

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
ȘCOALA DOCTORALĂ DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ



UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI
BABES-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM
BABES-BOLYAI UNIVERSITAT
BABEȘ-BOLYAI UNIVERSITY
TRADITIO ET EXCELLENTIA

Teoreme locale de punct fix pentru operatori univoci și multivoci: Teorie și aplicații

Teză de Doctorat - Rezumat

Scientific Advisor:
Prof. Dr. Petrușel Adrian

Ph.D. Student:
Trușcă Mihai-Radu

Cluj-Napoca, România
2026

Conținut

Introducere	ii
Lista publicațiilor	1
1 Preliminarii	2
1.1 Notații	2
1.2 Noțiuni generale	3
2 Teoreme locale de punct fix pentru contractii univoce generalizate	6
2.1 Contractii generalizate de tip Ćirić-Reich-Rus	6
2.2 Contractii generalizate de tip Chatterjea	9
2.3 Contractii generalizate de tip Berinde	11
2.4 Contractii generalizate de tip Ćirić	13
2.5 Teoreme locale de punct fix pentru alte contractii generalizate non-self	15
3 Teoreme locale de punct fix pentru contractii multivoce generalizate	18
3.1 Contractii generalizate de tip Ćirić-Reich-Rus	18
3.2 Contractii generalizate de tip Chatterjea	20
3.3 Contractii generalizate de tip Berinde	22
3.4 Contractii generalizate de tip Ćirić	24
3.5 φ -contractii multivoce neliniare pe grafic	26
3.6 (φ, ψ) -contractii de tip Feng-Liu	31
Bibliografie	38

Introducere

Dezvoltări în teoria punctului fix

Teoria punctului fix datează de la sfârșitul secolui 19 și începutul secolului 20. Unele dintre primele rezultate sunt rezultatul de aproape punct fix al lui Henri Poincare din 1886 și teorema de punct fix a lui Luitzen E. J. Brouwer din 1911. În 1922, Stefan Banach a definit principiul contracției, demonstrând existența, dar și unicitatea punctului fix pentru o contracție într-un spațiu metric complet. Tot în anul 1922 George D. Birkhoff și Oliver D. Kellogg au dezvoltat prima teoremă de punct fix infinit dimensională. Juliusz Schauder a dat în 1927 și 1930 o extensie cu privire la spații metrice liniare și în contextul unui spațiu Banach a demonstrat că fiecare mulțime compactă și convexă îndeplinește proprietatea de punct fix dacă funcția este continuă. De atunci, multe generalizări și extensii au fost demonstrate, ca de exemplu Kannan, Bianchini, Berinde, Zamfirescu, Ćirić-Reich-Rus, Ćirić și Hardy-Rogers.

Îndreptându-ne atenția către cazul multivoc, prima teoremă de punct fix a fost publicată în 1969 de către Sam B. Nadler Jr. în [41]. Acest rezultat important a fost curând îmbunătățit de Howard H. Covitz și Sam B. Nadler Jr. în [20], prin înlăturarea condiției de mărginire. Rezultatul a fost extins și generalizat în multe articole, precum [56], [58], [61], [65] și [73]. câteva generalizări notabile sunt, de asemenea, studiate de-a lungul acestei lucrări, ca de exemplu contracțiile Berinde, Ćirić și operatori de tip Feng-Liu.

Primul matematician care a demonstrat o teoremă locală de punct fix, pentru cazul contracțiilor Banach, a fost Mark A. Krasnoselskii. Apoi, Marlene Frigon și Andrzej Granas au demonstrat o astfel de teoremă pentru cazul multivoc. Aceste două teoreme au inspirat mulți alți matematicieni să le extindă în următoarele decenii.

Motivație

Scopul acestei teze este să extindă, în context univoc, dar și multivoc, teoreme locale de punct fix la diferite contractii generalizate, ca de exemplu Ćirić-Reich-Rus, Chatterjea, Berinde, etc. De asemenea, vom demonstra aplicații pentru rezultatele menționate anterior. Aceste rezultate teoretice pot fi ulterior aplicate în multe scenarii precum studiul modelelor matematice guvernate de ecuații și incluziuni integrale sau diferențiale. O altă utilizare ar putea fi obținerea existenței preferințelor optimale într-o economie abstractă.

Rezultatele care succed în această lucrare se pot dovedi utile în multe alte domenii, incluzând ingineria, economia, managementul, informatica și telecomunicațiile.

Structura tezei și contribuții originale

Structura generală a tezei este organizată după cum urmează. Deschidem cu un capitol dedicat preliminarilor. Continuăm cu cele două capitole principale, fiecare prezentând în detaliu principalele contribuții ale cercetării. Ulterior, avem o secțiune dedicată care prezintă concluziile studiului nostru, împreună cu direcțiile de cercetare ulterioare. Teza se încheie cu o listă de referințe consultate pe parcursul lucrării de cercetare.

În primul capitol stabilim notațiile pe care le vom folosi în capitolele următoare și reamintim, de asemenea, câteva definiții și rezultate bine-cunoscute care ne vor ajuta în demonstrațiile ce urmează. Câteva concepte notabile sunt lema Hausdorff-Pompeiu și lema Cauchy, împreună cu definițiile unui operator Picard, ale unui operator slab Picard și ale unui operator esențial.

Al doilea capitol se ocupă cu demonstrarea teoremelor locale de punct fix pentru contractii generalizate univoce, în special pentru contractii generalizate de tip Ćirić-Reich-Rus, Chatterjea, Berinde și Ćirić. În prima secțiune, ne concentrăm asupra operatorului de tip Ćiri' c-Reich-Rus. Începem prin a reaminti definiția unui astfel de operator, teorema globală de punct fix și o teoremă locală de punct fix. În continuare, demonstrăm un alt rezultat local, care îl îmbunătățește pe cel precedent, apoi definim noțiunea de familie (α, β) - contractivă și determinăm o aplicație a teoremei locale de punct fix demonstrate. Principalele rezultate ale acestei secțiuni se găsesc în "**Local fixed point theorems and open mapping principles for generalized**

contractions", *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Math.*, **64**, (2021) și **"Some local fixed point theorems and applications to open mapping principles and continuation results"**, *Arabian Journal of Mathematics*, **10**, (2021).

Următoarea secțiune tratează operatorii de tip Chatterjea. Începem prin a reaminti definiția operatorului și rezultatul global de punct fix. Apoi demonstrăm două teoreme locale de punct fix, una pentru contracții self și una pentru contracții non-self, cea din urmă considerând o condiție mai slabă decât prima. Continuăm prin definirea noțiunii de familie γ - contractivă și oferim o aplicație a rezultatelor locale prezentate. Rezultatele centrale discutate în această secțiune sunt conținute în **"Local fixed point theorems and open mapping principles for generalized contractions"**, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Math.*, **64**, (2021) și **"Some local fixed point theorems and applications to open mapping principles and continuation results"**, *Arabian Journal of Mathematics*, **10**, (2021).

În cea de-a treia secțiune, alegem o altă generalizare a α - contracției obișnuite, specific operatorul de tip Berinde. Începem prin a reaminti definiția unui operator de tip Berinde și a teoremei globale de punct fix. Vom oferi apoi două rezultate locale de punct fix, pentru operatori self și non-self, al doilea îmbunătățindu-l pe primul prin presupunerea unei condiții mai slabe. Vom continua cu definirea conceptului de familie (α, L) - contractivă și să demonstrăm o aplicație a teoremelor locale de punct fix date. Rezultatele principale ale acestei secțiuni se găsesc în **"Local fixed point theorems and open mapping principles for generalized contractions"**, *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Math.*, **64**, (2021) și **"Some local fixed point theorems and applications to open mapping principles and continuation results"**, *Arabian Journal of Mathematics*, **10**, (2021).

A patra secțiune a celui de-al doilea capitol se concentrează pe rezultatele pentru operatorii de tip Ćirić. Deschidem prin a reaminti definiția operatorului menționat anterior, precum și rezultatul global de punct fix. Continuăm cu demonstrarea teoremei locale de punct fix pentru operatorii de tip Ćirić și încheiem secțiunea cu o aplicație a acesteia, mai exact o teoremă de continuare. Principalele rezultate din această secțiune se găsesc în **"On some fixed point theorems for Ćirić operators"**, *Miskolc Mathematical Notes*, **25**, (2024).

În secțiunea finală, ne propunem să obținem rezultate de punct fix pentru alte tipuri de contracții generalizate non-self, cum ar fi contracția de tip Hardy-Rogers. Mai întâi reamintim o extensie a teoremei de punct fix a lui

Conti demonstrată de Petrușel, Precup și Șerban și apoi introducem două teoreme locale de punct fix, una pentru contracții continue de tip Berinde și o alta pentru contracții continue de tip Hardy-Rogers. Secțiunea se încheie cu o teoremă locală de punct fix pentru operatori de tip Berinde, unde abordăm condiții suplimentare. Rezultatele originale din această secțiune pot fi găsite în "**Iterative approximations for non-self operators**", *22nd International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC)*, (2019).

Capitolul final studiază rezultate de punct fix, aplicații și proprietăți de stabilitate pentru următoarele tipuri de generalizări ale contracțiilor multivoce: Ćirić-Reich-Rus, Chatterjea, Berinde, Ćirić, φ - contracții neliniare pe grafic și (φ, ψ) - contracții de tip Feng-Liu. Prima secțiune tratează contracțiile multivoce de tip Ćirić-Reich-Rus, unde reamintim definiția unei astfel de contracții generalizate și teorema globală de punct fix demonstrată de Reich. Continuăm cu principalele rezultate ale secțiunii, în special un rezultat local de punct fix, o teoremă locală de punct fix strict și un rezultat de omotopie, ca aplicație la prima teoremă locală. Contribuțiile originale menționate fac parte din articolul "**Some local fixed point theorems for generalized multi-valued contractions with applications**", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **23**, (2022).

A doua secțiune a Capitolului 3 investighează cazul contracțiilor multivoce de tip Chatterjea. Reamintim definiția sa și rezultatul global de punct fix, apoi demonstrăm cele trei rezultate centrale ale secțiunii: două rezultate locale privind punctele fixe și punctul fix strict și o teoremă de omotopie. Aceste noi rezultate sunt publicate în articolul "**Some local fixed point theorems for generalized multi-valued contractions with applications**" *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **23**, (2022).

