

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
ȘCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ



**Variante Extinse pentru Teoreme de Punct Fix
pentru Clase de Contractii Generalizate și
Aplicații**

Teză de doctorat - Rezumat

Coordonator științific:
Prof. Dr. Adrian Petrușel

Student doctorand:
Mădălina Moga

Cluj-Napoca, România
2026

Cuprins

Introducere	1
1 Noțiuni și rezultate preliminare	14
1.1 Operatori univoci	14
1.2 Operatori multivoci	21
2 Proprietăți calitative ale soluției pentru ecuația de punct fix	26
2.1 Ecuația de punct fix cu operatori de tip Ćirić	26
2.1.1 Noțiunea de operator de tip Ćirić	27
2.1.2 Rezultate principale pentru operatori univoci de tip Ćirić	28
2.1.3 Rezultate principale pentru operatori multivoci de tip Ćirić	31
2.2 Ecuația de punct fix pentru operatorul de tip Meir-Keeler	33
2.2.1 Noțiunea de operator de tip Meir-Keeler în spații metrice	33
2.2.2 Rezultate principale pentru operatori univoci de tip Meir-Keeler	34
2.3 Rezultate de punct fix pentru φ - contracții multivoce pe grafic în spații metrice complete	36
2.3.1 Noțiunea de φ -contracție multivocă pe grafic	36
2.3.2 Rezultatul de punct fix pentru φ -contracții multivoce pe grafic	37
2.3.3 Teoria punctului fix de tip Maia pentru φ -contracții multivoce pe grafic	40

3	Teoreme de surjectivitate pentru clase de operatori contractivi	44
3.1	Teoreme de surjectivitate pentru operatori de tip Meir-Keeler	45
3.1.1	Teoreme de surjectivitate pentru operatori univoci de tip Meir-Keeler	45
3.1.2	Teoreme de surjectivitate pentru operatori multivoci de tip Meir-Keeler	46
3.1.3	Aplicație la o ecuație integrală neliniară	47
3.2	Teoreme de surjectivitate pentru contracții largi	50
3.2.1	Noțiunea de contracție largă	51
3.2.2	Teoreme de surjectivitate pentru contracții largi în cazul univoc	51
3.2.3	Teoreme de surjectivitate pentru contracții largi în cazul multivoc	52
	Concluzii	54
	Referințe	55

Introducere

Considerații asupra teoriei punctului fix

Unul dintre cele mai dinamice domenii ale matematicii din ultimii ani, care are numeroase aplicații în diverse domenii, cum ar fi fizica, informatica, biologia sau economia, este *teoria punctului fix*. Existența și unicitatea soluțiilor, stabilitatea și proprietățile mulțimilor de soluții a problemelor asociate ecuațiilor diferențiale sau incluziunile diferențiale sunt probleme fundamentale care pot fi studiate folosind teoria punctului fix. Prima demonstrație a existenței soluțiilor pentru o problemă cu condiții inițiale a fost dată de Augustin-Louis Cauchy în 1884. În aceeași perioadă, Émile Picard a propus metoda aproximărilor succesive ca metodă de aproximare a soluțiilor. Aceste concepte vor fi utilizate în continuare pentru a construi o metodă abstractă, demonstrată și publicată de Stefan Banach în anul 1922, vezi [9]. El a demonstrat că orice contracție f pe un spațiu normat liniar complet E admite un punct fix unic, iar acest punct fix este limita șirului de aproximații succesive generate de f . Acest lucru înseamnă că există un unic punct $x^* \in E$, astfel încât $f(x^*) = x^*$ și, pentru fiecare $x_0 \in E$, șirul $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la x^* . Acest rezultat a fost extins de Renato Caccioppoli în anul 1930. Principala sa contribuție a fost generalizarea teoremei lui Banach menționate mai sus de la spații normate liniare complete la spații metrice complete. Acest rezultat este denumit astăzi *Principiul contracției lui Banach-Caccioppoli*. După extinderea lui Caccioppoli, teorema punctului fix poate fi aplicată și spațiilor fără o structură liniară. Această teoremă are aplicații atât în analiza numerică, cât și în metodele iterative pentru diverse ecuații, generarea fractalilor și așa mai departe. În plus, este utilizată pentru rezolvarea diverselor probleme asociate cu ecuații integrale și diferențiale.

În anii următori, contribuțiile la studiul teoriei punctului fix au devenit

mai numeroase, au apărut noi tipuri de condiții de contracție pentru operatori, iar spațiile de lucru existente au fost extinse. De exemplu, conceptul de operator Meir-Keeler pe un spațiu metric complet a fost introdus de Amram Meir și Emmett Keeler în anul 1969, în lucrarea [39]. Rezultatul de punct fix dat de A. Meir și E. Keeler este o extindere a rezultatelor unor autori precum M. Edelstein [22] sau E. Rakotch [60].

Este de menționat faptul că, în 1972, teorema punctului fix Ćirić-Reich-Rus a fost descoperită independent de trei matematicieni importanți, și anume Ljubomir B. Ćirić, Simeon Reich și Ioan A. Rus. Rezultatele au extins principiul contracției lui Banach, introducând noțiunea de contracții generalizate, vezi [16]. Mai târziu, în 1974, în lucrarea [17], Ćirić prezintă rezultate care arată cum condiția cvasi-contracțiilor implică toate concluziile principiului contracției lui Banach. Aceasta înseamnă că teorema sa pentru existența și unicitatea punctului fix este considerată unul dintre cele mai generale rezultate din teoria metrică a punctului fix.

Discutând generalizările principiului contracției lui Banach-Caccioppoli, trebuie să menționăm și că în lucrarea din 1996 [13], Theodore A. Burton a introdus noțiunea de contracție largă și a demonstrat câteva teoreme de punct fix pentru astfel de funcții. Mai mult, se obține și un rezultat de punct fix de tip Krasnoselkii (pentru suma a doi operatori) care utilizează conceptul de contracție largă.

În 1968, M.G. Maia [36] a demonstrat o teoremă a punctului fix pentru un operator univoc $f : X \rightarrow X$ pe o mulțime X înzestrată cu două metrici care îndeplinesc condițiile principiului contracției lui Banach-Caccioppoli. În cazul operatorilor multivoci, studiul unei incluziuni de punct fix pe o mulțime înzestrată cu două metrici a fost introdus ulterior, vezi [47] și [56]. O abordare similară a fost urmată în această teză, dar în contextul φ -contracțiilor multivoce pe grafic.

În paralel, rezultatele menționate mai sus, referitoare la ecuația punctului fix $x = f(x)$ (unde $f : X \rightarrow X$ și X este un spațiu metric complet), au fost extinse prin trecerea la incluziunea punctului fix $x \in F(x)$, unde F este un operator multivoc care asociază unui element $x \in X$ mulțimea $F(x) \subset X$. Într-o lucrare publicată în 1969, Sam B. Nadler Jr. a demonstrat o teoremă a punctului fix pentru așa-numitele aplicații de contracție multivoci, vezi [46]. Teorema pentru contracții a lui Nadler utilizează distanța Hausdorff-Pompeiu pentru a măsura distanța dintre două mulțimi. Această teoremă are aplicații în incluziuni diferențiale, optimizare sau teoria jocurilor.

O extindere a teoremei de punct fix a lui Nadler a fost dată de Covitz și Nadler în 1970 în lucrarea [19]. Mai târziu, în 2001, s-a demonstrat că orice contracție Nadler (vezi, de exemplu, [5]) este un operator Meir-Keeler multivoc. O altă generalizare a principiului contracției lui Nadler pentru operatori multivoci a fost dată de A. Petrușel, G. Petrușel și Jen-Chih Yao în lucrarea [55], pentru cazul unei contracții multivoce pe grafic în spații metrice complete.

Există numeroase aplicații ale teoremelor de punct fix. De exemplu, ecuațiile integrale de tip Volterra pot fi studiate prin metode de punct fix. Studiul acestor probleme este semnificativ, deoarece ecuațiile integrale Volterra sunt utilizate în fizică, biologie și economie.

Argumentarea alegerii temei tezei

Scopul principal al acestei teze de doctorat este acela de a considera problema punctului fix (atât în cazul univoc, cât și în cazul multivoc), de a oferi versiuni extinse ale unor teoreme de punct fix pentru diverse clase de operatori. Versiunea extinsă înseamnă aici nu doar existența, unicitatea și aproximarea punctului fix, ci și localizarea și diferite proprietăți de stabilitate (cum ar fi stabilitatea Ulam-Hyers, bine-punerea în sensul lui Reich și Zaslavski și stabilitatea lui Ostrovski) pentru ecuația punctului fix sau incluziunea punctului fix. Clasele de operatori pe care le-am considerat sunt: cvasi-contracții univoce și multivoce în sensul lui Ćirić, operatori Meir-Keeler, φ -contracțiilor multivoce pe grafic și contracții largi în sensul lui Burton. Mai multe exemple ilustrează dezvoltările obținute în lucrare și sunt prezentate câteva aplicații la ecuațiile integrale ale lui Volterra, precum și o aplicație pentru teoremele de surjectivitate.

Structura tezei și principalele contribuții originale

Teza de doctorat este împărțită în trei capitole, urmate de lista de referințe. Fiecare capitol are secțiuni și subsecțiuni prezentate mai jos.

Capitolul 1: *Noțiuni și rezultate preliminare*

Scopul principal al acestui capitol este de a reaminti cititorului câteva noțiuni și rezultate de bază care sunt utilizate în următoarele capitole ale tezei. Ne

referim la noțiuni specifice Analizei Neliniare. În acest capitol, avem următoarele secțiuni:

1. *Operatori univoci*

În această secțiune, vom prezenta câteva concepte importante referitoare la punctele fixe ale operatorilor univoci. Sunt prezentate definiții pentru bila deschisă și bila închisă, operatorul Lipschitz, operatorul neexpansiv, șirul iterațiilor Picard, α -contractia, φ -contractia, binepunerea în sensul lui Reich și Zaslavski, stabilitatea lui Ostrowski și stabilitatea lui Ulam-Hyers. De asemenea, sunt menționate lema Cauchy-Toeplitz, principiul contractiei lui Banach (1922) și Caccioppoli (1930). Această subsecțiune oferă, de asemenea, definiția operatorului Meir-Keeler și extinderea principiului contractiei lui Banach în sensul unui operator Meir-Keeler. Următoarele referințe au fost utilizate în această secțiune: V. Berinde, M. Păcurar [10], [11], Lj. B. Ćirić [17], Granas-Dugundji [25], T. A. Lazăr, A. Petrușel și N. Shazhad [33], A. Magdaș [37] și I. A. Rus [69], [70], [76].

2. *Operatori multivoci*

În această secțiune, sunt trecute în revistă noțiunile de bază din teoria operatorilor multivoci. Reamintim următoarele noțiuni: distanța Pompeiu-Hausdorff dintre două mulțimi, grafic α -contractia, operatori multivoci slab Picard, operatori cvasi-mărginiți, concepte de continuitate și câteva proprietăți de stabilitate. Sunt prezentate un exemplu de contractie multivocă și un altul de contractie grafică multivocă. Următoarele referințe stau la baza noțiunilor prezentate: R. Iannacci [26], T. C. Lim [34], G. Petrușel [59], I.A. Rus, A. Petrușel, G. Petrușel [72] și I.A. Rus, A. Petrușel, A. Sîntămărian, [74], [75].

Capitolul 2: *Proprietăți calitative ale soluției pentru ecuația de punct fix*

Acest capitol este alcătuit din trei secțiuni. Scopul acestui capitol este de a prezenta câteva proprietăți calitative ale ecuației punctului fix (existența, unicitatea, dependența de date) pentru operatori de tip Ćirić, operatori de tip Meir-Keeler și φ -contractii neliniare multivoce de tip grafic în spații metrice complete. Mai mult, în cazul unei (ϕ, ψ) -contractii neliniare multivoce de tip Feng-Liu, este furnizată o aplicație la o incluziune integrală de tip Volterra. De asemenea, sunt prezentate câteva rezultate pentru teoreme de punct fix de tip Maia. Structura acestui capitol include următoarele secțiuni:

1. *Ecuatia de punct fix cu operatori de tip Ćirić*

Această secțiune se bazează pe articolul autorului, *M. Moga, On some qualitative properties of Ćirić's fixed point theorem*, publicat în *Studia Universitatis Babeș-Bolyai Mathematica*, vezi [42]. În plus, această secțiune face referire la o lucrare colaborativă din articolul lui *M. Moga și R. Trușcă, On some fixed point theorems for Ćirić operators*, publicat în *Miskolc Mathematical Notes*, vezi [44]. În acest capitol, proprietățile de stabilitate pentru ecuația punctului fix și incluziunea punctului fix sunt studiate dintr-un alt punct de vedere.

Cea mai generală extindere a principiului contracției Banach Caccioppoli a fost dată de Ćirić's în 1974. În această secțiune, ecuația $x = f(x)$ și incluziunea $x \in F(x)$ cu operatori care satisfac condiția de tip Ćirić sunt studiate din următoarea perspectivă: existență, unicitate, dependență de date și diferite tipuri de stabilități (bine-punerea în sensul lui Reich și Zaslavski, stabilitatea Ulam-Hyers și Ostrowski).

Această secțiune include următoarele trei subsecțiuni:

Prima subsecțiune este denumită *Noțiunea de operator de tip Ćirić*. Sunt definite noțiunile de contracție generalizată și operator de tip Ćirić din [17]. Este prezentat un exemplu relevant, pentru un operator de tip Ćirić, care nu este o contracție generalizată.

A doua subsecțiune este intitulată *Rezultate principale pentru operatori univoci de tip Ćirić*. Aici, lucrarea se concentrează pe teorema existenței și unicității în cazul univoc. Rezultatul de localizare, care generalizează teorema lui Ćirić și rezultatul homotopiei, a fost demonstrat de Radu Trușcă. Definiția condiției de retracție-deplasare este utilizată pentru a stabili proprietatea de bine-punere. Teorema 2.1.2 din această secțiune este rezultatul cercetării mele. Aceasta demonstrează că operatorul de tip Ćirić f are următoarele proprietăți: dependență de date, bine-punerea în sensul lui Reich și Zaslavski, stabilitate Ulam-Hyers, stabilitate Ostrowski, grafic $\frac{q}{1-q}$ -contracție și că f este o cvasi-contracție.

Titlul celei de-a treia subsecțiuni este *Rezultate principale pentru operatori multivoci de tip Ćirić*.

În această parte, cercetarea este centrată pe cazul multivoc. Începe cu un exemplu de operator multivoc de tip Ćirić care nu este o contracție generalizată multivocă. În pasul următor, utilizând Teorema lui A.

Amini-Harandi [4], realizarea mea a fost să ofer o demonstrație constructivă cu rezultate de dependență de date și stabilitate a problemei de punct fix $x \in F(x)$. În plus, este prezentată o teoremă în care mulțimea punctului fix coincide cu mulțimea strictă a punctului fix a unui operator multivoc de tip Ćirić. Pentru teorema punctului fix local ulterioară, contribuția principală este atribuită lui Radu Trușcă. În lucrarea lui Radu Trușcă [80], sunt prezentate teoreme și aplicații la principiile de aplicație deschisă și rezultate de continuare.

Rezultatele generalizează și completează teoremele date în V.

Berinde, Șt. Mărușter, I.A. Rus [12], Lj. B. Ćirić [17], A. Petrușel [51], I.A. Rus [68], [70], și I.A. Rus, A. Petrușel, G. Petrușel [76].

