e - x)^2 + (y_e - y)^2\right),$$
$$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq \frac{2+s}{s}(u_e - l_e) - \frac{1}{1+s}(x_e + y_e),$$

ce reprezintă o problemă de minim în $\mathbb{R}^2$ în raport cu metrica Euclidiană din $\mathbb{R}^2$. Se demonstrează uşor că această problemă are soluţie unică. În primul rând, după unele calcule elementare (vezi şi ecuaţiile (2.1)-(2.3)) obţinem

$$\begin{aligned} & \frac{2+s}{s}(u_e - l_e) - \frac{1}{1+s}(x_e + y_e) \\ = \; & \frac{(2+s)(1+s)}{s}\int_0^1 (A_U(\alpha) - A_L(\alpha))\left(1 - (1-\alpha)^{1/s}\right)d\alpha \geq 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

şi de aici rezultă că de fapt avem o problemă de minimizare a distanţei Euclidiene în raport cu o mulţime nevidă convexă şi închisă ceea ce înseamnă că soluţia este proiecţia ortogonală a lui (x_e, y_e) pe această mulţime.

Când $s = 1$ soluţia problemei de mai sus reprezintă aproximarea trapezoidală care conservă valoarea şi ambiguitatea. Concluzionând, obţinem următorul rezultat de existenţă şi unicitate.

Teorema 3.4.2 *Să considerăm funcţia de reducere S, $S(\alpha) = 1 - (1-\alpha)^{1/s}$, $s > 0$. Atunci pentru oricare $A \in F(\mathbb{R})$ există un unic număr fuzzy parametric de tipul (s,s) notat cu $\Psi^s_{AV}(A)$, care verifică $Amb_S(A) = Amb_S(\Psi^s_{AV}(A))$, $Val_S(A) = Val_S(\Psi^s_{AV}(A))$ şi dacă B este un număr fuzzy parametric de tipul (s,s) ce verifică $Amb_S(A) = Amb_S(B)$, $Val_S(A) = Val_S(B)$, atunci avem $d(A, \Psi^s_{AV}(A)) \leq d(A,B)$. Deci, $\Psi^s_{AV}(A)$ este aproximarea parametrică de tipul (s,s) a lui A în raport cu metrica d ce conservă valoarea şi ambiguitatea lui A în raport cu funcţia de reducere S.*

Operatorul $\Psi^s_{AV} : F(\mathbb{R}) \rightarrow F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ se va numi operator parametric (de tipul (s,s)) de aproximare care conservă valoarea şi ambiguitatea în raport cu funcţia de reducere S.

3.5 Aproximări trapezoidale cu conservarea intervalului de expectanţă

Folosind cazul general al aproximării parametrice vom deduce problema de minim a cărei soluţia ne va da soluţia problemei aproximării trapezoidale cu conservarea intervalului de expectanţă (vezi şi [83]).

În această secţiune, pentru un număr fuzzy A fixat, suntem interesaţi în găsirea unui număr fuzzy trapezoidal notat cu $T_{EI}(A)$ cu proprietatea că dacă T este un număr fuzzy trapezoidal astfel încât $EI(A) = EI(T)$ atunci $d(A, T_{EI}(A) \leq d(A,T)$ unde ca de obicei d reprezintă distanţa Euclidiană între numere fuzzy. Din Teorema 3.4.1 considerând acolo $s_L = s_R = 1$, ştim că aproximarea trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă întotdeauna există şi este unică. Astfel, putem defini operatorul $T_{EI} : F(\mathbb{R}) \rightarrow F^T(\mathbb{R})$, care se va numi operatorul de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă. Mai întâi să observăm că $[l,u,x,y]_{1,1} = [l,u,x,y]$ ori de câte ori cvadruplul (l,u,x,y) reprezintă un număr fuzzy trapezoidal din moment ce formulele (1.23)-(1.24) devin formulele (1.12) atunci când $s_L = s_R = 1$. Similar, observăm că în acest caz particular coordonatele lui $A^e_{1,1}$ coincid cu coordonatele lui $T_e(A)$ pentru fiecare număr fuzzy A. Reamintim că $T_e(A)$ reprezintă aproximarea trapezoidală extinsă a lui A , aproximare ce se poate calcula folosind formulele (2.4)-(2.5). Astfel, din problema de minim care dă soluţia aproximării parametrice care conservă intervalul de expectanţă obţinem cu uşurinţă problema de minim care dă soluţia aproximării trapezoidale ce conservă intervalul de expectanţă. Asta înseamnă că urmând paşii făcuţi în cazul aproximării parametrice vom obţine soluţia în cazul aproximării trapezoidale. În aceste condiţii fie A un număr fuzzy oarecare şi să notăm cu $T_{EI}(A) = [l_0, u_0, x_0, y_0]$ aproximarea sa trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă. Din relaţiile (3.5)-(3.6) (pentru $s_L = s_R = 1$) rezultă că (l_0, u_0, x_0, y_0) este soluţia problemei de minim

$$\min_{l,u,x,y \in \mathbb{R}} \left((l_e - l)^2 + (u_e - u)^2 + \tfrac{1}{12}(x_e - x)^2 + \tfrac{1}{12}(y_e - y)^2 \right),$$
$$l = l_e, u = u_e, x \geq 0, y \geq 0, l + \tfrac{1}{2}x \leq u - \tfrac{1}{2}y.$$

Obţinem imediat două componente ale lui $T_{EI}(A)$, $l_0 = l_e$ şi $u_0 = u_e$. Celelalte două componente reprezintă soluţia problemei de minim

$$\min_{l,u,x,y \in \mathbb{R}} (x_e - x)^2 + (y_e - y)^2,$$
$$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2u_e - 2l_e.$$

Rezultă uşor că perechea (x_0, y_0) este proiecţia ortogonală a lui (x_e, y_e) pe mulţimea nevidă, convexă şi închisă M_A, în raport cu metrica Euclidiană din $\mathbb{R}^2$ notată cu d_E (vezi Fig. 3.1), unde

$$M_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2u_e - 2l_e\}. \tag{3.14}$$

În consecinţă putem scrie

$$(x_0, y_0) = P_{M_A}(x_e, y_e). \tag{3.15}$$

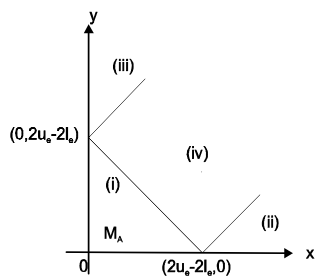

Fig. 3.1

Obţinem un algoritm (în concordanţă cu $(i), (ii), (iii)$ şi (iv) din Fig. 3.1) în 4 paşi după cum urmează.

Teorema 3.5.1 *([83], Teorema 4.2.) Fie numărul fuzzy A, $A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$, $\alpha \in [0,1]$, $T_e(A) = [l_e, u_e, x_e, y_e]$, aproximarea trapezoidală extinsă a lui A şi fie $T_{EI}(A) = [l_0, u_0, x_0, y_0]$, aproximarea trapezoidală (în raport cu metrica d) a lui A care conservă intervalul de expectanţă.*

(i) Dacă $x_e + y_e - 2u_e + 2l_e \leq 0$, atunci

$$l_0 = l_e, u_0 = u_e, x_0 = x_e, y_0 = y_e.$$

(ii) Dacă $x_e - y_e - 2u_e + 2l_e \geq 0$, atunci

$$l_0 = l_e, u_0 = u_e, x_0 = 2u_e - 2l_e, y_0 = 0.$$

(iii) Dacă $x_e - y_e + 2u_e - 2l_e \leq 0$, atunci

$$l_0 = l_e, u_0 = u_e, x_0 = 0, y_0 = 2u_e - 2l_e.$$

(iv) Dacă

$$x_e + y_e - 2u_e + 2l_e \geq 0, \tag{3.16}$$
$$x_e - y_e - 2u_e + 2l_e \leq 0, \tag{3.17}$$
$$x_e - y_e + 2u_e - 2l_e \geq 0, \tag{3.18}$$

atunci

$$l_0 = l_e, u_0 = u_e, \tag{3.19}$$
$$x_0 = -l_e + u_e + \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e, \tag{3.20}$$
$$y_0 = -l_e + u_e - \frac{1}{2}x_e + \frac{1}{2}y_e. \tag{3.21}$$

În teorema de mai sus cazurile nu sunt distincte cum apar ele în articolul lui Yeh deoarece folosind inegalităţile nestricte de mai sus vom putea demonstra continuitatea Lipschitz a operatorului T_{EI}.

Acum, folosind ecuaţiile (1.15)-(1.16) şi (2.4)-(2.5), putem scrie teorema de mai sus folosind notaţiile clasice pentru numere fuzzy trapezoidale, rezultat ce se găseşte în Teorema 7 din articolul [13].

3.6 Aproximări trapezoidale care conservă ambiguitatea şi valoarea

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [17].

În această secţiune, pentru un număr fuzzy A suntem interesaţi în găsirea unui număr fuzzy trapezoidal notat cu $T_{AV}(A)$ cu proprietatea că dacă T este un număr fuzzy trapezoidal ce satisface $Val(A) = Val(T)$ şi $Amb(A) = Amb(T)$, atunci $d(A, T_{AV}(A) \leq d(A, T)$. Din Teorema 3.4.2, luând acolo $s = 1$, ştim că aproximarea trapezoidală care conservă valoarea şi ambiguitatea întotdeauna există şi este unică. Astfel putem defini operatorul $T_{AV} : F(\mathbb{R}) \rightarrow F^T(\mathbb{R})$ care se va numi operatorul de aproximare trapezoidală ce conservă ambiguitatea şi valoarea. Să alegem acum un număr fuzzy A oarecare şi să notăm cu $T_{AV}(A) = [l_0, u_0, x_0, y_0]$ aproximarea sa trapezoidală care conservă ambiguitatea şi valoarea. Din relaţiile (3.9)-(3.12) (pentru $s = 1$) rezultă că (l_0, u_0, x_0, y_0) este soluţia problemei de minim

$$\min_{l,u,x,y\in\mathbb{R}} \left((l_e - l)^2 + (u_e - u)^2 + \tfrac{1}{12} \left((x_e - x)^2 + (y_e - y)^2 \right) \right),$$
$$u + l + \frac{1}{6}(x - y) = u_e + l_e + \frac{1}{6}(x_e - y_e),$$
$$u - l - \frac{1}{6}(x + y) = u_e - l_e - \frac{1}{6}(x_e + y_e),$$
$$x \geq 0, y \geq 0, l + \frac{1}{2}x \leq u - \frac{1}{2}y.$$

Ca şi în cazul aproximării cu conservarea intervalului de expectanţă, putem substitui două componente ale soluţiei,

$$l_0 = -\frac{1}{6}(x_0 - x_e) + l_e \tag{3.22}$$

şi

$$u_0 = \frac{1}{6}(y_0 - y_e) + u_e. \tag{3.23}$$

De aceea, este suficient să găsim problema de minim care dă soluţia (x_0, y_0). Substituind l şi u în problema precedentă, după calcule simple obţinem că (x_0, y_0) este soluţia problemei de minim

$$\min \left((x - x_e)^2 + (y - y_e)^2 \right), \tag{3.24}$$

cu restricţiile

$$x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e.$$

Deja ştim din relaţia (3.13) luând acolo $s = 1$, că mulţimea $M_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leqslant 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e\}$, este o submulţime nevidă, convexă şi închisă a lui $\mathbb{R}^2$ ceea ce implică faptul că (x_0, y_0) este proiecţia ortogonală a lui (x_e, y_e) pe M_A.

Deoarece $x_e \geq 0$ şi $y_e \geq 0$, următoarele cazuri (în concordanţă cu $(i), (ii), (iii)$ şi (iv) din Fig. 3.1 cu modificarea că baza triunghiului intersectează axele de coordonate în $(3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e, 0)$ şi respectiv $(0, 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e)$) sunt posibile pentru a determina (x_0, y_0), reprezentând proiecţia ortogonală a lui (x_e, y_e) pe M_A.

(i) $(x_e, y_e) \in M_A$, ceea ce este echivalent cu $x_e + y_e \leqslant 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e$.

Inegalitatea este echivalentă cu $x_e + y_e \leqslant 2(u_e - l_e)$ şi obţinem $P_{M_A}(x_e, y_e) = (x_e, y_e)$, adică

$$x_0 = x_e, y_0 = y_e.$$

(ii) $\frac{3}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e - 3u_e + 3l_e > 0$.

Atunci $P_{M_A}(x_e, y_e) = \left(3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e, 0\right)$, adică

$$x_0 = 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e, y_0 = 0.$$

(iii) $\frac{1}{2}x_e - \frac{3}{2}y_e + 3u_e - 3l_e < 0$.

Atunci $P_{M_A}(x_e, y_e) = \left(0, 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e\right)$, adică

$$x_0 = 0, y_0 = 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e.$$

(iv) (x_e, y_e) nu este în cazurile $(i) - (iii)$, ceea ce este echivalent cu

$$\begin{aligned} x_e + y_e &> 2(u_e - l_e), \\ \frac{3}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e - 3u_e + 3l_e &\leq 0, \\ \frac{1}{2}x_e - \frac{3}{2}y_e + 3u_e - 3l_e &\geq 0. \end{aligned}$$

Atunci (x_0, y_0) este proiecţia ortogonală a lui (x_e, y_e) pe dreapta $x + y = 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e$, şi obţinem

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{3}{2}u_e - \frac{3}{2}l_e + \frac{1}{4}x_e - \frac{3}{4}y_e, \\ y_0 &= \frac{3}{2}u_e - \frac{3}{2}l_e - \frac{3}{4}x_e + \frac{1}{4}y_e. \end{aligned}$$

Este uşor de verificat că în cazurile de mai sus putem lua inegalităţi nestricte (se observă uşor folosind interpretarea geometrică din Fig. 3.1). Apoi, folosind relaţiile (3.22)-(3.23) şi ecuaţiile (1.15)-(1.16) şi (2.4)-(2.5), obţinem uşor (vezi [17], Corolarul 8) algoritmii de calcul ai aproximării folosind notaţiile standard pentru numere fuzzy trapezoidale.

3.7 Aproximări trapezoidale care conservă ambiguitatea

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [22].

În această secţiune vom demonstra că pentru orice număr fuzzy A există un unic număr fuzzy trapezoidal $T_{Amb}(A)$ astfel încât $Amb(A) = Amb(T_{Amb}(A))$ şi care este cel mai apropiat de A în raport cu metrica d dintre toate numerele fuzzy trapezoidale care au aceeaşi ambiguitate ca şi A. Asta înseamnă că putem defini operatorul $T_{Amb} : F(\mathbb{R}) \rightarrow F^T(\mathbb{R})$ care se va numi de acum înainte operatorul de aproximare trapezoidală care conservă ambiguitatea. Din Corolarul 2.1.3 şi din Propoziţia

2.1.9 (cazul $s = 1$) rezultă că problema determinării aproximării trapezoidale a lui A care conservă ambiguitatea este echivalentă cu problema determinării unui număr fuzzy trapezoidal $T_{Amb}(A)$ astfel încât $Amb(T_{Amb}(A)) = Amb(T_e(A))$ şi $d(T_{Amb}(A), T_e(A)) \leq d(T, T_e(A))$ pentru fiecare $T \in F^T(\mathbb{R})$ ce satisface $Amb(T) = Amb(T_e(A))$. De aceea, $T_{Amb}(A) = [l_0, u_0, x_0, y_0]$, este o soluţie a problemei în discuţie dacă şi numai dacă cvadruplul $(l_0, u_0, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^4$ este o soluţie a problemei de minim

$$\min\left((l - l_e)^2 + (u - u_e)^2 + \frac{1}{12}(x - x_e)^2 + \frac{1}{12}(y - y_e)^2\right), \tag{3.25}$$

cu restricţiile

$$x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2(u - l), \tag{3.26}$$
$$6u - 6l - x - y = 6u_e - 6l_e - x_e - y_e. \tag{3.27}$$

Condiţia (3.27) implică

$$u - l = u_e - l_e + \frac{1}{6}(x + y) - \frac{1}{6}(x_e + y_e)$$

şi

$$l - l_e = u - u_e - \frac{1}{6}(x - x_e) - \frac{1}{6}(y - y_e), \tag{3.28}$$

astfel că problema (3.25)-(3.27) devine

$$\min F(l, u, x, y),$$

unde

$$\begin{aligned} F(l, u, x, y) &= 2(u - u_e)^2 + \frac{1}{9}(x - x_e)^2 + \frac{1}{9}(y - y_e)^2 - \frac{1}{3}(u - u_e)(x - x_e) \\ &\quad -\frac{1}{3}(u - u_e)(y - y_e) + \frac{1}{18}(x - x_e)(y - y_e) \end{aligned}$$

cu restricţiile

$$x \geq 0, y \geq 0, 2x + 2y \leq 6u_e - 6l_e - x_e - y_e. \tag{3.29}$$

După calcule elementare obţinem

$$F(l, u, x, y) = 2\left(u - u_e - \frac{1}{12}(x - x_e + y - y_e)\right)^2 + \frac{7}{72}\left[(x - x_e)^2 + (y - y_e)^2\right] + \frac{1}{36}(x - x_e)(y - y_e).$$

Deoarece condiţiile (3.29) sunt independente de u şi ţinând cont de (3.28), rezultă că $T_{Amb}(A) = [l_0, u_0, x_0, y_0]$ este aproximarea trapezoidală a lui A ce conservă ambiguitatea dacă şi numai dacă

$$u_0 = u_e + \frac{1}{12}(x_0 - x_e + y_0 - y_e), \tag{3.30}$$
$$l_0 = l_e - \frac{1}{12}(x_0 - x_e + y_0 - y_e) \tag{3.31}$$

şi (x_0, y_0) este o soluţie a problemei de minim

$$\min\left((7(x - x_e)^2 + 7(y - y_e)^2 + 2(x - x_e)(y - y_e)\right), \tag{3.32}$$
$$x \geq 0, y \geq 0, 2x + 2y \leq 6u_e - 6l_e - x_e - y_e. \tag{3.33}$$

Fie

$$M_A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 2x + 2y \leq 6u_e - 6l_e - x_e - y_e\}$$

şi fie d_E metrica Euclidiană din $\mathbb{R}^2$.