Următoarea secțiune examinează contextul contracțiilor multivoce de tip Berinde, unde urmărim aceeași structură ca și în cele două secțiuni anterioare, amintind definiția și teorema globală de punct fix deja stabilită. Continuăm cu rezultatele principale, care sunt o teoremă locală de punct fix și rezultatul de omotopie corespunzătoare ca aplicație, alternativa neliniară și principiul Leray-Schauder pentru acest tip de contracții generalizate. Rezultatele originale au apărut în "**Some local fixed point theorems for generalized multi-valued contractions with applications**" *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **23**, (2022).

Trecem la a patra parte a Capitolului 3, în care considerăm contracții multivoce de tip Ćirić. Se respectă aceeași structură de secțiune, menționăm

binecunoscuta definiție a contractiei multivoce de tip Ćirić și apoi includem un rezultat de punct fix pentru astfel de operatori. Principalele dezvoltări din această secțiune sunt rezultate locale de punct fix și o teoremă de omotopie ca aplicație. Demonstrațiile detaliate și alte observații privind rezultatele originale ale acestei secțiuni au fost documentate în articolul "**On some fixed point theorems for Ćirić operators**", *Miskolc Mathematical Notes*, **25**, (2024).

Secțiunea următoare studiază cazul φ - contractiilor multivoce neliniare pe grafic. Aici reamintim definițiile funcțiilor de comparație, funcțiilor de comparație tari și φ - contractiilor multivoce neliniare pe grafic. Apoi prezentăm două rezultate de existență a punctului fix, considerând atât un spațiu metric generalizat, cât și unul clasic, urmate de enunțarea dependenței de date și a proprietăților de stabilitate Ulam-Hyers ale mulțimii de puncte fixe. Următoarele rezultate ilustrate sunt o teoremă punct fix strict, urmată de două teoreme locale. Încheiem secțiunea cu un rezultat de tip Maia privind φ - contractiile multivoce neliniare pe grafic și un corolar care îl urmează. Principalele dezvoltări prezentate în această secțiune sunt extrase din articolul "**Fixed point and stability results for multi-valued nonlinear graph contractions in complete metric spaces**", *The Journal of Analysis*, (2025).

În ultima secțiune a Capitolului 3 ne vom ocupa cu studiul (φ, ψ) - contractiilor multivoce de tip Feng-Liu. După enunțarea definiției tipului respectiv de contractii, stabilim două teoreme care demonstrează existența și localizarea punctelor fixe. Continuăm prin a reaminti, în contextul (φ, ψ) - contractiilor multivoce de tip Feng-Liu, definițiile pentru următoarele concepte de stabilitate generalizate: Ulam-Hyers, Reich-Zaslavski, Ostrowski, dependența de date și condiția generalizată de retracție-deplasare tare. Apoi demonstrăm că (φ, ψ) - contractiile multivoce de tip Feng-Liu satisfac condiția puternică de retracție-deplasare, ceea ce ne conduce la ultimul rezultat al secțiunii, care demonstrează proprietățile calitative ale mulțimii de puncte fixe. Rezultatele cuprinse în această secțiune sunt stabilite în articolul "**Fixed point and stability results for multi-valued nonlinear graph contractions in complete metric spaces**", *The Journal of Analysis*, (2025).

Diseminarea rezultatelor

Rezultatele prezentate în teză au fost diseminate în cadrul următoarelor conferințe.

1. 22nd International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC), Timișoara, Romania, September 1 - 4, 2020. Title: Iterative approximations for local fixed point theorems and applications;
2. 13th Joint Conference on Mathematics and Computer Science (MaCS), Budapest, Hungary, October 1 - 3, 2020. Title: Local fixed point theorems and open mapping principles for generalized contractions;
3. 19th International Conference on Functional Equations and Inequalities, Bedlewo, Poland, September 11 - 18, 2021. Title: Some local fixed point results and applications for generalized contractions;
4. 23rd International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC), Timișoara, Romania, December 7 - 10, 2021. Title: Local fixed point results and applications for multivalued generalized contractions;
5. 4th Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications (RISMAA), Brașov, Romania, May 19 - 21, 2022. Title: Some applications of local fixed point theorems for some generalized contractions;
6. 4th International Conference on Mathematics and Computer Science, Brașov, Romania, September 15 - 17, 2022. Title: Fixed point theory for multi-valued nonlinear graph contractions in complete metric spaces (joint work with Mădălina Moga and Adrian Petrușel);
7. 24th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC), Linz, Austria, September 12 - 15, 2022. Title: On some fixed point theorems for Ćirić operators (joint work with Mădălina Moga);
8. 14th International Conference on Fixed Point Theory and its Applications (ICFPTA), Brașov, Romania, July 11-14, 2023, Title: "Fixed points for nonlinear graph contractions with applications";

9. 6th Romanian Itinerant Seminar on Mathematical Analysis and its Applications (RISMAA), Cluj-Napoca, Romania, May 30 - 31, 2024. Title: Maia type theorems for some multi-valued generalized contractions;
10. 26th International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC), Timișoara, Romania, September 16 - 19, 2024, Title: Fixed points for Feng-Liu multi-valued operators with an application (joint work with Mădălina Moga).

Mulțumiri

În primul rând, aș dori să-mi exprim sincera recunoștință față de îndrumătorul meu, prof. univ. dr. Adrian Petrușel, pentru îndrumarea, răbdarea continuă și angajamentul său față de standarde înalte. Este un mentor remarcabil și îi sunt foarte recunoscător pentru timpul și energia pe care le-a investit în dezvoltarea mea.

Doresc să transmit aprecierea mea membrilor comisiei de îndrumare pentru observațiile și sfaturile lor profesionale. De asemenea, aș dori să mulțumesc Departamentului de Matematică al Universității Babeș-Bolyai pentru mediul academic colaborativ oferit.

Nu în ultimul rând, doresc să-mi exprim aprecierea față de părinții mei. Vă mulțumesc pentru că mi-ați fost alături în timpul provocărilor, pentru prezența constantă și sacrificiile tăcute.

Lista publicațiilor

Rezultatele prezentate pe parcursul tezei au fost publicate în următoarele articole.

1. "**Iterative approximations for non-self operators**", *22nd International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC)*, (2019) (a se vedea [53]) – indexat în Scopus și Web of Science.
2. "**Local fixed point theorems and open mapping principles for generalized contractions**", *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Math.*, **64**, (2021) (a se vedea [74]) – indexat în MathSciNet și ZbMath;
3. "**Some local fixed point theorems and applications to open mapping principles and continuation results**", *Arabian Journal of Mathematics*, **10**, (2021) (a se vedea [75]) – indexat în MathSciNet, Scopus, Web of Science și ZbMath;
4. "**Some local fixed point theorems for generalized multi-valued contractions with applications**", *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, **23**, (2022) (a se vedea [54]) – indexat în MathSciNet, Web of Science (Impact Factor: 0.7) și ZbMath;
5. "**On some fixed point theorems for Ćirić operators**", *Miskolc Mathematical Notes*, **25**, (2024) (a se vedea [40]) – indexat în MathSciNet, Scopus, Web of Science (Impact Factor: 0.9) și ZbMath;
6. "**Fixed point and stability results for multi-valued nonlinear graph contractions in complete metric spaces**", *The Journal of Analysis*, **33**, (2025) (a se vedea [39]) – indexat în MathSciNet, Scopus, Web of Science (Impact Factor: 0.7) și ZbMath.

Chapter 1

Preliminarii

În acest capitol ne propunem să prezentăm notațiile care vor fi utilizate în următoarele capitole. De asemenea, vom reaminti câteva noțiuni, definiții, precum și rezultate bine-cunoscute. Pentru alte concepte și rezultate similare, vezi, de exemplu, [6], [47], [66] și [69].

1.1 Notății

Fie X o mulțime nevidă. Fie $f: X \rightarrow X$ un operator univoc și $F: X \multimap X$ un operator multivoc. Pe parcursul acestei lucrări, vom folosi următoarele notații:

- $\mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$;
- $P(X) := \{A \subset X \mid A \neq \emptyset\}$;
- $P_b(X) := \{A \subset X \mid A \neq \emptyset, A \text{ este mărginită}\}$;
- $P_{cl}(X) := \{A \subset X \mid A \neq \emptyset, A \text{ este închisă}\}$;
- $P_{cp}(X) := \{A \subset X \mid A \neq \emptyset, A \text{ este compactă}\}$;
- Pentru $x_0 \in X$ și $r > 0$, avem
 - $B(x_0; r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$ reprezintă bila deschisă de centru x_0 și rază r ;
 - $\tilde{B}(x_0; r) := \{x \in X \mid d(x_0, x) \leq r\}$ reprezintă bila închisă de centru x_0 și r ;

- $Graph(f) := \{(x, y) \in X \times X \mid y \in f(x)\}$ – graficul lui f ;
- $Graph(F) := \{(x, y) \in X \times X \mid y \in F(x)\}$ – graficul lui F ;
- $Fix(f) := \{x \in X \mid f(x) = x\}$ – mulțimea tuturor punctelor fixe ale lui f ;
- $f^0 := 1_X, f^1 := f, \dots, f^n := f \circ f^{n-1}$ – iteratele operatorului univoc f ;
- $F^1(Y) := F(Y), F^2(Y) := F(F(Y)), \dots, F^n(Y) := F(F^{n-1}(Y))$ – iteratele operatorului multivoc F ;
- Pentru fiecare $x \in X$, notăm $O(x, \infty) = \{x, f(x), \dots, f^n(x), \dots\}$.
- $CR(Y, X)$ – familia operatorilor contractății definite de la Y la X ;
- $CR_{\delta Y}(Y, X) := \{f \in CR(Y, X) \mid f|_{\delta Y} : \delta Y \rightarrow X \text{ nu are puncte fixe}\}$.

1.2 Noțiuni generale

Să reamintim acum câteva dintre principalele definiții și concepte din teoria punctului fix.

Definiția 1.1. Un spațiu metric (X, d) este complet dacă fiecare șir Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Definiția 1.2. Un spațiu metric (X, d) is conex dacă nu este reuniunea a două mulțimi deshise nevide disjuncte.