2. *Ecuatia de punct fix pentru operatorul de tip Meir-Keeler*

Referința acestei secțiuni este articolul autorului, *M. Moga, Some properties of the fixed point equation with Meir-Keeler operator* publicat în *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis*, vezi [40]. Pe lângă rezultatele existenței și unicității, sunt prezentate diferite proprietăți de stabilitate ale ecuației punctului fix.

A doua secțiune a acestui capitol are următoarele două subsecțiuni:

Prima subsecțiune este intitulată *Noțiunea de operator Meir-Keeler în spații metrice*. O observație importantă, împreună cu un exemplu, este că orice contracție este un operator Meir-Keeler, dar implicația inversă nu este în general valabilă. Sunt prezentate și definițiile unei funcții L și ale unei φ -contracții. O teoremă notabilă în această subsecțiune este teorema lui Lim, care face legătura dintre condiția lui Meir-Keller și condiția de contracție neliniară.

A doua subsecțiune se referă la *Rezultate principale pentru operatori univoci de tip Meir-Keeler*. Folosind caracterizarea lui Lim, sunt demonstrate proprietățile calitative ale punctului fix. Teorema principală 2.2.4 a secțiunii, se referă la un operator Meir-Keeler f și la funcția ϕ . Sunt demonstrate existența, bine-punerea în sensul lui Reich și Zaslavski și stabilitatea Ulam-Hyers a punctului fix.

Cele mai utilizate referințe în această secțiune sunt următoarele: T. C. Lim [35], A. Meir și E. Keeler [39], și A. Petrușel [49].

3. *Rezultate de punct fix pentru φ -contracții multivoce pe grafic în spații metrice complete*

Ultima secțiune a acestui capitol are ca referință lucrarea comună din articolul *M. Moga, Radu Trușcă, Fixed point and stability results for multi-valued nonlinear graph contractions in complete metric spaces* publicat în *The Journal of Analysis*, vezi [45]. O generalizare notabilă a contracției multivoce este φ -contracția multivocă pe grafic. În această secțiune, sunt prezentate generalizarea pentru φ -contracții multivoce pe grafic, precum și proprietățile de existență și stabilitate.

Secțiunea conține trei subsecțiuni, prezentate mai jos.

Titlul primei subsecțiuni este *Noțiunea de φ -contracție multivocă pe grafic*. Această subsecțiune oferă o introducere a noțiunilor de φ -contracții multivoce pe grafic, operator slab Picard multivoc și operator φ -slab Picard multivoc, care sunt utilizate ulterior.

A doua subsecțiune discută despre *Rezultatul de punct fix pentru φ -contracții multivoce pe grafic*. Un caz particular al unui spațiu metric clasic este demonstrat. În plus, este prezentat un exemplu de funcție multivocă F care îndeplinește condiția pentru φ -contracții multivoce pe grafic, dar nu îndeplinește condiția de contracție. Alte contribuții originale se referă la teorema pentru dependența de date a mulțimii punctelor fixe, stabilitatea Ulam-Hyers a incluziunii punctului fix și proprietatea strictă a punctului fix pentru φ -contracții multivoce pe grafic. Secțiunea continuă cu rezultatul demonstrat de Radu Trușcă, legat de teorema punctului fix local pentru φ -contracții multivoce pe grafic.

A treia subsecțiune, creată în colaborare cu Radu Trușcă, este intitulată *Teoria punctului fix de tip Maia pentru φ -contracții multivoce pe grafic*. Această subsecțiune prezintă teorema de tip Maia pentru φ -contracții multivoce pe grafic, în cazul unei mulțimi nevide, înzestrată cu două metrici. Noțiunea de (φ, ψ) -contracție multivocă de tip Feng-Liu, introdusă în [54], este extinsă. O altă contribuție originală se referă la o aplicație prezentată în această secțiune. Se ia în considerare incluziunea integrală de tip Volterra. Pentru ipotezele prezentate în subsecțiune, Teorema 2.3.14 demonstrează un rezultat de existență. Ultima parte a subsecțiunii se referă la principalele rezultate ale lui Radu Trușcă despre extinderea unor proprietăți de stabilitate pentru incluziunea punctului fix, în contextul (φ, ψ) -contracției neliniare multivoce de tip Feng-Liu într-un spațiu înzestrat cu două metrici.

Scopul acestei secțiuni este de a prezenta o generalizare a principiului neliniar multivoc al lui Węgrzyk [82], precum și a principiului contractiilor multivoce pe grafic dat de A. Petrușel, G. Petrușel și J.C. Yao [55].

Capitolul 3: *Teoreme de surjectivitate pentru clase de operatori contractivi*

Acest capitol conține două secțiuni. Acest capitol își propune să prezinte câteva teoreme de surjectivitate pentru operatorii Meir-Keeler și pentru contractii largi. Ambele cazuri constau în rezultate demonstrate pentru operatori univoci și multivoci. Obiectivul principal este de a demonstra că operatorii sunt contractii-normă și, în condiții adecvate, are loc surjectivitatea. Capitolul este structurat după cum urmează:

1. *Teoreme de surjectivitate pentru operatori de tip Meir-Keeler*

Conținutul acestei secțiuni se bazează pe articolul *M. Moga, Meir-Keeler operators and applications to surjectivity theorems* publicat în [41]. În această secțiune, scopul este de a demonstra că un operator Meir-Keeler este o contracție-normă, atât pentru cazul univoc, cât și pentru cazul multivoc.

Cele trei subsecțiuni sunt prezentate după cum urmează:

Prima subsecțiune este denumită *Teoreme de surjectivitate pentru operatori univoci de tip Meir-Keeler*. Rezultatul obținut în această secțiune a fost o nouă teoremă de surjectivitate pentru un operator Meir-Keeler univoc. Aceasta se referă la domeniul generat de operatorul Meir-Keeler, care este un operator surjectiv. Pentru demonstrarea teoremei, metoda se bazează pe teoria operatorială a contracției-normă și pe o teoremă a lui A. Granas [24]. Sunt luate în considerare cazurile în care x face parte din bila închisă și când se află în afara bilei închise.

A doua subsecțiune a acestei secțiuni este intitulată *Teoreme de surjectivitate pentru operatori multivoci de tip Meir-Keeler*. Este prezentată definiția operatorului Meir-Keeler multivoc dată de H.K. Xu [83]. Teorema 3.1.3 este o contribuție originală care demonstrează varianta multivocă a teoremei dată de T. Suzuki în 2007, [78]. Acest rezultat și teorema lui R. Iannacci din 1978, [26], conduc la teorema principală a acestei subsecțiuni. Acest rezultat se referă la surjectivitatea funcției multivoce, $1_Y - F$, generat de operatorul Meir-Keeler.

Ultima subsecțiune a acestei secțiuni este despre o *Aplicație la o ecuație integrală neliniară*. Mai precis, sunt prezentate câteva rezultate de existență pentru ecuații integrale neliniare. Pașii demonstrației indică faptul că operatorul F este cvasi-mărginit, ceea ce implică faptul că F este, de asemenea, o contracție-normă. Prin urmare, aplicând teorema lui A. Granas [24] pentru contracții-normă, rezultă că ecuația integrală are cel puțin o soluție. Abordarea este continuată prin demonstrarea faptului că operatorul F este un operator Meir-Keeler. Demonstrând toți pașii de mai sus, rezultatele conduc la Teorema 3.1.12, care subliniază faptul că ecuația integrală are cel puțin o soluție.

Unele dintre cele mai relevante referințe sunt F. Aldea [1], A. Granas, J. Dugundji [25], Meir și E. Keeler [39], A. Petrușel [49], G. Petrușel [59] și I. A. Rus [69].

2. *Teoreme de surjectivitate pentru contracții largi*

Ultima secțiune a acestui capitol pune în evidență lucrarea comună cu Adrian Petrușel *Large Contractions and Surjectivity in Banach Spaces* în Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Optimization and Soft Computing, vezi [43]. Scopul acestei secțiuni este de a demonstra că orice contracție largă este o contracție-normă în sensul lui A. Granas. Apoi, se demonstrează că rezultatele surjectivității extind și completează mai multe rezultate de surjectivitate.

Prima subsecțiune a acestei secțiuni este intitulată *Noțiunea de contracție largă*. Este prezentată noțiunea de contracție largă introdusă de T.A. Burton în 1996, [13]. De asemenea, se reamintește observația lui J. Jachymski din [28] despre condiția contractivă din definiția contracției largi. În acest sens, este specificată definiția unei contracții generalizate, introdusă de M.A. Krasnoselskii.

Titlul celei de-a doua subsecțiuni este *Teoreme de surjectivitate pentru contracții largi în cazul univoc*. Teorema 3.2.1 a lui T.A. Burton și lucrarea [14] a lui T.A. Burton și I.K. Purnaras reprezintă punctul de plecare al acestei părți. Folosind această teoremă de caracterizare, este dat un exemplu de contracție largă care nu este o contracție în sensul lui Banach. Un alt exemplu se referă la considerația că orice operator Meir-Keeler pe o submulțime nevidă și convexă este o contracție largă. Teorema principală a subsecțiunii se referă la funcția $1_X - f$ generată de f care este un operator surjectiv.

Ultima subsecțiune este numită *Teoreme de surjectivitate pentru contracții largi în cazul multivoc*. Abordarea este similară cu subsecțiunea a doua. Contribuția proprie se referă la definiția contracției largi multivoce și la demonstrația unei teoreme de surjectivitate pentru funcția $1_X - F$ generată de operatorul multivoc de contracție largă F .

Este prezentat un rezultat de punct fix pentru o contracție largă multivocă într-un spațiu metric complet.

Literatura utilizată este următoarea: A. T. Burton [13], A. T. Burton, I. K. Purnaras [14], A. Granas [24], R. Iannacci [26], I. A. Rus [69], I. A. Rus, A. Petrușel, G. Petrușel [72].

Rezultate originale ale tezei și lista publicațiilor

Contribuțiile autorului la teza de doctorat implică studierea diferitelor surse bibliografice despre acest subiect. Sunt aduse contribuții semnificative pentru extinderea variantelor principiului contracției lui Banach la clase mai generale de operatori.

Aceste contribuții sunt menționate în bibliografie și au fost publicate în următoarele reviste științifice:

1. Moga, M.: *Some properties of the fixed point equation with Meir-Keeler operator*, Annales Univ. Sci. Budapest., Sec. Math. vol. **64** (2021), 109-115. (Indexat în MathSciNet, ZbMath).
2. Moga, M.: *Meir-Keeler operators and applications to surjectivity theorems*, J. Nonlinear and Convex Anal., vol. **23**, no. 3 (2022), 625-634. (Indexat în MathSciNet, Web Of Science cu factorul de impact: 0.7, ZbMath).
3. Moga, M.: *On some qualitative properties of Ćirić's fixed point theorem*, Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math., vol. **67**, no. 1 (2022), 47-54. (Indexat în MathSciNet, Scopus, Web Of Science cu factorul de impact: 0.3, ZbMath).
4. Moga, M., Petrușel, A.: *Large Contractions and Surjectivity in Banach Spaces*. In: Som, T., Ghosh, D., Castillo, O., Petrusel, A., Sahu, D. (eds) Applied Analysis, Optimization and Soft Computing. ICNAAO 2021.

Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol. **419**, Springer, Singapore (2023), 3-12. (Indexat în MathSciNet, Scopus, ZbMath), [10.1007/978-981-99-0597-3_1](https://doi.org/10.1007/978-981-99-0597-3_1).

5. Moga, M., Truşcă, R.: *On some fixed point theorems for Ćirić operators*. Miskolc Mathematical Notes, vol. **25**, no. 2 (2024), 871-885. (Indexat în MathSciNet, Scopus, Web Of Science cu factorul de impact: 0.9, ZbMath).
6. Moga, M., Truşcă, R.: *Fixed point and stability results for multi-valued nonlinear graph contractions in complete metric spaces*. J. Anal., vol. 33, (2025), 717-742. (Indexat în MathSciNet, Scopus, Web Of Science cu factorul de impact: 0.7, ZbMath), [10.1007/s41478-024-00858-6](https://doi.org/10.1007/s41478-024-00858-6).

Comunicări şi diseminarea rezultatelor

Merită menţionate aici conferinţele la care au fost prezentate rezultatele originale ale tezei de doctorat şi care au adus numeroase informaţii valoroase.

1. În contextul conferinţei *22nd International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC)*, găzduită la Timisoara, România, între 1 şi 4 septembrie 2020, am prezentat lucrarea cu titlul: *An extended version of Meir-Keeler theorem*.
2. În cadrul conferinţei *13th Joint Conference on Mathematics and Computer Science (MACS)*, organizată la Budapesta, Ungaria, între 1 şi 3 octombrie 2020, am prezentat lucrarea cu titlul: *Some properties of the fixed point equation with Meir-Keeler operator*. Articolul care serveşte drept bază a acestei prezentări a fost publicat în lucrarea conferinţei.
3. Cu ocazia conferinţei *19th International Conference on Functional Equations and Inequalities (ICFEI)*, găzduită la Bedlewo, Polonia, între 12 şi 18 septembrie, 2021, am prezentat lucrarea cu titlul: *On some properties of Meir-Keeler operators*.
4. În cadrul conferinţei *23rd International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC)*, organizată la Timişoara, România, între 7 şi 10 decembrie, 2021, am prezentat lucrarea cu titlul: *On some qualitative properties of Ćirić's fixed point theorem*.

5. În contextul conferinței 4th *Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications* (RISMAA), desfășurată la Brașov, România, în perioada 19-21 mai, 2022, am prezentat lucrarea cu titlul: *Fixed point and surjectivity results for large contractions in Banach spaces*.
6. Cu ocazia conferinței 4th *International Conference on Mathematics and Computer Science (MACOS)*, organizată la Brașov, România, între 15 și 17 septembrie, 2022, am prezentat lucrarea cu titlul: *Fixed point theory for multi-valued nonlinear graph contractions in complete metric spaces* (studiu în comun cu Radu Trușcă și Adrian Petrușel).
7. În cadrul conferinței 24th *International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing* (SYNASC), organizată la Linz, Austria, între 12 și 15 septembrie, 2022, am ținut prezentarea cu titlul: *On some fixed point theorems for Ćirić's operators* (lucrare în comun cu Radu Trușcă).
8. Cu ocazia conferinței 14th *International Conference on Fixed Point Theory and its Applications* (ICFPTA), găzduită la Brașov, România, între 11 și 14 iulie, 2023, am prezentat lucrarea cu titlul: *Fixed point and surjectivity results for large contractions in Banach spaces*.
9. În contextul conferinței 6th *Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications* (RISMAA), desfășurată la Cluj-Napoca, România, între 30 și 31 mai, 2024, am prezentat lucrarea cu titlul: *Fixed point and stability results for multi-valued nonlinear graph contractions in complete metric spaces*.
10. În cadrul conferinței 26th *International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing* (SYNASC) organizată la Timișoara, România, între 16 și 18 septembrie, 2024, am susținut prezentarea cu titlul: *Fixed points for Feng-Liu multi-valued operators with an application* (lucrare în comun cu Radu Trușcă).

Mulțumiri

În primul rând, doresc să-mi exprim sincera recunoștință îndrumătorului meu științific, Prof. Dr. Adrian Petrușel, pentru îndrumarea valoroasă, feedback-

ul perspicace și încurajarea constantă pe parcursul studiilor mele doctorale. Apreciez profund sprijinul și recomandările lui atente.

De asemenea, doresc să-mi exprim aprecierea față de toți membrii și colaboratorii seminarului de cercetare Operatori Neliniari și Ecuații Diferențiale de la Universitatea Babeș-Bolyai pentru recomandările și prezentările lor valoroase. Sunt recunoscătoare pentru tot sprijinul pe care l-am primit din partea Universității Babeș-Bolyai, care mi-a facilitat participarea la diverse conferințe.