Elementul cheie în demonstrarea următoarei teoreme ce rezolvă problema de mai sus este mulţimea M_A ce reprezintă suprafaţa triunghiului cu vârfurile $(0, 0)$, $(3u_e - 3l_e - 1/2x_e - 1/2y_e, 0)$ şi $(0, 3u_e - 3l_e - 1/2x_e - 1/2y_e)$ (vezi din nou Fig. 3.1 cu modificarea că baza triunghiului intersectează axele de coordonate în $(3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e, 0)$ şi respectiv $(0, 3u_e - 3l_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e)$). Rezultatul de bază în obţinerea algoritmilor de calcul ai aproximării trapezoidale care conservă ambiguitatea constă în următoarea teoremă.

Teorema 3.7.1 *([22], Teorema 9) Problema (3.32)-(3.33) are soluţia unică (x_0, y_0), unde $(x_0, y_0) = P_{M_A}(x_e, y_e)$ iar $P_M(a, b)$ reprezintă proiecţia ortogonală a lui $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pe mulţimea nevidă $M \subset \mathbb{R}^2$, în raport cu metrica Euclidiană d_E pe $\mathbb{R}^2$.*

Teorema 3.7.1, împreună cu (3.30) şi (3.31), ne dau următoarea metodă pentru a calcula $T_{Amb}(A) = [l_0, u_0, x_0, y_0]$, aproximarea trapezoidală a lui A care conservă ambiguitatea (vezi Fig. 3.1 ţinând cont de modificarea menţionată mai sus).

(i) $(x_e, y_e) \in M_A$, ceea ce este echivalent cu $-2l_e + 2u_e - x_e - y_e \geq 0$. Atunci

$$x_0 = x_e, y_0 = y_e, l_0 = l_e, u_0 = u_e.$$

Dacă $(x_e, y_e) \notin M_A$ atunci următoarele situaţii sunt posibile.

(ii) Dacă $6l_e - 6u_e + 3x_e - y_e \geq 0$, atunci

$$x_0 = -3l_e + 3u_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e, y_0 = 0, \tag{3.34}$$

$$u_0 = -\frac{1}{4}l_e + \frac{5}{4}u_e - \frac{1}{8}x_e - \frac{1}{8}y_e, \tag{3.35}$$

$$l_0 = \frac{5}{4}l_e - \frac{1}{4}u_e + \frac{1}{8}x_e + \frac{1}{8}y_e. \tag{3.36}$$

(iii) Dacă $-6l_e + 6u_e + x_e - 3y_e \leq 0$, atunci

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, y_0 = -3l_e + 3u_e - \frac{1}{2}x_e - \frac{1}{2}y_e, \\ u_0 &= -\frac{1}{4}l_e + \frac{5}{4}u_e - \frac{1}{8}x_e - \frac{1}{8}y_e, \\ l_0 &= \frac{5}{4}l_e - \frac{1}{4}u_e + \frac{1}{8}x_e + \frac{1}{8}y_e. \end{aligned}$$

(iv) Dacă

$$\begin{aligned} -2l_e + 2u_e - x_e - y_e &\leq 0, \\ 6l_e - 6u_e + 3x_e - y_e &\leq 0, \\ -6l_e + 6u_e + x_e - 3y_e &\geq 0, \end{aligned}$$

atunci

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{3}{2}l_e + \frac{3}{2}u_e + \frac{1}{4}x_e - \frac{3}{4}y_e, \\ y_0 &= -\frac{3}{2}l_e + \frac{3}{2}u_e - \frac{3}{4}x_e + \frac{1}{4}y_e, \\ u_0 &= -\frac{1}{4}l_e + \frac{5}{4}u_e - \frac{1}{8}x_e - \frac{1}{8}y_e, \\ l_0 &= \frac{5}{4}l_e - \frac{1}{4}u_e + \frac{1}{8}x_e + \frac{1}{8}y_e. \end{aligned}$$

Ţinând cont de (1.15)-(1.16) şi (2.4)-(2.5), ca şi în cazul operatorilor din secţiunile precedente, putem calcula cu uşurinţă $T_{Amb}(A) = (t_1, t_2, t_3, t_4)$ folosind notaţiile standard pentru numerele fuzzy trapezoidale.

3.8 Aproximări trapezoidale care conservă intervalul de expectanţă ponderat

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [28].

În secţiunile precedente am discutat diferite tipuri de aproximări trapezoidale în raport cu metrica Euclidiană d. În această secţiune vom demonstra că pentru un număr fuzzy A oarecare există un unic număr fuzzy trapezoidal notat cu $T_{EI,\lambda}(A)$ care este cel mai apropiat de A în raport cu o metrică ponderată $d_\lambda, \lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$, dintre acelea care conservă intervalul de expectanţă ponderat al lui A. Reamintim, intervalul de expectanţă ponderat al lui A este (vezi Definiţia 1.12.1)

$$EI^\lambda(A) = \left[\frac{1}{a}\int_0^1 A_L(\alpha)\lambda_L(\alpha)d\alpha, \frac{1}{b}\int_0^1 A_U(\alpha)\lambda_U(\alpha)d\alpha\right],$$

unde $a = \int_0^1 \lambda_L(\alpha)d\alpha, b = \int_0^1 \lambda_U(\alpha)d\alpha$.

Dacă $T_{e,\lambda}(A) = [l_e, u_e, x_e, y_e]_\lambda$ (folosim reprezentarea dată în (1.21)) este aproximarea extinsă ponderată a lui A, unde l_e, u_e, x_e, y_e sunt date în (2.9)-(2.10) (vezi şi formulele (1.18)-(1.20)) atunci după calcule simple obţinem $EI^w(A) = EI^w(T_{e,\lambda}(A)) = [l_e, u_e]$.

Acum ţinând cont de Teorema 2.1.6 precum şi de inegalitatea de mai sus, problema determinării celui mai apropiat (în raport cu metrica d_λ) număr fuzzy trapezoidal faţă de numărul fuzzy A dintre cele cu acelaşi interval de expectanţă ponderat ca şi A, este echivalentă cu problema

$$\min d_\lambda\left(T_{e,\lambda}(A), [l, u, x, y]\right),$$

cu restricţiile

$$\begin{aligned} &EI^w(T_e(A)) = EI^w\left([l, u, x, y]\right), \\ &x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2(u - l). \end{aligned}$$

După calcule simple problema de mai sus devine

$$a\left(l_e - l - x\left(\omega_L - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + b\left(u_e - u + y\left(\omega_U - \frac{1}{2}\right)\right)^2 + c\left(x_e - x\right)^2 + d(y_e - y)^2 \to \min,$$

cu restricţiile

$$\begin{aligned} &l_e = l + x\left(\omega_L - \frac{1}{2}\right), u_e = u - y\left(\omega_U - \frac{1}{2}\right), \\ &x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 2\left(u - l\right). \end{aligned}$$

Această problemă este echivalentă cu

$$\begin{aligned} &c\left(x_e - x\right)^2 + d\left(y_e - y\right)^2 \to \min, \\ &x \geq 0, y \geq 0, x\left(1 - \omega_L\right) + y\left(1 - \omega_U\right) \leq u_e - l_e \end{aligned} \tag{3.37}$$

şi

$$l = l_e - x\left(\omega_L - \frac{1}{2}\right), u = u_e + y\left(\omega_U - \frac{1}{2}\right). \tag{3.38}$$

Problema (3.37) are soluţie unică. Într-adevăr, să considerăm produsul scalar (este important aici că $c > 0$ şi $d > 0$) $\langle\cdot,\cdot\rangle$ din $\mathbb{R}^2$ definit prin $\langle\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)\rangle = cx_1x_2 + dy_1y_2$. Dacă $\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right) \in \mathbb{R}^2$ atunci

$$D^2\left(\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right)\right) = \langle\left(x_1 - x_2, y_1 - y_2\right), \left(x_1 - x_2, y_1 - y_2\right)\rangle = c\left(x_1 - x_2\right)^2 + d\left(y_1 - y_2\right)^2,$$

determină o distanţă pe $\mathbb{R}^2$, astfel $\left(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ este un spaţiu Hilbert. Fie acum mulţimea

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x\left(1 - \omega_L\right) + y\left(1 - \omega_U\right) \leq u_e - l_e\right\}.$$

Deoarece Ω este o submulţime convexă şi închisă a lui $\mathbb{R}^2$, rezultă că problema (3.37) are soluţie unică, şi anume proiecţia lui $(x_e, y_e) \in \mathbb{R}^2$ pe Ω în raport cu D. Obţinem imediat următorul rezultat central al acestei secţiuni care se găseşte şi în [28], dar nu sub forma unei teoreme.

Teorema 3.8.1 *Pentru fiecare număr fuzzy A există un unic număr fuzzy trapezoidal $T_{EI,\lambda}(A)$, care este cel mai apropiat de A în raport cu metrica d_λ, dintre toate numerele fuzzy trapezoidale cu acelaşi interval de expectanţă ponderat ca şi A.*

3.9 Aproximări trapezoidale ponderate care conservă nucleul unui număr fuzzy

Nucleul unui număr fuzzy reprezintă una dintre cele mai importante caracteristici ale sale. Toate operaţiile algebrice între numere fuzzy devin operaţii algebrice obişnuite în raport cu nucleul numărului fuzzy. De aceea este o idee bună să găsim reprezentări mai simple a numerelor fuzzy astfel încât nucleul să fie conservat. Următorul algoritm pentru a calcula aproximările trapezoidale ponderate care conservă nucleul, a fost propus în lucrarea [6]. În lucrarea menţionată, autorii folosesc o pondere $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ unde f este pozitivă, crescătoare şi în plus $\int_0^1 f(\alpha)d\alpha = 1/2$. Totuşi, demonstraţiile din lucrarea [6] nu folosesc aceste presupuneri suplimentare şi de aceea în această secţiune considerăm ponderi arbitrare ce trebuie doar să fie strict pozitive pe $(0, 1)$ şi integrabile pe $[0, 1]$.

Teorema 3.9.1 *([6], formulele (3.15)) Fie numărul fuzzy* $A, A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)], \alpha \in [0,1]$, *şi fie*

$$T_{c,d_{f,f}}(A) = (t_1(A), t_2(A), t_3(A), t_4(A)) = (t_1, t_2, t_3, t_4),$$

aproximarea sa trapezoidală ponderată (în raport cu metrica $d_{f,f}$ *unde* $d_{f,f}$ *înseamnă metrica ponderată de tip* L_2, d_λ, *cu* $\lambda = (f, f)$*) care conservă nucleul. Atunci avem*

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{-\int_0^1 (\alpha-1)A_L(\alpha)f(\alpha)d\alpha + A_L(1)\int_0^1 \alpha(\alpha-1)f(\alpha)d\alpha}{\int_0^1 (\alpha-1)^2 f(\alpha)d\alpha}, \\ t_2 &= A_L(1), t_3 = A_U(1), \\ t_4 &= \frac{-\int_0^1 (\alpha-1)A_U(\alpha)f(\alpha)d\alpha + A_U(1)\int_0^1 \alpha(\alpha-1)f(\alpha)d\alpha}{\int_0^1 (\alpha-1)^2 f(\alpha)d\alpha}. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Când $f(\alpha) = 1$ pentru fiecare $\alpha \in [0,1]$, obţinem aproximarea trapezoidală care conservă nucleul în raport cu metrica Euclidiană d.

Corolarul 3.9.2 *([6], formulele (3.17)) Fie* $A, A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)], \alpha \in [0,1]$, *un număr fuzzy şi fie*

$$T_{c,d}(A) = (t_1(A), t_2(A), t_3(A), t_4(A)) = (t_1, t_2, t_3, t_4),$$

aproximarea sa trapezoidală care conservă nucleul în raport cu metrica Euclidiană d. *Atunci*

$$\begin{aligned} t_1 &= -3\int_0^1 (\alpha-1)A_L(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}A_L(1), \\ t_2 &= A_L(1), t_3 = A_U(1), \\ t_4 &= -3\int_0^1 (\alpha-1)A_U(\alpha)d\alpha - \frac{1}{2}A_U(1). \end{aligned} \tag{3.40}$$

În comparaţie cu operatorii din secţiunile precedente observăm că în cazul de faţă avem o formulă precisă. Apoi, prin calcule simple se verifică faptul că $T_{c,d_{f,f}}$ este liniar în raport cu adunarea şi înmulţirea cu scalari a numerelor fuzzy. Astfel, pentru orice pondere f avem $T_{c,d_{f,f}}(\lambda_1 A + \lambda_2 B) = \lambda_1 T_{c,d_{f,f}}(A) + \lambda_2 T_{c,d_{f,f}}(B)$, pentru fiecare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ şi $A, B \in F(\mathbb{R})$. Pe de altă parte orice număr fuzzy care nu este unimodal (vezi secţiunea 4.7 din capitolul următor) este punct de discontinuitate pentru aceşti operatori. Acest comportament nu este natural deoarece un operator de aproximare ar trebui să fie continuu. Dacă numărul fuzzy A este aproape de numărul fuzzy B atunci şi aproximările lor ar trebui să fie aproape una de alta.

3.10 Calculul aproximărilor trapezoidale

Folosind algoritmii din secţiunile precedente putem calcula diferite tipuri de aproximări trapezoidale. În continuare prezentăm câteva exemple simple. Începem cu operatorul T_{EI} menţionând că exemplele sunt luate din lucrarea [13].

Exemplul 3.10.1 *Să considerăm numărul fuzzy A unde $A_L(\alpha) = 2\alpha - 2$, $A_U(\alpha) = 1 - \sqrt{\alpha}, \alpha \in [0,1]$. Cazul (iv) din Teorema 3.5.1 se poate aplica pentru A. Aplicând algoritmul şi trecând apoi la notaţiile standard obţinem $T_{EI}(A) = \left(-\frac{59}{30}, -\frac{1}{30}, -\frac{1}{30}, \frac{7}{10}\right)$. Să considerăm acum numerele fuzzy de tip Bodjanova $B = (1,2,3,30)_2$ şi $C = (1,28,29,30)_2$ (vezi (1.4) pentru reprezentarea numerelor fuzzy de tip Bodjanova). După calcule simple rezultă că pentru B este valabil cazul (iii) al Teoremei 3.5.1 iar pentru C este valabil cazul (ii) al Teoremei 3.5.1. Astfel, aplicând algoritmul obţinem $T_{EI}(B) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{67}{3}\right)$ şi $T_{EI}(C) = \left(\frac{26}{3}, \frac{88}{3}, \frac{88}{3}, \frac{88}{3}\right)$.*

Continuăm cu exemple pentru operatorul T_{AV} care se găsesc în lucrarea [17].

Exemplul 3.10.2 *Să considerăm numerele fuzzy A şi B, unde $A_L(\alpha) = 2\alpha - 2$, $A_U(\alpha) = 1 - \sqrt{\alpha}, \alpha \in [0,1]$, şi $B_L(\alpha) = 2\alpha - 20$, $B_U(\alpha) = 1 - \sqrt{\alpha}, \alpha \in [0,1]$. Cazul (iv) din algoritmul de calcul al lui $T_{AV}(A)$ este aplicabil pentru A şi cazul (i) al algoritmului este aplicabil pentru B. Astfel, aplicând algoritmul obţinem $T_{AV}(A) = \left(-\frac{29}{30}, -\frac{1}{30}, -\frac{1}{30}, \frac{2}{3}\right)$ şi $T_{AV}(B) = \left(-20, -18, -\frac{1}{15}, \frac{11}{15}\right)$.*

Continuăm cu exemple pentru operatorul T_{Amb} care se găsesc în lucrarea [22].

Exemplul 3.10.3 *Să considerăm numerele fuzzy A şi B, unde $A = (1,2,3,4)_2$, $B = (1,2,4,35)_2$. Cazul (i) din algoritmul de calcul al lui $T_{Amb}(A)$ este aplicabil pentru A şi obţinem $T_{Amb}(A) = \left(\frac{19}{15}, \frac{31}{15}, \frac{44}{15}, \frac{56}{15}\right)$. Apoi, cazul (iv) din algoritmul de calcul al lui $T_{Amb}(B)$ este aplicabil pentru B şi obţinem $T_{Amb}(B) = \left(\frac{7}{5}, 2, 2, \frac{133}{5}\right)$.*

Capitolul 4

Proprietăţi ale operatorilor de aproximare fuzzy

Calitatea unui operator de aproximare trapezoidală, triunghiulară sau parametrică este importantă fără îndoială. Din acest motiv Grzegorzewski şi Mrówka ([62]) au propus o listă de criterii pe care un operator de aproximare trapezoidală ar trebui să le îndeplinească. Majoritatea acestor operatori satisfac proprietăţi importante cum ar fi: invarianţa faţă de translaţii sau scalari, sau evident criteriul identităţii. O altă proprietate importantă care ar trebui să fie satisfăcută de un operator de aproximare este continuitatea. Dacă numărul fuzzy A este apropiat de B atunci aşteptăm acelaşi lucru şi de la aproximările lor. Yeh ([82], [84], [85]) a demonstrat că operatorii de aproximare parametrică fără restricţii sunt neexpansivi. Ban şi Coroianu ([18]) au demonstrat că operatorul de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă este Lipschitz-continuu. Apoi, Coroianu ([40]) a găsit cea mai bună constantă Lipschitz a acestui operator. Recent, în lucrarea ([17]) s-a demonstrat că operatorul de aproximare trapezoidală care conservă valoarea şi ambiguitatea este Lipschitz-continuu dar cea mai bună constantă Lipschitz nu a fost găsită deoarece nu s-a putut adapta metoda folosită în cazul operatorului de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă. De aceea Coroianu a propus în lucrarea [41] o caracterizare a funcţiilor Lipschitz cu valori numere fuzzy, caracterizare care permite demonstrarea continuităţii Lipschitz pentru astfel de funcţii şi ca aplicaţie, cea mai bună constantă Lipschitz a operatorului de aproximare trapezoidală care conservă ambiguitatea şi valoarea a fost găsită în cele din urmă.