Definiția 1.3. Considerăm un spațiu metric (X, d) . Definim funcționala generalizată diametru $diam: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ în felul următor:

$$diam(Y) = \sup\{d(u, v) \mid u \in Y, v \in Y\}.$$

Definiția 1.4. Considerăm un spațiu metric (X, d) . Atunci:

- (i) funcționala $D: P(X) \times P(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ definită prin

$$D(Y, Z) = \inf\{d(y, z) \mid y \in Y, z \in Z\}$$

este funcționala distanță. În particular, dacă $x_0 \in X$ atunci $D(x_0, Z) := D(\{x_0\}, Z)$ este distanța de la punctul x_0 la mulțimea Z .

(ii) funcționala $\rho: P(X) \times P(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ definită prin

$$\rho(Y, Z) = \sup\{D(y, Z) \mid y \in Y\}$$

este funcționala exces a mulțimii Y peste mulțimea Z .

(iii) funcționala $H: P(X) \times P(X) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ definită prin

$$H(Y, Z) = \max\{\rho(Y, Z), \rho(Z, Y)\}$$

este funcționala Hausdorff-Pompeiu. Este cunoscut faptul că H este o metrică pe $P_{b,cl}(X)$.

În plus, perechea $(P_{cl}(X), H)$ formează un spațiu metric generalizat, în sensul că H poate lua valori infinite.

Reamintim, în plus, și o proprietate importantă a funcționalei Hausdorff-Pompeiu.

Lema 1.1. *Considerăm un spațiu metric (X, d) și $\varepsilon > 0$. Dacă Y, Z sunt două submulțimi ale lui X cu $H(Y, Z) < \varepsilon$, atunci pentru fiecare $y \in Y$ există $z \in Z$ astfel încât $d(y, z) < \varepsilon$.*

Definiția 1.5 (a se vedea [69]). Considerăm perechea de spații metrice (X, d) și (Y, ρ) . Un operator $f: X \rightarrow Y$ se numește:

(i) Lipschitz dacă există $l \in \mathbb{R}_+$ astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq ld(x, y), \text{ pentru orice } x, y \in X;$$

(ii) α - contracție dacă există $\alpha \in [0, 1)$ astfel încât f este α -Lipschitz (i.e., Lipschitz cu constanta α).

Definiția 1.6 (a se vedea [69]). Considerăm un spațiu metric (X, d) . Un operator $f: X \rightarrow X$ este slab Picard (abreviat WPO) dacă $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent pentru orice $x \in X$ și limita șirului, notată prin $f^\infty(x)$, este un punct fix al operatorului f .

Definiția 1.7 (a se vedea [69]). Dacă $f: X \rightarrow X$ este WPO și $\text{Fix}(f) = \{x^*\}$, atunci f este un operator Picard (abreviat PO).

Definiția 1.8 (a se vedea [16], pagina 268). Să considerăm acum un spațiu metric (X, d) și un operator $f: X \rightarrow X$. Atunci X este f -orbital complet dacă fiecare șir Cauchy conținut în $O(x, \infty)$ pentru un $x \in X$ oarecare converge în X .

Prin U ne vom referi la un domeniu (deschis și conex) fixat într-un spațiu metric complet (X, d) . Notăm prin $\mathcal{K}^{CRR}(\bar{U}, X)$ (respectiv $\mathcal{K}^C(\bar{U}, X)$ și $\mathcal{K}^B(\bar{U}, X)$) mulțimea tuturor contractiilor multivoce generalizate $K: \bar{U} \rightarrow P(X)$ în sensul Ćirić-Reich-Rus (CRR), respectiv Chatterjea (C) și respectiv Berinde (B). Definim și

$$\mathcal{K}_0^\#(\bar{U}, X) = \{K \in \mathcal{K}(\bar{U}, X) : x \notin K(x) \text{ pentru orice } x \in \partial U\}, \quad (1.1)$$

unde $\#$ este înlocuit prin CRR, C, și respectiv B.

Definiția 1.9. Spunem despre $K \in \mathcal{K}_0^\#(\bar{U}, X)$ că este esențial dacă K are punct fix. Altfel, K este numit neesențial.

Definiția 1.10. O omotopie de contractii multivoce generalizate este o familie de astfel de operatori $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$ astfel încât orice K_t aparține $\mathcal{K}_0^\#(\bar{U}, X)$. Doi operatori S și T sunt omotopici în $\mathcal{K}_0^\#(\bar{U}, X)$ dacă există o omotopie de contractii multivoce generalizate $\{K_t\}_{t \in [0,1]}$ astfel încât $K_0 = S$ și $K_1 = T$.

Lema 1.2 (Lema lui Cauchy). Fie $(a_n), (b_n)$ două șiruri de numere pozitive astfel încât $\sum_{n \geq 0} a_n < \infty$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k \right) = 0.$$

Chapter 2

Teoreme locale de punct fix pentru contractii univoce generalizate

În acest capitol ne concentrăm pe demonstrarea teoremelor locale în cazul contractiilor univoce generalizate, precum și pe o aplicație pentru fiecare contractie generalizată considerată. Mai exact, vom lua în considerare contractiile generalizate de tip Ćiri' c-Reich-Rus, Chatterjea, Berinde și Ćirić.

Aceste rezultate îmbogățesc alte dezvoltări originale din lucrări precum [8], [13], [16], [18], [27], [59], și [72]. Principalele articole pe care se bazează acest capitol sunt [40], [74] și [75]. Pentru alte direcții de cercetare a se vedea, e.g., [1], [2], [9], [15], [61], [67] și [68].

2.1 Contractii generalizate de tip Ćirić-Reich-Rus

În această secțiune a Capitolului 2, ecuația de punct fix studiată $f(x) = x$ satisface condițiile de contractie de tip Ćirić-Reich-Rus. În prima parte reamintim definiția unor astfel de operatori, apoi demonstrăm teorema locală a de punct fix și oferim și o aplicație a acestui rezultat. Principalele rezultate de existență și unicitate ale acestei secțiuni sunt Teorema 2.3 și Teorema 2.4.

Contractia univocă Ćirić-Reich-Rus a fost definită în mod independent de Ljubomir Ćirić, Simeon Reich și Ioan A. Rus în 1971.

Definiția 2.1 (a se vedea [18], [59] și [72]). Fie (X, d) un spațiu metric. Un operator $f: Y \subseteq X \rightarrow X$ este o contracție de tip Ćirić-Reich-Rus dacă există $\alpha, \beta \in (0, 1)$ astfel încât $\alpha + 2\beta < 1$ și pentru orice $x, y \in X$ avem

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta [d(x, f(x)) + d(y, f(y))]. \quad (2.1)$$

Teorema globală de punct fix dată de Ioan A. Rus în [72] afirmă următoarele.

Teorema 2.1 (I. A. Rus, a se vedea Teorema 1, [72]). Fie (X, d) un spațiu metric complet, și $f: X \rightarrow X$ o funcție pentru care există $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, $\alpha + 2\beta < 1$, astfel încât

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta [d(x, f(x)) + d(y, f(y))]$$

pentru orice $x, y \in X$. Atunci f are un punct fix unic.

Următoarea teoremă locală a fost demonstrată de Simeon Reich în [57], unde demonstrația se bazează pe Teorema 2.1.

Teorema 2.2 (Simeon Reich, a se vedea [57]). Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$, $r > 0$ și $f: B(x_0; r) \rightarrow X$ o contracție de tip Ćirić-Reich-Rus. Atunci, dacă

$$d(x_0, f(x_0)) < \frac{1 - \alpha - 2\beta}{1 + \beta} r, \quad (2.2)$$

obținem că $\text{Fix}(f) = \{x^*\}$ și șirul de aproximații succesive $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la x^* pentru orice x în $B(x_0; r)$. Mai mult, avem următoarea estimare a priori a erorii:

$$d(f^n(x), x^*) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x, f(x)),$$

unde $q := \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta} < 1$, pentru orice $x \in B(x_0; r)$.

Vom prezenta acum o altă teoremă locală de punct fix pentru contracții de tip Ćirić-Reich-Rus, care completează rezultatele globale Teorema 2.5 din [18], Teorema 3 din [59], Teorema 1 din [72], precum și teorema locală amintită mai sus, considerând o condiție mai slabă. Demonstrația se bazează pe metoda șirurilor iterative de aproximații succesive.

Teorema 2.3. Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$, $r > 0$ și $f: B(x_0; r) \rightarrow X$ o contracție de tip Ćirić-Reich-Rus. Dacă

$$d(x_0, f(x_0)) < \frac{1 - \alpha - 2\beta}{1 - \beta}r, \quad (2.3)$$

atunci șirul aproximațiilor succesive $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ care pornește din centrul bilei converge la punctul fix unic $x^* \in B(x_0; r)$ al contracției de tip Ćirić-Reich-Rus f .

Vom defini acum noțiunea de familie (α, β) - contractivă, pe care o vom folosi mai târziu în aplicația pentru teorema locală de punct fix.

Definiția 2.2. Fie (X, d) un spațiu metric și (J, ρ) un spațiu metric conex. Spunem că un șir $(K_\lambda)_{\lambda \in J} \subset CR(Y, X)$ este o familie (α, β) - contractivă dacă există $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in (0, 1]$ și $M > 0$ astfel încât

- (i) $d(K_\lambda(x_1), K_\lambda(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) + \beta [d(x_1, K_\lambda(x_1)) + d(x_2, K_\lambda(x_2))]$, pentru orice $x_1, x_2 \in Y$ și $\lambda \in J$;
- (ii) $d(K_\lambda(x), K_\mu(x)) \leq M [\rho(\lambda, \mu)]^p$, pentru orice $x \in Y$ și $\lambda, \mu \in J$.

Ca o aplicație pentru Teorema 2.3 oferim o teoremă de continuare, demonstrată mai jos.