Mai presus de toate, sunt profund recunoscătoare familiei mele pentru răbdarea și încurajarea lor pe parcursul pregătirii tezei. Aș dori, de asemenea, să profit de această ocazie pentru a le mulțumi familiei mele, prietenilor mei și colegilor mei pentru înțelegerea și sprijinul acordat pe întreaga durată a parcursului meu doctoral.

Capitolul 1

Noțiuni și rezultate preliminare

Scopul principal al acestui capitol este de a prezenta câteva noțiuni și rezultate de bază care sunt utilizate în următoarele capitole ale acestei teze de doctorat. Acest capitol are două secțiuni: operatori univoci și operatori multivoci. Sunt reiterate noțiuni importante pentru teoria punctului fix, cum ar fi metrica, spațiul metric, șirul Cauchy, bila deschisă și închisă. De asemenea, trecem în revistă noțiuni specifice din analiza neliniară, cum ar fi spațiul metric generalizat, spațiul Banach, α -contractia etc. Pentru a scrie capitolul de *Noțiuni și rezultate preliminare*, au fost studiate următoarele lucrări: Granas-Dugundji [25], I.A. Rus [70], [76], V. Berinde, M. Păcurar [11], T. A. Lazăr, A. Petrușel și N. Shazhad [33], G. Petrușel [59], I.A. Rus, A. Petrușel, G. Petrușel [72] și [73].

1.1 Operatori univoci

În prima parte, reamintim câteva noțiuni utile, cum ar fi șirul iterațiilor Picard, α -contractia, φ -contractia, operatorul cvasi-mărginit, bine-punerea în sensul lui Reich și Zaslavski, stabilitatea lui Ostrowski, stabilitatea lui Ulam-Hyers etc., care vor fi utilizate în demonstrațiile principalelor teoreme.

Următoarele noțiuni sunt utilizate pe parcursul tezei, vezi, de exemplu, cartea lui I.A. Rus, A. Petrușel, G. Petrușel, *Fixed Point Theory*, [73].

Fie X o mulțime nevidă și $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ o metrică cu valori infinite se numește metrică generalizată $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ dacă axiomele metricii sunt îndeplinite.

Fie x_0 un punct dat în X și $r > 0$. Mulțimea $B(x_0; r)$ este bila deschisă de centru x_0 și rază r , unde

$$B(x_0; r) := \{x \in X : d(x_0, x) < r\},$$

în timp ce $\tilde{B}(x_0; r)$ este bila închisă de centru x_0 și rază r , unde

$$\tilde{B}(x_0; r) := \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\}.$$

O submulțime Y a lui X este mărginită dacă există $x \in X$ și $r > 0$ astfel încât $Y \subset B(x; r)$.

Definiție 1.1.1 (R. Węgrzyk [82]). *Spațiul metric (X, d) este metric convex dacă pentru fiecare $x_1, x_2 \in X$ distinct există $x \in X$ astfel încât*

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, x) + d(x, x_2) \text{ și } x_1 \neq x \neq x_2.$$

Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach. Atunci, prin $P(X)$, vom nota familia tuturor submulțimilor nevide ale lui X .

$$\mathcal{P}(X) := \{Y | Y \subset X\}, \quad P(X) := \{Y \subset \mathcal{P}(X) | Y \neq \emptyset\},$$

1_X – operatorul identitate.

Vom folosi și următoarele familii de mulțimi:

$$\begin{aligned} P_b(X) &:= \{Y \in P(X) | Y \text{ este mărginit}\}, \\ P_{cp}(X) &:= \{Y \in P(X) | Y \text{ este compact}\}, \end{aligned}$$

$$P_{cl}(X) := \{Y \in P(X) | Y \text{ este închis}\}, \quad P_{cv}(X) := \{Y \in P(X) | Y \text{ este convex}\}.$$

Lemă 1.1.1 (Lema Cauchy-Toeplitz). *Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ două șiruri de numere pozitive astfel încât $\sum_{n \geq 0} a_n < \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Atunci*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) = 0.$$

Definiție 1.1.2 (Granas-Dugundji [25]). *Fie X, Y două spații normate. Atunci:*

- (i) o funcție $f : X \rightarrow Y$ se numește compactă dacă $f(X)$ este conținută într-o submulțime compactă a lui Y (sau echivalent, $f(X)$ este relativ compactă);
- (ii) o funcție $f : X \rightarrow Y$ se numește complet continuă dacă este continuă și pentru fiecare $S \in P_b(X)$, avem că $f(S)$ este relativ compactă.

Din cartea *Fixed Point Theory*, [73], sunt menționate următoarele noțiuni.

Definiție 1.1.3. Fie (X, d) și $(Y, \tilde{d})$ două spații metrice și $f : X \rightarrow Y$ un operator.

Proprietăți de continuitate și compactitate.

Prin definiție, operatorul f este:

- (i) continuu dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, cu $x_n \rightarrow x$ când $n \rightarrow \infty$ implică $f(x_n) \rightarrow f(x)$ când $n \rightarrow \infty$;
- (ii) cu graficul închis dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, cu $x_n \rightarrow x$ și $f(x_n) \rightarrow y$ când $n \rightarrow \infty$ implică $y = f(x)$, adică $G(f) \subset X \times Y$ este o submulțime închisă;
- (iii) mărginit dacă $S \in P_b(X)$ implică $f(S) \in P_b(Y)$;
- (iv) compact dacă $S \in P_b(X)$ implică $\overline{f(S)} \in P_b(Y)$;
- (v) complet continuu dacă este și compact și continuu;

Proprietăți de tip Lipschitz.

Prin definiție, operatorul f este:

- (vi) Lipschitz dacă există $l \in \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq ld(x, y), \text{ pentru toți } x, y \in X;$$

- (vii) contracție dacă există $l \in [0, 1[$ astfel încât f este l -Lipschitz (adică Lipschitz cu constanta l);

(viii) *contractiv dacă*

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y), \text{ pentru toți } x, y \in X, x \neq y;$$

(ix) *neexpansivă dacă este 1-Lipschitz;*

(x) *expansiv dacă*

$$d(f(x), f(y)) > d(x, y), \text{ pentru toți } x, y \in X, x \neq y.$$

Fie X o mulțime nevidă și $f : X \rightarrow X$ un operator. Reamintim că,

$$\text{Fix}(f) = \{x \in X \mid x = f(x)\}$$

este mulțimea punctului fix a lui f .

Notăm cu $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ șirul iterațiilor Picard (sau șirul aproximațiilor succesive) ale lui f începând de la $x_0 \in X$, unde $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ de n ori. Remarcăm că șirul iterațiilor Picard pentru f începând de la $x_0 \in X$ poate fi definit recursiv prin formula $x_{n+1} = f(x_n)$, pentru $n \in \mathbb{N}$, unde $x_n := f^n(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$.

Spunem că operatorul f este un operator slab Picard (pe scurt WPO) dacă șirul $(f^n(x))_n \in \mathbb{N}$ converge, pentru orice $x \in X$, iar limita, notată cu $f^\infty(x)$, este un punct fix f . Dacă f este un WPO, atunci definim operatorul f^∞ prin

$$f^\infty : X \rightarrow X, f^\infty(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x).$$

Fie f un WPO și $c > 0$. Atunci f se numește c -WPO dacă

$$d(x, f^\infty(x)) \leq cd(x, f(x)), \text{ pentru orice } x \in X.$$

Fie (X, d) un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$ un operator. Pentru $A \subset X$, fie $\delta(A) := \sup \{d(a, b) : a, b \in A\}$ diametrul mulțimii A .

Pentru fiecare $x \in X$, notăm:

$$O(x, n) = \{x, f(x), \dots, f^n(x)\}, n = 1, 2, \dots,$$

$$O(x, \infty) = \{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}.$$

Definiție 1.1.4 (Lj. B. Ćirić [17]). *Fie (X, d) un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$ un operator. Atunci X se numește f -orbital complet dacă oricare șir Cauchy conținut în $O(x, \infty)$, pentru un anumit $x \in X$, converge în X .*

Următoarele clase de operatori într-un spațiu metric (X, d) sunt importante pentru abordarea noastră.

Definiție 1.1.5. *Fie (X, d) un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$ un operator. Atunci f se numește o α -contracție dacă există $\alpha \in [0, 1)$ astfel încât*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X. \quad (1.1.1)$$

Definiție 1.1.6 (I.A. Rus [70]). *Fie (X, d) un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$ un operator. Atunci f se numește o α -contracție pe grafic dacă există $\alpha \in [0, 1)$ astfel încât*

$$d(f^2(x), f(x)) \leq \alpha d(x, f(x)), \text{ pentru orice } x \in X. \quad (1.1.2)$$

În această lucrare notăm $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ mulțimea tuturor numerelor naturale și prin $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Definiție 1.1.7 (I.A. Rus [76]). *O funcție $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ se numește funcție de comparație dacă satisface:*

(i) φ este strict crescătoare;

(ii) $(\varphi^n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la 0 când $n \rightarrow \infty$, pentru orice $t \in \mathbb{R}_+$.

Dacă condiția (ii) este înlocuită de condiția:

$$(iii) \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t) < \infty, \text{ pentru orice } t > 0, \quad (1.1.3)$$

atunci φ se numește o funcție de comparație tare.

Lemă 1.1.2. *Dacă $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție de comparație, atunci $\varphi(t) < t$, pentru orice $t > 0$, $\varphi(0) = 0$ și φ este continuă în 0.*

Lemă 1.1.3. *Dacă $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție de comparație tare, atunci se aplică următoarea ecuație:*

- (i) φ este o funcție de comparație;
- (ii) funcția $\zeta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, definită prin

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t),$$

este crescătoare și continuă în 0.

Lemă 1.1.4 (V. Berinde, M. Păcurar [11]). Fie $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție de comparație tare și $a_n \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $a_n \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$. Atunci

$$\sum_{k=0}^n \varphi^{n-k}(a_k) \rightarrow 0 \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

Definiție 1.1.8 (T. A. Lazăr, A. Petrușel și N. Shazhad [33]). Fie (X, d) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ un operator. Spunem că f este o φ -contracție dacă

$$d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \text{ pentru fiecare } x, y \in X,$$

unde $\varphi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție de comparație, adică φ este crescătoare și satisface $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(f) = 0$, pentru orice $f \geq 0$.

În particular, dacă $\varphi(f) = kf$, $x \in \mathbb{R}_+$ (pentru un $k \in (0, 1)$), atunci f se numește o k -contracție.

Definiție 1.1.9 (Meir-Keeler [39]). Fie (X, d) un spațiu metric. Un operator $f : X \rightarrow X$ se numește operator Meir-Keeler dacă pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât următoarea implicație este valabilă:

$$x, y \in X, \varepsilon \leq d(x, y) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Următorul rezultat a fost demonstrat de Meir și Keeler în 1969. De fapt, în [39], conceptul operatorului Meir-Keeler este introdus în contextul unui spațiu metric complet și este demonstrată următoarea teoremă importantă a punctului fix.

Teoremă 1.1.5 (Meir-Keeler [39]). Fie (X, d) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ un operator Meir-Keeler. Atunci f este un operator Picard, adică,

(i) $Fix(f) = \{x^*\}$;

(ii) șirul $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la x^* , pentru orice $x \in X$.

Definiție 1.1.10 (A. Granas, vezi, de exemplu, I. A. Rus [69]). Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Un operator $f : X \rightarrow X$ se numește *cvasi-mărginit* dacă există două numere $a, b \in]0, \infty[$ astfel încât

$$\|f(x)\| \leq a\|x\| + b, \text{ pentru orice } x \in X. \quad (1.1.4)$$

În literatura de specialitate, noțiunea de cvasi-mărginit este denumită și creștere liniară.

În contextul de mai sus, dacă f este un operator cvasi-mărginit, atunci cvasi-norma lui f este definită prin

$$|f| = \inf \{a > 0 \mid \text{există } b > 0 \text{ astfel încât relația (1.1.4) este valabilă}\}.$$

Definiție 1.1.11 (A. Granas, vezi, de exemplu, I. A. Rus [69]). Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat și $f : X \rightarrow X$ un operator cvasi-mărginit. Dacă cvasi-norma lui f este strict mai mică decât unu, atunci f se numește o *contracție-normă*.

Câteva definiții pentru proprietățile de stabilitate sunt prezentate mai jos.

Definiție 1.1.12 (S. Reich și A. J. Zaslavski [64]). Fie (X, d) un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$ un operator. Atunci, ecuația de punct fix are proprietatea de bine-punere în sensul lui Reich și Zaslavski dacă $Fix(f) = \{x^*\}$ și dacă $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$ este un șir astfel încât

$$d(y_n, f(y_n)) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

atunci avem că

$$y_n \rightarrow x^* \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

Definiție 1.1.13 (V. Berinde, M. Păcurar [10]). Fie (X, d) un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$ un operator astfel încât $Fix(f) = \{x^*\}$. Spunem că f are proprietatea de stabilitate Ostrowski dacă următoarea implicație este valabilă: pentru orice șir $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ având proprietatea

$$d(y_{n+1}, f(y_n)) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty,$$

avem că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x^*.$$

Definiție 1.1.14 (P. T. Petru, A. Petrușel, J.-C. Yao [48]). *Fie (X, d) un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$. Spunem că ecuația punctului fix $f(x) = x$ este stabilă Ulam-Hyers în mod generalizat dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ și pentru orice ε -soluție y^* a ecuației punctului fix (adică $d(y^*, f(y^*)) \leq \varepsilon$) există o soluție unică x^* a ecuației punctului fix astfel încât*

$$d(x^*, y^*) \leq \psi(\varepsilon),$$

unde $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție crescătoare, continuă în 0, și $\psi(0) = 0$.

Observație 1.1.6. În particular, ecuația punctului fix se numește Ulam-Hyers stabilă dacă există $c > 0$ astfel încât $\psi(f) = cf, f \in \mathbb{R}_+$.

Principalul principiu al punctului fix într-un spațiu metric este cel dat de Banach (1922) și Caccioppoli (1930).

Teoremă 1.1.7 (Principiul contracției - Banach (1922) și Caccioppoli (1930)). *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ o α -contracție. Atunci avem:*

- (i) $F_f = F_{f^n} = \{x^*\}$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$;
- (ii) pentru orice $x \in X$ șir de aproximări succesive $f^n(x)$ ale lui f pornind de la x acesta converge la x^* ;
- (iii) $d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, f(x_0))$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$.

1.2 Operatori multivoci

Scopul principal al acestui capitol este de a oferi câteva noțiuni de bază despre teoria operatorilor multivoci în spații metrice. Sunt prezentate noțiuni precum distanța Pompeiu-Hausdorff, operatorul cvasi-mărginit și continuitatea.