În primele secţiuni ale acestui capitol vom propune rezultate cantitative relativ la invarianţa faţă de translaţii respectiv scalari a operatorilor de aproximare fuzzy. În consecinţă vom obţine că majoritatea operatorilor de aproximare din capitolul precedent sunt invarianţi atât faţă de translaţii cât şi faţă de scalari. Apoi vom studia continuitatea acestor operatori. Aşa cum am menţionat deja vom determina cea mai bună constantă Lipschitz în cazul operatorului de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă respectiv a operatorului de aproximare trapezoidală care conservă valoarea şi ambiguitatea. Ca un rezultat negativ, vom demonstra că orice operator fuzzy cu valori numere fuzzy trapezoidale ce conservă nucleul este discontinuu în raport cu orice metrică ponderată de tip L_2 în orice număr fuzzy care nu este unimodal. În consecinţă orice operator de aproximare trapezoidală care conservă nucleul este discontinuu în orice număr fuzzy care nu este unimodal. Totuşi, dacă restrângem studiul continuităţii la mulţimea numerelor fuzzy unimodale atunci operatorii de aproximare trapezoidală care conservă nucleul sunt continui pe această mulţime. Astfel obţinem o caracterizare completă a continuităţii pentru aceşti operatori. În penultima secţiune, din moment ce majoritatea operatorilor de aproximare studiaţi (cu excepţia operatorilor de aproximare trapezoidală care conservă nucleul) nu sunt aditivi (vom da şi un rezultat general care implică absenţa aditivităţii), vom găsi estimări pentru defectul lor de aditivitate (în concordanţă cu definiţia dată în [29]) pentru diferiţi operatori de aproximare fuzzy iar în cazul operatorului de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă vom găsi cea mai bună estimare posibilă. În ultima secţiune a acestui capitol, discutăm despre aproximarea trapezoidală în raport cu agregarea, un alt topic important al zilelor noastre.

Acest capitol conţine contribuţii originale din lucrările [17]-[19], [21]-[24], [26], [28], [40]-[41].

4.1 Rezultate generale de invarianţă faţă de translaţii şi scalari

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [26]. Totuşi, Teorema 4.1.1 este mai generală faţă de varianta din [26].

Un operator $P : F(\mathbb{R}) \rightarrow F(\mathbb{R})$ se numeşte:

(i) invariant la translaţii dacă $P(A + z) = P(A) + z$ pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$ şi $z \in \mathbb{R}$;

(ii) invariant faţă de scalari dacă $P(\lambda A) = \lambda P(A)$ pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$.

O metrică D pe $F(\mathbb{R})$ se numeşte invariantă la translaţii dacă $D(A + z, B + z) = D(A, B)$, pentru fiecare $A, B \in F(\mathbb{R}), z \in \mathbb{R}$ şi invariantă faţă de scalari dacă $D(\lambda \cdot A, \lambda \cdot B) = |\lambda| D(A, B)$, pentru fiecare $A, B \in F(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Se poate verifica uşor că orice metrică ponderată de tipul L_2, $d_\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$, definită pe $F(\mathbb{R})$ este invariantă la translaţii iar dacă $\lambda_L = \lambda_U$, atunci d_λ este invariantă şi faţă de scalari.

Următoarele 2 teoreme ne vor permite să găsim clase largi de operatori de aproximare care sunt invarianţi faţă de translaţii sau scalari. Prima teoremă generalizează Teorema 1 din [26].

Teorema 4.1.1 *(vezi şi Teorema 1 din [26]) Fie D o metrică invariantă la translaţii definită pe $F(\mathbb{R})$ şi fie $P_k, k = \overline{1,n}$, parametri asociaţi numerelor fuzzy astfel încât $P_k(A + z) = P_k(A) + f_k(z)$, pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$, $k = \overline{1,n}$ şi $z \in \mathbb{R}$, unde, f_k, $k = \overline{1,n}$, sunt funcţii reale de variabilă reală. Dacă $\Omega \subset F(\mathbb{R})$ verifică $z + \Omega = \Omega, \forall z \in \mathbb{R}$ şi $\omega(A) \in \Omega$ este cel mai apropiat (din mulţimea Ω) număr fuzzy de $A \in F(\mathbb{R})$ (în raport cu D) care conservă $P_k, k \in \{1, ..., n\}$, adică $P_k(\omega(A)) = P_k(A), \forall k \in \{1, ..., n\}$, atunci $\omega(A) + z \in \Omega$ este cel mai apropiat (din mulţimea Ω) număr fuzzy de $A + z$ (în raport cu metrica D) care conservă $P_k, k = \overline{1,n}$, adică $P_k(\omega(A) + z) = P_k(A + z), \forall k \in \{1, ..., n\}$.*

Să menţionăm că în Teorema 1 din [26] se consideră doar cazul particular în care fiecare funcţie f_k este fie funcţia nulă fie funcţia identitate.

Teorema 4.1.2 *([26], Teorema 4) Fie D o metrică invariantă faţă de scalari definită pe $F(\mathbb{R})$ şi fie $P_k, k = \overline{1,n}$, parametri asociaţi numerelor fuzzy astfel încât $P_k(\lambda \cdot A) = \lambda P_k(A)$, pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$ sau $P_k(\lambda \cdot A) = |\lambda| P_k(A)$, pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$ şi $\lambda \in \mathbb{R}$. Dacă $\Omega \subset F(\mathbb{R})$ verifică $\lambda \cdot \Omega \subset \Omega, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ şi $\omega(A) \in \Omega$ este cel mai apropiat (din mulţimea Ω) număr fuzzy de $A \in F(\mathbb{R})$ (în raport cu D) care conservă $P_k, k \in \{1, ..., n\}$, adică $P_k(\omega(A)) = P_k(A), \forall k \in \{1, ..., n\}$, atunci $\lambda \cdot \omega(A) \in \Omega$ este cel mai apropiat (din mulţimea Ω) număr fuzzy de $\lambda \cdot A$ (în raport cu metrica D) care conservă $P_k, k = \overline{1,n}$, adică $P_k(\omega(\lambda \cdot A)) = P_k(\lambda \cdot A), \forall k \in \{1, ..., n\}$.*

Observaţia 4.1.3 *Ipoteza $\lambda \cdot \Omega \subset \Omega, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ în Teorema 4.1.2 precum şi ipoteza $z + \Omega = \Omega, \forall z \in \mathbb{R}$ în Teorema 4.1.1 sunt importante. Într-adevăr, dacă $s_L, s_R > 0, s_L \neq s_R$ şi $\Omega = F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$, atunci $\lambda \cdot \Omega \subsetneq \Omega$ când $\lambda < 0$. Operatorul $\omega : F(\mathbb{R}) \rightarrow \Omega$, unde $\omega(A)$ este cea mai bună aproximare a lui A relativ la mulţimea Ω în raport cu metrica Euclidiană d, nu este invariant la scalari (vezi [14], Teorema 12, (iii)) chiar dacă toate celelalte ipoteze ale Teoremei 4.1.2 sunt satisfăcute.*

4.2 Clase de operatori invarianţi faţă de translaţii/scalari

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [26].

Cele două teoreme din secţiunea precedentă sunt generale deoarece ne permit să găsim multe exemple de operatori invarianţi faţă de translaţii sau scalari. Aceste exemple includ aproape toţi operatorii din capitolul 3 şi în plus putem găsi şi alte exemple pe care nu s-a insistat în această teză.

Următorul corolar este o consecinţă a Teoremelor 4.1.1-4.1.2.

Corolarul 4.2.1 *([26], Corolarul 8) (i) Operatorul $O_{\mathbb{R}^c} : F(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^c$, unde $O_{\mathbb{R}^c}(A)$ este cel mai apropiat număr real de A în raport cu metrica Euclidiană d este invariant faţă de translaţii şi scalari.*

(ii) Operatorul $O_{\mathbb{I}} : F(\mathbb{R}) \to Int(\mathbb{R})$, unde $O_{\mathbb{I}}(A)$ este cel mai apropiat interval de A în raport cu d, este invariant faţă de translaţii şi scalari.

(iii) Operatorul $O_{\triangle} : F(\mathbb{R}) \to F^{\Delta}(\mathbb{R})$, unde $O_{\triangle}(A)$ este cel mai apropiat număr fuzzy triunghiular de A în raport cu d, este invariant faţă de translaţii şi scalari.

(iv) Operatorul $T_d : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$, unde $T_d(A)$ este cel mai apropiat număr fuzzy trapezoidal de A în raport cu d, este invariant faţă de translaţii şi scalari.

(v) Operatorul $\Psi_{s,s} : F(\mathbb{R}) \to F^{s,s}(\mathbb{R})$, unde $\Psi_{s,s}(A)$ este numărul fuzzy parametric de tipul (s,s) cel mai apropiat de A (pentru un $s > 0$) în raport cu d, este invariant faţă de translaţii şi scalari.

(vi) Operatorul $O_{\triangle^s} : F(\mathbb{R}) \to F^{\Delta s}(\mathbb{R})$, unde $O_{\triangle^s}(A)$ este numărul fuzzy triunghiular simetric cel mai apropiat de A în raport cu d, este invariant faţă de translaţii şi scalari.

În mod similar putem găsi multe alte exemple de operatori de aproximare fuzzy invarianţi faţă de translaţii şi scalari (vezi şi Corolarul 9 în [26]). În plus se poate demonstra uşor că operatorii T_{EI}, T_{AV} şi T_{Amb} din capitolul 3 verifică ipotezele Teoremelor 4.1.1-4.1.2 şi astfel sunt operatori invarianţi faţă de translaţii şi scalari.

4.3 Continuitatea Lipschitz a operatorilor de aproximare parametrică fără condiţii suplimentare

Această secţiune se bazează pe o abordare originală prin care se demonstrează mai simplu continuitatea unor operatori de aproximare parametrică sau trapezoidală din articolele [21], [82], [84]. Înainte de a aborda subiectul, avem nevoie de o lemă ajutătoare din teoria spaţiilor Hilbert. Reamintim că dacă A este o submulţime nevidă convexă şi închisă a unui spaţiu Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, atunci pentru $x \in X$ notăm cu $P_A(x)$ unicul element din A care satisface $D(x, P_A(x)) = \inf_{y\in A} D(x,y)$, unde D este metrica generată de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pe X.

Teorema 4.3.1 *(vezi de exemplu [82] Proprietatea 6.4) Dacă $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ este un spaţiu Hilbert şi A este o submulţime nevidă convexă şi închisă a lui X, atunci $d(P_A(x), P_A(y)) \leq d(x,y)$, $(\forall)$ $x, y \in X$. Aici d reprezintă metrica generată de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pe X.*

Să considerăm metrica ponderată d_λ, $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$ şi pentru $s_L > 0$, $s_R > 0$ fixate să considerăm operatorul ponderat de aproximare parametrică (vezi secţiunea 3.3) $\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R} : F(\mathbb{R}) \to F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$, unde $\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}(A) = A^*_{s_L,s_R}$ este numărul fuzzy parametric de tipul (s_L, s_R) cel mai apropiat de A în raport cu metrica d_λ. Din demonstraţia Corolarului 3.2.6, ştim că $(F(\mathbb{R}), d_\lambda, +, \cdot)$ se poate scufunda în spaţiul Hilbert $\left(\widetilde{F(\mathbb{R})}, \widetilde{d_\lambda}, \oplus, \odot\right)$, unde $\widetilde{F(\mathbb{R})} = L_2^{\lambda_L}[0,1] \times L_2^{\lambda_U}[0,1]$. Apoi, din Teorema 3.2.3 rezultă că $F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ este o submulţime nevidă convexă şi închisă a lui $\widetilde{F(\mathbb{R})}$ în topologia generată de $\widetilde{d_\lambda}$.

Acum, dacă A şi B reprezintă două numere fuzzy, deoarece le putem privi ca fiind elemente ale lui $\widetilde{F(\mathbb{R})}$, atunci din Teorema 4.3.1 rezultă că $\widetilde{d_\lambda}\left(P_{F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})}(A), P_{F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})}(B)\right) \leq \widetilde{d_\lambda}(A,B)$. Deoarece restricţia metricii $\widetilde{d_\lambda}$ la spaţiul $F(\mathbb{R})$ coincide cu d_λ şi deoarece din definiţia operatorului Ψ_{d_λ,s_L,s_R}, avem de fapt $\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}(A) = P_{F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})}(A)$ şi $\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}(B) = P_{F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})}(B)$, din relaţia de mai sus rezultă că $d_\lambda(\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}(A), \Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}(B)) \leq d_\lambda(A,B)$. În consecinţă obţinem următorul rezultat central al acestei secţiuni care se găseşte şi în lucrarea [84].

Teorema 4.3.2 *Operatorul ponderat de aproximare parametrică $\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R} : F(\mathbb{R}) \to F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ este neexpansiv, adică $d_\lambda(\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}(A), \Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}(B)) \leq d_\lambda(A,B)$, pentru fiecare $A, B \in F(\mathbb{R})$.*

Teorema de mai sus ne spune că operatorul Ψ_{d_λ,s_L,s_R} este Lipschitz-continuu cu constanta Lipschitz 1. Această constantă Lipschitz este cea mai bună posibilă deoarece pentru fiecare $A \in F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$ avem $\Psi_{d_\lambda,s_L,s_R}(A) = A$.

Din Teorema 4.3.2 obţinem cu uşurinţă rezultate similare pentru alţi operatori de aproximare fără alte restricţii. Prin raţionamente asemănătoare putem obţine chiar rezultate mai tari după cum urmează.

Teorema 4.3.3 *Operatorul de aproximare parametrică $\Psi_{s_L,s_R} : F(\mathbb{R}) \to F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$, verifică*

$$d(\Psi_{s_L,s_R}(A), \Psi_{s_L,s_R}(B)) \leq d(A^e_{s_L,s_R}, B^e_{s_L,s_R}) \leq d(A,B),$$

pentru orice numere fuzzy A, B. Aici $A^e_{s_L,s_R}$ reprezintă aproximarea parametrică extinsă a lui A de tipul (s_L, s_R) (vezi secţiunea 2.1).

În cazul particular în care $s_L = s_R = 1$, obţinem următorul corolar care poate fi rezumat şi din lucrarea [82].

Corolarul 4.3.4 *Fie $T_d : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$, operatorul de aproximare trapezoidală. Atunci avem*

$$d(T_d(A), T_d(B)) \leq d(T_e(A), T_e(B)) \leq d(A,B),$$

pentru orice numere fuzzy A şi B. Aici (vezi din nou secţiunea 2.1) $T_e(A)$ reprezintă aproximarea trapezoidală extinsă a lui A.

Este uşor de demonstrat că în Teorema 4.3.3 şi în Corolarul 4.3.4, avem cele mai bune constante Lipschitz posibile, deoarece pentru orice $s_L > 0$ şi $s_R > 0$ şi pentru fiecare $A \in F^{s_L,s_R}(\mathbb{R})$, avem $\Psi_{s_L,s_R}(A) = A$.

4.4 Cea mai bună constantă Lipschitz a operatorului de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [40].

Vom demonstra în această secţiune că operatorul de aproximare trapezoidală (în raport cu metrica Euclidiană d) care conservă intervalul de expectanţă, $T_{EI} : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$, este Lipschitz-continuu dar spre deosebire de operatorii de aproximare fără alte restricţii din secţiunea precedentă, T_{EI} nu este neexpansiv şi asta este valabil pentru majoritatea operatorilor de aproximare cu restricţii suplimentare cum este şi cazul operatorului T_{AV} din secţiunea următoare. Totuşi vom găsi cea mai bună constantă Lipschitz pentru T_{EI} (şi pentru T_{AV} în secţiunea următoare). Faptul că T_{EI} nu este neexpansiv are o explicaţie destul de simplă. Să discutăm puţin cazul operatorului de aproximare parametrică (în cazul cel mai general) Ψ_{d_λ,s_L,s_R}. În secţiunea precedentă s-a văzut că de fapt acest operator este un proiector pe o submulţime convexă şi închisă a spaţiului Hilbert $\left(\widetilde{F(\mathbb{R})}, \widetilde{d_\lambda}, \oplus, \odot\right)$ şi se ştie că astfel de proiectori sunt de fapt funcţii neexpansive. Dar în cazul operatorului T_{EI}, din definiţia lui $T_{EI}(A)$ rezultă că de fapt $T_{EI}(A)$ este proiecţia lui A pe o submulţime $\Omega(A) \subseteq F^T(\mathbb{R})$ (care depinde de A), unde $\Omega(A) = \{T \in F^T(\mathbb{R}) : EI(A) = EI(T)\}$. Este uşor să găsim numere fuzzy A şi B pentru care $\Omega(A) \neq \Omega(B)$. Acesta este motivul principal pentru care T_{EI} nu este neexpansiv. Următoarea teoremă ne furnizează cea mai bună constantă Lipschitz a operatorului T_{EI}.

Teorema 4.4.1 *([40], Teorema 7) Operatorul de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă* $T_{EI} : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$, *satisface inegalitatea* $d(T_{EI}(A), T_{EI}(B)) \leq \sqrt{\frac{5}{3}} d(A,B)$, *pentru fiecare* $A, B \in F(\mathbb{R})$.