Teorema 2.4. Fie (X, d) un spațiu metric complet și Y o submulțime încisă astfel încât $\text{int}Y \neq \emptyset$. Fie (J, ρ) un spațiu metric conex și $(K_\lambda)_{\lambda \in J}$ o familie (α, β) - contractivă din $CR_{\delta Y}(Y, X)$. Următoarele concluzii apar:

- (i) Dacă există un punct $\lambda_0^* \in J$, astfel încât ecuația $K_{\lambda_0^*}(x) = x$ are o soluție, atunci ecuația $K_\lambda(x) = x$ are o soluție unică pentru orice $\lambda \in J$;
- (ii) Dacă $K_\lambda(x_\lambda) = x_\lambda$ pentru orice $\lambda \in J$, atunci operatorul

$$\begin{aligned} j: J &\rightarrow \text{int}Y \\ j(\lambda) &= x_\lambda \end{aligned} \quad (2.4)$$

este continuu.

2.2 Contractții generalizate de tip Chatterjea

Această secțiune a Capitolului 2 se concentrează pe demonstrarea rezultatelor de existență și unicitate pentru ecuația de punct fix $f(x) = x$ care îndeplinește condiții de tip Chatterjea. Teorema 2.6, Teorema 2.7 și Teorema 2.8 sunt principalele rezultate care îmbunătățesc teoremele prezentate în [13].

Definiția contractțiilor univoce de tip Chatterjea a fost dată în 1972 de Santi Chatterjea, după cum urmează.

Definiția 2.3 (a se vedea [13]). Fie (X, d) un spațiu metric. Un operator $f: Y \subseteq X \rightarrow X$ este o contractie de tip Chatterjea dacă există $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$ avem

$$d(f(x), f(y)) \leq \gamma [d(x, f(y)) + d(y, f(x))]. \quad (2.5)$$

Billy Rhoades a demonstrat în [64] independența dintre condițiile clasice Banach și cele de tip Chatterjea. În [13], Chatterjea prezintă teorema globalde punct fix, așa cum este prezentată mai jos.

Teorema 2.5 (S. K. Chatterjea, a se vedea [13]). *Fie (X, d) un spațiu metric complet. Presupunem că $f: X \rightarrow X$ este o contractie de tip Chatterjea. Atunci f admite un punct fix unic în X .*

Următorul rezultat local îmbunătățește teorema de punct fix a lui Chatterjea descrisă mai sus, bazându-se totodată pe aceasta pentru demonstrație.

Teorema 2.6. *Fie (X, d) un spațiu metric complet, x_0 un punct din X , $r > 0$ și $f: B(x_0; r) \rightarrow X$ o contractie de tip Chatterjea. Dacă*

$$d(x_0, f(x_0)) < \frac{1 - 2\gamma}{1 + \gamma} r, \quad (2.6)$$

atunci $\text{Fix}(f) = \{x^\}$, iar șirul aproximațiilor succesive $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la x^* pentru orice punct $x \in B(x_0; r)$. În plus, obținem următoarea estimare a priori a erorii:*

$$d(f^n(x), x^*) \leq \frac{q^n}{1 - q} d(x, f(x)),$$

unde $q := \frac{\gamma}{1 - \gamma} < 1$, pentru orice $x \in B(x_0; r)$.

Mai departe, îmbunătățim Teorema 2.6 presupunând o condiție mai slabă, după cum urmează. Ca și înainte, utilizăm metoda de construire a unui șir iterativ de aproximații succesive pentru demonstrație.

Teorema 2.7. *Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$, $r > 0$ și $f: B(x_0; r) \rightarrow X$ o contracție de tip Chatterjea. Dacă*

$$d(x_0, f(x_0)) < \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma}r,$$

atunci șirul aproximațiilor succesive $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ care pornește din centrul bilei converge la unicul punct fix $x^ \in B(x_0; r)$ al contracției de tip Chatterjea f .*

We will now provide the definition of a γ - contractive family in order to set the context for our next result.

Vom oferi acum definiția unei familii γ - contractive pentru a stabili contextul următorului nostru rezultat.

Definiția 2.4. Fie (X, d) un spațiu metric și (J, ρ) un spațiu metric conex. Șirul $(K_\lambda)_{\lambda \in J} \subset CR(Y, X)$ este o familie γ - contractivă dacă există $\gamma \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $M > 0$ și $p \in (0, 1]$ astfel încât

- (i) $d(K_\lambda(x_1), K_\lambda(x_2)) \leq \gamma [d(x_1, K_\lambda(x_2)) + d(x_2, K_\lambda(x_1))]$, pentru oricare $x_1, x_2 \in Y$, $\lambda \in J$;
- (ii) $d(K_\lambda(x), K_\mu(x)) \leq M [\rho(\lambda, \mu)]^p$, pentru orice $x \in Y$ și $\lambda, \mu \in J$.

Ultimul rezultat al acestei secțiuni este teorema de continuare pentru contracții de tip Chatterjea.

Teorema 2.8. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și Y o submulțime închisă astfel încât $\text{int}Y \neq \emptyset$. Fie (J, ρ) un spațiu metric conex și $(K_\lambda)_{\lambda \in J}$ o familie γ - contractivă din $CR_{\delta Y}(Y, X)$. Următoarele concluzii apar:*

- (i) *Dacă există un punct $\lambda_0^* \in J$, astfel încât ecuația $K_{\lambda_0^*}(x) = x$ are soluție, atunci ecuația $K_\lambda(x) = x$ are o soluție unică pentru orice $\lambda \in J$;*
- (ii) *Dacă $K_\lambda(x_\lambda) = x_\lambda$, pentru orice $\lambda \in J$, atunci operatorul*

$$\begin{aligned} j: J &\rightarrow \text{int}Y \\ j(\lambda) &= x_\lambda \end{aligned} \tag{2.7}$$

este continuu.

2.3 Contractții generalizate de tip Berinde

Operatorul pe care îl studiem în această secțiune a fost definit în 2004 în articolul [8]. Vom demonstra un rezultat de existență pentru ecuația de punct fix $f(x) = x$ în raport cu o condiție de contracție de tip Berinde. Teorema 2.10, Teorema 2.11 și Teorema 2.12 sunt principalele rezultate cuprinse în această secțiune, care îmbunătățesc în continuare dezvoltările din [8], [10] și [11].

Reamintim acum definiția unei contractii de tip Berinde.

Definiția 2.5 (see [8]). Fie (X, d) un spațiu metric. Un operator $f: Y \subseteq X \rightarrow X$ este o contracție de tip Berinde dacă există $\alpha \in (0, 1)$ și $L \geq 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$ avem

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) + Ld(x, f(y)). \quad (2.8)$$

Un exemplu al unui astfel de operator a fost dat de V. Berinde în [8]. În același articol, următoarea teoremă de punct fix pentru contractii univoce de tip Berinde este stabilită.

Teorema 2.9 (V. Berinde, a se vedea Teorema 1, [8]). *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $f: X \rightarrow X$ o contracție de tip Berinde. Atunci*

- (1) $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$;
- (2) Pentru oricare $x_0 \in X$, șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de aproximații succesive converge la un $x^* \in \text{Fix}(f)$;
- (3) Următoarele estimări

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x_0, x_1), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} d(x_{n-1}, x_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.10)$$

au loc.

Vom demonstra acum prima teoremă locală pentru contractii univoce de tip Berinde. Aceasta se bazează pe teorema globală de punct fix amintită mai sus.

Teorema 2.10. Fie (X, d) un spațiu metric complet, x_0 în X , $r > 0$, $f: B(x_0; r) \rightarrow X$ o contracție de tip Berinde, și adițional presupunem

$$d(x_0, f(x_0)) < (1 - \alpha - L)r, \quad (2.11)$$

unde $\alpha \in (0, 1)$, $L > 0$ astfel încât $\alpha + L < 1$.

Atunci ecuația de punct fix pentru contracția de tip Berinde f are un punct fix unic x^* , iar șirul de aproximații succesive $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la x^* pentru orice x în $B(x_0; r)$. Mai mult, următoarea estimare a priori este obținută:

$$d(f^n(x), x^*) \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(x, f(x)),$$

pentru orice $x \in B(x_0; r)$.

Vom demonstra acum o altă teoremă locală de punct fix pentru contracții de tip Berinde. Acest rezultat îmbunătățește Teorema 2.9 din [8] fără a se baza pe aceasta și considerăm, de asemenea, o condiție mai slabă. Urmând abordarea anterioară, demonstrația este stabilită folosind metoda șirului iterativ aproximațiilor succesive.

Teorema 2.11. Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$, $r > 0$, și $f: B(x_0; r) \rightarrow X$ o contracție de tip Berinde. Dacă

$$d(x_0, f(x_0)) < (1 - \alpha)r,$$

atunci șirul aproximațiilor succesive $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ care pornește din centrul bilei converge la $x^* \in B(x_0; r)$ care este un punct fix al lui f .

În continuare, prezentăm definiția unei familii (α, L) - contractive.

Definiția 2.6. Fie (X, d) un spațiu metric și (J, ρ) un spațiu metric conex. Definim familia (α, L) - contractivă ca fiind un șir $(K_\lambda)_{\lambda \in J}$ din $CR(Y, X)$ astfel încât există $\alpha \in (0, 1)$, $M > 0$ și $p \in (0, 1]$ cu

- (i) $d(K_\lambda(x_1), K_\lambda(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) + Ld(x_1, K_\lambda(x_2))$, pentru orice $x_1, x_2 \in Y$, $\lambda \in J$;
- (ii) $d(K_\lambda(x), K_\mu(x)) \leq M [\rho(\lambda, \mu)]^p$, pentru oricare $x \in Y$ și $\lambda, \mu \in J$.

Pentru a încheia această secțiune, prezentăm o teoremă de continuare care servește ca aplicație la rezultatul local de mai sus.

Teorema 2.12. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și Y o submulțime închisă astfel încât $\text{int}Y \neq \emptyset$. Fie (J, ρ) un spațiu metric conex și $(K_\lambda)_{\lambda \in J}$ o familie (α, L) - contractivă din $CR_{\delta Y}(Y, X)$. Următoarele concluzii apar:*

- (i) *Dacă există un punct $\lambda_0^* \in J$, astfel încât ecuația $K_{\lambda_0^*}(x) = x$ are o soluție, atunci ecuația $K_\lambda(x) = x$ are o soluție unică pentru orice $\lambda \in J$;*
- (ii) *Dacă $K_\lambda(x_\lambda) = x_\lambda$, oricare ar fi $\lambda \in J$ și $\alpha + L < 1$, unde $\alpha \in (0, 1)$ și $L > 0$, atunci operatorul*

$$\begin{aligned} j: J &\rightarrow \text{int}Y \\ j(\lambda) &= x_\lambda \end{aligned} \tag{2.12}$$

este univoc și continuu.