Pe parcursul lucrării, vom lua în considerare următoarele notații (vezi, de exemplu, [59], [72]):

Fie (X, d) un spațiu metric. Avem următoarele noțiuni:

(i) Distanța dintre două mulțimi S_1 și S_2

$$D(S_1, S_2) : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

$$D(S_1, S_2) = \inf \{\|x_1 - x_2\| \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}.$$

(ii) Excesul unei mulțimi S_1 peste o mulțime S_2

$$\rho(S_1, S_2) : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

$$\rho(S_1, S_2) = \sup \{D(x_1, S_2) \mid x_1 \in S_1\}.$$

(iii) Distanța Pompeiu-Hausdorff dintre două mulțimi S_1 și S_2

$$H(S_1, S_2) : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

$$H(S_1, S_2) = \max \{\rho(S_1, S_2), \rho(S_2, S_1)\}.$$

(iv) Diametrul dintre două mulțimi S_1 și S_2

$$\Delta(S_1, S_2) : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

$$\Delta(S_1, S_2) = \sup \{\|x_1 - x_2\| \mid x_1 \in S_1, x_2 \in S_2\}.$$

Dacă $F : X \rightarrow P(X)$ este un operator multivoc, atunci mulțimea punctelor fixe este notată cu

$$Fix(F) := \{x \in X \mid x \in F(x)\},$$

în timp ce graficul lui F este mulțimea

$$Graph(F) := \{(x, y) \in X \times X : y \in F(x)\}.$$

Definiție 1.2.1 (vezi, de exemplu, A. Petrușel, G. Petrușel, J.-C. Yao [55]).
Fie (X, d) un spațiu metric generalizat și $F : X \rightarrow P(X)$. Atunci, operatorul multivoc F se numește:

- (a) α -Lipschitz dacă $\alpha > 0$ și $H(F(x_1), F(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2)$, pentru orice $(x_1, x_2) \in X \times X$;
- (b) α -contractie dacă este α -Lipschitz cu $\alpha < 1$;

- (c) α -Lipschitz pe grafic dacă $\alpha > 0$ și $H(F(x_1), F(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2)$, pentru orice $(x_1, x_2) \in \text{Graph}(F)$;
- (d) α -contracție pe grafic dacă este α -Lipschitz pe grafic cu $\alpha < 1$.

Este evident că (a) implică (c) și (b) implică (d), dar nu invers.

Definiție 1.2.2 (I. A. Rus, [74], [75]). Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci $F : X \rightarrow P(X)$ se numește operator multivoc slab Picard (MWP) dacă pentru oricare $x \in X$ și oricare $y \in F(x)$ există un șir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ în X astfel încât

- (i) $x_0 = x, x_1 = y$;
- (ii) $x_{n+1} \in F(x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- (iii) șirul $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent și limita sa este un punct fix al lui F .

Remarcăm că un șir care satisface (i) și (ii) se numește șirul iterațiilor de tip Picard al lui F începând de la $(x, y) \in \text{Graph}(F)$.

Dacă $F : X \rightarrow P(X)$ este un operator MWP, atunci definim operatorul multivoc

$$F^\infty : \text{Graph}(F) \rightarrow P(\text{Fix}(F)) \text{ prin}$$

$$F^\infty(x, y) := \{z \in \text{Fix}(F) \mid \text{există un șir al aproximațiilor succesive ale lui } F \text{ începând de la } (x, y) \text{ care converge la } z\},$$

pentru orice $(x, y) \in \text{Graph}(F)$.

Observație 1.2.1. Remarcăm că dacă $F : X \rightarrow P_d(X)$ este o α -contracție, atunci F este un operator φ -MWP cu $\varphi(t) = \frac{1}{1-\alpha}t$.

Definiție 1.2.3 (R. Iannacci [26]). Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și $F : X \rightarrow P_b(X)$. Atunci F se numește cvasi-mărginit dacă există $m, M \in]0, \infty[$ astfel încât

$$\|y\| \leq m\|x\| + M, \text{ pentru oricare } (x, y) \in \text{Graph}(F). \quad (1.2.1)$$

Cvasi-norma lui F este definită prin

$$|F| = \inf \{m > 0 \mid \text{există } M > 0 \text{ astfel încât relația (1.2.1) este valabilă}\}.$$

Dacă cvasi-norma lui F este mai mică decât unu (adică $|F| < 1$), atunci F se numește o contracție-normă multivocă. În configurația de mai sus, vom nota

$$\|F(x)\| := H(F(x), \{0\}), \text{ pentru orice } x \in X.$$

Definiție 1.2.4 (vezi, de exemplu, M. Kisielewicz [31]). *Un operator multivoc $F : X \rightarrow P(X)$ se numește compact dacă $F(X)$ este relativ compact. Un operator multivoc $F : X \rightarrow P(X)$ se numește complet continuu dacă este semicontinuu superior și pentru fiecare $A \in P_b(X)$ avem că $F(A)$ este relativ compact.*

Următoarele noțiuni și rezultate sunt bine cunoscute.

Definiție 1.2.5 (vezi, de exemplu, T. C. Lim [34]). *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Atunci $F : X \rightarrow P(X)$ se numește neexpansivă dacă*

$$H(T(x), T(y)) \leq \|x - y\|, \text{ pentru fiecare } x, y \in X.$$

Reamintim acum noțiunea de stabilitate Ulam-Hyers, de bine-punere în sensul lui Reich și Zaslavski și de stabilitate Ostrowski pentru o incluziunea de punct fix în cazul multivoc.

Definiție 1.2.6 (P. T. Petru, A. Petrușel, J.-C. Yao [48]). *Fie (X, d) un spațiu metric și $F : X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc. Atunci, problema punctului fix*

$$x \in F(x), x \in X, \tag{1.2.2}$$

se spune că este stabilă Ulam-Hyers în mod generalizat dacă există un operator crescător $\gamma : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ cu $\gamma(0) = 0$ și pentru care γ este continuu în 0, astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice ε -soluție z a incluziunii de punct fix (1.2.2) (adică, $D(z, F(z)) \leq \varepsilon$) există $x^ \in \text{Fix}(F)$ astfel încât*

$$d(z, x^*) \leq \gamma(\varepsilon).$$

Prin definiție, din [72], fie X o mulțime nevidă și $Y \subset X$. O retracție a mulțimii lui X pe Y este un operator $r : X \rightarrow Y$, astfel încât restricția lui r la Y este operatorul identitate.

Următoarea noțiune de bine-punere în sensul lui Reich și Zaslavski pentru cazul unui operator multivoc a fost introdusă în [64] după cum urmează:

Definiție 1.2.7 (S. Reich și A. J. Zaslavski [64]). *Fie (X, d) un spațiu metric și fie $F : X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc. Presupunem că $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$ și există $r : X \rightarrow \text{Fix}(F)$ o retracție a mulțimii. Atunci, incluziunea punctului fix $x \in F(x)$ este bine-pusă în sensul lui Reich și Zaslavski dacă pentru fiecare $x^* \in \text{Fix}(F)$ și pentru orice șir $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset r^{-1}(x^*)$ astfel încât*

$$D(u_n, F(u_n)) \rightarrow 0 \text{ când } n \rightarrow \infty,$$

avem că

$$u_n \rightarrow x^* \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

Definiție 1.2.8 (S. Reich și A. J. Zaslavski [64]). *Fie (X, d) un spațiu metric și fie $F : X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc. Presupunem că $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$ și există $r : X \rightarrow \text{Fix}(F)$ o retracție a mulțimii. Atunci, incluziunea punctului fix $x \in F(x)$ are proprietatea de stabilitate Ostrowski dacă pentru orice șir $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset r^{-1}(x^*)$ astfel încât*

$$D(v_{n+1}, F(v_n)) \rightarrow 0 \text{ când } n \rightarrow \infty,$$

avem că

$$v_n \rightarrow x^* \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

Pentru mai multe detalii despre operatorii Picard multivoci, operatorii slab Picard, contracțiile generalizate, teoreme de punct fix și proprietățile de stabilitate, vezi, de exemplu, [30], [48], [50], [53], [57], și [58].

Capitolul 2

Proprietăți calitative ale soluției pentru ecuația de punct fix

Acest capitol se concentrează pe proprietățile de stabilitate ale punctului fix pentru diferite clase de operatori. Abordarea adoptată în prima secțiune constă în extinderea proprietăților pentru operatorul de tip Ćirić. Rezultatele privind stabilitatea și punctul fix sunt demonstrate atât în cazuri univoce, cât și multivoce. În a doua secțiune, este considerat operatorul Meir-Keeler. Rezultatul principal din această secțiune abordează operatorii univoci. Ultima secțiune este despre φ -contractia neliniară multivocă pe grafic în spații metrice complete. În această secțiune, sunt luate în considerare rezultatele punctului fix și teoremele de tip Maia.

2.1 Ecuația de punct fix cu operatori de tip Ćirić

Este bine cunoscut faptul că, dintre toate extinderile principiului contractiei Banach-Caccioppoli, cel mai general rezultat a fost stabilit de Ćirić în 1974. În acest capitol, vom prezenta câteva rezultate legate de operatorul de tip Ćirić în spații metrice complete. Sunt reiterate existența și unicitatea și sunt demonstrate mai multe proprietăți de stabilitate (dependența de date și proprietatea de stabilitate Ostrowski). Folosind condiția de retracție-deplasare, vom stabili bine-punerea în sensul lui Reich și Zaslavski și proprietatea de

stabilitate Ulam-Hyers a ecuației punctului fix $x = f(x)$.

2.1.1 Noțiunea de operator de tip Ćirić

Vom reaminti acum câteva definiții și rezultate bine cunoscute, care vor fi utile pe parcursul tezei.

Definiție 2.1.1 (Lj. B. Ćirić [17]). *Un operator $f : X \rightarrow X$ se numește o contracție generalizată dacă și numai dacă pentru fiecare $x, y \in X$ există numerele pozitive q, r, s și t , care pot depinde atât de x , cât și de y , astfel încât $\sup \{q + r + s + 2t : x, y \in X\} < 1$ și*

$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot d(x, y) + r \cdot d(x, f(x)) + s \cdot d(y, f(y)) + t \cdot [d(x, f(y)) + d(y, f(x))].$$

Definiție 2.1.2 (Lj. B. Ćirić [17]). *Fie (X, d) un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$ un operator. Atunci f se numește un operator de tip Ćirić (numit cvasi-contracție în lucrarea originală [17]) dacă există un număr $q \in (0, 1)$, astfel încât*

$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot \max \{d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y)), d(x, f(y)), d(y, f(x))\}, \quad (2.1.1)$$

pentru oricare $x, y \in X$.

Este bine cunoscut din lucrarea lui B. E. Rhoades, vezi [67], că dintre toate extinderile principiului contracției Banach-Caccioppoli, cel mai general rezultat a fost stabilit de Ćirić în 1974 pentru clasa de operatori de mai sus.

În exemplul următor, prezentăm un operator de tip Ćirić, care nu este o contracție generalizată.

Exemplu 2.1.1. *Fie*

$$X_1 = \left\{ \frac{m}{n} : m = 0, 1, 2, 4, 6, \dots; n = 1, 3, 7, \dots, 2k + 1, \dots \right\},$$

$$X_2 = \left\{ \frac{m}{n} : m = 1, 2, 4, 6, 8, \dots; n = 2, 5, 8, \dots, 3k + 2, \dots \right\},$$

unde $k \in \mathbb{N}$ și fie $X = X_1 \cup X_2$. Definim $f : X \rightarrow X$ prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x, & x \in X_1, \\ \frac{1}{5}x, & x \in X_2. \end{cases}$$

Funcția f este un operator de tip Ćirić cu $q = \frac{2}{3}$. Dacă atât x , cât și y se află în X_1 sau în X_2 , atunci $d(f(x), f(y)) \leq \frac{2}{3}d(x, y)$.

Prin urmare, avem că f îndeplinește următoarea condiție:

$$d(f(x), f(y)) \leq \frac{2}{3} \max \{d(x, y), d(x, f(y)), d(y, f(x))\}$$

și, prin urmare, este un operator de tip Ćirić.

Făcând următoarea comparație, obținem că $d(f(x), f(y)) = \frac{17}{30} > \frac{32}{60}$. Prin urmare, f nu este o contracție generalizată.

Rezultatele noastre generalizează și completează unele teoreme date în [2] [12], [17], [51], [68], [71], [73], [70].

2.1.2 Rezultate principale pentru operatori univoci de tip Ćirić

În această secțiune, vom considera un spațiu metric (X, d) și $f : X \rightarrow X$ un operator de tip Ćirić. Pe lângă proprietățile obișnuite, care sunt demonstrate de Ćirić în [17], vom demonstra și alte proprietăți de stabilitate. Mai precis, vom stabili proprietatea de dependență continuă de date a punctului fix și proprietatea de stabilitate Ostrowski pentru operatorul f . Mai mult, folosind condiția de retracție-deplasare, demonstrăm și că ecuația punctului fix $x = f(x)$ are proprietatea de bine-punere în sensul lui Reich și Zaslavski și stabilitatea Ulam-Hyers.

Următoarea noțiune este esențială în abordarea noastră.

Definiție 2.1.3 (I. A. Rus [73]). Fie (X, d) un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$ un operator astfel încât $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$. Spunem că f satisface condiția de retracție-deplasare dacă există $c > 0$ și o mulțime de retracție $\rho : X \rightarrow \text{Fix}(f)$ astfel încât

$$d(x, \rho(x)) \leq cd(x, f(x)), \text{ pentru oricare } x \in X. \quad (2.1.2)$$

Dacă $\text{Fix}(f) = \{x^*\}$ atunci avem

$$d(x, x^*) \leq cd(x, f(x)), \text{ pentru orice } x \in X.$$

De exemplu, dacă $f : X \rightarrow X$ este o α -contracție și (X, d) este un spațiu metric complet, atunci f satisface următoarea condiție de retracție-deplasare

$$d(x, x^*) \leq \frac{1}{1-\alpha}d(x, f(x)), \text{ pentru orice } x \in X.$$

În aceeași ordine de idei, dacă $f : X \rightarrow X$ este o α -contracție grafică, atunci aceasta satisface condiția de retracție-deplasare

$$d(x, \rho(x)) \leq \frac{1}{1-\alpha}d(x, f(x)), \text{ pentru oricare } x \in X,$$

unde $\rho : X \rightarrow \text{Fix}(f)$ este definit de

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x).$$

Teoremă 2.1.1 (Lj. B. Ćirić [17]). Fie (X, d) un spațiu metric și $f : X \rightarrow X$ un operator de tip Ćirić. Presupunem că X este f -orbital complet. Atunci:

1. f are un punct fix unic x^* în X și $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*$, adică f este un operator Picard;
2. $d(f^n(x), x^*) \leq \frac{q^n}{1-q}d(x, f(x))$, pentru fiecare $x \in X$ și fiecare $n \in \mathbb{N}^*$.

Ideea demonstrației se bazează pe următoarele două relații:

(i) dacă $n \in \mathbb{N}^*$, atunci pentru fiecare $x \in X$ avem că

$$d(f^i(x), f^j(x)) \leq q\delta(O(x, n)), \text{ pentru fiecare } i, j \in \mathbb{N}^*;$$

(ii) pentru orice $x \in X$ avem că $\delta(O(x, \infty)) \leq \frac{1}{1-q}d(x, f(x))$.

Un al doilea rezultat din [17] arată că, dacă există $p \in \mathbb{N}$ cu $p \geq 2$ astfel încât f^p este un operator de tip Ćirić, atunci f este un operator Picard.

Următoarea teoremă, care demonstrează proprietățile de stabilitate ale punctului fix, este rezultatul principal al acestei secțiuni.