Pentru a demonstra că rezultatul din Teorema 4.4.1 este cel mai bun posibil, trebuie să găsim $A, B \in F(\mathbb{R})$ astfel încât $d(A,B) > 0$ şi $d(T_{EI}(A), T_{EI}(B)) = \sqrt{\frac{5}{3}} d(A,B)$. Din exemplul următor rezultă că putem găsi astfel de numere fuzzy.

Exemplul 4.4.2 *([40], Exemplul 1) Fie numerele fuzzy A şi B date prin* $A_L(\alpha) = 90\sqrt{\alpha}+1$, $A_U(\alpha) = 93$ *şi* $B_L(\alpha) = 90\sqrt{\alpha}$, $B_U(\alpha) = 94$, $\alpha \in [0,1]$. *Deoarece cazul (ii) al Teoremei 3.5.1 este aplicabil atât pentru A cât şi pentru B, obţinem (cu notaţiile obişnuite)* $T_{EI}(A) = (29, 93, 93, 93), T_{EI}(B) = (26, 94, 94, 94)$. *Apoi avem* $d^2(T_{EI}(A), T_{EI}(B)) = \frac{10}{3}$. *Cum* $d^2(A,B) = 2$, *obţinem* $d(T_{EI}(A), T_{EI}(B)) = \sqrt{\frac{5}{3}} d(A,B)$.

Exemplul 4.4.3 *([40], Exemplul 3) Fie numărul fuzzy A,* $A_L(\alpha) = e^{\alpha^2}$, $A_U(\alpha) = 4 - \alpha$, $\alpha \in [0,1]$. *Vom calcula* $T_{EI}(A)$ *cu o eroare de cel mult* 10^{-2} *în raport cu metrica Euclidiană d. Pentru acest scop considerăm şirul de numere fuzzy* $(A_n)_{n\geq 1}$, $A_{n_L}(\alpha) = 1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{2!} + \frac{\alpha^6}{3!} + ... + \frac{\alpha^{2n}}{n!}$, $A_{n_U}(\alpha) = 4 - \alpha$. *Din formula lui Taylor obţinem* $e^\alpha = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + ... + \frac{\alpha^n}{n!} + \int_0^\alpha \frac{(\alpha-t)^n}{n!} e^t dt$, *pentru fiecare* $\alpha \in [0,1]$.

Apoi,

$$d^2(A_n, A) = \int_0^1 \left(e^{\alpha^2} - \left(1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^4}{2!} + \frac{\alpha^6}{3!} + ... + \frac{\alpha^{2n}}{n!}\right)\right)^2 d\alpha = \int_0^1 \left(\int_0^{\alpha^2} \frac{(\alpha^2 - t)^n}{n!} e^t dt\right)^2 d\alpha.$$

Din teorema de medie rezultă existenţa lui $c_n \in (0,1)$ *astfel încât*

$$\begin{aligned} d^2(A_n, A) &= e^{2c_n} \int_0^1 \left(\int_0^{\alpha^2} \frac{(\alpha^2 - t)^n}{n!} dt\right)^2 d\alpha = \frac{e^{2c_n}}{((n+1)!)^2} \int_0^1 \alpha^{4n+4} d\alpha \\ &= \frac{e^{2c_n}}{((n+1)!)^2(4n+5)} \leq \frac{e^2}{((n+1)!)^2(4n+5)}. \end{aligned}$$

Din Teorema 4.4.1 rezultă că $d^2(T_{EI}(A_n), T_{EI}(A)) \leq \frac{5e^2}{3((n+1)!)^2(4n+5)}$, *ceea ce pentru* $n \geq 4$ *implică* $d(T_{EI}(A_n), T_{EI}(A)) \leq 10^{-2}$. *Pentru* $n = 4$ *cazul (i) al Teoremei 3.5.1 este aplicabil pentru a calcula* $T_{EI}(A_4)$ *şi astfel obţinem* $T_{EI}(A_4) = \left(\frac{527}{756}, \frac{2104}{945}, 3, 4\right)$. *Astfel am obţinut o aproximare a lui* $T_{EI}(A)$ *cu o eroare de cel mult* 10^{-2}.

4.5 Cea mai bună constantă Lipschitz a operatorului de aproximare trapezoidală care conservă ambiguitatea şi valoarea

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [41].

În această secţiune vom găsi cea mai bună constantă Lipschitz a operatorului T_{AV} introdus în secţiunea 3.6.

Teorema 4.5.1 *([41], Teorema 11) Dacă $T_{AV} : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$ este operatorul de aproximare trapezoidală care conservă valoarea şi ambiguitatea atunci $d(T_{AV}(A), T_{AV}(B)) \leq \sqrt{\frac{10+2\sqrt{10}}{3}} d(A, B)$, pentru fiecare $A, B \in F(\mathbb{R})$, iar valoarea $\sqrt{\frac{10+2\sqrt{10}}{3}}$ este constanta Lipschitz cea mai bună posibilă a operatorului T_{AV}.*

Demonstraţia teoremei de mai sus se bazează pe faptul că spaţiul numerelor fuzzy se poate acoperi cu o familie finită de mulţimi convexe şi închise (ne referim la convexitate în sensul Definiţiei 2.3.1). Apoi se demonstrează că T_{AV} este Lipschitz-continuu pe fiecare mulţime a acoperirii, ceea ce pe baza Teoremei 2.4.2 implică faptul că T_{AV} este Lipschitz-continuu pe întreg domeniul. Apoi, folosind un exemplu concret se demonstrează că avem cea mai bună constantă Lipschitz posibilă.

În finalul acestei secţiuni vom folosi estimarea din Teorema 4.5.1 pentru a calcula cu o eroare rezonabilă aproximarea trapezoidală a unui număr fuzzy care conservă ambiguitatea şi valoarea în cazul în care nu putem aplica direct algoritmul. Vom considera acelaşi exemplu ca şi în cazul operatorului de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă (vezi Exemplul 4.4.3).

Exemplul 4.5.2 *([41], Exemplul 14) Fie numărul fuzzy A, $A_L(\alpha) = e^{\alpha^2}$, $A_U(\alpha) = 4 - \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Vom calcula $T_{AV}(A)$ cu o eroare de cel mult 10^{-2} în raport cu metrica Euclidiană d. Considerăm acelaşi şir de numere fuzzy ca şi în Exemplul 4.4.3, $(A_n)_{n\geq1}$, $(A_n)_L(\alpha) = 1 + \alpha^2 + \alpha^4/2! + \alpha^6/3! + ... + \alpha^{2n}/n!$, $A_U(\alpha) = 4 - \alpha$, $\alpha \in [0, 1]$. Mergând pe aceeaşi cale ca şi în cazul operatorului de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă (vezi Exemplul 4.4.3), obţinem că $d^2(A_n, A) \leq \frac{e^2}{((n+1)!)^2(4n+5)}, n \geq 1$. Aplicând Teorema 4.5.1 obţinem $d^2(T_{AV}(A_n), T_{AV}(A)) \leq \frac{10+2\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{e^2}{((n+1)!)^2(4n+5)}$. Evident, pentru $n \geq 5$ obţinem $d(T_{AV}(A_n), T_{AV}(A)) \leq 10^{-2}$. Pentru $n = 5$ cazul (i) al algoritmului de calcul al lui $T_{AV}(A_5)$ este aplicabil şi obţinem $T_{AV}(A_5) = (0.69595, 2.2291, 3, 4)$. Astfel am obţinut o aproximare a lui $T_{AV}(A)$ cu o eroare de cel mult 10^{-2}.*

4.6 Continuitatea Lipschitz a operatorului de aproximare trapezoidală care conservă ambiguitatea

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [22]. Menţionăm că în teorema 4.6.1 obţinem o constantă mai bună în comparaţie cu cea din lucrarea [22]. Abordarea este aceeaşi ca şi în cazul operatorului T_{AV}. Totuşi, determinarea celei mai bune constante Lipschitz rămâne o problemă deschisă.

Teorema 4.6.1 *Dacă $T_{Amb} : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$ este operatorul de aproximare trapezoidală care conservă ambiguitatea, atunci $d(T_{Amb}(A), T_{Amb}(B)) \leq \sqrt{6} d(A, B)$, pentru fiecare $A, B \in F(\mathbb{R})$.*

4.7 Despre continuitatea operatorilor cu valori numere fuzzy trapezoidale care conservă nucleul

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrările [19] şi [24].

Una dintre cele mai importante caracteristici ale unui număr fuzzy este nucleul său (secţiunea de nivel 1). De aceea, când dorim simplificarea reprezentării numerelor fuzzy folosind de exemplu numere fuzzy trapezoidale, aproximarea trapezoidală care conservă nucleul ar trebui să fie una importantă. Totuşi, vom vedea în această secţiune că acest procedeu de aproximare are multe puncte de discontinuitate şi de aceea este discutabil dacă acest gen de aproximare este util în aplicaţii. Rezultatele de bază ale acestei secţiuni se demonstrează folosind Lemele 2.2.1-2.2.2. Următoarele rezultate se găsesc în lucrarea [19] cu menţiunea că în această secţiune ponderile λ_L şi λ_U care determină metrica $d_\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$ sunt considerate doar ca fiind mărginite şi nu neapărat crescătoare ca şi în articolul menţionat anterior.

Teorema 4.7.1 *([19], Teorema 4) Fie $T : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$ un operator cu valori numere fuzzy trapezoidale care conservă nucleul, adică $core\,(A) = core\;(T\,(A))$, pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$. Dacă $A \in F(\mathbb{R}), A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)], \alpha \in [0,1]$, verifică $A_L(1) < A_U(1)$ (adică A nu este unimodal), atunci T este discontinuu în A în raport cu orice metrică ponderată d_λ, $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$.*

Deoarece operatorul ponderat de aproximare trapezoidală care conservă nucleul $T_{c,d_{f,f}}$ (pentru o metrică ponderată mărginită f), dat în Teorema 3.9.1 face parte din clasa operatorilor consideraţi în teorema de mai sus, obţinem uşor următorul corolar.

Teorema 4.7.2 *([19], Teorema 6) $T_{c,d_{f,f}} : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$ are ca punct de discontinuitate orice număr fuzzy A care verifică $A_L(1) < A_U(1)$ în raport cu orice metrică ponderată d_λ.*

În mod interesant, dacă avem un şir de numere fuzzy cu părţile laterale uniform convergente atunci obţinem următorul rezultat de convergenţă.

Teorema 4.7.3 *([19], Teorema 8) Dacă $A, A_\alpha = [A_L(\alpha), A_U(\alpha)], \alpha \in [0,1]$, este un număr fuzzy şi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, este un şir de numere fuzzy astfel încât $((A_n)_L)_{n\in\mathbb{N}}$ şi $((A_n)_U)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri care converg uniform spre A_L şi respectiv A_U, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} T_{c,d_{f,f}}(A_n) = T_{c,d_{f,f}}(A)$, în raport cu orice metrică ponderată d_λ, $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$.*

Folosind teorema de mai sus putem calcula cu o eroare rezonabilă aproximări trapezoidale care conservă nucleul în cazul în care nu putem aplica algoritmul direct (vezi [19], Exemplul 9).

Tot ce urmează în această secţiune se găseşte în [24] unde o problemă mai generală este discutată, mai exact se studiază operatorii fuzzy care iau valori numere fuzzy trapezoidale ce conservă o secţiune α dată, $\alpha \in [0,1]$. Totuşi, în această secţiune discutăm doar cazul $\alpha = 1$ deoarece acest caz corespunde interesului nostru în studiul operatorilor de aproximare fuzzy care conservă nucleul.

Până acum ştim că pentru un operator ponderat de aproximare trapezoidală care conservă nucleul $T_{c,d_{f,f}}$, mulţimea punctelor sale de discontinuitate conţine mulţimea numerelor fuzzy care nu sunt unimodale (numite şi intervale fuzzy). În mod interesant, când ponderea f este crescătoare, vom demonstra că toate punctele rămase şi anume numerele fuzzy unimodale (vezi secţiunea 1.6), sunt puncte de continuitate pentru $T_{c,d_{f,f}}$. Astfel, mulţimea punctelor de continuitate ale operatorului $T_{c,d_{f,f}}$ este determinată complet. Pentru a demonstra că $T_{c,d_{f,f}}$ este continuu pe spaţiul numerelor fuzzy unimodale, următoarea lemă este esenţială.

Lema 4.7.4 *([24]) Fie $(g_n)_{n\geq 0}$, $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, un şir de funcţii şi să mai considerăm funcţia $g : [0,1] \to \mathbb{R}$. De asemenea, considerăm o pondere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Să presupunem că sunt satisfăcute cerinţele:*

(i) g_n, $n \in \mathbb{N}$ şi g, sunt toate funcţii crescătoare şi continue la stânga;

(ii) $g_n(1) \leq g(1)$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(\alpha)\left(g_n(\alpha) - g(\alpha)\right)^2 d\alpha = 0.$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(1) = g(1)$.

Prin raţionamente asemănătoare obţinem un rezultat analog dacă g_n, $n \in \mathbb{N}$ şi g sunct funcţii descrescătoare şi continue la stânga.

Folosind cele de mai sus se poate demonstra următorul rezultat important de continuitate.

Teorema 4.7.5 *([24]) Fie $T_{c,d_{f,f}} : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$ operatorul ponderat de aproximare trapezoidală (în raport cu metrica $d_{f,f}$) care conservă nucleul, dat prin formulele (3.39). Atunci $T_{c,d_{f,f}}$ este continuu pe spaţiul numerelor fuzzy unimodale $UF(\mathbb{R})$.*

Din Teoremele 4.7.2 şi 4.7.5 rezultă că se poate determina cu exactitate mulţimea punctelor de continuitate respectiv de discontinuitate ale operatorului $T_{c,d_{f,f}}$.

4.8 Despre defectul de aditivitate al operatorilor de aproximare fuzzy

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrările [17]-[18], [23] şi [41] .

Cu excepţia operatorului ponderat de aproximare trapezoidală care conservă nucleul, restul operatorilor prezentaţi în această teză sunt daţi pe cazuri. Să luăm ca exemplu operatorul T_{EI} de aproximare trapezoidală care conservă intervalul de expectanţă. Să notăm Ω_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, subfamiliile de numere fuzzy corespunzătoare cazurilor (i), (ii), (iii) şi (iv) din Teorema 3.5.1. Este uşor de verificat că pentru fiecare $i \in \{1,2,3,4\}$ şi pentru fiecare $A, B \in \Omega_i$, avem $T_{EI}(A+B) = T_{EI}(A) + T_{EI}(B)$. Dar în general nu are loc $T_{EI}(A+B) = T_{EI}(A) + T_{EI}(B)$ (vezi Exemplul 2 în [18]).

De fapt putem demonstra un rezultat care implică faptul că majoritatea operatorilor propuşi în această teză nu sunt aditivi în general.

Lema 4.8.1 *([23], Lema 8) Fie operatorul $T : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$ care satisface proprietatea că dacă $A \in F(\mathbb{R})$ verifică $T_e(A) \in F^T(\mathbb{R})$, rezultă că $T(A) = T_e(A)$. Atunci T nu este aditiv în general.*

Rezultă imediat că operatorii T_d, T_{EI}, T_{AV} şi T_{Amb}, satisfac ipotezele de mai sus şi de aceea rezultă că nu sunt aditivi în general. În plus, ca şi în cazul operatorului T_{EI}, se poate demonstra că operatorii T_d, T_{AV} şi T_{Amb} sunt aditivi pe porţiuni.

În mod similar, pentru $s_L > 0$ şi $s_R > 0$ fixaţi şi pentru orice metrică ponderată d_λ, operatorul $\Psi_{d_\lambda, s_L, s_R}$ este aditiv pe porţiuni dar nu este aditiv pe tot domeniul.

Pe baza ideilor din cartea [29], noţiunea de defect de aditivitate a unui operator a fost introdusă în lucrarea [17].

Definiţia 4.8.2 *([17], Definiţia 25) Fie $A \in F(\mathbb{R})$ şi fie $t : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$ un operator de aproximare trapezoidală în raport cu o metrică D. Defectul de aditivitate al operatorului t faţă de A şi metrica D este definit prin* $\delta_{t,D}(A) = \sup\limits_{B \in F(\mathbb{R})} D(t(A)+t(B), t(A+B))$.

Următorul rezultat ne ajută să găsim estimări pentru defectul de aditivitate al unor operatori de aproximare fuzzy.

Lema 4.8.3 *([41], Lema 16) Fie $t : F(\mathbb{R}) \to F^T(\mathbb{R})$ un operator de aproximare trapezoidală în raport cu o metrică D. Să presupunem că sunt verificate următoarele cerinţe:*

(i) $t(O) = O$ unde O este numărul fuzzy trapezoidal $(0,0,0,0)$;

(ii) există constanta pozitivă reală c astfel încât $D(t(A), t(B)) \le cD(A,B)$, $A, B \in F(\mathbb{R})$;

(iii) avem $D(A+C, B+C) = D(A,B)$, pentru fiecare $A, B, C \in F(\mathbb{R})$.

Atunci $\delta_{t,D}(A) \le 2cD(O,A)$, pentru fiecare $A \in F(\mathbb{R})$.

Următorul corolar este imediat.

Corolarul 4.8.4 *([17], Corolarul 17) Fie A un număr fuzzy şi fie T_{AV} operatorul de aproximare trapezoidală care conservă valoarea şi ambiguitatea. Atunci*

$$\delta_{T_{AV},d}(A) \le 2\sqrt{\frac{10+2\sqrt{10}}{3}} \left(\int_0^1 \left(A_L^2(\alpha) + A_U^2(\alpha) \right) d\alpha \right)^{1/2}.$$

Prin raţionamente asemănătoare, ţinând cont de constantele Lipschitz obţinute pentru operatorii T_{Amb} şi $\Psi_{d_\lambda, s_L, s_R}$, putem obţine estimări ale defectului de aditivitate şi pentru aceşti operatori.