2.4 Contractții generalizate de tip Ćirić

Cea de-a patra secțiune a Capitolului 2 studiază ecuația de punct fix $f(x) = x$, unde f este o contractie de tip Ćirić. Acest tip de generalizare a fost dezvoltat pentru prima dată în 1974 în cadrul lucrării [16]. Teorema 2.14 și Teorema 2.15 sunt principalele rezultate ale acestei secțiuni. Pentru proprietățile calitative ale unui astfel de operator, consultați [38].

Reamintim mai întâi definiția unei contractii de tip Ćirić.

Definiția 2.7 ([16, Ćirić Definition 1]). *Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci, $f: Y \subseteq X \rightarrow X$ este o contractie multivocă de tip Ćirić cu constanta q dacă există $q \in (0, 1)$, astfel încât pentru orice $x, y \in Y$ avem*

$$d(f(x), f(y)) \leq q \cdot \max \{d(x, y), d(x, f(x)), d(y, f(y)), d(x, f(y)), d(y, f(x))\}.$$

În [16], Lj. B. Ćirić oferă în plus un exemplu al unei astfel de contractii. În același articol [16], L. B. Ćirić a demonstrat următoarea teoremă.

Teorema 2.13 (Lj. B. Ćirić, a se vedea Teorema 1, [16]). *Fie f o contractie de tip Ćirić pe un spațiu metric X și fie X f -orbital completă. Atunci*

- (a) *f are un punct fix unic $x^* \in X$;*
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = x^*$;

$$(c) \ d(f^n(x), x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x, f(x)), \text{ pentru orice } x \in X.$$

Vom demonstra acum teorema locală de punct fix pentru contracții de tip Ćirić, îmbunătățind Teorema 1 din [16].

Teorema 2.14. *Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$ și $r > 0$. Considerăm $f: B(x_0; r) \rightarrow X$ ca fiind o contracție univocă de tip Ćirić cu constanta $q \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Suplimentar, presupunem*

$$d(x_0, f(x_0)) < \frac{1-2q}{1-q} r.$$

Atunci f are un punct fix unic $x^ \in B(x_0; r)$, $f^n(x_0) \in B(x_0; r)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar șirul iterativ al aproximațiilor succesive $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ pornind din x_0 converge la x^* atunci când $n \rightarrow \infty$.*

Acum, ne concentruăm pe stabilirea cadrului pentru o aplicație a rezultatului anterior și oferim următoarea definiție.

Definiția 2.8. Fie (X, d) un spațiu metric și (J, ρ) un spațiu metric conex. Vom numi $\{f_\lambda: \lambda \in J\} \subset CR(Y, X)$ familie de contracții de tip Ćirić cu constanta $q \in (0, 1)$ dacă următoarele condiții sunt satisfăcute: există $p \in (0, 1]$ și $M > 0$ astfel încât

(i) pentru orice $x_1, x_2 \in Y$ și $\lambda \in J$, avem

$$d(f_\lambda(x_1), f_\lambda(x_2)) \leq q \max \{d(x_1, x_2), d(x_1, f_\lambda(x_1)), d(x_2, f_\lambda(x_2)), d(x_1, f_\lambda(x_2)), d(x_2, f_\lambda(x_1))\};$$

(ii) pentru orice $x \in Y$ și $\lambda, \mu \in J$, avem

$$d(f_\lambda(x), f_\mu(x)) \leq M [\rho(\lambda, \mu)]^p.$$

Putem acum enunța teorema de continuare pentru contracțiile de tip Ćirić, după cum urmează.

Teorema 2.15. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și Y o submulțime închisă astfel încât $\text{int} Y \neq \emptyset$. Fie (J, ρ) un spațiu metric conex și $\{f_\lambda: \lambda \in J\}$ o familie de contracții univoce de tip Ćirić cu constanta $q \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ din $CR_{\partial Y}(Y, X)$. atunci următoarele concluzii apar:*

- (i) Dacă există un punct $\lambda_0^* \in J$, astfel încât ecuația $f_{\lambda_0^*}(x) = x$ are o soluție, atunci ecuația $f_\lambda(x) = x$ are o soluție unică pentru orice $\lambda \in J$;
- (ii) If $f_\lambda(x_\lambda) = x_\lambda$, oricare ar fi $\lambda \in J$, atunci operatorul

$$j: J \rightarrow \text{int}Y$$

$$j(\lambda) = x_\lambda$$

este continuu.

2.5 Teoreme locale de punct fix pentru alte contractii generalizate non-self

În ultima secțiune vom stabili existența unui punct fix folosind câteva idei din [19], [50], [51] și [60]. Principalele rezultate din această secțiune, Teorema 2.17, Teorema 2.18 și Teorema 2.19, extind rezultate cunoscute din literatura recentă.

Introducem mai întâi următorul rezultat demonstrat de Petrușel, Precup și Șerban în [50], care extinde teorema de punct fix a lui Conti din [19].

Teorema 2.16. *Fie (X, d) un spațiu metric, $Y \subset X$ o submulțime închisă și $f: Y \rightarrow X$ o funcție continuă. Presupunem că există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ de elemente din Y astfel încât:*

- (i) mulțimea $\{f(x_n) : n \geq 1\}$ este relativ compactă;
- (ii) $d(f(x_n), x_n) \rightarrow 0$ atunci când $n \rightarrow \infty$.

Atunci f are cel puțin un punct fix, iar fiecare punct limită al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ este un punct fix al lui f .

Stabilim un nou rezultat de punct fix pentru contractii de tip Berinde non-self, în felul următor.

Teorema 2.17. *Fie (X, d) un spațiu metric complet, $Y \subset X$ o submulțime închisă și $f: Y \rightarrow X$ o contractie continuă de tip Berinde. Dacă $\alpha + L < 1$ și există un șir $(x_n)_{n \geq 1}$ cu elemente din Y astfel încât*

$$d(f(x_n), x_n) \rightarrow 0 \text{ atunci când } n \rightarrow \infty,$$

atunci f are cel puțin un punct fix în Y și fiecare punct limită al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ este un punct fix al lui f . Mai mult, avem

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{1}{1 - \alpha - L} d(f(x_n), x_n).$$

Vom prezenta acum o teoremă de punct fix pentru contracții de tip Hardy-Rogers non-self.

Teorema 2.18. *Fie (X, d) un spațiu metric complet, $Y \subset X$ o submulțime închisă și $f: Y \rightarrow X$ o contracție continuă de tip Hardy-Rogers, i.e., există $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ astfel încât, pentru orice $x, y \in Y$, avem*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta [d(x, f(x)) + d(y, f(y))] + \gamma [d(x, f(y)) + d(y, f(x))].$$

Presupunem $\alpha + 2\gamma < 1$ și existența unui șir $(x_n)_{n \geq 1}$ de elemente din Y astfel încât

$$d(f(x_n), x_n) \rightarrow 0 \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

Atunci f are cel puțin un punct fix în Y și fiecare punct limită al șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ este un punct fix al lui f . Mai mult, obținem

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{1 + \beta + \gamma}{1 - \alpha - 2\gamma} d(f(x_n), x_n).$$

Conceptul de funcțională de deplasare maximală corespunzătoare unei aplicații $f: Y \rightarrow X$ a fost prezentat în [50]. Se referă la funcționala notată cu $E_f: P(Y) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ și definită prin

$$E_f(A) := \sup \{d(x, f(x)) \mid x \in A\}. \quad (2.13)$$

O altă teoremă de punct fix care ia în considerare cazul contracțiilor de tip Berinde non-self este dată mai jos.

Teorema 2.19. *Fie (X, d) un spațiu metric complet, $Y \subset X$ o submulțime nevidă și închisă și $f: Y \rightarrow X$ o funcție continuă. Presupunem că următoarele condiții sunt satisfăcute:*

- (i) f este o contracție Berinde type contraction with $\alpha + 2L < 1$;
- (ii) există un șir mărginit $(y_n)_{n \geq 1}$ în Y astfel încât $f^n(y_n)$ este definit pentru fiecare $n \geq 1$;

(iii) $E_f(Y) < \infty$.

Atunci:

(a) f are cel puțin un punct fix $x^* \in Y$;

(b) $f^{n-1}(y_n) \rightarrow x^*$ și $f^n(y_n) \rightarrow x^*$ atunci când $n \rightarrow \infty$;

(c) $d(f^{n-1}(y_n), x^*) \leq \frac{1}{1 - \alpha - L} \left(\frac{\alpha + L}{1 - L} \right)^{n-1} d(f(y_n), y_n)$.

Chapter 3

Teoreme locale de punct fix pentru contractii multivoce generalizate

Punctul central al celui de-al treilea capitol este prezentarea și demonstrarea unor rezultate de punct fix, cum ar fi teoreme de punct fix strict, teoreme locale combinate în unele cazuri cu o aplicație și unele proprietăți de stabilitate. Aceste rezultate au loc în contextul contractiilor multivoce generalizate, în special contractiile de tip Ćirić-Reich-Rus, Chatterjea, Berinde, Ćirić, φ -contractiile multivoce neliniare pe grafic și (φ, ψ) -contractiile multivoce de tip Feng-Liu.

Rezultatele demonstrate completează teoreme bine-cunoscute din literatura de specialitate, e.g., [3], [4], [14], [16], [17], [21–23], [27], [29–31], [33–35], [37], [45], [51], [70] și [71]. Alte extensii și generalizări pot fi găsite în [5], [12], [24], [26], [42], [55], [70] și [71].

3.1 Contractii generalizate de tip Ćirić-Reich-Rus

În prima secțiune a Capitolului 3 vom aborda operatorii care satisfac condiția Ćirić-Reich-Rus. Vom reaminti mai întâi definiția acestor operatori și teorema globală de punct fix. Principalele rezultate cuprinse în această secțiune sunt Teorema 3.2, Teorema 3.3 și Teorema 3.4, care pot fi găsite și în [54].