Teoremă 2.1.2. *Fie (X, d) un spațiu metric, $f : X \rightarrow X$ un operator de tip Ćirić și presupunem că X este f -orbital complet. Notăm cu $x^* \in X$ punctul fix unic al lui f . Atunci se aplică următoarele concluzii:*

1. *ecuația punctului fix $x = f(x)$ are proprietatea de dependență de date, adică, pentru orice operator $g : X \rightarrow X$ astfel încât $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$ și*

$$d(f(x), g(x)) \leq \eta,$$

pentru orice $x \in X$ și unele $\eta > 0$, avem

$$d(x^*, u^*) \leq \frac{1+q}{1-q}\eta,$$

pentru orice $u^ \in \text{Fix}(g)$.*

2. *ecuația punctului fix are proprietatea de bine-punere, adică pentru fiecare șir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ astfel încât*

$$d(u_n, f(u_n)) \rightarrow 0,$$

când $n \rightarrow \infty$, avem că $u_n \rightarrow x^$, când $n \rightarrow \infty$;*

3. *ecuația punctului fix este stabilă Ulam-Hyers, adică există $c > 0$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $u^* \in X$ o ε -soluție a ecuației punctului fix (în sensul că $d(u^*, f(u^*)) \leq \varepsilon$), avem*

$$d(u^*, x^*) \leq c \cdot \varepsilon.$$

4. *dacă $q < \frac{1}{2}$, atunci ecuația punctului fix are proprietatea de stabilitate Ostrowski, adică, pentru orice șir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ cu*

$$d(u_{n+1}, f(u_n)) \rightarrow 0$$

când $n \rightarrow \infty$, avem că $u_n \rightarrow x^$;*

5. dacă $q < \frac{1}{2}$, atunci f este o $\frac{q}{1-q}$ -contracție pe grafic;
6. dacă $q < \frac{1}{3}$, atunci operatorul f este o cvasi-contracție, în sensul că există $\beta := \frac{q}{1-2q} < 1$ astfel încât
- $$d(f(x), x^*) \leq \beta d(x, x^*), \text{ pentru fiecare } x \in X.$$

2.1.3 Rezultate principale pentru operatori multivoci de tip Ćirić

Mai întâi vom considera câteva noțiuni legate de rezultatele noastre principale. După aceea, vom sublinia teorema principală a acestei secțiuni, care extinde, cu unele rezultate de stabilitate, binecunoscuta teoremă a lui Ćirić. Abordarea va fi pentru operatori Ćirić multivoci, care au fost considerați de A. Amini-Harandi în lucrarea [4], din 2011.

Definiție 2.1.4. *Un operator $F: X \rightarrow P_d(X)$ se numește o contracție generalizată multivocă dacă pentru fiecare $x, y \in X$ există numerele pozitive p, q, r , care pot depinde atât de x , cât și de y , astfel încât $\sup \{p + 2q + 2r \mid x, y \in X\} < 1$ și*

$$H(F(x), F(y)) \leq p \cdot d(x, y) + q \cdot [D(x, F(x)) + D(y, F(y))] + r \cdot [D(x, F(y)) + D(y, F(x))].$$

Definiție 2.1.5 (A. Amini-Harandi [4]). *Fie (X, d) un spațiu metric. Operatorul multivoc $F: Y \subseteq X \rightarrow P_{b,d}(X)$ se numește un operator multivoc de tip Ćirić cu constanta k (numită cvasi-contracție multivocă k în [4]) dacă*

$$H(F(x), F(y)) \leq k \max \{d(x, y), D(x, F(x)), D(y, F(y)), D(x, F(y)), D(y, F(x))\},$$

pentru orice $x, y \in X$, unde $0 \leq k < 1$.

Dacă (X, d) este un spațiu metric și $F: X \rightarrow P(X)$ este un operator multivoc, atunci șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ din X se numește șir de tip Picard care pornește de la $(x, y) \in \text{Graph}(F)$ dacă $x_0 = x, x_1 = y$ și $x_n \in F(x_{n-1}), n \in \mathbb{N}^*$.

Teoremă 2.1.3. (*A. Amini-Harandi Teorema 2.2 [4]*) Fie (X, d) un spațiu metric complet. Fie $F: X \rightarrow P_{b,cl}(X)$ un operator multivoc de tip Ćirić cu constanta $k < \frac{1}{2}$. Atunci, F are un punct fix.

În cele ce urmează, vom prezenta câteva rezultate privind dependența de date și stabilitatea pentru problema de punct fix $x \in F(x)$.

Teoremă 2.1.4. Fie (X, d) un spațiu metric complet. Fie $F: X \rightarrow P_{cl}(X)$ un operator multivoc de tip Ćirić cu constanta $k < \frac{1}{2}$. Atunci:

- (i) $Fix(F) \neq \emptyset$ și pentru fiecare $(x, y) \in Graph(F)$ există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de tip Picard începând de la $x_0 := x$, $x_1 := y$ care converg către un punct fix x^* al lui F ;
- (ii) ecuația de punct fix $x \in F(x)$ are proprietatea de dependență de date, adică, pentru orice $x^* \in Fix(F)$ și oricare $G: X \rightarrow P(X)$ astfel încât $Fix(G) \neq \emptyset$ și inegalitatea $H(F(x), G(x)) \leq \eta$ este valabilă pentru orice $x \in X$ și un anumit $\eta > 0$, există $u^* \in Fix(G)$ astfel încât

$$d(x^*, u^*) \leq \frac{(1+k)q}{1-k}\eta,$$

unde $1 < q < \frac{1}{2k}$;

- (iii) ecuația de punct fix este bine pusă în sensul lui Reich și Zaslavski, adică, pentru fiecare șir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ astfel încât

$$D(u_n, F(u_n)) \longrightarrow 0,$$

când $n \longrightarrow \infty$, avem că $u_n \longrightarrow x^*$, când $n \longrightarrow \infty$.

- (iv) dacă $q < \frac{1}{2}$, atunci ecuația de punct fix are proprietatea de stabilitate Ostrowski, adică, pentru orice șir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ cu $D(u_{n+1}, F(u_n)) \longrightarrow 0$ când $n \longrightarrow \infty$, avem că $u_n \longrightarrow x^*$.

Vom prezenta acum o teoremă care arată că, sub o condiție suplimentară, mulțimea punctului fix și mulțimea punctului fix strict a unui operator multivoc de tip Ćirić coincid.

Teoremă 2.1.5. Fie (X, d) un spațiu metric complet. Fie $F: X \rightarrow P_{cl}(X)$ un operator multivoc de tip Ćirić cu constanta $k < 1$. Să presupunem că $SFix(F) \neq \emptyset$. Atunci $Fix(F) = SFix(F) = \{x^*\}$.

2.2 Ecuația de punct fix pentru operatorul de tip Meir-Keeler

Scopul principal al acestui studiu este de a prezenta câteva rezultate legate de Teorema Meir-Keeler. Pe lângă rezultatele de existență și unicitate (care sunt bine cunoscute), oferim câteva proprietăți de stabilitate (dependența de date, bine-punerea în sensul lui Reich și Zaslavski, stabilitatea Ulam-Hyers și proprietatea de stabilitate Ostrowski) ale ecuației punctului fix. Punctele de plecare ale acestui studiu sunt lucrările lui Meir și Keeler [39] și Lim [35], precum și lucrarea fundamentală a lui Rus [70]. Pentru rezultate conexe, vezi [49] și [73].

2.2.1 Noțiunea de operator de tip Meir-Keeler în spații metrice

Definiția operatorului Meir-Keeler 1.1.9 și a teoremei Meir-Keeler 1.1.5 pot fi găsite în primul capitol, secțiunea univocă, deoarece sunt utilizate și în Capitolul 3.

Teorema 1.1.5 este o extindere a cunoscutului Principiu al Contracției lui Banach, deoarece orice contracție este un operator Meir-Keeler. Mai mult, orice operator Meir-Keeler este contractiv în sensul că

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

pentru fiecare $x, y \in X$ cu $x \neq y$.

Observație 2.2.1. *Remarcăm că orice contracție este un operator Meir-Keeler, dar, în general, implicația inversă nu este valabilă.*

În această secțiune, vom prezenta primul rezultat dat de T. C. Lim [35], care este esențial pentru acest capitol. Acum reamintim definiția funcției L.

Definiție 2.2.1 (T. C. Lim [35]). *O funcție $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ este o L-funcție dacă $\phi(0) = 0$, $\phi(s) > 0$, pentru fiecare $s > 0$ și pentru orice $u > 0$, există $u > s$ astfel încât $\phi(t) \leq s$, pentru fiecare $t \in [s, u]$.*

Remarcăm că fiecare L-funcție satisface $\phi(s) \leq s$, pentru fiecare $s \geq 0$.

Amintim acum teorema lui Lim din [35].

Teoremă 2.2.2. (T. C. Lim [35]) Fie (X, d) un spațiu metric și fie $f : X \rightarrow X$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f satisface condiția lui Meir-Keeler;
- (ii) există o L-funcție $\phi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) < \phi(d(x, y)),$$

pentru orice $x, y \in X$ cu $x \neq y$.

În (ii), se poate alege ca ϕ să fie, de asemenea, crescătoare și continuă la dreapta.

Abordarea noastră se bazează pe echivalența dintre (i) și (ii).

2.2.2 Rezultate principale pentru operatori univoci de tip Meir-Keeler

În această secțiune, vom considera ecuația punctului fix $x = f(x)$, $x \in X$, unde (X, d) este un spațiu metric complet și f este un operator Meir-Keeler. Pe lângă existența, unicitatea și aproximarea punctului fix al lui f , vom studia (folosind caracterizarea lui Lim) unele proprietăți calitative ale ecuației de punct fix, cum ar fi proprietatea de dependență de date, bine-punerea în sensul lui Reich și Zaslavski, stabilitatea Ulam-Hyers și proprietatea de stabilitate Ostrowski.

Lemă 2.2.3 (I. A. Rus [68]). Fie $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ o funcție crescătoare astfel încât

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t - \phi(t)) = \infty.$$

Atunci, funcția $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$,

$$\beta(\eta) := \sup \{t \in \mathbb{R}_+ | t - \phi(t) \leq \eta\}$$

este bine definită și are următoarele proprietăți:

- (i) β este crescătoare;
- (ii) $\beta(0) = 0$;
- (iii) β este continuă în 0.

Teorema principală a acestei secțiuni este următoarea, în care demonstrăm câteva proprietăți calitative ale ecuației de punct fix.

Teoremă 2.2.4. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ un operator Meir-Keeler. Presupunem că funcția L , notată cu $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ și dată de Teorema 2.2.2 satisface condiția $\lim_{t \rightarrow \infty} (t - \phi(t)) = \infty$. Atunci se respectă următoarele concluzii:*

- (i) *dacă $g : X \rightarrow X$ este un operator dat și există $\eta > 0$ astfel încât $d(f(x), g(x)) \leq \eta$, pentru orice $x \in X$, atunci*

$$d(x^*, u^*) \leq \beta(\eta), \text{ pentru oricare } u^* \in \text{Fix}(g),$$

$$\text{unde } \beta(\eta) := \sup \{t \in \mathbb{R}_+ \mid t - \phi(t) \leq \eta\};$$

- (ii) *ecuația de punct fix este bine-pusă în sensul lui Reich și Zaslavski, adică, pentru fiecare șir $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ astfel încât $d(u_n, f(u_n)) \rightarrow 0$ când $n \rightarrow \infty$ avem că $u_n \rightarrow x^*$, când $n \rightarrow \infty$;*
- (iii) *ecuația de punct fix este stabilă Ulam-Hyers în mod generalizat, adică există o funcție crescătoare $\beta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ cu $\beta(0) = 0$ și β este continuă în 0, astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice $u^* \in X$ o ε -soluție a ecuației de punct fix (în sensul că $d(u^*, f(u^*)) \leq \varepsilon$), există un punct fix $x^* \in X$ astfel încât*

$$d(u^*, x^*) \leq \varepsilon.$$

Pentru a demonstra un alt rezultat de stabilitate pentru operatorii Meir-Keeler, avem nevoie de definiția unei funcții de comparație tare 1.1.7 și de lema 1.1.4 referitoare la această noțiune.

Teoremă 2.2.5. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ un operator Meir-Keeler. Presupunem că funcția L notată cu $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ dată de Teorema 2.2.2 este o funcție de comparație subaditivă, tare și satisface condiția*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (t - \phi(t)) = \infty.$$

Atunci ecuația de punct fix are proprietatea de stabilitate Ostrowski.

2.3 Rezultate de punct fix pentru φ - contracții multivoce pe grafic în spații metrice complete

Cea mai importantă teoremă a metricii a punctului fix pentru operatorii multivoci a fost demonstrată de Nadler în 1969. Un an mai târziu, o ușoară extindere a principiului punctului fix al lui Nadler pentru contracții multivoce a fost publicată de Covitz și Nadler. Mai multe alte extinderi ale acestui principiu au fost luate în considerare de unii autori la diferite tipuri de spații metrice generalizate și diverse contracții generalizate multivoce, vezi, de exemplu, [3], [23], [27], [55], [61], [62], [63], [81], [82]. În plus, au fost obținute unele proprietăți ale mulțimii de puncte fixe (închiderea, compactitatea, proprietatea de retracție absolută etc.), vezi, de exemplu, [20], [65], [66], [76], [77].

2.3.1 Noțiunea de φ -contracție multivocă pe grafic

Următoarele noțiuni sunt esențiale pentru abordarea noastră pentru a stabili rezultatul principal. Se dau definițiile pentru φ -contracție multivocă pe grafic, șirul de iterații Picard ale lui F și operatorul φ -slab Picard multivoc.

Definiție 2.3.1. *Fie (X, d) un spațiu metric generalizat. Atunci, un operator $F: X \rightarrow P(X)$ se numește φ -contracție multivocă pe grafic dacă există o funcție de comparație tare $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât*

$$H(F(x), F(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \text{ pentru fiecare } (x, y) \in \text{Graph}(F). \quad (2.3.1)$$

Definiție 2.3.2 (A. Petrușel [50]). *Fie (X, d) un spațiu metric și $F: X \rightarrow P(X)$ un operator slab Picard multivoc. Apoi, definim operatorul multivoc $F^\infty: \text{Graph}(F) \rightarrow P(\text{Fix}(F))$ prin formula $F^\infty(x, y) = \{z \in \text{Fix}(F) \mid \text{există un șir de iterații Picard ale lui } F \text{ începând de la } (x, y) \text{ care converge la } z\}$.*

Definiție 2.3.3 (A. Petrușel [50]). *Fie (X, d) un spațiu metric și $F: X \rightarrow P(X)$ un operator slab Picard multivoc. Atunci, F este un operator φ -slab Picard multivoc dacă $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ este crescător, continuu în 0 cu $\varphi(0) = 0$ și există o selecție f^∞ a lui F^∞ astfel încât*

$$d(x, f^\infty(x, y)) \leq \varphi(d(x, y)), \text{ pentru fiecare } (x, y) \in \text{Graph}(F).$$

Observație 2.3.1. *Remarcăm că dacă $F: X \rightarrow P_d(X)$ este o α -contracție, atunci F este un operator φ -MWP cu $\varphi(f) = \frac{1}{1-\alpha}f$.*

2.3.2 Rezultatul de punct fix pentru φ -contracții multivoce pe grafic

Prima teoremă principală a acestei secțiuni este un rezultat de punct fix pentru o φ -contracție multivocă pe grafic. Reamintim mai întâi un rezultat auxiliar.

Lemă 2.3.2 (S. B. Nadler Jr. [46]). *Fie (X, d) un spațiu metric generalizat, $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc și $q > 1$. Atunci, pentru fiecare $x_0, x_1 \in X$ și $z_1 \in F(x_0)$ există $z_2 \in F(x_1)$ astfel încât*

$$d(z_1, z_2) \leq qH(F(x_0), F(x_1)).$$

Următoarele rezultate sunt extinderi ale unei teoreme binecunoscute a lui R. Węgrzyk, vezi Teorema 2.1 și Teorema 2.2 în [82].

În cazul particular al unui spațiu metric clasic, se poate obține următorul rezultat.