În cazul operatorului T_{EI}, folosind raţionamente geometrice obţinem cea mai bună estimare posibilă pentru defectul de aditivitate.

Teorema 4.8.5 *([23], Teorema 16) Avem*

$$d(T_{EI}(A+B), T_{EI}(A) + T_{EI}(B)) \le \frac{2\sqrt{3}}{3} \min\{length(EI(A)), length(EI(B))\}, \tag{4.1}$$

pentru fiecare $A, B \in F(\mathbb{R})$. (Aici, dacă $I = [a,b]$, atunci $length(I)$ reprezintă lungimea intervalului I, adică $length(I) = b - a$.)

În cele ce urmează, folosind raţionamente care se pot găsi şi în lucrarea [23], vom demonstra că valoarea $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ din concluzia Teoremei 4.8.5 este cea mai mică în general. Pentru fiecare $\varepsilon \in (0,1)$ considerăm numărul fuzzy $A_\varepsilon = (A_\varepsilon)_\alpha = [(A_\varepsilon)_L(\alpha), (A_\varepsilon)_U(\alpha)]$, $\alpha \in [0,1]$, unde

$$(A_\varepsilon)_L(\alpha) = \begin{cases} \frac{\varepsilon\alpha}{6} - \frac{\alpha^2}{2}; & \alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{6}\right], \\ \frac{\varepsilon^2}{72}; & \alpha \in \left[\frac{\varepsilon}{6}, 1\right] \end{cases}$$

şi $(A_\varepsilon)_U(\alpha) = (A_\varepsilon)_L(1) = \frac{\varepsilon^2}{72}$, pentru fiecare $\alpha \in [0,1]$. Fie $T_e(A_\varepsilon) = [l_e(A_\varepsilon), u_e(A_\varepsilon), x_e(A_\varepsilon), y_e(A_\varepsilon)]$, aproximarea trapezoidală extinsă a lui A_ε. Deoarece $(A_\varepsilon)_L$ este derivabilă, folosind integrarea prin părţi obţinem (vezi formulele (2.4)-(2.5))

$$\begin{aligned} & x_e(A_\varepsilon) + (6-\varepsilon) l_e(A_\varepsilon) \\ = & \int_0^1 (A_\varepsilon)_L(\alpha)(12\alpha - \varepsilon) d\alpha = (6-\varepsilon)(A_\varepsilon)_L(1) - \int_0^1 (A_\varepsilon)'_L(\alpha)(6\alpha^2 - \varepsilon\alpha) d\alpha \\ = & (6-\varepsilon) u_e(A_\varepsilon) - \int_0^1 (A_\varepsilon)'_L(\alpha)(6\alpha^2 - \varepsilon\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Deoarece

$$(A_\varepsilon)'_L(\alpha) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{6} - \alpha; & \alpha \in \left[0, \frac{\varepsilon}{6}\right], \\ 0; & \alpha \in \left[\frac{\varepsilon}{6}, 1\right], \end{cases}$$

rezultă imediat că $\int_0^1 (A_\varepsilon)'_L(\alpha)(6\alpha^2 - \varepsilon\alpha)d\alpha < 0$. Asta implică

$$x_e(A_\varepsilon) > (6-\varepsilon)u_e(A_\varepsilon) - (6-\varepsilon)l_e(A_\varepsilon). \tag{4.2}$$

În plus, deoarece din formula (2.5) rezultă $y_e(A_\varepsilon) = 0$, obţinem

$$x_e(A_\varepsilon) - y_e(A_\varepsilon) > 2u_e(A_\varepsilon) - 2l_e(A_\varepsilon).$$

Din inegalitatea de mai sus rezultă că pentru fiecare $\varepsilon \in (0,1)$ cazul (ii) din Teorema 3.5.1 este aplicabil pentru a calcula $T_{EI}(A_\varepsilon)$ şi în consecinţă obţinem

$$T_{EI}(A_\varepsilon) = [l_e(A_\varepsilon), u_e(A_\varepsilon), 2u_e(A_\varepsilon) - 2l_e(A_\varepsilon), 0], \tag{4.3}$$

pentru fiecare $\varepsilon \in (0,1)$.

Să considerăm acum numărul fuzzy trapezoidal $B = [0,1,0,0]$. Deoarece T_{EI} satisface criteriul identităţii obţinem $T_{EI}(B) = B$, ceea ce împreună cu relaţia (4.3) implică

$$T_{EI}(A_\varepsilon) + T_{EI}(B) = [l_e(A_\varepsilon), u_e(A_\varepsilon) + 1, 2u_e(A_\varepsilon) - 2l_e(A_\varepsilon), 0]. \tag{4.4}$$

Pe de altă parte, după calcule simple (sau din liniaritatea operatorului de aproximare trapezoidală extinsă T_e) obţinem $T_e(A_\varepsilon + B) = [l_e(A_\varepsilon), u_e(A_\varepsilon)+1, x_e(A_\varepsilon), y_e(A_\varepsilon)]$. Deoarece $0 \le l_e(A_\varepsilon) \le u_e(A_\varepsilon)$, şi cum din calcule simple obţinem $x_e(A_\varepsilon) \le 6u_e(A_\varepsilon) - 6l_e(A_\varepsilon) \le 6u_e(A_\varepsilon)$ (reamintim că $y_e(A_\varepsilon) = 0$), rezultă că

$$2(u_e(A_\varepsilon) + 1 - l_e(A_\varepsilon)) - x_e(A_\varepsilon) - y_e(A_\varepsilon) \ge 2 - x_e(A_\varepsilon) \ge 2 - 6u_e(A_\varepsilon) = 2 - \frac{\varepsilon^2}{12} > 0,$$

pentru fiecare $\varepsilon \in (0,1)$. De aici rezultă că $T_e(A_\varepsilon + B)$ este un număr fuzzy trapezoidal şi întrucât cazul (i) al Teoremei 3.5.1 este aplicabil, obţinem $T_{EI}(A_\varepsilon + B) = T_e(A_\varepsilon + B)$, adică

$$T_{EI}(A_\varepsilon + B) = [l_e(A_\varepsilon), u_e(A_\varepsilon) + 1, x_e(A_\varepsilon), 0]. \tag{4.5}$$

Relaţiile (1.17), (4.4) şi (4.5), implică

$$d(T_{EI}(A_\varepsilon) + T_{EI}(B), T_{EI}(A_\varepsilon + B)) = \frac{1}{\sqrt{12}}(x_e(A_\varepsilon) - 2u_e(A_\varepsilon) + 2l_e(A_\varepsilon))$$

şi din relaţia (4.2) obţinem

$$\begin{aligned} & d(T_{EI}(A_\varepsilon) + T_{EI}(B), T_{EI}(A_\varepsilon + B)) \\ > \; & \frac{1}{\sqrt{12}}(4-\varepsilon)(u_e(A_\varepsilon) - l_e(A_\varepsilon)) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{12}}\right) length(EI(A_\varepsilon)). \end{aligned}$$

Din inegalitatea de mai sus şi din faptul că $length(EI(B)) > length(EI(A_\varepsilon)) > 0$, pentru fiecare $\varepsilon \in (0,1)$, rezultă că în general valoarea $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ din concluzia Teoremei 4.8.5 este cea mai mică posibilă.

Chiar dacă $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ este cea mai bună constantă posibilă în Teorema 4.8.5, se poate demonstra că nu există numere fuzzy A şi B astfel încât $length(EI(A)) > 0$, $length(EI(B)) > 0$ şi astfel încât relaţia (4.1) să devină egalitate.

4.9 Aproximare trapezoidală şi agregare

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrarea [28].

Teoria operatorilor de agregare s-a dezvoltat foarte mult în ultimii ani iar în prezent este un topic foarte popular. Asta se datorează faptului că operatorii de agregare se folosesc în multe aplicaţii practice. Aproape în orice domeniu de cercetare este necesar la un moment dat să agregăm date. Un studiu detaliat al operatorilor de agregare se găseşte în cartea [57], unde cititorul poate afla cele mai importante rezultate în domeniu.

Să presupunem că I este un interval real mărginit sau nemărginit. Cea mai generală definiţie a unui operator de agregare este următoarea.

Definiţia 4.9.1 *(vezi de exemplu [57], Definiţia 1.1 pag. 3) Un operator de agregare în I^n este o funcţie $A : I^n \to I$, care satisface următoarele cerinţe:*
(i) A este crescătoare în fiecare variabilă;
(ii) are loc $\inf\limits_{x\in I^n} A(x) = \inf I$ şi $\sup\limits_{x\in I^n} A(x) = \sup I$.

Printre cei mai populari operatori de agregare sunt media aritmetică $AM : I^n \to I$, sau media geometrică $GM : I^n \to I$ (aici în mod necesar avem $\inf I \geq 0$), unde $AM(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ şi $GM(x_1, ..., x_n) = \left(\prod\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n}$.

Alţi operatori de agregare sunt operatorul de minim, operatorul de maxim sau operatorul de proiecţie. Definiţiile lor sunt uşor de dedus. Alte exemple importante se pot găsi în [57], pag. 6-9.

Se pare că Definiţia 4.9.1 nu se poate extinde cu uşurinţă atunci când în loc de valori reale folosim numere fuzzy. Ambele cerinţe ale Definiţiei 4.9.1 sunt greu de adaptat deoarece nu avem o metodă de ordonare a numerelor fuzzy care să funcţioneze pentru această definiţie.

Dar există operatori de agregare care se pot extinde pe spaţiul numerelor fuzzy. De exemplu media aritmetică sau funcţia de proiecţie. În cele ce urmează ne vom ocupa de media aritmetică. Astfel, dacă $A_1, A_2, ..., A_n$, reprezintă un eşantion de numere fuzzy atunci media aritmetică a eşantionului o notăm cu $AM(A_1, ..., A_n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} A_i$. Când nu este pericol de confuzie folosim notaţia $\overline{A} = AM(A_1, ..., A_n)$.

Să presupunem acum că dorim să agregăm într-un mod eficient în raport cu media aritmetică eşantionul de numere fuzzy $A_1, A_2, ..., A_n$. Mai întâi, având în vedere problema aproximării trapezoidale şi beneficiile sale, se pune problema să găsim un număr fuzzy trapezoidal $T_{A_1,A_2,...,A_n}$, care este cel mai apropiat de toate elementele eşantionului $A_1, A_2, ..., A_n$, în raport cu o metrică ponderată d_λ, $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$. Cu alte cuvinte, căutăm un număr fuzzy trapezoidal $T_{A_1,A_2,...,A_n}$, care minimizează distanţa $D_\lambda \left((A_1, ..., A_n), T_{A_1,A_2,...,A_n} \right)$, unde

$$D_\lambda^2 \left((A_1, ..., A_n), T_{A_1,A_2,...,A_n} \right) = \sum_{i=1}^{n} d_\lambda^2 \left(A_i, T_{A_1,A_2,...,A_n} \right). \tag{4.6}$$

Spunem că $T_{A_1,A_2,...,A_n}$ este cel mai apropiat număr fuzzy trapezoidal de numerele fuzzy $A_1, A_2, ..., A_n$. Evident, metrica D_λ este considerată în spaţiul produs $(F(\mathbb{R}))^n$ iar $T = T_{A_1,A_2,...,A_n}$, este identificat în mod unic cu n-uplul $(T, ..., T)$.

Folosind teoria spaţiilor Hilbert se obţine următorul rezultat de bază al acestei secţiuni.

Teorema 4.9.2 *([28], Teorema 6) Numărul fuzzy trapezoidal cel mai apropiat de numerele fuzzy $A_1, ..., A_n$ (în raport cu metrica D_λ), este numărul fuzzy trapezoidal cel mai apropiat de numărul* *fuzzy* $\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ *(în raport cu metrica* d_λ*), ceea ce înseamnă că* $T_{A_1,A_2,...,A_n} = T_{d_\lambda}(\overline{A})$*, unde* T_{d_λ} *este operatorul ponderat de aproximare trapezoidală în raport cu metrica* d_λ*.*

Din Teorema 4.9.2 rezultă că nu există nicio diferenţă dacă aproximarea se face înainte sau după agregare atunci când alegem ca operator de agregare media aritmetică.

Un rezultat analog are loc dacă impunem în plus şi condiţia de conservare a intervalului de expectanţă ponderat. Notăm cu $EI^\lambda(A)$ (vezi Definiţia 1.12.1) intervalul de expectanţă ponderat al numărului fuzzy A, unde $\lambda = (\lambda_L, \lambda_U)$ iar λ_L şi λ_U sunt ponderi. Apoi, definim intervalul de expectanţă ponderat al eşantionului de numere fuzzy $A_1, ..., A_n$, ca fiind

$$EI^\lambda(A_1, A_2, ..., A_n) = \frac{1}{n}\left(EI^\lambda(A_1) + ... + EI^\lambda(A_n)\right).$$

Teorema 4.9.3 *([28], Teorema 10) Numărul fuzzy trapezoidal cel mai apropiat de numerele fuzzy* $A_1, ..., A_n$ *(în raport cu metrica* D_λ*), care conservă intervalul de expectanţă ponderat al eşantionului* $A_1, ..., A_n$*, este numărul fuzzy trapezoidal cel mai apropiat de numărul fuzzy* $\overline{A} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ *(în raport cu metrica* d_λ*), care conservă intervalul de expectanţă ponderat al lui* $\overline{A}$*, adică* $T_{A_1,A_2,...,A_n} = T_{EI,\lambda}(\overline{A})$*.*

Concluzia este aceeaşi ca şi în cazul aproximării fără restricţii.

Exemplul 4.9.4 *([28], Exemplul 11) Fie ponderile* $\lambda_L(\alpha) = \lambda_u(\alpha) = 1$*, pentru fiecare* $\alpha \in [0,1]$ *şi numerele fuzzy* A, B, C*, unde* $A_\alpha = \left[-1+\alpha^2, 4-2\alpha^2\right]$*,* $B_\alpha = \left[1+\alpha^2, 3-\alpha^2\right], \alpha \in [0,1]$*, şi* $C_\alpha = [45\sqrt{\alpha}, 46-\sqrt{\alpha}], \alpha \in [0,1]$*. Din Teorema 3.5.1, (i) obţinem că numărul fuzzy trapezoidal cel mai apropiat de* $\frac{1}{2}\cdot(A+B)$ *şi care conservă intervalul de expectanţă al lui* $\frac{1}{2}\cdot(A+B)$ *este* $T_{EI}\left(\frac{1}{2}\cdot(A+B)\right) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{9}{4}, \frac{15}{4}\right)$*. Din Teorema 4.9.3 rezultă că* $\left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{9}{4}, \frac{15}{4}\right)$ *este numărul fuzzy trapezoidal cel mai apropiat de* A *şi* B *care conservă intervalul de expectanţă al perechii formate din* A *şi* B*. Obţinem (Teorema 3.5.1, (iv)) că numărul fuzzy trapezoidal cel mai apropiat de* $\frac{1}{3}\cdot(A+B+C)$ *şi care conservă intervalul de expectanţă al lui* $\frac{1}{3}\cdot(A+B+C)$ *este*

$$T_{EI}\left(\frac{1}{3}\cdot(A+B+C)\right) = \left(\frac{707}{180}, \frac{991}{60}, \frac{991}{60}, \frac{3187}{180}\right).$$

Din Teorema 4.9.3 rezultă că $\left(\frac{707}{180}, \frac{991}{60}, \frac{991}{60}, \frac{3187}{180}\right)$ *este numărul fuzzy trapezoidal cel mai apropiat de* A, B *şi* C*, care conservă intervalul de expectanţă al numerelor fuzzy* A, B, C*.*

Capitolul 5

Aproximarea numerelor fuzzy prin operatori Bernstein de tip max-produs

Există o bogată literatură despre aproximarea prin operatori liniari. Dar există situaţii concrete când operatorii liniari nu sunt eficienţi. De exemplu dacă aproximăm un număr fuzzy u cu nucleul nedegenerat prin operatorii Bernstein B_n (de fapt aproximăm restricţia funcţiei de apartenenţă relativ la suport), atunci calitatea aproximării este discutabilă. În primul rând se verifică uşor că în general $B_n(u)$ nu este un număr fuzzy. Desigur, dacă normalizăm $B_n(u)$ şi ţinem cont de faptul că operatorii Bernstein conservă cvasi-concavitatea, atunci obţinem un număr fuzzy dar trebuie să ţinem cont de faptul că procesul de normalizare nu este uşor de realizat deoarece sunt nenumărate exemple de funcţii pentru care valoarea maximă nu se poate determina cu exactitate. Apoi, din moment ce $B_n(u)$ este un număr fuzzy unimodal rezultă că şirul $core(B_n(u))_{n\geq 1}$ nu converge spre $core(u)$. Din acest motiv propunem o altă abordare pentru problema aproximării numerelor fuzzy folosind şiruri de operatori de aproximare. Vom folosi aşa-numiţii operatori de aproximare de tip max-produs introduşi recent în literatură. Vom vedea că pe lângă convergenţa în raport cu norma Euclidiană sau distanţele de tip L_2, aceşti operatori conservă suportul şi converg spre nucleu. În plus avem convergenţă în raport cu caracteristicile importante cum ar fi intervalul de expectanţă, ambiguitatea sau valoarea.