Definiția binecunoscutei contractii generalizate de tip Ćirić-Reich-Rus este dată mai jos.

Definiția 3.1. Fie (X, d) un spațiu metric. Operatorul $F: Y \subseteq X \rightarrow P_d(X)$ se numește (α, β) - contractie multivocă de tip Ćirić-Reich-Rus dacă există $\alpha, \beta \in (0, 1)$ astfel încât $\alpha + 2\beta < 1$ și pentru orice $x, y \in X$, avem

$$H(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y) + \beta [D(x, F(x)) + D(y, F(y))]. \quad (3.1)$$

Rezultatul global de punct fix pe care îl vom extinde a fost demonstrat de Simeon Reich în [57] și afirmă următoarele.

Teorema 3.1. Fie (X, d) un spațiu metric complet și $F: X \rightarrow P_d(X)$ un operator multivoc de tip Ćirić-Reich-Rus. Atunci $Fix(F) \neq \emptyset$.

Considerând domeniul operatorilor ca fiind o submulțime a spațiului metric complet, am obținut teorema descrisă mai jos.

Teorema 3.2. Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$ și $r > 0$. Fie $F: B(x_0; r) \rightarrow P_d(X)$ o (α, β) - contractie multivocă de tip Ćirić-Reich-Rus astfel încât

$$D(x_0, F(x_0)) < \frac{1 - \alpha - 2\beta}{1 - \beta} r. \quad (3.2)$$

Atunci, există un șir de iterații de tip Picard $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(x_0; r)$ care converge la un punct fix al lui F .

Un alt rezultat important care a fost studiat este teorema de punctu fix strict pentru operatori Ćirić-Reich-Rus.

Teorema 3.3. Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$ și $r > 0$. Fie $F: B(x_0; r) \rightarrow P_d(X)$ o (α, β) - contractie multivocă Ćirić-Reich-Rus. Presupunem $SFix(F) \neq \emptyset$. Atunci, $Fix(F) = SFix(F) = \{x^*\}$. Dacă, în plus, $D(x_0, F(x_0)) < \frac{1 - \alpha - 2\beta}{1 - \beta} r$, atunci există un șir de iterații de tip Picard $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(x_0; r)$ care converge la x^* .

Vom da acum o aplicație pentru Teorema 3.2. Mai exact, vom demonstra un rezultat de omotopie, așa cum au făcut Frigon și Granas în [23]. Începem această parte cu următoarea definiție a unei familii de (α, β) - contractii multivoce generalizate de tip Ćirić-Reich-Rus.

Definiția 3.2. Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci $(K_t)_{t \in [0,1]}$ este o familie de (α, β) - contractii multivoce generalizate de tip Ćirić-Reich-Rus dacă

$$(i) \quad H(K_t(x_1), K_t(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) + \beta [D(x_1, K_t(x_1)) + D(x_2, K_t(x_2))], \text{ oricare ar fi } x_1, x_2 \in X, t \in [0, 1].$$

$$(ii) \quad H(K_t(x), K_s(x)) \leq |\phi(t) - \phi(s)| \text{ pentru orice } t, s \in [0, 1] \text{ și } x \in X,$$

unde $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare și continuă.

Rezultatul de omotopie pentru contractiile multivoce de tip Ćirić-Reich-Rus este prezentat mai jos.

Teorema 3.4. Fie (X, d) un spațiu metric complet. Presupunem că S și T sunt omotopici în $\mathcal{K}_0^{CRR}(\bar{U}, X)$. Dacă S este esențial, atunci și T este esențial.

Observația 3.5. Dacă considerăm $\beta = 0$ în Teorema 3.4, atunci avem teorema transversalității topologice demonstrată de Frigon și Granas (a se vedea Teorema 4.3 în [23]).

3.2 Contractiile generalizate de tip Chatterjea

A doua secțiune tratează un alt tip de generalizare a contractiilor multivoce, în particular tipul Chatterjea. Vom reaminti definiția acestei generalizări specifice și binecunoscuta teoremă globală de punct fix. Vom continua apoi să enunțăm și să demonstrăm o teoremă locală de punct fix, un o teoremă de punct fix strict și un rezultat de omotopie care servește ca aplicație a teoremei locale.

Cele trei teoreme demonstrate constituie principalele rezultate ale secțiunii actuale, și anume Teorema 3.7, Teorema 3.8 și Teorema 3.9.

Definiția 3.3. Fie (X, d) un spațiu metric. Operatorul $F: Y \subseteq X \rightarrow P_{cl}(X)$ este o γ - contractie multivocă de tip Chatterjea dacă există $\gamma \in [0, \frac{1}{2})$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$, avem

$$H(F(x), F(y)) \leq \gamma [D(x, F(y)) + D(y, F(x))]. \quad (3.3)$$

Rezultatul care urmează este teorema globală de punct fix pentru tipul de contractie de mai sus, demonstrată de Santi Chatterjea.

Teorema 3.6. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $F: X \rightarrow P_d(X)$ un operator multivoc de tip Chatterjea. Atunci $Fix(F) \neq \emptyset$.*

Continuăm cu demonstrarea teoremei locale de punct fix pentru contracții multivoce generalizate de tip Chatterjea.

Teorema 3.7. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $F: B(x_0; r) \rightarrow P_d(x)$ o γ - contracție multivocă de tip Chatterjea. Presupunem*

$$D(x_0, F(x_0)) < \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma} r. \quad (3.4)$$

Atunci există un șir iterativ de tip Picard $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(x_0; r)$ care converge la un punct fix al lui F .

Următorul rezultat este o teoremă de punct fix strict privind contracțiile multivoce de tip Chatterjea.

Teorema 3.8. *Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$ și $r > 0$. Fie $F: B(x_0; r) \rightarrow P_d(X)$ o γ - contracție multivocă de tip Chatterjea. Presupunem $SFix(F) \neq \emptyset$. Atunci $Fix(F) = SFix(F) = \{x^*\}$. Dacă, în plus, $D(x_0, F(x_0)) < \frac{1 - 2\gamma}{1 - \gamma} r$, atunci există un șir iterativ de tip Picard $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(x_0; r)$ care converge la x^* .*

Următorul rezultat servește ca o aplicație la Teorema 3.7, bazat pe teorema dată de Frigon și Granas din [23]. Vom începe prin a defini noțiunea de familie de (γ) - contracții multivoce generalizate de tip Chatterjea.

Definiția 3.4. Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci $(K_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ este o familie de (γ) - contracții multivoce generalizate de tip Chatterjea dacă

$$(i) \quad H(K_t(x_1), K_t(x_2)) \leq \gamma [D(x_1, K_t(x_2)) + D(x_2, K_t(x_1))], \text{ pentru oricare } x_1, x_2 \in X \text{ și } t \in [0, 1].$$

$$(ii) \quad H(K_t(x), K_s(x)) \leq |\phi(t) - \phi(s)|, \text{ pentru orice } t, s \in [0, 1] \text{ și } x \in X,$$

unde funcția $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare și continuă.

Vom prezenta acum rezultatul de omotopie pentru contracții multivoce de tip Chatterjea.

Teorema 3.9. *Fie (X, d) un spațiu metric complet. Presupunem că S și T sunt doi operatori omotopici în $\mathcal{K}_0^C(\bar{U}, X)$. Dacă S este esential, atunci și T este esential.*

3.3 Contractții generalizate de tip Berinde

În a treia secțiune, vom aborda un alt tip de contractie multivocă, mai exact contractia de tip Berinde, inițial denumită (α, L) -contractie multivocă slabă. Principalele rezultate originale sunt Teorema 3.11, Teorema 3.12, Teorema 3.14 și Teorema 3.15.

Berinde și Berinde au dat definiția pentru contractia multivocă generalizată studiată în [7], reamintită mai jos.

Definiția 3.5. Fie (X, d) un spațiu metric. Un operator $F: Y \subseteq X \rightarrow P_{cl}(X)$ este o (α, L) - contractie multivocă de tip Berinde dacă există $\alpha \in (0, 1)$ și $L \geq 0$ astfel încât pentru orice $x, y \in X$, avem

$$H(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x, y) + LD(x, F(y)). \quad (3.5)$$

Următorul rezultat care dovedește existența unui punct fix pentru contractiile multivoce de tip Berinde într-un context general a fost introdus în [7].

Teorema 3.10. *Considerăm un spațiu metric complet (X, d) și o contractie multivocă de tip Berinde $F: X \rightarrow P_{cl,b}(X)$. Atunci $Fix(F) \neq \emptyset$.*

Vom extinde acum teorema anterioară de existență a punctului fix, considerând o condiție locală mai slabă.

Teorema 3.11. *Fie (X, d) un spațiu metric complet și $F: B(x_0; r) \rightarrow P_{cl}(X)$ o (α, L) - contractie multivocă de tip Berinde. Presupunem*

$$D(x_0, F(x_0)) < (1 - \alpha)r. \quad (3.6)$$

Atunci există un șir iterativ de tip Picard $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(x_0; r)$ care converge la un punct fix al lui F .

Pentru a stabili contextul următorului nostru rezultat, vom defini mai întâi conceptul de familie de (α, L) - contractii de tip Berinde.

Definiția 3.6. Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci $(K_\lambda)_{\lambda \in [0,1]}$ este o familie de (α, L) - contractii multivoce de tip Berinde dacă

- (i) $H(K_t(x_1), K_t(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2) + LD(x_1, K_t(x_2))$ pentru orice $x_1, x_2 \in X$ și $t \in [0, 1]$.

(ii) $H(K_t(x), K_s(x)) \leq |\phi(t) - \phi(s)|$, pentru orice $t, s \in [0, 1]$ și $x \in X$,

unde $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție strict crescătoare și continuă.

Să prezentăm acum rezultatul de omotopie pentru contractii multivoce de tip Berinde.

Teorema 3.12. *Fie (X, d) un spațiu metric complet. Presupunem că operatorii S and T sunt omotopici în $\mathcal{K}_0^B(\bar{U}, X)$. Dacă S este esențial, atunci și T este esențial.*

Observația 3.13. Dacă considerăm $L = 0$ în Teorema 3.12, atunci avem teorema transversalității topologice demonstrată de Frigon și Granas în [23].