Teoremă 2.3.3. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $F: X \rightarrow P(X)$ o φ -contracție multivocă pe grafic. Presupunem că $\text{Graph}(F)$ este închis. Atunci, se aplică următoarele concluzii:*

- (a) *există $x^* \in X$ astfel încât $x^* \in \text{Fix}(F^n)$, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$;*
- (b) *pentru fiecare $(x, y) \in \text{Graph}(F)$ există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de iterații ale lui Picard pentru F începând de la (x, y) și care converge către un punct fix al lui F ;*
- (c) *F este un operator ψ -slab Picard multivoc, adică există o selecție $f^\infty: \text{Graph}(F) \rightarrow \text{Fix}(F)$ a F^∞ astfel încât*

$$d(x, f^\infty(x, y)) \leq \psi(d(x, y)), \text{ pentru fiecare } (x, y) \in \text{Graph}(F),$$

unde

$$\psi(t) := t + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(st), \text{ cu } s > 1 \text{ ales arbitrar.} \quad (2.3.2)$$

Observație 2.3.4. *Din concluziile (a) și (b), rezultă că F este un operator Picard slab multivoc. Concluzia (c) se numește condiție de retracție-deplasare. Prin (a)-(c), ținând cont de definiția 2.3.3, rezultă că F este un operator ψ -slab Picard multivoc.*

Teoremă 2.3.5 (C. K. Jung [29]). *Fie (X, d) un spațiu metric generalizat. Atunci relația $\tilde{d}$ definită ca*

$$x\tilde{d}y \Leftrightarrow d(x, y) < \infty \text{ pentru } x, y \in X, \quad (2.3.3)$$

este o relație de echivalență și dacă $X_s : s \in S$ sunt clasele de echivalență sub ρ atunci $d(x, y) = \infty$ ori de câte ori $x \in X_s, y \in X_t, s \neq t$. De asemenea, dacă $d_s := d|_{X_s \times X_s}$, atunci (X_s, d_s) este un spațiu metric (pentru fiecare $s \in S$).

Teoremă 2.3.6 (R. Węgrzyk [38]). *Fie (Y, d) un spațiu metric complet și convex și fie $(X, \tilde{d})$ un spațiu metric arbitrar. Mai mult, fie $f : Y \rightarrow X$ o funcție arbitrară. Atunci există o funcție $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $\varphi(t) < t$, pentru $t > 0$ și*

$$\tilde{d}(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \text{ cu } x, y \in Y \quad (2.3.4)$$

care este strict crescătoare, concavă și continuu diferentiabilă (adică derivata există și este o funcție continuă) în $[0, \infty)$.

Prin $C^n[I]$, notăm clasa funcțiilor f , care au derivate continue până la ordinul n în I .

Prin S_ξ^n notăm clasa de funcții f care aparține intervalului arbitrar $C^n[I]$ (I) și îndeplinește condițiile:

$$(f(x) - x)(\xi - x) > 0 \text{ pentru } x \in I, x \neq \xi,$$

$$(f(x) - \xi)(\xi - x) < 0 \text{ pentru } x \in I, x \neq \xi.$$

Teoremă 2.3.7 (M. Kuczma [32]). *Dacă $f \in S_0^n$, atunci pentru fiecare $x_0 \in I$, șirul $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ este crescător (și strict crescător ori de câte ori $x_0 \neq 0$) și*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x_0) = 0.$$

Corolar 2.3.8. *Dacă (X, d) este un spațiu metric complet și convex și $F : X \rightarrow P(X)$ este un operator multivoc cu grafic închis care satisface condiția (2.3.1) cu o funcție φ astfel încât $\varphi(t) < t$ pentru $t > 0$, atunci:*

(a) *pentru fiecare $x_0 \in X$ și pentru fiecare punct fix $x \in X$ al lui F există un șir de iterații ale lui F începând de la x_0 care converge la x ,*

(b) *în plus, dacă există un $s_0 > 0$ astfel încât funcția φ este strict crescătoare în intervalul $[0, s_0]$ și pentru care seria $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(s_0)$ converge, atunci mulțimea punctelor fixe ale lui F este nevidă.*

Ca o consecință a Teoremei 2.3.3, avem următoarele rezultate calitative privind mulțimea punctului fix.

Teoremă 2.3.9. (Dependența de date a mulțimii punctului fix) *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $F : X \rightarrow P(X)$ o φ -contracție grafică neliniară multivocă astfel încât $\text{Graph}(F)$ este închis.*

Atunci, avem următoarele concluzii:

(a) $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$;

(b) *dacă $G : X \rightarrow P_d(X)$ este o β -contracție neliniară multivocă pe grafic cu grafic închis și $\eta > 0$ este astfel încât*

$$H(F(x), G(x)) < \eta, \text{ pentru fiecare } x \in X,$$

atunci

$$H(\text{Fix}(F), \text{Fix}(G)) \leq \max \left\{ \psi(\eta), \tilde{\psi}(\eta) \right\},$$

unde, pentru $s > 1$ arbitrar, notăm

$$\psi(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^k(s \cdot t)$$

și

$$\tilde{\psi}(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k(s \cdot t).$$

În ceea ce privește stabilitatea Ulam-Hyers a incluziunii punctului fix, avem următorul rezultat.

Teoremă 2.3.10. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $F: X \rightarrow P(X)$ o φ -contracție multivocă pe grafic. Atunci, problema punctului fix (1.2.2) este Ulam-Hyers stabilă.*

Observație 2.3.11. *Este o întrebare deschisă stabilirea bine-punerii în sensul lui Reich și Zaslavski și stabilității Ostrowski pentru incluziunea punctului fix $x \in F(x)$ cu o φ -contracție multivocă pe grafic.*

Un caz special în teoria punctului fix pentru operatorii multivoci este proprietatea strictă a punctului fix. În acest context, avem următorul rezultat strict al punctului fix pentru φ -contracții multivoce pe grafic.

Teoremă 2.3.12. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $F: X \rightarrow P(X)$ o φ -contracție multivocă pe grafic cu grafic închis. Să presupunem:*

- (i) $F(F(x)) \subset F(x)$, pentru fiecare $x \in X$;
- (ii) dacă $A \in P_d(X)$ cu $F(A) = A$, atunci A este un singleton.

Atunci, $\text{Fix}(F) = S\text{Fix}(F) \neq \emptyset$.

2.3.3 Teoria punctului fix de tip Maia pentru φ -contracții multivoce pe grafic

În cazul unei mulțimi nevide înzestrată cu două metrici, are loc următoarea teoremă de tip Maia pentru φ -contracții multivoce pe grafic. Rezultatul de tip Maia a fost demonstrat de R. Trușcă, în lucrarea [45]. O aplicație pentru rezultatul menționat este dată de autor în cazul incluziunii integrale de tip Volterra.

Vom extinde acum noțiunea de (φ, ψ) neliniară multivocă - contracție a tipului Feng-Liu, introdusă în lucrarea de A. Petrușel, G. Petrușel și J.-C. Yao [54].

Definiție 2.3.4 (A. Petrușel, G. Petrușel, J.-C. Yao [54]). *Fie (X, d) un spațiu metric, $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc și $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție crescătoare astfel încât $\psi(t) > t$ pentru orice $t > 0$ și $\psi(0) = 0$. Pentru fiecare $x \in X$, considerăm mulțimea*

$$I_\psi^x(d) := \{y \in F(x) : d(x, y) \leq \psi(D_d(x, F(x)))\}. \quad (2.3.5)$$

Operatorul F se numește o (φ, ψ) -contracție neliniară multivocă de tip Feng-Liu în raport cu metrica d dacă există o funcție crescătoare $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ cu $\varphi(t) < t$ pentru fiecare $t \in (0, \infty)$ și $\varphi(0) = 0$, astfel încât:

- (a) $\psi \circ \varphi$ este o funcție de comparație tare;
- (b) pentru fiecare $x \in X$ există $y \in I_\psi^x(d)$ astfel încât

$$D_d(y, F(y)) \leq \varphi(d(x, y)). \quad (2.3.6)$$

Avem următoarea extindere a Teoremei 2.5 în [54] pentru cazul unui spațiu înzestrat cu două metrici. Următoarele două teoreme sunt rezultatele lui Radu Trușcă, iar demonstrația poate fi găsită în articolul [45].

Teoremă 2.3.13. *Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrici, d și ρ . Fie $F: X \rightarrow P_d(X)$ și $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție crescătoare astfel încât $\psi(t) > t$ pentru orice $t > 0$ și $\psi(0) = 0$. Presupunem că:*

- (i) (X, d) este un spațiu metric complet;
- (ii) există $R > 0$ astfel încât $d(x, y) \leq R\rho(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$;
- (iii) $\text{Graph}(F)$ este închis în raport cu metrica ρ ;
- (iv) există o funcție crescătoare $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ cu $\varphi(t) < t$ pentru fiecare $t \in (0, \infty)$ și $\varphi(0) = 0$, astfel încât $\psi \circ \varphi$ este o funcție de comparație tare și următoarea relație este valabilă

$$D_\rho(y, F(y)) \leq \varphi(\rho(x, y)), \text{ pentru fiecare } (x, y) \in \text{Graph}(F).$$

Atunci, avem că $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$ și pentru fiecare $x_0 \in X$ există $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir iterativ de tip Picard convergent către un punct $x^* \in \text{Fix}(F)$. Mai mult, următoarea condiție de retracție-deplasare este valabilă

$$d(x_0, x^*(x_0)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\psi \circ \varphi)^k(t_0), \quad (2.3.7)$$

unde $t_0 := d(x_0, x_1)$, $x_1 \in I_\psi^{x_0}(\rho)$.

Întrucât contribuția autorului în această subsecțiune este o aplicație a rezultatului de mai sus. Putem considera următoarea incluziune integrală de tip Volterra.

Introducem notația pentru intervalul $I := [a, b]$.

$$x(t) \in \int_a^t L(s, x(s))ds + l(t), \quad t \in I, \quad (2.3.8)$$

unde $L : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$ și $l : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfac următoarele ipoteze:

- (A₁) pentru fiecare $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ operatorul multivoc $L_u : I \rightarrow P_{cl,cv}(\mathbb{R}^n)$, definit prin $L_u(s) := L(s, u(s))$, este măsurabil și integrabil mărginit, adică există o aplicație integrabilă $m : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ astfel încât $L(s, u(s)) \subset B(0, m(s))$ a.e. $s \in I$;
- (A₂) există două funcții crescătoare $\psi, \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ cu $\psi(t) > t$ pentru orice $t > 0$, $\psi(0) = 0$, $\varphi(t) < t$ pentru fiecare $t \in (0, \infty)$ și $\varphi(0) = 0$, astfel încât $\psi \circ \varphi$ este o funcție de comparație tare;
- (A₃) l este continuă;
- (A₄) există $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ măsurabilă în s și o funcție crescătoare $\varphi : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty)$, astfel încât φ este o funcție de comparație tare și

$$D(v, L(s, v)) \leq \kappa(s)\varphi(|u - v|),$$

pentru toate $(s, u) \in I \times \mathbb{R}^n$ și $v \in S(s, u)$.

Printr-o soluție a lui (2.3.8) înțelegem o aplicație continuă $u \in C(I, \mathbb{R}^n)$ care satisface incluziunea de mai sus pentru fiecare $t \in I$. Vom nota cu $\|\cdot\|_B$ următoarea normă de tip Bielecki în $C(I, \mathbb{R}^n)$, adică,

$$\|x\|_B := \sup_{t \in I} [|x(t)|e^{-\tau K(t)}],$$

unde $K(t) := \int_a^t k(s)ds$ și $\tau > 1$.

Atunci, avem următorul rezultat al existenței pentru incluziunea integrală (2.3.8).

Teoremă 2.3.14. *Considerăm incluziunea integrală (2.3.8) și presupunem că ipotezele $(A_1) - (A_4)$ sunt valabile. Atunci există cel puțin o soluție a (2.3.8).*

Observație 2.3.15. *Teorema 2.3.13 extinde un rezultat dat de A. Petrușel, în [52] (vezi Teorema 2.8.11), unde se impune o condiție de tip contracție mai puternică asupra nucleului L .*

Capitolul 3

Teoreme de surjectivitate pentru clase de operatori contractivi

Acest capitol este împărțit în două secțiuni, una este despre teoremele de surjectivitate pentru operatorii Meir-Keeler, iar cealaltă despre teoremele de surjectivitate pentru contracții largi. Primul pas în demonstrarea teoremelor de surjectivitate din următoarele subsecțiuni este de a demonstra că operatorul este o contracție-normă. Folosind acest rezultat, vom demonstra proprietatea de surjectivitate.

Teoreme importante utilizate ulterior în următoarele subsecțiuni sunt cea dată de A. Granas în 1957, vezi [24], și cea prezentată de T. Suzuki în 2007, vezi [78].

Teoremă 3.0.1 (A. Granas [24]). *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și fie $f : X \rightarrow X$ un operator complet continuu. Dacă, în plus, f este o contracție-normă, atunci $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$.*

Teoremă 3.0.2 (T. Suzuki [78]). *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și C o submulțime nevidă și convexă a lui X . Fie $f : C \rightarrow C$ un operator Meir-Keeler. Atunci, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $r_\varepsilon \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\|x - y\| \geq \varepsilon \text{ implică } \|f(x) - f(y)\| \leq r_\varepsilon \|x - y\|.$$

3.1 Teoreme de surjectivitate pentru operatori de tip Meir-Keeler

Primul scop al acestei secțiuni este de a demonstra că, într-un spațiu Banach X , un operator Meir-Keeler f (univoc sau multivoc) este o contracție-normă. Apoi, folosind acest rezultat, vom da condiții suficiente care să asigure că acest câmp $1_X - f$, generat de f , este surjectiv. Următoarele două secțiuni conțin teoreme de surjectivitate pentru operatori Meir-Keeler univoci și, respectiv, multivoci. În ultima subsecțiune, prezentăm o aplicație a rezultatelor anterioare pentru cazul univoc. Rezultatele noastre generalizează unele teoreme bine-cunoscute de acest tip pentru contracții de tip Banach/Nadler, vezi [5] și [25], precum și alte rezultate de acest tip pentru contracții generalizate, vezi [1], [6], [59], [69], [79].

3.1.1 Teoreme de surjectivitate pentru operatori univoci de tip Meir-Keeler

Definiția operatorului Meir-Keeler 1.1.9 și a teoremei Meir-Keeler 1.1.5 sunt furnizate în capitolul *Noțiuni și rezultate preliminare*, secțiunea Operatori univoci, deoarece sunt utilizate și în Capitolul 2.

În această secțiune, vom prezenta o nouă teoremă de surjectivitate pentru un operator Meir-Keeler univoc. Abordarea se bazează pe teoria operatorilor de contracție-normă și pe o teoremă binecunoscută a lui A. Granas [24], Teorema 3.0.1. De asemenea, rezultatul demonstrat de T. Suzuki în 2007 este utilizat în abordarea noastră, Teorema 3.0.2, menționată mai sus în introducerea capitolului.

Primul nostru rezultat principal este următoarea teoremă de surjectivitate pentru operatorii Meir-Keeler într-un spațiu Banach. Pentru demonstrarea acestei teoreme vom folosi Definiția 1.1.11 și vom considera două cazuri: primul, când x se află în interiorul bilei închise $\tilde{B}(x_0; R)$ și al doilea, când x se află în afara bilei închise $\tilde{B}(x_0; R)$.

Teoremă 3.1.1. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și Y o submulțime nevidă, închisă și convexă a lui X . Să considerăm operatorul $f : Y \rightarrow Y$ care satisface următoarele ipoteze:*

- (i) restricția lui f la orice mulțime mărginită din Y este compactă;
- (ii) f este un operator de tip Meir-Keeler.