În continuare discutăm despre notaţiile pe care le vom folosi în acest capitol. Dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval şi $(T_n)_{n\geq 1}$, $T_n : C(I) \to X$, este un şir de operatori atunci imaginea lui $f \in C(I)$ se va nota cu $T_n(f)$ pentru fiecare $n \geq 1$. Dacă $J \subseteq \mathbb{R}$ este un interval astfel încât $I \subseteq J$ şi $f : J \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă atunci putem aplica T_n restricţiei lui f la I şi în acest caz vom folosi notaţia $T_n(f; I)$ pentru fiecare $n \geq 1$. Uneori pentru a evita eventuale confuzii putem folosi această notaţie chiar dacă $J = I$.

Apoi, dacă $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval şi $f \in C(I)$ (aici $C(I)$ reprezintă spaţiul funcţiilor reale şi continue definite pe I), notăm cu $\|f\|$ norma uniformă a lui f pe spaţiul $C(I)$, deci $\|f\| = \sup\limits_{x\in I} |f(x)|$. Totuşi, dacă u reprezintă un număr fuzzy atunci preferăm notaţia $\|u\|_C$ pentru norma sa uniformă şi deci (vezi (1.6)) $\|u\|_C = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|$. Vom nota cu $D_c(u, v)$ distanţa generată de norma uniformă între numerele fuzzy u şi v (vezi (1.5)).

În acest capitol suntem interesaţi de aproximarea numerelor fuzzy prin operatori de aproximare.

Estimările vor fi măsurate folosind modulul de continuitate. Pentru un interval I şi o funcţie continuă $f : I \to \mathbb{R}$, funcţia $\omega_1(f, \cdot) : [0, \infty) \to [0, \infty)$,

$$\begin{aligned}\omega_1(f,\delta) &= \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in I, |x - y| \leq \delta\}\\ &= \sup\{|f(x+h) - f(x)| : x, x+h \in I, 0 \leq h \leq \delta\},\end{aligned}$$

se numeşte modulul de continuitate al funcţiei f. Dacă J este un interval inclus în I atunci deseori notăm

$$\begin{aligned}\omega_1(f,\delta)_J &= \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in J, |x - y| \leq \delta\}\\ &= \sup\{|f(x+h) - f(x)| : x, x+h \in J, 0 \leq h \leq \delta\}.\end{aligned}$$

Dacă I este un interval compact atunci funcţia $\omega_1(f, \cdot)$ este uniform continuă iar dacă $\delta_n \searrow 0$ atunci rezultă că $\omega_1(f, \delta_n) \searrow 0$. Mai multe detalii referitoare la modulul de continuitate se găsesc în cărţile [8] şi [10].

Acest capitol conţine contribuţii originale din lucrările [30], [44], [46] şi [47]. În plus, conţine rezultate originale nepublicate precum şi unele rezultate care îmbunătăţesc variantele publicate.

5.1 O discuţie despre şiruri de numere fuzzy

Conţinutul acestei secţiuni se bazează pe rezultate originale nepublicate. Ele pot fi conectate cu rezultatele nepublicate din secţiunea 1.12. Aceste rezultate pot fi incluse în una sau mai multe lucrări legate de aproximarea caracteristicilor importante ale numerelor fuzzy. Această problemă este abordată deja în [47] iar Exemplul 5.1.1 este luat chiar din această lucrare. După cum am precizat deja în secţiunea 1.12, există un proiect în desfăşurare pe acest topic (vezi [48]), şi de aceea unele rezultate din această secţiune precum şi o parte din rezultatele din secţiunea 1.12 pot fi incluse în acest proiect.

Menţionăm că peste tot în acest capitol, pentru un număr fuzzy u vom folosi reprezentarea parametrică (u^-, u^+) în loc de (u_L, u_U) deoarece această notaţie se mulează mai bine pe notaţiile folosite în teoria aproximării.

Pentru un număr fuzzy u fixat, suntem interesaţi de şiruri de numere fuzzy $(u_n)_{n\geq 1}$, care să îndeplinească următoarele cerinţe:

(i) $(\delta) \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$;
(ii) $core(u_n) \to core(u)$;
(iii) $supp(u_n) \to supp(u)$;
(iv) $EI(u_n) \to EI(u)$;
(v) $Amb_s(u_n) \to Amb_s(u)$ şi $Val_s(u_n) \to Val_s(u)$, pentru o funcţie de reducere s.

Uneori avem nevoie doar de o parte din cerinţe pentru a le obţine pe celelate. Vom vedea că pentru metrica D_C prezentată în secţiunea 1.9 este sufiecient să aibă loc (i) şi o condiţie mai slabă decât $(ii) - (iii)$ pentru ca $(i) - (v)$ de mai sus să fie îndeplinite.

Este uşor de demonstrat că în funcţie de metrică, există şiruri convergente de numere fuzzy pentru care o parte din cerinţele de mai sus nu au loc. În acest sens prezentăm un exemplu pentru metrica D_C cu menţiunea că în varianta extinsă a tezei se găseşte un exemplu şi pentru metrica d_p definită în formula (1.11).

Exemplul 5.1.1 *(acest exemplu este discutat şi în lucrarea [47]) Probabil că unul dintre cei mai populari operatori de aproximare este operatorul Bernstein. Pentru funcţia continuă* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, *notăm cu $B_n(f)$ operatorul Bernstein de ordinul n ataşat funcţiei f. Fie u un număr fuzzy continuu cu $supp(u) = [a,b]$, $a < b$ şi $core(u) = [c,d]$, $c < d$. Definim operatorul Bernstein de ordinul n ataşat lui u şi notat cu $\widetilde{B}_n(u)$, definit prin*

$$\widetilde{B}_n(u)(x) = 0 \text{ dacă } x \notin [a,b]$$

şi

$$\widetilde{B}_n(u)(x) = B_n(u,[a,b]) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) \cdot u\left(a + (b-a)k/n\right), \ x \in [a,b],$$

unde $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \cdot \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-k}$, $k \in \{0,1,...,n\}$, sunt polinoamele Bernstein fundamentale. Este binecunoscut faptul că operatorii Bernstein interpolează funcţia la capetele domeniului precum şi faptul că aceşti operatori conservă cvasi-concavitatea (vezi [69]) . Totuşi, se observă cu uşurinţă că dacă numărul fuzzy u este continuu atunci, întrucât $\|u\|_C = 1$ rezultă că $\|B_n(u,[a,b])\| < 1$ pentru $n \in \mathbb{N}$ suficient de mare. Din acest motiv, pentru a genera numere fuzzy avem nevoie să normalizăm $\widetilde{B}_n(u)$. În acest mod obţinem şirul de numere fuzzy $\left(\frac{1}{\|B_n(u,[a,b])\|} \cdot \widetilde{B}_n(u)\right)_{n\geq 1}$. Apoi, se ştie că $\widetilde{B}_n(u)$ converge uniform spre u deoarece există o constantă absolută C pentru care

$$|B_n(u,[a,b]) - u(x)| \leq C\omega_1(u, 1/\sqrt{n})_{[a,b]}, (\forall)\, x \in [a,b],$$

iar asta implică uşor că $\frac{1}{\|B_n(u,[a,b])\|} \cdot \widetilde{B}_n(u)$ converge spre u în raport cu metrica D_C. Pe de altă parte se demonstrează uşor că nucleul lui $\frac{1}{\|B_n(u,[a,b])\|} \cdot \widetilde{B}_n(u)$ se reduce la un singur element (asta rezultă imediat deoarece restricţia lui $\frac{1}{\|B_n(u,[a,b])\|} \cdot \widetilde{B}_n(u)$ la intervalul $[a,b]$ este o funcţie polinomială de grad cel puţin 1 şi nu poate fi constantă pe niciun interval şi deci nici pe intervalul dat de nucleu). Asta înseamnă că nu avem convergenţă în raport cu nucleul din moment ce nucleul lui u nu este degenerat. Asta nu este surprinzător din moment ce operatorii Bernstein fiind polinoame nu pot conserva cu acurateţe alura unei funcţii care are puncte în care nu este diferenţiabilă cum este cazul marginilor nucleului numărului fuzzy u. Această problemă se va discuta din nou în subsecţiunea 5.5.1 a acestui capitol unde operatorii Bernstein se vor compara cu operatorii Bernstein de tip max-produs. Această problemă a divergenţei nucleului este valabilă şi pentru alţi operatori de tip Bernstein din moment ce ei aproximează prin funcţii polinomiale.

În cele ce urmează propunem condiţii minimale pentru ca cerinţele $(iv)-(v)$ prezentate la începutul secţiunii să fie satisfăcute.

Lema 5.1.2 *Fie funţia de reducere continuă $s : [0,1] \to [0,1]$ şi să considerăm primitiva sa $S : [0,1] \to \mathbb{R}$, $S(x) = \int_0^x s(x)dx$. Fie u un număr fuzzy continuu şi să considerăm şirul de numere fuzzy $(u_n)_{n\geq 1}$, care îndeplineşte cerinţele:*

(i) $(D_C) \lim_{n\to\infty} u_n = u$;

(ii) Există o constantă $\beta_0 > 0$ ce poate să depindă de u astfel încât $supp(u_n) \subseteq [-\beta_0, \beta_0]$, pentru fiecare $n \geq 1$.

Atunci avem $EI(u_n) \to EI(u)$, $Amb_s(u_n) \to Amb_s(u)$, şi $Val_s(u_n) \to Val_s(u)$.

Observaţia 5.1.3 *Dacă în teorema precedentă* $\sup\{\max\{|a_n|, |d_n|\} : n \in \mathbb{N}\} = \infty$, *atunci chiar dacă* $(D_C) \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, *putem avea*

$$\max\left\{\limsup_{n\to\infty}\left|\int_a^c xd(S(u(x)) - \int_{a_n}^{c_n} xd(S(u_n(x))\right|, \limsup_{n\to\infty}\left|\int_d^b xd(S(u(x)) - \int_{d_n}^{b_n} xd(S(u_n(x))\right|\right\} = \infty.$$

Din Teorema 5.1.2 obţinem următorul corolar.

Corolarul 5.1.4 *Fie u un număr fuzzy continuu şi fie şirul de numre fuzzy continue* $(u_n)_{n\geq 1}$, *astfel încât:*

(i) $(D_c) \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ *;*

(ii) $core(u_n) \to core(u)$;

(iii) $supp(u_n) \to supp(u)$;

Atunci avem $EI(u_n) \to EI(u)$, $Amb_s(u_n) \to Amb_s(u)$, *şi* $Val_s(u_n) \to Val_s(u)$, *pentru orice funcţie de reducere* $s : [0,1] \to [0,1]$.

În cazul metricii d_p avem următoarea lemă.

Lema 5.1.5 *Fie u un număr fuzzy continuu şi fie şirul de numere fuzzy* $(u_n)_{n\geq 1}$, *astfel încât* $(d_p) \lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$, *unde* $p > 1$ *este fixat. Dacă* $s : [0,1] \to [0,1]$, *este o funcţie de reducere atunci* $EI(u_n) \to EI(u)$, $Amb_s(u_n) \to Amb_s(u)$, *şi* $Val_s(u_n) \to Val_s(u)$.

Ţinând cont de cele două rezultate teoretice de mai sus, suntem interesaţi în găsirea de şiruri de numere fuzzy astfel încât ipotezele de mai sus să fie satisfăcute deoarece atunci obţinem convergenţa în raport cu caracteristicile importante. Mai târziu vom vedea că operatorii Bernstein de tip max-produs verifică aceste ipoteze.

5.2 Exemple de operatori de tip max-produs

În această secţiune vom discuta despre aşa-numiţii operatori de tip max-produs propuşi pentru prima oară în lucrarea [34]. Pentru un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, notăm cu $CB_+(I)$ spaţiul funcţiilor pozitive, continue şi mărginite definite pe I. Forma generală a unui operator de tipul max-produs (numit aici operator max-produs discret de aproximare) este $L_n : CB_+(I) \to CB_+(I)$,

$$L_n(f)(x) = \bigvee_{i=0}^{n} K_n(x, x_i) \cdot f(x_i), x \in I, \tag{5.1}$$

sau

$$L_n(f)(x) = \bigvee_{i=0}^{\infty} K_n(x, x_i) \cdot f(x_i), x \in I, \tag{5.2}$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $f \in CB_+(I)$, $K_n(\cdot, x_i) \in CB_+(I)$ şi $x_i \in I$, pentru fiecare i. Aceşti operatori sunt neliniari, pozitivi şi în plus satisfac o condiţie de pseudo-liniaritate de forma

$$L_n(\alpha \cdot f \vee \beta \cdot g) = \alpha \cdot L_n(f) \vee \beta \cdot L_n(g), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+, f, g \in CB_+(I).$$

Fie intervalul $I = [0, 1]$ şi o funcţie $f \in C_+(I)$ (aici $C_+(I)$ este spaţiul funcţiilor pozitive şi continue definite pe I şi evident în acest caz $C_+(I)$ coincide cu $CB_+(I)$). Dacă în relaţia (5.1) luăm $I = [0, 1]$ şi

$$K_n(x, x_i) = \frac{p_{n,i}(x)}{\bigvee_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)}, x \in [0, 1], i \in \{0, 1, ..., n\},$$

atunci obţinem aşa-numitul operator Bernstein de tip max-produs (propus prima oară de Gal în cartea [55]) care ataşat funcţiei f, este dat prin

$$B_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)}{\bigvee_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)}, x \in [0, 1],$$

unde $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, ..., n\}$, $x \in [0, 1]$. O altă metodă de a obţine operatorii Bernstein de tip max-produs este să scriem operatorul Bernstein liniar ataşat funcţiei f sub forma

$$B_n(f)(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)}{\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)}, x \in [0, 1]$$

şi apoi înlocuind atât la numărător cât şi la numitor operatorul "$\sum$" cu operatorul "$\bigvee$" obţinem din nou operatorul Bernstein de tip max-produs.

Proprietăţile de aproximare şi de conservare a alurii ale operatorilor max-produs Bernstein au fost studiate (în această ordine) în lucrările [33], [30], [44]. O parte din aceste proprietăţi se vor menţiona în secţiunile următoare.

Folosind acelaşi raţionament ca şi în cazul operatorului Bernstein de tip max-produs, pentru $I = [0, \infty)$ şi $f \in CB_+(I)$, operatorul Favard-Szász-Mirakjan de tip max-produs ([33]) ataşat lui f este dat prin

$$F_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right)}{\bigvee_{k=0}^{\infty} s_{n,k}(x)}, x \in [0, 1],$$

unde $s_{n,k}(x) = \frac{(nx)^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \infty)$. Proprietăţile de aproximare şi de conservare a alurii ale operatorilor max-produs Favard-Szász-Mirakjan au fost studiate mai întâi în [33] şi apoi în [31].

Există şi alţi operatori de tip max-produs menţionaţi în versiunea lungă a tezei .

5.3 Proprietăţi de aproximare şi conservare a alurii ale operatorului Bernstein de tip max-produs

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrările [30] şi [44]. Vom folosi rezultatele teoretice din această secţiune la studiul proprietăţilor de aproximare şi conservare a alurii atunci când aproximăm prin operatori Bernstein de tip max-produs.

În lucrarea [33] s-a demonstrat că operatorii Bernstein de tip max-produs aproximează funcţiile din spaţiul $C_+([0,1])$ cu ordinul de aproximare uniformă $C\omega_1(f;1/\sqrt{n})$, unde $C>0$ este o constantă absolută necunoscută. Apoi, în lucrarea [30] acest rezultat a fost îmbunătăţit prin găsirea unei constante explicite în faţa lui $\omega_1(f;1/\sqrt{n})$, după cum urmează.

Teorema 5.3.1 *([30], Teorema 4.1) Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ este continuă atunci avem estimarea*

$$|B_n^{(M)}(f)(x)-f(x)|\le 12\omega_1\left(f,\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), n\in\mathbb{N}, x\in[0,1].$$

În lucrarea [44] s-a demonstrat că estimarea de mai sus este cea mai bună în raport cu $\omega_1(f,\cdot)_{[0,1]}$, demonstrându-se că pentru funcţia $f:[0,1]\to[0,\infty)$, $f(x)=0$ dacă $x\in[0,1/2]$ şi $f(x)=x-1/2$ dacă $x\in[1/2,1]$, avem ([44], Exemplul 3.1) $\left\|B_n^{(M)}(f)-f\right\|\ge\frac{e^{-5}}{6}\omega_1(f,1/\sqrt{n})$.

Pentru funcţii concave avem o estimare de tip Jackson.

Teorema 5.3.2 *([30], Corolarul 4.6) Dacă $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ este concavă pe $[0,1]$, atunci avem estimarea $|B_n^{(M)}(f)(x)-f(x)|\le 2\omega_1\left(f;\frac{1}{n}\right)$, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}, x\in[0,1]$.*

Avem şi un alt tip de estimare.

Teorema 5.3.3 *([44], Teorema 4.6) Fie $f:[0,1]\to[0,\infty)$ o funcţie continuă şi strict pozitivă. Atunci*

$$\left|B_n^{(M)}(f)(x)-f(x)\right|\le\left(\frac{n\omega_1(f,\frac{1}{n})}{m_f}+4\right)\omega_1(f,1/n), x\in[0,1], n\in\mathbb{N},$$

unde $m_f=min\{f(x);x\in[0,1]\}$.

Din teorema de mai sus rezultă următoarea estimare pentru funcţii de tip Lipschitz.

Corolarul 5.3.4 *([44], Corolarul 4.7) Dacă $f:[0,1]\to[0,\infty)$ este o funcţie strict pozitivă care satisface condiţia Lipschitz, atunci există o constantă C, independentă de n şi x, dar care depinde de f, astfel încât $\left|B_n^{(M)}(f)(x)-f(x)\right|\le\frac{C}{n}, x\in[0,1]$, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$.*

Se ştie că există funcţii Lipschitz pe $[0,1]$ (de exemplu linii poligonale concave) pentru care se obţin estimări mai slabe decât estimarea de tip Jackson de mai sus când aproximăm prin operatori Bernstein liniari. Asta înseamnă că operatorii Bernstein de tip max-produs au proprietăţi de aproximare mai bune decât corespondenţii lor liniari relativ la spaţiul funcţiilor Lipschitz strict pozitive definite pe $[0,1]$.