Utilizând Teorema 3.12, rezultă o alternativă neliniară pentru contractiile multivoce de tip Berinde.

Teorema 3.14. *Fie $(E, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach și $F: \tilde{B}(0; r) \rightarrow P_{cl}(E)$ o (α, L) - contractie multivocă de tip Berinde. Atunci cel puțin una dintre următoarele afirmații are loc:*

1. există $x^* \in \tilde{B}(0; r)$ astfel încât $x^* \in \text{Fix}(F)$;
2. există $u \in E$ cu $\|u\| = r$ și $\lambda \in (0, 1)$ astfel încât $u \in \lambda F(u)$.

Demonstrăm acum următorul principiu Leray-Schauder ca o consecință a rezultatului anterior.

Teorema 3.15. *Fie $(E, \|\cdot\|)$ un spațiu Banach $F: E \rightarrow P_{cl}(E)$ un operator multivoc. Presupunem că pentru fiecare $r > 0$ restricția lui F la $\tilde{B}(0; r) \subset E$ este o (α, L) - contractie multivocă de tip Berinde. Atunci, cel puțin una dintre următoarele afirmații are loc:*

1. $\text{diam}(\mathcal{F}_F) = \infty$, where $\mathcal{F}_F := \{x \in E \mid x \in \lambda F(x) \text{ pentru un } \lambda \in [0, 1]\}$ oarecare;
2. $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$.

3.4 Contractiile generalizate de tip Ćirić

Secțiunea următoare abordează rezultate pentru contractii multivoce de tip Ćirić, introduse de Ljubomir B. Ćirić în [16]. Începem prin a reaminti definiția din articolul menționat a contractiilor multivoce de tip Ćirić, precum și teorema globală de punctu fix care a fost demonstrată de Mădălina Moga în [40]. Rezultatele centrale cuprinse în această secțiune sunt Teorema 3.16, Teorema 3.17 și Teorema 3.19.

Începem secțiunea prin a ne aminti definiția tipului de operator studiat, dată de Ćirić în [16].

Definiția 3.7 (see [16]). Fie (X, d) un spațiu metric. Funcția multivocă $F: Y \subseteq X \rightarrow P_{b,cl}(X)$ este un operator multivoc de tip Ćirić cu constanta k (numită quasi-contrație k -multivocă în [4]) dacă

$$H(F(x), F(y)) \leq k \max \{d(x, y), D(x, F(x)), D(y, F(y)), D(x, F(y)), D(y, F(x))\},$$

pentru oricare $x, y \in X$, unde $0 \leq k < 1$.

Teorema globală de punct fix pentru operatori multivoci de tip Ćirić a fost demonstrată de Mădălina Moga în [40]. Teorema următoare demonstrează existența unui punct fix folosind o condiție locală mai slabă.

Teorema 3.16. Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$ și $r > 0$. Considerăm operatorul multivoc $F: \tilde{B}(x_0; r) \rightarrow P_{cl}(X)$ astfel încât există $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ cu

$$H(F(x), F(y)) \leq k \max \{d(x, y), D(x, F(x)), D(y, F(y)), D(x, F(y)), D(y, F(x))\},$$

pentru orice $x, y \in \tilde{B}(x_0; r)$. Presupunem și

$$D(x_0, F(x_0)) < \frac{1 - 2k}{1 - k}r.$$

Atunci există un șir iterativ de tip Picard $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pornind din x_0 care converge la un punct fix al lui F .

Extinzând rezultatul demonstrat anterior, obținem următoarea teoremă.

Teorema 3.17. Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$ și $r > 0$. Considerăm operatorul multivoc $F: B(x_0; r) \rightarrow P_c(X)$ astfel încât există $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ cu

$$H(F(x), F(y)) \leq k \max \{d(x, y), D(x, F(x)), D(y, F(y)), D(x, F(y)), D(y, F(x))\}, \text{ pentru orice } x, y \in B(x_0; r).$$

Presupunem și

$$D(x_0, F(x_0)) < \frac{1 - 2k}{1 - k} r.$$

Atunci există un șir iterativ de tip Picard $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pornind din x_0 care converge la un punct fix al lui F .

Observația 3.18. Pentru operatori Ćirić cu constanta $k \in (0, 1)$ rămâne o problemă deschisă obținerea unei teoreme locale de punct fix și rezultatele de stabilitate asociate, prin utilizarea metodei de mai sus. Pentru o altă abordare și un rezultat general de existență, a se consulta [28].

Let us now present the notion of family of multi-valued Ćirić type contractions.

Definiția 3.8. Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci familia $(K_t)_{t \in [0, 1]}$ (unde $K_t: Y \subseteq X \rightarrow P(X)$, pentru orice $t \in [0, 1]$) este o familie de operatori multivoci de tip Ćirić cu constanta k dacă $k \in (0, 1)$ și următoarele condiții sunt satisfăcute:

(i) pentru orice $x_1, x_2 \in Y$ și $t \in [0, 1]$, avem

$$H(K_t(x_1), K_t(x_2)) \leq k \max \{d(x_1, x_2), D(x_1, K_t(x_1)), D(x_2, K_t(x_2)), D(x_1, K_t(x_2)), D(x_2, K_t(x_1))\};$$

(ii) pentru orice $t, s \in [0, 1]$ și $x \in Y$, avem

$$H(K_t(x), K_s(x)) \leq |\phi(t) - \phi(s)|,$$

unde $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare și continuă.

Ca aplicație a anteriorului rezultat local pentru operatori multivoci de tip Ćirić, ne vom strădui să demonstrăm un principiu de omotopie pentru acest tip de contracții. Acesta reprezintă o generalizare a bine cunoscutului rezultat demonstrat de Frigon și Granas în [23].

Teorema 3.19. *Fie (X, d) un spațiu metric coplet, $U \subset X$ o mulțime deschisă și $K: [0, 1] \times \bar{U} \rightarrow P_{cl}(X)$ un operator multivoc cu grafic închis. Notăm $K_t := F(t, \cdot)$, pentru $t \in [0, 1]$. Presupunem:*

(i) $(K_t)_{t \in [0, 1]}$ este o familie de operatori multivoci de tip Ćirić cu constanta $k \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$;

(ii) $x \notin K_t(x)$, pentru orice $(t, x) \in [0, 1] \times \partial U$.

Atunci K_0 are un punct fix dacă K_1 are un punct fix.

3.5 φ -contractții multivoce neliniare pe grafic

În a cincea secțiune, vom opera cu o altă generalizare a contractțiilor Nadler, φ -contractția multivocă neliniară pe grafic. Vom demonstra câteva rezultate noi de existență pentru operatorii care îndeplinesc o astfel de condiție neliniară, extinzând rezultatele din [46]. Rezultatele centrale acoperite pe parcursul acestei secțiuni sunt Teorema 3.21, Teorema 3.23, și Teorema 3.24.

În cele ce urmează, (X, d) este un spațiu metric generalizat (în sensul că metrica d , care satisface toate axiomele unei metrice, poate lua și valoarea $+\infty$). Se știe că H este o metrică generalizată (în sensul că $H(A, B) \in \mathbb{R}_+ \cup +\infty$) pe $P_{cl}(X)$).

Definiția 3.9. O funcție $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ se numește funcție de comparație dacă satisface următoarele:

(i) φ este crescătoare;

(ii) $(\varphi^n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge la 0 atunci când $n \rightarrow \infty$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}_+$.

Atunci când condiția (ii) este înlocuită de:

(iii) pentru orice $t > 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t) < \infty, \quad (3.7)$$

atunci φ se numește funcție de comparație tare.

Să reamintim acum două proprietăți importante ale funcțiilor de comparație, respectiv ale funcțiilor de comparație tare.

Lema 3.1 (a se vede a[69]). *Dacă $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție de comparație, atunci $\varphi(t) < t$, pentru orice $t > 0$, $\varphi(0) = 0$ și φ este continuă în 0.*

Lema 3.2 (a se vedea [69]). *Dacă $\varphi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ este o funcție de comparație tare, atunci au loc următoarele:*

(i) φ este o funcție de comparație;

(ii) funcția $\zeta: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, definită ca

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(t),$$

este crescătoare și continuă în 0.

Magdaș a oferit în [36] câteva exemple de funcționale împreună cu proprietățile lor. Să reamintim definiția operatorului multivoc considerat.

Definiția 3.10. Fie (X, d) un spațiu metric generalizat. Atunci un operator $F: Y \subseteq X \rightarrow P(X)$ este numit φ -contractie multivocă neliniară pe grafic dacă există o funcție de comparație tare $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât

$$H(F(x), F(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \text{ pentru orice } (x, y) \in \text{Graph}(F). \quad (3.8)$$

Să considerăm acum următoarele două definiții.

Definiția 3.11 (a se vedea [70], [71]). Fie (X, d) un spațiu metric. Atunci operatorul $F: X \rightarrow P(X)$ este numit operator multivoc slab Picard dacă pentru orice $x \in X$ și orice $y \in F(x)$ există un șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ în X astfel încât

(i) $x_0 = x$, $x_1 = y$;

(ii) $x_{n+1} \in F(x_n)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$;

(iii) șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, iar limita sa este un punct fix pentru F .

Definiția 3.12 (a se vedea Petrușel, [44]). Fie (X, d) un spațiu metric și $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc slab Picard. Definim operatorul multivoc $F^\infty: \text{Graph}(F) \rightarrow P(\text{Fix}(F))$ prin $F^\infty(x, y) = \{z \in \text{Fix}(F) \mid \text{există un șir de iterate Picard ale lui } F \text{ pornind din } (x, y) \text{ care converge la } z\}$.

Un alt concept demn de reamintit este dat mai jos.

Definiția 3.13 (a se vedea Petrușel, [44]). Fie (X, d) un spațiu metric și $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc slab Picard. Atunci F este un operator φ -multivoc slab Picard dacă $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ este crescătoare, continuă în 0 cu $\varphi(0) = 0$ și există o selecție f^∞ a lui F^∞ astfel încât

$$d(x, f^\infty(x, y)) \leq \varphi(d(x, y)), \text{ pentru orice } (x, y) \in \text{Graph}(F).$$

Observația 3.20. Constatăm că dacă $F: X \rightarrow P_{cl}(X)$ este o α -contractie, atunci F este un operator φ -MWP cu $\varphi(t) = \frac{1}{1-\alpha}t$.