Atunci $1_Y - f$ este un operator surjectiv.

3.1.2 Teoreme de surjectivitate pentru operatori multivoci de tip Meir-Keeler

În această secțiune, vom reaminti mai întâi câteva noțiuni și rezultate preliminare care ne vor permite să demonstrăm o nouă teoremă a surjectivității pentru câmpul multivoc generat de un operator Meir-Keeler multivoc. În 2000, H. K. Xu, [83] a furnizat definiția unui operator Meir-Keeler multivoc. Nu a fost dată nicio teoremă multivocă corespunzătoare, similară cu cea dată de Suzuki pentru cazul univoc. Această lacună a motivat propunerea unei versiuni multivoce, care este prezentată ca Teorema 3.1.3.

Definiție 3.1.1 (vezi, de exemplu, H. K. Xu [83]). *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach. Atunci, $F : X \rightarrow P(X)$ se numește operator Meir-Keeler multivoc dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât*

$$\varepsilon \leq \|x - y\| < \varepsilon + \delta \text{ implică } H(F(x), F(y)) < \varepsilon.$$

Lemă 3.1.2. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Dacă $Y, Z \in P_{cp}(X)$, atunci pentru fiecare $y \in Y$ există $z \in Z$ astfel încât*

$$\|y - z\| \leq H(Y, Z).$$

Pentru a demonstra rezultatul principal, vom stabili mai întâi un nou rezultat referitor la următoarea versiune multivocă a teoremei univoce a lui Suzuki 3.0.2.

Teoremă 3.1.3. *Fie $Y \subseteq X$ o submulțime convexă a spațiului Banach $(X, \|\cdot\|)$ și fie $F : Y \rightarrow P_{cp}(Y)$ un operator Meir-Keeler multivoc. Atunci, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $r_\varepsilon \in (0, 1)$ astfel încât*

$$x, y \in X, \|x - y\| \geq \varepsilon \text{ implică } H(F(x), F(y)) \leq r_\varepsilon \|x - y\|.$$

Pentru a demonstra teorema noastră principală a surjectivității în cazul unui operator Meir-Keeler multivoc, avem nevoie de următorul rezultat cunoscut, demonstrat de R. Iannacci [26] în 1978.

Teoremă 3.1.4 (R. Iannacci [26]). *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și $F : X \rightarrow P_{cv}(X)$. Presupunem că F este o contracție-normă multivocă complet continuă. Atunci, câmpul $1_X - F$ generat de F este surjectiv.*

Principalul rezultat privind surjectivitatea câmpului multivoc generat de un operator Meir-Keeler este următoarea teoremă. Demonstrația teoremei este similară cu cea pentru cazul univoc.

Teoremă 3.1.5. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și Y o submulțime nevidă, închisă și convexă a lui X . Să considerăm operatorul multivoc $F : Y \rightarrow P_{cp,cv}(Y)$ care satisface următoarele ipoteze:*

- (i) *pentru fiecare $A \in P_b(X)$ mulțimea $F(A)$ este relativ compactă;*
- (ii) *F este un operator Meir-Keeler.*

Atunci, câmpul $1_Y - F$ generat de F este surjectiv.

Observație 3.1.6. *Este ușor de observat că orice contracție Nadler (vezi, de exemplu, [5]) este un operator Meir-Keeler multivoc și orice operator Meir-Keeler multivoc este contractiv (adică $H(F(x), F(y)) < \|x - y\|$, pentru fiecare $x, y \in X$ distinct). Rămâne o întrebare deschisă dacă o teoremă similară a surjectivității este valabilă pentru operatori contractivi multivoci.*

3.1.3 Aplicație la o ecuație integrală neliniară

Ca o aplicație a rezultatelor noastre anterioare, vom prezenta câteva rezultate de existență pentru următoarea ecuație integrală neliniară.

Vom nota intervalul $[0, T]$ cu I .

$$x(t) = g(x(t)) + \int_0^T K(t, s, x(s))ds, \quad t \in I, \quad (3.1.1)$$

unde $K \in C(I \times I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ și $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

Dacă definim operatorul $F : C(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C(I, \mathbb{R}^n)$,

$$Fx(t) := g(x(t)) + \int_0^T K(t, s, x(s))ds, \quad t \in I, \quad (3.1.2)$$

atunci ecuația noastră (3.1.1) poate fi scrisă ca o ecuație de punct fix

$$x = Fx, \quad x \in C(I, \mathbb{R}^n). \quad (3.1.3)$$

Mai întâi, arătăm că, în anumite condiții adecvate, operatorul F este o contracție-normă.

Lemă 3.1.7. *Să presupunem că:*

1. $K \in C(I \times I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ și $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$;
2. există $a > 0$ astfel încât $\|g(u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a\|u\|_{\mathbb{R}^n}$, pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$;
3. există $p, q, \alpha, \beta, \eta \in]0, \infty[$ astfel încât

$$\|K(t, s, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha t^p + \beta s^q + \eta\|u\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{pentru fiecare } t, s \in I, u \in \mathbb{R}^n;$$

4. $a + \eta T < 1$.

Atunci operatorul F definit în (3.1.2) este o contracție-normă pe $C(I, \mathbb{R}^n)$.

Observație 3.1.8. Lema 3.1.7 este valabilă și dacă 3. este înlocuit de următoarea condiție

- 3'. există $\eta, G \in]0, \infty]$ astfel încât

$$\|K(t, s, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq G + \eta\|u\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \text{pentru orice } u \in \mathbb{R}^n;$$

Conform Lemei 3.1.7 și Teoremei 3.0.1, obținem următorul rezultat.

Teoremă 3.1.9. *Considerăm ecuația integrală (3.1.1). Presupunem că:*

1. $K \in C(I \times I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ și $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$;

2. există $a > 0$ astfel încât $\|g(u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a\|u\|_{\mathbb{R}^n}$, pentru orice $u \in \mathbb{R}^n$;

3. există $p, q, \alpha, \beta, \eta \in (0, \infty)$ astfel încât

$$\|K(t, s, u)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \alpha t^p + \beta s^q + \eta\|u\|_{\mathbb{R}^n}, \text{ pentru fiecare } t, s \in I, u \in \mathbb{R}^n;$$

4. $a + \eta T < 1$.

Atunci ecuația integrală (3.1.1) are cel puțin o soluție.

Corolar 3.1.10. Concluzia Teoremei 3.1.9 este valabilă și pentru ipotezele 1, 2, 3' și 4, menționate în Observația 3.1.8.

În a doua noastră abordare, vom demonstra că operatorul F este o contracție-normă prin impunerea unor condiții adecvate astfel încât F să fie un operator de tip Meir-Keeler.

Lemă 3.1.11. Presupunem că:

1. $K \in C(I \times I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ este Lipschitz în a treia variabilă și că $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o funcție continuă;

2. există $a > 0$ astfel încât

$$\|g(u) - g(v)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a\|u - v\|_{\mathbb{R}^n},$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^n$;

3. există $L_K > 0$ astfel încât, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există un număr pozitiv δ cu

$$\delta < \frac{1 - a - L_K T}{a + L_K T} \varepsilon,$$

pentru care este valabilă următoarea implicație:

$$\|u - v\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon + \delta \Rightarrow \|K(t, s, u) - K(t, s, v)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon,$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^n$;

4. $L_K < \frac{1 - a}{T}$.

Atunci, F definit prin (3.1.2) este un operator de tip Meir-Keeler pe $C(I, \mathbb{R}^n)$.

Teoremă 3.1.12. Considerăm ecuația integrală (3.1.1). Presupunem că:

1. $K \in C(I \times I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ și $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este mărginită;
2. există $a > 0$ astfel încât

$$\|g(u) - g(v)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a\|u - v\|_{\mathbb{R}^n},$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^n$

3. există $L_K > 0$ astfel încât, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există un număr pozitiv δ cu

$$\delta < \frac{1 - a - L_K T}{a + L_K T} \varepsilon,$$

pentru care este valabilă următoarea implicație:

$$\|u - v\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon + \delta \Rightarrow \|K(t, s, u) - K(t, s, v)\|_{\mathbb{R}^n} < \varepsilon,$$

pentru orice $u, v \in \mathbb{R}^n$;

4. $L_K < \frac{1 - a}{T}$.

Atunci ecuația integrală (3.1.1) are cel puțin o soluție.

3.2 Teoreme de surjectivitate pentru contracții largi

Conceptul de contracție largă a fost introdus pentru cazul univoc de T.A. Burton în 1996. În această secțiune, arătăm că într-un spațiu Banach X orice contracție largă univocă $f : X \rightarrow X$ este o contracție-normă. Folosind acest rezultat, putem demonstra câteva teoreme de surjectivitate pentru câmpul $1_X - f$ generat de f . În a doua subsecțiune, vom introduce noțiunea de contracție largă multivocă și, folosind o abordare similară, vom demonstra surjectivitatea câmpului $1_X - F$ generat de un operator multivoc F de la X la X . Rezultatele acestei secțiuni extind și completează unele teoreme din literatura de specialitate; Vezi Lema în [13] și teoremele de surjectivitate în [41], [59] și [72].

3.2.1 Noțiunea de contracție largă

Următoarea noțiune a fost introdusă de T.A. Burton în contextul unui spațiu metric.

Definiție 3.2.1 (T. A. Burton [13]). *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu normat. Un operator $f : X \rightarrow X$ se numește o contracție largă dacă*

1. *f este contractiv, adică,*

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|, \forall x, y \in X, \text{ cu } x \neq y,$$

2. *pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există $\delta < 1$ astfel încât*

$$x, y \in X, \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \delta \|x - y\|.$$

J. Jachymski în [28] a observat că, condiția contractivă din definiția de mai sus poate fi evitată și, în consecință, un operator $f : X \rightarrow X$ este o contracție largă dacă, pentru fiecare $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) \in]0, 1[$ astfel încât

$$x, y \in X, \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \delta(\varepsilon) \|x - y\|.$$

Pentru echivalențe conexe care implică clase de contracții generalizate, vezi [28].

Următorul concept, introdus de M.A. Krasnoselskii, este legat de definiția de mai sus.

Definiție 3.2.2 (M.A. Krasnoselskii, vezi, de exemplu, Y.-Z. Chen [18]). *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach. Un operator $f : X \rightarrow X$ se numește contracție generalizată dacă pentru orice $0 < a < b < \infty$, există $\delta(a, b) \in (0, 1)$ astfel încât*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \delta(a, b) \|x - y\|,$$

pentru orice $x, y \in X$ care satisface $a < \|x - y\| < b$.

3.2.2 Teoreme de surjectivitate pentru contracții largi în cazul univoc

În această subsecțiune, vom demonstra proprietatea conform căreia câmpul $1_X - f$ este surjectiv, unde f este o contracție largă cu univocă. Demonstrația

se bazează pe principiul contracției largi a lui T.A. Burton [13] și pe teorema lui A. Granas [24], Teorema 3.0.1.

Pe de o parte, o contracție largă este o contracție generalizată, vezi [18]. Pe de altă parte, există contracții largi care nu sunt contracții (Banach).

T. A. Burton a prezentat teorema principală a punctului fix pentru contracții largi.

Teoremă 3.2.1 (T. A. Burton [13]). *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ o contracție largă. Presupunem că există $x \in X$ și $L > 0$, astfel încât*

$$d(x, f^n(x)) \leq L,$$

pentru orice $n \geq 1$. Atunci, f are un punct fix unic în X .

Ca o consecință a teoremei de mai sus, obținem următorul rezultat.

Corolar 3.2.2. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $f : X \rightarrow X$ un operator pentru care există $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq 2$ astfel încât f^{n_0} este o contracție largă. Presupunem că există un $x \in X$ și $L > 0$ astfel încât $d(x, f^n(x)) \leq L$ pentru orice $n \geq 1$. Atunci, f are un punct fix unic.*

Următoarea teoremă este primul rezultat principal al acestei secțiuni.

Teoremă 3.2.3. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și operatorul $f : X \rightarrow X$ care satisface următoarele ipoteze:*

- (i) f este o contracție largă;
- (ii) $f(A)$ este relativ compact, pentru fiecare $A \in P_b(X)$.

Atunci, câmpul $1_X - f : X \rightarrow X$ generat de f este un operator surjectiv.

3.2.3 Teoreme de surjectivitate pentru contracții largi în cazul multivoc

Reamintim mai întâi câteva noțiuni și teoreme necesare, care ne vor ajuta să demonstrăm rezultatul principal al secțiunii. Următorul rezultat a fost demonstrat în 1978 de R. Iannacci.

Din capitolul *Noțiuni și rezultate preliminare*, secțiunea multivocă, este cunoscută definiția contracției-normă multivoce.

Teoremă 3.2.4 (R. Iannacci [26]). *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și fie $F : X \rightarrow P_{cv}(X)$ un operator complet continuu multivoc. Să presupunem că F este o contracție-normă multivocă.*

Atunci, câmpul $1_X - F$ generat de F este surjectiv.

Definiție 3.2.3. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach. Atunci $F : X \rightarrow P(X)$ se numește o contracție largă multivocă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) \in]0, 1[$ astfel încât*

$$x, y \in X, \|x - y\| \geq \varepsilon \Rightarrow H(F(x), F(y)) \leq \delta(\varepsilon)\|x - y\|.$$

Este ușor de observat că o contracție largă multivocă este contractivă. Prin urmare, următoarea teoremă reprezintă rezultatul principal al surjectivității pentru operatorul de contracție largă multivocă din această secțiune.

Teoremă 3.2.5. *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și fie $F : X \rightarrow P_{cp,cv}(X)$ un operator multivoc care satisface următoarele ipoteze:*

1. *F este o contracție largă multivocă;*
2. *$F(U)$ este relativ compact, pentru fiecare $U \in P_b(X)$.*

Atunci, câmpul $1_X - F$ generat de F este surjectiv.

Concluzii

Obiectivul principal al tezei este de a oferi variante extinse pentru teoremele punctului fix legate de operatorii de tip Ćirić, operatorii de tip Meir-Keeler și φ -contracțiilor multivoce pe grafic. În plus, am prezentat teoreme de surjectivitate pentru operatorii Meir-Keeler și contracții largi în sensul lui Burton. Este prezentată o aplicație la o ecuație integrală neliniară legată de operatorii de tip Meir-Keeler. Mai precis, au fost obținute câteva proprietăți calitative ale problemei punctului fix pentru operatorii de tip Ćirić univoci și multivoci. De asemenea, pentru cazul multivoc, sunt demonstrate câteva teoreme stricte de punct fix. Proprietățile de stabilitate au fost demonstrate pentru operatorii Meir-Keeler cât și pentru φ -contracțiile multivoce pe grafic. Mai mult, studiul se concentrează și pe cazul unei mulțimi înzestrată cu două metrici, urmând ideea introdusă în teoremele de tip Maia. Rezultatul principal are o aplicație pentru o incluziune integrală de tip Volterra.

Posibile direcții de dezvoltare viitoare ar fi extinderea cadrului problemelor la diferite spații metrice generalizate, demonstrarea unor proprietăți calitative ale soluțiilor pentru problemele de punct fix. De asemenea, studiile pot fi îmbunătățite pentru cazul unei mulțimi înzestrată cu două metrici, ca în cazul teoremelor de tip Maia.

Lucrările viitoare ar putea implica aplicarea rezultatului abstract al punctului fix la unele probleme generate de modelele din domeniul științelor naturii și al economiei.