Discutăm în continuare despre proprietăţi ale operatorilor max-produs Bernstein de conservare a alurii .

În lucrarea [30] s-a demonstrat că relativ la spaţiul $C_+([0,1])$, operatorul de aproximare Bernstein de tip max-produs are proprietăţi de interpolare la capetele domeniului, conservă monotonia şi mai general cvasi-convexitatea. Apoi, în lucrarea [44] a fost demonstrat următorul rezultat.

Teorema 5.3.5 *([44], Teorema 5.1) Să considerăm funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ şi fie $n\in\mathbb{N}$, $n\ge1$. În plus presupunem că există $c\in[0,1]$ astfel încât f este crescătoare pe $[0,c]$ şi descrescătoare pe $[c,1]$. Atunci există $c'\in[0,1]$ astfel încât $B_n^{(M)}(f)$ este crescătoare pe $[0,c']$ şi descrescătoare pe $[c',1]$. În plus avem $|c-c'|\le\frac{1}{n+1}$ şi $\left|B_n^{(M)}(f)(c)-f(c)\right|\le\omega_1\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$.*

Din teorema de mai sus rezultă că $B_n^{(M)}$ conservă cvasi-concavitatea relativ la spaţiul $C_+([0,1])$. Mai mult, orice punct de maxim global al funcţiei f se poate aproxima cu un punct de maxim global al funcţiei $B_n^{(M)}(f)$ cu o eroare de ordinul $O(1/n)$ şi orice valoare maximă globală a lui f se poate aproxima cu o valoare maximă globală a lui $B_n^{(M)}(f)$ cu o eroare de ordinul $O(\omega_1(f, \frac{1}{n}))$.

5.4 Operatori Bernstein max-produs definiţi pe intervale compacte

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrările [46] şi [47].

Pentru o funcţie $f \in C_+([a,b])$, definim operatorul Bernstein de tip max-produs prin ([46])

$$B_n^{(M)}(f)(x) = \frac{\bigvee_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f(a + k \cdot \frac{b-a}{n})}{\bigvee_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)}, x \in [a,b], \tag{5.3}$$

unde $p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \cdot \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{n-k}$. Deoarece $\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) = 1$, pentru fiecare $x \in [a,b]$, rezultă imediat că $\bigvee_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) > 0$, pentru fiecare $x \in [a,b]$, ceea ce înseamnă că $B_n^{(M)}(f)$ este definit corect. Apoi, obţinem cu uşurinţă că $B_n^{(M)}(f)(a) = f(a)$ şi $B_n^{(M)}(f)(b) = f(b)$. În plus, deoarece maximul unui număr finit de funcţii continue este o funcţie continuă, rezultă că pentru orice $f \in C_+([a,b])$, $B_n^{(M)}(f) \in C_+([a,b])$. De fapt este suficient ca $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ să fie doar mărginită pentru a obţine $B_n^{(M)}(f) \in C_+([a,b])$.

Se poate demonstra că $B_n^{(M)} : C_+([a,b]) \to C_+([a,b])$ are acelaşi ordin de convergenţă uniformă ca şi operatorul Bernstein liniar şi că satisface proprietatea de conservare a cvasi-concavităţii.

Teorema 5.4.1 *(i) ([46], Teorema 5) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ este continuă, atunci avem estimarea $|B_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 12([b-a]+1)\omega_1\left(f, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, x \in [a,b]$.*

(ii) ([47], Teorema 6 (ii)) Dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ este concavă pe $[a,b]$, atunci avem estimarea $|B_n^{(M)}(f)(x) - f(x)| \leq 2([b-a]+1)\omega_1\left(f, \frac{1}{n}\right)$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}, x \in [a,b]$.

Teorema 5.4.2 *([46], Teorema 6) Fie funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ şi să considerăm $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Să presupunem în plus că există $c \in [a,b]$ astfel încât f este crescătoare pe $[a,c]$ şi descrescătoare pe $[c,b]$. Atunci există $c' \in [a,b]$ astfel încât $B_n^{(M)}(f)$ este crescătoare pe $[a,c']$ şi descrescătoare pe $[c',b]$. În plus avem $|c-c'| \leq \frac{b-a}{n+1}$ şi $\left|B_n^{(M)}(f)(c) - f(c)\right| \leq ([b-a]+1)\,\omega_1\left(f, \frac{1}{n+1}\right)$.*

Observaţia 5.4.3 *Din teorema de mai sus şi din comentariul de după Teorema 5.3.5 rezultă că dacă $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ este continuă şi cvasi-concavă atunci $B_n^{(M)}(f)$ este deasemenea cvasi-concavă.*

Observaţia 5.4.4 *După cum am precizat în secţiunea 5.3, pentru funcţii din spaţiul $C_+([0,1])$, $B_n^{(M)}$ conservă monotonia şi mai general cvasi-convexitatea. Folosind acelaşi raţionament ca şi în demonstraţia Teoremei 5.4.2, se poate demonstra că aceste proprietăţi sunt conservate şi în cazul mai general al spaţiului $C_+([a,b])$.*

5.5 Aplicaţii la aproximarea numerelor fuzzy

Această secţiune conţine contribuţii originale din lucrările [46] şi [47].

5.5.1 Aproximări în raport cu metrica D_C

Să presupunem că u este un număr fuzzy astfel încât $supp(u) = [a,b]$ şi $core(u) = [c,d]$. Pentru $n \in \mathbb{N}$ definim funcţia $\widetilde{B}_n^{(M)}(u) : \mathbb{R} \to [0,1]$, $\widetilde{B}_n^{(M)}(u)(x) = 0$, dacă $x \notin [a,b]$ şi $\widetilde{B}_n^{(M)}(u)(x) = B_n^{(M)}(u;[a,b])(x)$, pentru fiecare $x \in [a,b]$. Din Teorema 5.4.1, rezultă că ordinul de aproximare uniformă a lui u prin $\widetilde{B}_n^{(M)}(u)$ este $O\left(\omega_1(u, 1/\sqrt{n})_{[a,b]}\right)$ atunci când u este continuu. Apoi, din moment ce restricţia lui u la intervalul $[a,b]$ este o funcţie precum cele din Teorema 5.4.2, rezultă că $\widetilde{B}_n^{(M)}(u)$ este cvasi-concavă pe $[a,b]$. Mai mult, avem următorul rezultat care îmbunătăţeşte rezultatul central din lucrarea [46].

Teorema 5.5.1 *([47], Teorema 14) Fie u un număr fuzzy cu $supp(u) = [a,b]$ şi $core(u) = [c,d]$ astfel încât $a \le c < d \le b$. Atunci, pentru n suficient de mare rezultă că $\widetilde{B}_n^{(M)}(u)$ este un număr fuzzy care verifică :*

(i) $supp(u) = supp\left(\widetilde{B}_n^{(M)}(u)\right)$;

(ii) Dacă $core(\widetilde{B}_n^{(M)}(u)) = [c_n, d_n]$, atunci $|c - c_n| \le \frac{b-a}{n}$ şi $|d - d_n| \le \frac{b-a}{n}$. În plus, putem determina cu exactitate $core(\widetilde{B}_n^{(M)}(u))$;

(iii) Dacă în plus u este continuu atunci

$$\left|\widetilde{B}_n^{(M)}(u)(x) - u(x)\right| \le 12([b-a]+1)\omega_1\left(u, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)_{[a,b]},$$

pentru fiecare $x \in \mathbb{R}$.

Demonstraţia următorului corolar care îmbunătăţeşte Corolarul 15 din [47], se obţine cu uşurinţă din teorema precedentă şi din Corolarul 1.12.4, (i).

Corolarul 5.5.2 *(vezi de asemenea [47], Corolarul 15) Fie u un număr fuzzy cu $supp(u) = [a,b]$ şi $core(u) = [c,d]$, astfel încât $a \le c < d \le b$. În plus, să considerăm funcţia de reducere continuă $s : [0,1 \to [0,1]$ şi primitiva sa $S(x) = \int\limits_0^1 s(x)dx$, $x \in [0,1]$. Atunci avem:*

(i) $core(\widetilde{B}_n^{(M)}(u)) \to core(u)$;

(ii) Dacă u este continuu atunci $\lim\limits_{n\to\infty} D_C(\widetilde{B}_n^{(M)}(u), u) = 0$ şi notând $\delta_n = 12([b-a]+1)\omega_1\left(u, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)_{[a,b]}$, pentru n suficient de mare obţinem $\left|Amb_s(\widetilde{B}_n^{(M)}(u)) - Amb_s(u)\right| \le k_n(u)\delta_n$ şi $\left|Val_s(\widetilde{B}_n^{(M)}(u)) - Val_s(u)\right| \le k_n(u)\delta_n$, unde $k_n(u) \to c - a + 2|c| + b - d + 2|d|$. În particular avem $EI(\widetilde{B}_n^{(M)}(u)) \to EI(u)$.

Din Teorema 5.5.1 şi Corolarul 5.5.2 rezultă că şirul de operatori Bernstein de tip max-produs ataşat unui număr fuzzy continuu, satisface proprietăţile de aproximare şi conservare a alurii propuse în secţiunea 5.1 şi astfel reprezintă un bun exemplu de şir convergent (şi eficient) de numere fuzzy.

Observaţii (aceste observaţii se găsesc şi în lucrarea [47]) (i) Dacă numărul fuzzy u este unimodal, adică $c = d$, atunci $\widetilde{B}_n^{(M)}(u)$ nu mai este neapărat un număr fuzzy. Dar dacă normalizăm $B_n^{(M)}(u;[a,b])$, atunci obţinem numărul fuzzy $\frac{1}{\left\|B_n^{(M)}(u;[a,b])\right\|}\widetilde{B}_n^{(M)}(u)$ ($\|\cdot\|$ reprezintă norma uniformă). Deoarece $B_n^{(M)}(u;[a,b]) \to u$ uniform pe $[a,b]$, obţinem uşor că $\frac{1}{\left\|B_n^{(M)}(u;[a,b])\right\|}\widetilde{B}_n^{(M)}(u) \to u$, uniform pe $\mathbb{R}$ şi asfel rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} D_C\left(\frac{1}{\left\|B_n^{(M)}(u;[a,b])\right\|}\widetilde{B}_n^{(M)}(u), u\right) = 0$. Ca şi în cazul Teoremei 5.5.1 (ii), putem determina cu precizie nucleul lui $\frac{1}{\left\|B_n^{(M)}(u;[a,b])\right\|}\widetilde{B}_n^{(M)}(u)$.

(ii) Comparând concluzia Teoremei 5.5.1 cu cele discutate la sfârşitul Exemplului 5.1.1, rezultă că operatorul Bernstein de tip max-produs $B_n^{(M)}$, este mai convenabil pentru a aproxima numere fuzzy decât operatorul Bernstein liniar, B_n. Dacă ordinul de aproximare uniformă este acelaşi, operatorul Bernstein max-produs conservă mai bine alura unui număr fuzzy.

(iii) Se verifică uşor că dacă u este un număr fuzzy continuu şi unimodal atunci şirul din prima observaţie de mai sus satisface în întregime concluzia Corolarului 5.5.2.

Exemplul 5.5.3 *([47], Exemplul 16) Aproximăm numărul fuzzy*

$$u(x) = \begin{cases} 4x^2 & \textit{dacă } 0 \le x < 1/2, \\ 1 & 1/2 \le x \le 3/4, \\ 4-4x & 3/4 < x \le 1, \\ 0 & \textit{în rest,} \end{cases} .$$

folosind atât operatorii Bernstein clasici liniari precum şi cu ajutorul operatorilor Bernstein de tip max-produs. În Fig. 5.1.a şi Fig. 5.1.b (mai întâi pentru $n = 30$ şi apoi pentru $n = 80$) putem compara operatorii Bernstein clasici cu cei de tip max-produs în aproximarea numărului fuzzy de mai sus. Observăm cu uşurinţă că operatorul Bernstein clasic marcat cu linie punctată nu conservă alura atât de bine precum o face operatorul Bernstein de tip max-produs marcat cu linie întreruptă, acesta fiind aproape identic cu numărul fuzzy pe porţiunea nucleului. Concluziile teoretice ale acestei secţiuni sunt foarte bine ilustrate în acest exemplu.

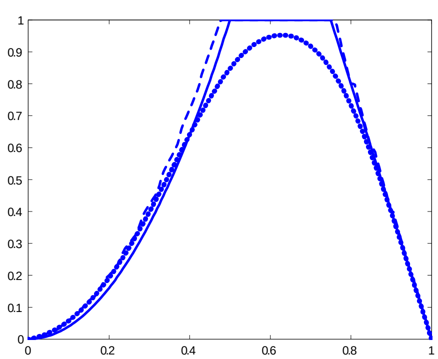

Fig. 5.1.a

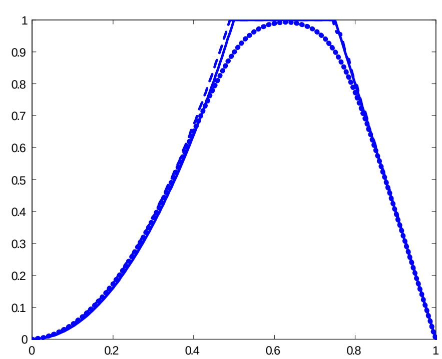

Fig. 5.1.b

5.5.2 Aproximări în raport cu metricile d_p

Începem prin a reaminti că reprezentarea parametrică a unui număr fuzzy u este $u = (u^-, u^+)$, unde u^- este continuă la stânga şi crescătoare, u^+ este continuă la stânga şi descrescătoare şi în plus avem $u^-(1) \le u^+(1)$. Toate aceste proprietăţi sunt esenţiale pentru a obţine rezultatele de bază ale acestei secţiuni.

Mai întâi studiem cazul când numărul fuzzy este pozitiv ceea ce este echivalent cu faptul că $u^-(0) \ge 0$. Asta înseamnă că funcţiile u^- şi u^+ sunt pozitive şi astfel putem folosi toate rezultatele de aproximare din secţiunea 5.3. Considerând operatorii $B_n^{(M)}(u^-)$ şi $B_n^{(M)}(u^+)$ se verifică uşor că perechea ordonată $\overline{B}_n^{(M)}(u) = \left(B_n^{(M)}(u^-), B_n^{(M)}(u^+)\right)$ formează un număr fuzzy. Acum putem prezenta rezultatul central al acestei subsecţiuni.

Teorema 5.5.4 *(vezi şi [47], Teorema 19) Dacă $u = (u^-, u^+)$ este un număr fuzzy pozitiv astfel încât u^- şi u^+ sunt continue, atunci avem*
(i)

$$d_p(u, \overline{B}_n^{(M)}(u)) \leq 12\sqrt{2} \max\left\{\omega_1\left(u^-; \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right), \omega_1\left(u^+; \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}, \ (\forall) n \in \mathbb{N};$$

(ii) (în [47] un caz mai particular este discutat) $EI(u_n) \to EI(u)$, $Amb_s(u_n) \to Amb_s(u)$ şi $Val_s(u_n) \to Val_s(u)$ pentru orice funcţie de reducere $s : [0,1] \to [0,1]$.

Observaţie (această remarcă se găseşte şi în [47]) Să presupunem acum că numărul fuzzy u nu este pozitiv ceea ce este echivalent cu faptul că $u^-(0) < 0$. Să introducem acum funcţiile $u_1^-, u_1^+ : [0,1] \to \mathbb{R}$, $u_1^-(\alpha) = u^-(\alpha) - u^-(0)$ şi $u_1^+(\alpha) = u^+(\alpha) - u^-(0)$. Din proprietăţile funcţiilor u^- şi u^+ rezultă că u_1^- este crescătoare şi pozitivă şi u_1^+ este descrescătoare şi pozitivă. Pentru $n \geq 1$, considerăm funcţiile $B_n^{(M)}(u_1^-)$ şi $B_n^{(M)}(u_1^+)$. Deoarece $B_n^{(M)}$ conservă monotonia, urmează că $B_n^{(M)}(u_1^-)$ este crescătoare şi $B_n^{(M)}(u_1^+)$ este descrescătoare. În plus avem $B_n^{(M)}(u_1^-)(0) = u_1^-(0)$, $B_n^{(M)}(u_1^-)(1) = u_1^-(1)$, $B_n^{(M)}(u_1^+)(0) = u_1^+(0)$ şi $B_n^{(M)}(u_1^+)(1) = u_1^+(1)$. În concluzie obţinem că $\overline{P}_n^{(M)}(u) = \left(B_n^{(M)}(u_1^-) + u^-(0), B_n^{(M)}(u_1^+) + u^-(0)\right)$ este un număr fuzzy care în plus conservă suportul şi nucleul lui u. În plus, se poate demonstra că obţinem acelaşi tip de estimări ca şi în Teorema 5.5.4 dacă înlocuim acolo pe $\overline{B}_n^{(M)}(u)$ cu $\overline{P}_n^{(M)}(u)$.