Studiile noi se pot referi la problema valorilor inițiale:

$$\begin{cases} x'(t) \in K(t, x(t)) \\ x(0) = x^0 \end{cases}$$

care modelează evoluția dinamică a unor sisteme complexe de puncte materi-

ale/ date/ populații și așa mai departe. Următoarele referințe oferă informații valoroase pentru acest studiu, vezi, de exemplu, [8], [7], [15], [21] și [31].

Un alt studiu se poate concentra pe rezultatele privind existența și stabilitatea pentru următoarea incluziune integrală cu întârziere:

$$\begin{cases} x(t) \in \int_{t-T}^t K(s, x(s))ds, & t \in [0, T] \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-\tau, 0] \end{cases}$$

care modelează evoluția (creșterea) sistemelor largi (nedeterminate) într-un mediu periodic, vezi A. Petrușel [52].

În concluzie, studiul oferă numeroase aplicații potențiale și deschide direcții largi pentru cercetări viitoare prin introducerea de noi concepte și teoreme. Lucrarea prezentată contribuie la o înțelegere teoretică mai profundă a conceptelor de punct fix neliniar, susținând în același timp perspectiva aplicațiilor.

Bibliografie

- [1] Aldea, F.: Surjectivity theorems for normcontraction operators, *Mathematica* **44**(67), No. 2 (2002), 113–119.
- [2] Alecsa, C. D., Petruşel, A.: Some variants of Ćirić's multi-valued contraction principle, *An. Univ. Vest Timiș. Ser. Mat.-Inform.*, vol. **LVII**, no. 1 (2019), 23-42, doi: [10.2478/awuttm-2019-0004](https://doi.org/10.2478/awuttm-2019-0004).
- [3] Amini-Harandi, A.: Endpoints of set-valued contractions in metric spaces, *Nonlinear Anal.* **72** (2010), 132-134.
- [4] Amini-Harandi, A.: Fixed point theory for set-valued quasi-contraction maps in metric spaces, *Appl. Math. Lett.*, vol. **24** (2011), 1791-1794, doi: [10.1016/j.aml.2011.04.033](https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.04.033).
- [5] Andres, J., Gorniewicz, L.: On the Banach contraction principle for multi-valued mappings. In: M. Lassonde (ed.) *Approximation, Optimization and Mathematical Economics*. Physica, Heidelberg (2001), 1-23.
- [6] Anisiu, M.C.: Quasibounded mappings and generalized contraction. *Seminar on Fixed Point Theory* **3** (1983), 151-154.
- [7] Aubin, J. P. și Cellina, A.: *Differential Inclusions*, Springer, Berlin, 1984.
- [8] Aubin, J. P. și Frankowska, H.: *Set-valued Analysis*, Modern Birkhauser Classics, Springer 1990.
- [9] Banach, S.: Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales, *Fund. Math.*, no. **3** (1922), 133-181.
- [10] Berinde, V. și Păcurar, M.: Fixed points and continuity of almost contractions, *Fixed Point Theory* **9**, no. **1** (2008), 23-34.

- [11] Berinde, V. și Păcurar, M.: An iterative method for approximating fixed points of Presić nonexpansive mappings, *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.* **38**, no. **2** (2009), 144–153.
- [12] Berinde, V., Mărușter, Șt., Rus, I.A.: Saturated contraction principles for non self operators, generalizations and applications, *Filomat* **31**, no. 11 (2017), 3391-3406.
- [13] Burton, T.-A.: Integral equations, implicit functions, and fixed points, *Proc. Am. Math. Soc.*, volume **124**, no. 8 (1996), 2383-2390.
- [14] Burton, T.-A., Purnaras, I.-K.: Necessary and sufficient conditions for large contractions in fixed point theory, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, no. **94** (2019), 1-24.
- [15] Cernea, A.: *Incluziuni diferențiale și aplicații*, Editura Univ. București, 2000.
- [16] Ćirić, Lj. B.: Fixed points for generalized multi-valued contractions, *Math. Vesnik* **24** (1972), 265–272.
- [17] Ćirić, Lj. B.: A generalization of Banach’s contraction principle, *Proc. Amer. Math. Soc.* **45**, no. 2 (1974), 267–273, doi: [10.2307/2040075](https://doi.org/10.2307/2040075).
- [18] Chen, Y.-Z.: Inhomogeneous iterates of contraction mappings and non-linear ergodic theorems, *Nonlinear Anal.* **39**, no. 1 (2000), 1-10.
- [19] Covitz, H., and Nadler, S.B.: Multi-valued contraction mappings in generalized metric spaces, *Israel J. Math.* **8** (1970), 5-11.
- [20] de Blasi, F.S., Myjak J., Reich S. și Zaslavski, A. J.: Generic existence and approximation of fixed points for nonexpansive set-valued maps, *Set-Valued and Variational Analysis*, **17** (2009), 97-112.
- [21] Deimling, K.: *Multivalued Differential Equations*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 1992.
- [22] Edelstein, M.: On Fixed and Periodic Points Under Contractive Mappings, *J. London Math. Soc.* **37** (1962), 74-79.

- [23] Feng, Y., Liu, S.: Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings, *J. Math. Anal. Appl.* **317** (2006), 103-112.
- [24] Granas, A.: On a certain class of nonlinear mappings in Banach space. *Bull. Acad. Pol. Sci.* **9** (1957), 867-871.
- [25] Granas, A., Dugundji, J.: *Fixed Point Theory*, Springer, New York 2003, doi: [10.1007/978-0-387-21593-8](https://doi.org/10.1007/978-0-387-21593-8).
- [26] Iannacci, R.: The spectrum for nonlinear multi-valued maps via approximations, *Boll. Un. Mat. Ital.* **15-B** (1978), 527-545.
- [27] Jachymski, J.: A stationary point theorem characterizing metric completeness, *Applied Math. Letters* **24** (2011), 169-171.
- [28] Jachymski, J., Jóźwik, I.: Nonlinear contractive conditions: a comparison and related problems, *Fixed Point Theory and its Applications*, Banach Center Publ. **77** (2007), 123-146.
- [29] Jung, C. K.: On generalized complete metric spaces, *Bul. Amer. Math. Soc.* **75** (1969), 81-86.
- [30] Kamenskii, M., Obuhovskii V., Zecca P.: *Condensing Multivalued Maps and Semilinear Differential Inclusions in Banach spaces*, Walter de Gruyter and Co., Berlin, 2001.
- [31] Kisielewicz, M.: *Differential Inclusions and Optimal Control*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1991.
- [32] Kuczma, M.: *Functional equations in a single variable*, PWN Warszawa, Monografie Mat. **46** (1968).
- [33] Lazăr, T. A., Petruşel, A. şi Shazhad, N.: Fixed points for non-self operators and domain invariance theorems, *Nonlinear Analysis*, vol. **70** (2009), 117-125.
- [34] Lim, T. C.: A fixed point theorem for multi-valued nonexpansive mappings in a uniformly convex Banach space. *Bull. Amer. Math. Soc.* **80**, No. 6 (1974), 1123-1126.

- [35] Lim, T. C.: On characterizations of Meir–Keeler contractive maps, *Non-linear Analysis* **46** (2001), 113–120.
- [36] Maia, M. G.: Un’ osservazione sulle contrazioni metriche, *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **40** (1968), 139–143.
- [37] Magdaş, A.: *Contributions to fixed point theory for cyclic operators and applications*, Presa Univ. Clujeană, 2021.
- [38] Matkowski, J. și Węgrzyk, R.: On equivalence of some fixed point theorems for selfmappings of metrically convex space, *Boll. Un. Mat. Ital* (**5**) **15-A** (1978), 359–369.
- [39] Meir, A., Keeler, E.: A theorem on contraction mappings. *J. Math. Anal. Appl.* **28** (1969), 326–329.
- [40] Moga, M.: Some properties of the fixed point equation with Meir–Keeler operator, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sec. Math.* Vol. **64** (2021), 109–115.
- [41] Moga, M.: Meir-Keeler operators and applications to surjectivity theorems, *J. Nonlinear and Convex Anal.*, vol. **23**, no. 3 (2022), 625–634.
- [42] Moga, M.: On some qualitative properties of Ćirić’s fixed point theorem, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math.*, vol. **67**, no. 1 (2022), 47–54, doi: [10.24193/subbmath.2022.1.04](https://doi.org/10.24193/subbmath.2022.1.04).
- [43] Moga, M., Petruşel, A.: Large Contractions and Surjectivity in Banach Spaces. In: Som, T., Ghosh, D., Castillo, O., Petrusel, A., Sahu, D. (eds) *Applied Analysis, Optimization and Soft Computing. ICNAAO 2021. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. **419**, Springer, Singapore (2023), 3–12, doi: [10.1007/978-981-99-0597-3_1](https://doi.org/10.1007/978-981-99-0597-3_1).
- [44] Moga, M., Truşcă, R.: On some fixed point theorems for Ćirić operators, *Miskolc Mathematical Notes*, vol. **25**, no. 2 (2024), 871–885.
- [45] Moga, M., Truşcă, R.: Fixed point and stability results for multi-valued nonlinear graph contractions in complete metric spaces, *J. Anal.*, Vol. 33, (2025), 717–742, doi: [10.1007/s41478-024-00858-6](https://doi.org/10.1007/s41478-024-00858-6).
- [46] Nadler Jr., S.B.: Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.* **30** (1969), 475–488.

- [47] Olgun, M., Alyildiz, T., Bicer, O. și Altun, I.: Maia type fixed point results for multivalued F-contractions, *Miskolc Mathematical Notes* **22** (2021), 819-829.
- [48] Petru, P. T., Petrușel, A., Yao, J.-C.: Ulam-Hyers stability for operatorial equations and inclusions via nonself operators, *Taiwanese J. Math.* **15** (2011), 2195-2212.
- [49] Petrușel, A.: Single-valued and multi-valued Meir-Keeler type operators. *Revue d'Anal. Num. et de Th. de l'Approx.* **30** (2001), 75-80.
- [50] Petrușel, A.: Multivalued weakly Picard operators and applications, *Sci. Math. Jpn.* **59**, (2004), 169-202.
- [51] Petrușel, A.: Ćirić type fixed point theorems, *Stud. Univ. Babeș-Bolyai Math.* **59**, no. 2 (2014), 233-245.
- [52] Petrușel, A.: *Operatorial inclusions*, House of the Book of Science Cluj-Napoca, 2002.
- [53] Petrușel, A., Petrușel, G.: Selection theorems for multivalued generalized contractions, *Math. Morav.*, **9** (2005), 43-52.
- [54] Petrușel, A., Petrușel, G., Yao, J.-C.: New fixed point results for nonlinear Feng-Liu contractions with applications, *Topol. Methods Nonlinear Anal.* **63**, no. 1 (2024), 153-166.
- [55] Petrușel, A., Petrușel, G., Yao, J.-C.: Multi-valued graph contraction principle with applications, *Optimization* **69**, no. 7-8 (2020), 1541-1556.
- [56] Petrușel, A., Rus, I.A.: Fixed point theory of multivalued operators on a set with two metrics, *Fixed Point Theory* **8** (2007), 97-104.
- [57] Petrușel, A., Rus, I.A.: Well-posedness of the fixed point problem for multivalued operators, *Applied Analysis and Differential Equations*, World Scientific (2007), 295-306.
- [58] Petrușel, A., Rus, I.A.: An abstract point of view on iterative approximation schemes of fixed points for multivalued operators, *J. Nonlinear Sci. Appl.* **6** (2013), 97-107.

- [59] Petruşel, G.: Generalized multi-valued contractions which are quasi-bounded. *Demonstratio Math.* **40** (2007), 639-648, doi: [10.1515/dema-2007-0314](https://doi.org/10.1515/dema-2007-0314).
- [60] Rakotch, E.: A Note on Contractive Mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 459-465.
- [61] Reich, S.: Fixed point of contractive functions, *Boll. Un. Mat. Ital.* **5** (1972), 26-42.
- [62] Reich, S.: A fixed point theorem for locally contractive multi-valued functions, *Revue Roumaine Math. Pures Appl.* **17** (1972), 569-572.
- [63] Reich, S.: Some fixed point problems, *Atti Accad. Naz. Lincei* **57** (1974), 194-198.
- [64] Reich, S. şi Zaslavski, A. J.: *Well-posedness of fixed point problems*, Far East Journal of Mathematical Sciences, **46**, Springer, New York, 2000.
- [65] Reich, S. şi Zaslavski, A. J.: *Genericity in nonlinear analysis*, Developments in Mathematics, **34**, Springer, New York, 2014.
- [66] Ricceri, B.: Une propriété topologique de l'ensemble des points fixes d'une contraction multivoques a valeurs convexes, *Rend. Accad. Naz. Lincei* **81** (1987), 283-286.
- [67] Rhoades, B. E.: A comparison of various definitions of contractive mappings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **226** (1977), 257-290.
- [68] Rus, I. A.: *Generalized Contractions and Applications*, Transilvania Press, Cluj-Napoca 2001.
- [69] Rus, I.A., Normcontraction mappings outside a bounded set. Itinerant Seminar on Functional Equations Approximation and Convexity, Cluj-Napoca (1986), 257-260.
- [70] Rus, I.A.: Some variants of contraction principle, generalizations and applications, *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math.* **61**, no. 3 (2016), 343-358.
- [71] Rus, I.A.: Relevant classes of weakly Picard operators, *An. Univ. Vest Timiş. Ser. Mat.-Inform.*, **54**, no. 2 (2016), 131-147.

- [72] Rus, I.A., Petruşel, A., Petruşel, G.: Fixed point theorems for set-valued Y-contractions. In: Fixed Point Theory and its Applications, Banach Center Publ. **77** (2007), 227-237.
- [73] Rus, I.A., Petruşel, A. şi Petruşel, G.: *Fixed Point Theory*, Cluj Univ. Press, Cluj-Napoca, 2008.
- [74] Rus, I.A., Petruşel, A., Sîntămărian, A.: Data dependence of the fixed point set of multi-valued weakly Picard operators, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math. **46** (2001), 111–121.
- [75] Rus, I.A., Petruşel, A., Sîntămărian, A.: Data dependence of the fixed point set of some multi-valued weakly Picard operators, Nonlinear Anal. **52** (2003), 1947–1959.
- [76] Rus, I.A. şi Şerban, M.A.: Some generalizations of a Cauchy lemma and applications, Topics in Mathematics, Computer Science and Philosophy, A Festschrift for Wolfgang W. Breckner, Editor Şt. Cobzaş, University Press, Cluj-Napoca (2008), 173-181.
- [77] Saint-Raymond, J.: Multi-valued contractions, Set-Valued Anal. **2** (1994), 559–571.
- [78] Suzuki, T.: Moudafi’s viscosity approximations with Meir–Keeler contractions. J. Math. Anal. Appl. **325** (2007), 342–352.
- [79] Tongnoi, B.: Saturated versions of some fixed point theorems for generalized contractions, Fixed Point Theory, **21** (2020), 755-766.
- [80] Truşcă, R.: Some local fixed point theorems and applications to open mapping principles and continuation results, Arab. J. Math., vol. **10**, no. 3 (2021), 771-723, doi: [10.1007/s40065-021-00331-3](https://doi.org/10.1007/s40065-021-00331-3).
- [81] Wang, T.: Fixed point theorems and fixed point stability for multi-valued mappings on metric spaces, J. Nanjing Univ. Math. Biq. **6** (1989), 16-23.
- [82] Węgrzyk, R.: *Fixed-point theorems for multi-valued functions and their applications to functional equations*, Dissertationes Math. PWN Warszawa 201 (1982).
- [83] Xu, H.K.: Metric fixed point theory for multi-valued mappings. Dissertationes Math. **389** (2000), 1-39.