Concluzii

Această teză conţine principalele mele contribuţii în topicul aproximării numerelor fuzzy. Mai întâi, considerând metrici de tipul L_2 pe spaţiul numerelor fuzzy, diferite tipuri de aproximări parametrice sau trapezoidale sunt investigate. Deoarece în cazurile studiate aproximarea parametrică sau trapezoidală există şi este unică, putem defini aşa-numiţi operatori de aproximare parametrică sau trapezoidală. În teză sunt prezentaţi algoritmi de calcul ai aproximărilor şi în plus, proprietăţi importante cum ar fi invarianţa faţă de scalari sau translaţii, aditivitatea, continuitatea sau relaţia cu agregarea sunt investigate. Pentru unii operatori s-a determinat cea mai bună constantă Lipschitz. Aceste rezultate sunt importante când dorim să simplificăm reprezentarea numerelor fuzzy. În unele aplicaţii este suficient să folosim doar numere fuzzy trapezoidale sau alte clase de numere fuzzy cu formă mai simplă. Un astfel de exemplu se găseşte în secţiunea 2.8 unde numerele fuzzy sunt ordonate prin intermediul numerelor fuzzy trapezoidale. Totuşi, uneori este important să păstrăm cât mai mult din informaţia conţinută într-un număr fuzzy. Acest topic vine în completarea celui discutat anterior în care sunt discutate aproximări cu formă mai simplă. În această teză se demonstrează că aşa-numiţii operatori Bernstein de tip max-produs sunt instrumente utile când se doreşte conservarea informaţiei conţinută de un număr fuzzy. Pe lângă capacitatea lor de a aproxima numere fuzzy cu aceeaşi acurateţe ca şi corespondenţii lor liniari, aceşti operatori posedă proprietăţi importante de conservare a alurii cum ar fi conservarea suportului, convergenţa în raport cu nucleul sau convergenţa în raport cu caracteristicile importante ale numerelor fuzzy. Pentru a obţine o parte din rezultatele centrale ale tezei, am demonstrat câteva proprietăţi a căror importanţă este independentă de topicul acestei teze. Astfel de rezultate sunt cele din secţiunea 1.12 unde ambiguitatea şi valoarea sunt exprimate prin intermediul funcţiei de apartenenţă iar apoi se studiază aproximarea acestor caracteristici. Aşa cum era de aşteptat, cu cât forma numărului fuzzy este aproximată mai bine cu atât mai bine sunt aproximate caracteristicile. Apoi trebuie menţionat că teza conţine contribuţii în problema delicată a ordonării numerelor fuzzy. În cazul ordonării numerelor fuzzy trapezoidale putem spune că defuzificatorii care generează ordonări care să satisfacă unele proprietăţi de bază sunt complet determinaţi dacă facem abstracţie de ordonările echivalente.

Pentru viitor am multe planuri legate atât de problema aproximării numerelor fuzzy cât şi de alte subiecte. Recent, am extins problema aproximării numerelor fuzzy considerând aproximări în spaţiul aşa-numitelor numere fuzzy liniare pe porţiuni considerând mai întâi cazul când funcţiile de nivel sunt linii poligonale cu 2 segmente iar nodul (secţiunea α) care separă segmentele este acelaşi pentru ambele funcţii de nivel (vezi [43]). Un astfel de număr fuzzy depinde de 6 parametri şi astfel avem mai multe posibilităţi de aproximare în comparaţie cu numerele fuzzy trapezoidale de exemplu. Pe viitor, împreună cu autorii lucrării [43] vom extinde acest studiu considerând numere fuzzy liniare pe porţiuni care depind de un număr arbitrar de noduri. Apoi, în lucrarea [20] considerăm o problemă generală de aproximare trapezoidală, şi anume studiem aproximarea trapezoidală cu condiţia suplimentară a conservării unei caracteristici liniare dată în formă generală. Această problemă poate fi generalizată considerând mai multe caractersitici care ar trebui conservate. Ca un proiect personal, în ultimul timp am devenit interesat de programarea cuadratică. Am observat că folosind teoria spaţiilor Hilbert, studiul operatorilor de aproximare trapezoidală se poate reduce la studiul soluţiilor unor probleme de programare cuadratică ce depind de anumiţi parametri. Ideea mea este să studiez în detaliu proprietăţile aşa-numitei funcţii a soluţiilor ataşată unei astfel de probleme de programare cuadratică deoarece orice proprietate importantă a acestei funcţii va implica rezultate asemănătoare pentru operatorii de aproximare parametrică sau trapezoidală. Pentru acest studiu am consultat frecvent articolul [86] precum şi monografia [66]. În lucrarea [86] autorul demonstrează continuitatea Lipschitz a funcţiei soluţie asociată unei probleme de programare cuadratică canonică depinzând de 2 parametri c şi λ (de tip vectorial), unde c apare în funcţia cuadratică iar λ apare în membrul drept al restricţiilor. În lucrarea [42] am obţinut acelaşi rezultat considerând cazul programării cuadratice generale. Mai mult, în aceeaşi lucrare se demonstrează că există o corespondenţă liniară şi pozitiv omogenă pe porţiuni între parametri şi soluţie. De asemenea studiez şi aproximarea numerelor fuzzy folosind transformata fuzzy (vezi [48]) introdusă recent de Perfilieva (vezi [70]). În final menţionez că sunt numeroase alte probleme care merită să fie investigate pentru operatorii de tip max-produs. Voi menţiona aici rezultate de saturaţie precum şi rezultate inverse unde deja avem un articol acceptat (vezi [45]).

Bibliografie

[1] S. Abbasbandy, M.Amirfakhrian, *The nearest approximation of a fuzzy quantity in parametric form*, Applied Mathematics and Computation (New York) 172 (2006) 624-632.

[2] S. Abbasbandy, M.Amirfakhrian, *The nearest trapezoidal form of a generalized left right fuzzy number*, International Journal of Approximate Reasoning 43 (2006) 166-178.

[3] S. Abbasbandy, B. Asady, *Ranking of fuzzy numbers by sign distance*, Information Sciences 176 (2006) 2405-2416.

[4] S. Abbasbandy, B. Asady, *The nearest trapezoidal fuzzy number to a fuzzy quantity*, Applied Mathematics and Computation (New York) 156 (2004) 381-386.

[5] S. Abbasbandy, T. Hajjari, *A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers*, Computers and Mathematics with Applications 57 (2009) 413-419.

[6] S. Abbasbandy, T. Hajjari, *Weighted trapezoidal approximation-preserving cores of a fuzzy number*, Computers and Mathematics with Applications 59 (2010) 3066-3077.

[7] S. Abbasbandy, R. Nuraei and M. Ghanbari, *Revision of sign distance method for ranking of fuzzy numbers*, Iranian Journal of Fuzzy Systems (în presă).

[8] O. Agratini, *Aproximare prin operatori liniari*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2000.

[9] T. Allahviranloo, M. A. Firozja, *Note on "Trapezoidal approximation of fuzzy numbers"*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 755-756.

[10] G. A. Anastassiou, S. G. Gal, *Approximation Theory. Moduli of Continuity and Global Smoothness Preservation*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000.

[11] B. Asady, *The revised method of ranking LR fuzzy numbers based on deviation degree*, Expert Systems with Applications 72 (2010) 5056-5060.

[12] B. Asady, A. Zendehman, *Ranking fuzzy numbers by distance minimization*, Applied Mathematical Modelling 31 (2007) 2589-2598.

[13] A. I. Ban, *Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the expected interval*, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 1327-1344.

[14] A. I. Ban, *On the nearest parametric approximation of a fuzzy number-Revisited*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 3027-3047.

[15] A. I. Ban, *The interval approximation of a fuzzy number with respect to index of fuzziness*, Annals of Oradea University-Mathematics Fascicola 12 (2005) 25-40.

[16] A. I. Ban, *Trapezoidal and triangular approximations of fuzzy numbers-inadvertences and corrections*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 3048-3058.

[17] A. I. Ban, A. Brândaş, L. Coroianu, C. Negruţiu, O. Nica, *Approximations of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the ambiguity and value*, Computers and Mathematics with Applications 61 (2011) 1379-1401.

[18] A. I. Ban, L. Coroianu, *Continuity and linearity of the trapezoidal approximation preserving the expected interval operator*, in: Proceedings of IFSA-EUSFLAT 2009 (Lisbon), 2009, pp. 798-802.

[19] A. I. Ban, L. Coroianu, *Discontinuity of trapezoidal fuzzy valued operators preserving cores of fuzzy numbers*, Computers and Mathematics with Applications 62 (2011) 3103-3110.

[20] A. I. Ban, L. Coroianu, *Existence, uniqueness and continuity of trapezoidal approximations under a general condition* (acceptată pentru publicare în revista Fuzzy Sets and Systems, Număr Special: Fuzzy Numbers and their Applications).

[21] A. I. Ban, L. Coroianu, *Metric properties of the nearest extended parametric fuzzy number and applications*, International Journal of Approximate Reasoning 52 (2011) 488-500.

[22] A. I. Ban, L. Coroianu, *Nearest interval, triangular and trapezoidal approximation of a fuzzy number preserving ambiguity*, International Journal of Approximate Reasoning 53 (2012) 805-836.

[23] A. I. Ban, L. Coroianu, *On the defect of additivity of fuzzy approximation operators* (în pregătire).

[24] A. I. Ban, L. Coroianu, *Properties of trapezoidal fuzzy number-valued operators preserving the alpha-cut* (în pregătire).

[25] A. I. Ban, L. Coroianu, *Simplifying the search for efficient ranking of fuzzy numbers* (trimisă spre publicare).

[26] A. I. Ban, L. Coroianu, *Translation invariance and scale invariance of approximations of fuzzy numbers*, in: Proceedings of EUSFLAT-LFA 2011 (Aix-Les-Bains), 2011, pp. 742-748.

[27] A. I. Ban, L. Coroianu, P. Grzegorzewski, *A fixed-shape fuzzy median of a fuzzy sample,* in: Proceedings of EUSFLAT 2013 (Milano), 2013 (acceptată).

[28] A. I. Ban, L. Coroianu, P. Grzegorzewski, *Trapezoidal approximation and aggregation*, Fuzzy Sets and Systems 177 (2011) 45-59.

[29] A. I. Ban, S. G. Gal, *Defects of Properties in Mathematics. Quantitative Characterizations*, World Scientific, New Jersey, 2002.

[30] B. Bede, L. Coroianu and S. G. Gal, *Approximation and shape preserving properties of the Bernstein operator of max-product kind*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, vol. 2009, Article ID 590589, 26 pages, 2009. doi:10.1155/2009/590589.

[31] B. Bede, L. Coroianu, S. G. Gal, *Approximation and shape preserving properties of the nonlinear Favard-Szász-Mirakjan operator of max-product kind*, Filomat 24 No. 3 (2010) 55-72.

[32] B. Bede, L. Coroianu and S. G. Gal, *Approximation by truncated Favard-Szász-Mirakjan operator of max-product kind*, Demonstratio Mathematica XLIV No. 1 (2011) 105-122.

[33] B. Bede, S. G. Gal, *Approximation by nonlinear Bernstein and Favard-Szász-Mirakjan operators of max-product kind*, Journal of Concrete and Applicable Mathematics 8 No. 2 (2010) 193-207.

[34] B. Bede, H. Nobuhara, M. Daňková, A. Di Nola, *Approximation by pseudo-linear operators*, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 804 – 820.

[35] P. Blaga, B. Bede, *Approximation by fuzzy B-spline series*, Journal of Applied Mathematics and Computing 20 (2006) No. 1-2 157-169.

[36] S. Bodjanova, *Median value and median interval of a fuzzy number*, Information Sciences 172 (2005) 73-89.

[37] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[38] S. Chanas, *On the interval approximation of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001) 353-356.

[39] J. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces,* Transactions of the American Mathematical Society 40 No. 3 (1936) 396-414.

[40] L. Coroianu, *Best Lipschitz constant of the trapezoidal approximation operator preserving the expected interval*, Fuzzy Sets and Systems 165 (2011) 81-97.

[41] L. Coroianu, *Lipschitz functions and fuzzy number approximations*, Fuzzy Sets and Systems 200 (2012) 116-135.

[42] L. Coroianu, *On the Lipschitz continuity of solutions of quadratic programs* (trimisă spre publicare).

[43] L. Coroianu, M. Gagolewski, P. Grzegorzewski, *Nearest piecewise linear approximation of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems (în presă).

[44] L. Coroianu and S. G. Gal, *Classes of functions with improved estimates in approximation by the max-product Bernstein operator*, Analysis and Applications 9 No. 3 (2011) 249-274.

[45] L. Coroianu, S. G. Gal, *Saturation and inverse results for the Bernstein max-product operator*, Periodica Mathematica Hungarica (acceptată).

[46] L. Coroianu, S. G. Gal, B. Bede, *Approximation of fuzzy numbers by Bernstein operators of max-product kind*, in: Proceedings of EUSFLAT-LFA 2011 (Aix-Les-Bains), 2011, pp. 734-741.

[47] L. Coroianu, S. G. Gal, B. Bede, *Approximation of fuzzy numbers by Bernstein operators of max-product kind*, (versiune extinsă acceptată pentru publicare în revista Fuzzy Sets and Systems, Număr Special: Fuzzy Numbers and their Applications).

[48] L. Coroianu, L. Stefanini, *General approximation of fuzzy numbers by $F-$transform,* (în pregătire).

[49] M. Delgado, M.A. Vila, W. Voxman, *On a canonical representation of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems 93 (1998) 125-135.

[50] P. Diamond, P. Kloeden, *Metric Spaces of Fuzzy Sets*, Theory and Applications. World Scientific, Singapore, 1994.

[51] D. Dubois, H. Prade, *Operations on fuzzy numbers*, International Journal of Systems Science 9 No. 6 (1978) 613-626.

[52] D. Dubois, H. Prade, *Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*, Plenum Press, New York, 1988.

[53] D. Dubois, H. Prade, *The mean value of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987) 279-300.

[54] R. Ezzati, T. Allahviranloo, S. Khezerloo, M. Khezerloo, *An approach for ranking of fuzzy numbers*, Expert Systems with Applications 39 (2012) 690-695.2.

[55] S.G. Gal, *Shape-Preserving Approximation by Real and Complex Polynomials*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2008.

[56] R. Goetschel, W. Voxman, *Elementary fuzzy calculus*, Fuzzy Sets and Systems 18 (1986) 31-43.

[57] M. Grabisch, E. Pap, J. L. Marichal, R. Messiar, *Aggregation Functions*, University Press Cambridge, 2009.

[58] P. Grzegorzewski, *Metrics and orders in space of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 97 (1998) 83-94.

[59] P. Grzegorzewski, *Nearest interval approximation of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems 130 (2002) 321-330.

[60] P. Grzegorzewski, *New algorithms for trapezoidal approximation of fuzzy numbers preserving the expected interval*, in: Proceedings of IPMU 2008 (Málaga), 2008, pp. 117-123.

[61] P. Grzegorzewski, *Trapezoidal approximations of fuzzy numbers preserving the expected interval-Algorithms and properties*, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 1354-1364.

[62] P. Grzegorzewski, E. Mrówka, *Trapezoidal approximations of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 153 (2005) 115-135.

[63] P. Grzegorzewski, E. Mrówka, *Trapezoidal approximations of fuzzy numbers-revisited*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 757-768.

[64] M. Hanss, *Applied Fuzzy Arithmetic*, Springer, 2005.

[65] S. Heilpern, *The expected value of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems 47 (1992) 81-86.

[66] G. M. Lee, N. D. Yen, N. T. Nguyen, *Quadratic programming and affine variational inequalities*, Springer 2005.

[67] M. Ma, A. Kandel and M. Friedman, *A new approach for defuzzification*, Fuzzy Sets and Systems 111 (2000) 351–356.

[68] E. N. Nasibov, S. Peker, *On the nearest parametric approximation of a fuzzy number*, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 1365-1375.

[69] R. Păltănea, *The preservation of the property of quasi-convexity of higher order by Bernstein polynomials*, Revue d'Analyse Numérique et de Théory de l' Approximation 25 No. 1-2 (1996) 195-201.

[70] I. Perfilieva, *Fuzzy transforms: Theory and Applications*, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 993-1023.

[71] T. Popoviciu, *Deux remarques sur les fonctions convexes*, Bull. Soc. Sci. Acad. Roumaine 220 (1938) 45-49.

[72] H. Rådström, *An Embedding Theorem For Spaces Of Convex Sets*, Proceedings of the American Mathematical Society 3 (1952) 165–169.

[73] R. T. Rockafeller, *Convex Analysis*, Princeton University Press, New York, 1970.

[74] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, McGraw-Hill, New York, 1964.

[75] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1986.

[76] D. D. Stancu, G. Coman,O. Agratini, R. Trîmbiţaş, *Analiză numerică şi teoria aproximării*, Vol. I, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2001.

[77] L. Stefanini, P. Grzegorzewski, *Non-linear shaped approximation of fuzzy numbers*, in: Proceedings of IFSA-EUSFLAT 2009 (Lisbon), 2009, pp. 1535-1540.

[78] X. Wang, E. E. Kerre, *Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (1)*, Fuzzy Sets and Systems 118 (2001) 375-385.

[79] R.R. Yager, *A procedure for ordering fuzzy subsets of the unit interval*, Information Sciences 24 (1981) 143-161.

[80] C-T. Yeh, *Approximation by Interval, Triangular and Trapezoidal Fuzzy Numbers*, in: Proceedings of IFSA-EUSFLAT 2009 (Lisbon), 2009, pp. 143-148.

[81] C-T. Yeh, *A note on trapezoidal approximation of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 747-754.

[82] C-T. Yeh, *On improving trapezoidal and triangular approximations of fuzzy numbers*, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 297-313.

[83] C-T. Yeh, *Trapezoidal and triangular approximations preserving the expected interval*, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 1345-1353.

[84] C-T. Yeh, *Weighted semi-trapezoidal approximations of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 165 (2011) 61-80.

[85] C-T. Yeh, *Weighted trapezoidal and triangular approximations of fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems 160 (2009) 3059-3079.

[86] N. D. Yen, *Lipschitz continuity of solutions of variational inequalities with parametric polyhedral constraint*, Mathematics of Operations Research 20 (1995) 695-708.

[87] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Information and Control 8 (1965) 338-353.

[88] W. Zeng, H. Li, *Weighted triangular approximation of fuzzy numbers*, International Journal of Approximate Reasoning 46 (2007) 137-150.