Vom vizita acum o leamnă auxiliară, care se va dovedi utilă în demonstrarea rezultatelor noastre principale.

Lema 3.3 (a se vedea S. B. Nadler Jr., [41]). Fie (X, d) un spațiu metric generalizat, $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc și $q > 1$. Atunci pentru orice $x_0, x_1 \in X$ și $z_1 \in F(x_0)$ există $z_2 \in F(x_1)$ astfel încât $d(z_1, z_2) \leq qH(F(x_0), F(x_1))$.

O generalizare a rezultatului lui Wegrzyk din [77], dar și un caz particular, considerând spații metrice clasice, pot fi găsite în [39]. Demonstrațiile aparțin Mădălinei Moga. În același articol avem și câteva rezultate calitative în ceea ce privește mulțimea de puncte fixe. Să reamintim acum definiția stabilității Ulam-Hyers pentru o incluziune de punct fix (a se vedea, e.g., [43]).

Definiția 3.14. Fie (X, d) un spațiu metric și $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc. Atunci problema de punct fix

$$x \in F(x), x \in X, \tag{3.9}$$

este generalizat Ulam-Hyers stabilă dacă există o funcție $\gamma: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ crescătoare cu $\gamma(0) = 0$ și γ este continuă în 0, astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice ε -soluție z a incluziunii de punct fix (3.9) (i.e., $D(z, F(z)) \leq \varepsilon$) există $x^* \in \text{Fix}(F)$ în așa fel încât

$$d(z, x^*) \leq \gamma(\varepsilon).$$

De asemenea, ne amintim alte două proprietăți de stabilitate, după cum urmează.

Definiția 3.15. Fie (X, d) un spațiu metric și $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc. Presupunem că $Fix(F) \neq \emptyset$ și că există $r: X \rightarrow Fix(F)$ o retracție de mulțimi. Atunci incluziunea de punct fix $x \in F(x)$ este bine pusă dacă pentru orice $x^* \in Fix(F)$ și pentru orice șir $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset r^{-1}(x^*)$ cu

$$D(u_n, F(u_n)) \rightarrow 0 \text{ atunci când } n \rightarrow \infty,$$

avem că

$$u_n \rightarrow x^* \text{ atunci când } n \rightarrow \infty.$$

Definiția 3.16. Fie (X, d) un spațiu metric și $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc. Presupunem că $Fix(F) \neq \emptyset$ și că există $r: X \rightarrow Fix(F)$ o retracție de mulțimi. Atunci incluziunea de punct fix $x \in F(x)$ are proprietatea de stabilitate Ostrowski dacă pentru orice șir $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset r^{-1}(x^*)$ astfel încât

$$D(v_{n+1}, F(v_n)) \rightarrow 0 \text{ atunci când } n \rightarrow \infty,$$

avem că

$$v_n \rightarrow x^* \text{ atunci când } n \rightarrow \infty.$$

Continuăm cu un rezultat local de punct fix pentru φ - contracții multivoce neliniare pe grafic. Această teoremă extinde la cazul multivoc unele rezultate introduse în [14].

Teorema 3.21. Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$ și $r > 0$. Fie $F: \tilde{B}(x_0; r) \rightarrow P(X)$ un operator multivoc care satisface:

- (i) $Graph(F)$ este închis;
- (ii) pentru orice $(x, y) \in Graph(F)$ există $z \in F(y)$ astfel încât $d(y, z) \leq \varphi(d(x, y))$;
- (iii) există $x_1 \in F(x_0)$ astfel încât $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(d(x_0, x_1)) \leq r$.

Atunci obținem următoarele concluzii:

- (a) $Fix(F) \neq \emptyset$;
- (b) există în $\tilde{B}(x_0; r)$ un șir de iterate Picard $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pentru F pornind de la perechea (x_0, x_1) care converge la un punct fix al lui F .

Observația 3.22. Constatăm că punctul (ii) din teorema de mai sus implică

$$\rho(F(x), F(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \text{ for every } (x, y) \in \text{Graph}(F).$$

Pentru supoziția de mai sus se poate consulta și [76].

O altă teoremă similară cu cea introdusă mai sus urmează să fie specificată.

Teorema 3.23. *Fie (X, d) un spațiu metric complet, $x_0 \in X$ și $R > 0$. Fie $F: B(x_0; R) \rightarrow P(X)$ un operator multivoc care satisface următoarele:*

- (i) *Graph(F) este închis;*
- (ii) *pentru orice $(x, y) \in \text{Graph}(F)$ există $z \in F(y)$ astfel încât $d(y, z) \leq \varphi(d(x, y))$;*
- (iii) *există $x_1 \in F(x_0)$ astfel încât $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(d(x_0, x_1)) < R$.*

Atunci $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$ și în bila $B(x_0; R)$ există un șir de iterate Picard $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pentru F pornind din (x_0, x_1) care converge la un punct fix al lui F .

Când considerăm cazul unei mulțimi nevide înzestrate cu două metrici, apare teorema de tip Maia pentru φ -contractii multivoce neliniare pe grafic.

Teorema 3.24. *Fie X o mulțime nevidă, d și ρ două metrici pe X . Fie $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc. Presupunem:*

- (i) *(X, d) este un spațiu metric generalizat complet;*
- (ii) *(X, ρ) este un spațiu metric generalizat;*
- (iii) *există $R > 0$ astfel încât $d(x, y) \leq R\rho(x, y)$, pentru orice $x, y \in X$;*
- (iv) *Graph(F) este închis relativ la metrica d ;*
- (v) *F este o φ -contractie multivocă neliniară pe grafic relativ la metrica ρ , i.e., există o funcție de comparație tare $\varphi: [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ astfel încât*

$$H_\rho(F(x), F(y)) \leq \varphi(\rho(x, y)), \text{ pentru orice } (x, y) \in \text{Graph}(F). \quad (3.10)$$

Atunci pentru fiecare $x_0 \in X$ una din următoarele afirmații este îndeplinită:

- (a) fiecare șir de iterate Picard $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pentru operatorul F pornind din x_0 are proprietatea $d(x_n, x_{n+1}) = \infty$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$;
- (b) există un șir de iterate Picard $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pentru operatorul F pornind din x_0 care converge la un punct fix al lui F .

Pentru rezultatul de mai sus, apare următoarea consecință.

Corolar 3.25. Fie (X, d) un spațiu metric complet și (X, ρ) un spațiu metric. Fie $F: X \rightarrow P(X)$ o φ - contracție multivocă neliniară pe grafic. Presupunem că $\text{Graph}(F)$ este închis în raport cu metrca d și există $R > 0$ cu $d(x, y) \leq R\rho(x, y)$, oricare ar fi $x, y \in X$. Atunci următoarele concluzii au loc:

- (a) există $x^* \in X$ astfel încât $x^* \in \text{Fix}(F^n)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$;
- (b) pentru orice $(x, y) \in \text{Graph}(F)$ există un șir de iterate Picard $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pentru F pornind din (x, y) care converge la un punct fix al lui F ;
- (c) F este un operator ψ - multivoc slab Picard, i.e., există o selecție $f^\infty: \text{Graph}(F) \rightarrow \text{Fix}(F)$ din F^∞ astfel încât

$$d(x, f^\infty(x, y)) \leq \psi(\rho(x, y)), \text{ pentru orice } (x, y) \in \text{Graph}(F),$$

unde

$$\psi(t) := t + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi^k(st), \text{ cu } s > 1 \text{ ales arbitrar.} \quad (3.11)$$

3.6 (φ, ψ) -contractiile de tip Feng-Liu

The final section of Chapter 3 approaches the case of multi-valued (φ, ψ) - contractions of Feng-Liu type and construct two fixed point theorems and prove various stability results. We begin the section by looking back on the definition of the aforementioned type of multi-valued contractions. The key results found in this section are Teorema 3.26, Teorema 3.27, and Teorema 3.29.

Secțiunea finală a Capitolului 3 abordează cazul (φ, ψ) - contractiilor multivoce de tip Feng-Liu, construiește două teoreme de punct fix și demonstrează diverse rezultate de stabilitate. Începem secțiunea prin a reveni

asupra definiției tipului menționat anterior de contracții multivoce. Rezultatele cheie care se găsesc în această secțiune sunt Teorema 3.26, Teorema 3.27 și Teorema 3.29.

Să începem prin a evoca definiția tipului considerat de operatori. Aceasta a fost introdusă în [48].

Definiția 3.17 (a se vede Definiția 2.4, [48]). Fie (X, d) un spațiu metric, $F: Y \subseteq X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc și $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție crescătoare astfel încât $\psi(t) > t$ pentru orice $t > 0$ și $\psi(0) = 0$. Pentru fiecare $x \in X$ considerăm mulțimea

$$I_\psi^x(d) := \{y \in F(x) : d(x, y) \leq \psi(D_d(x, F(x)))\}. \quad (3.12)$$

Operatorul F se numește (φ, ψ) - contracție multivocă neliniară de tip Feng-Liu type relativ la metrica d dacă există o funcție crescătoare $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ cu $\varphi(t) < t$ pentru fiecare $t \in (0, \infty)$ și $\varphi(0) = 0$, astfel încât

- (a) $\psi \circ \varphi$ este o funcție de comparație tare;
- (b) pentru orice $x \in X$ există $y \in I_\psi^x(d)$ astfel încât

$$D_d(y, F(y)) \leq \varphi(d(x, y)). \quad (3.13)$$

Prima teoremă nouă introdusă în secțiunea curentă este un rezultat de existența a punctului fix care extinde Teorema 2.5 din [48] la cazul unui spațiu înzestrat cu două metrici.

Teorema 3.26. *Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrici d și ρ și fie $F: X \rightarrow P_d(X)$. Presupunem:*

- (i) (X, d) este un spațiu metric complet;
- (ii) există $R > 0$ astfel încât $d(x, y) \leq R\rho(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$;
- (iii) $\text{Graph}(F)$ este închis în raport cu metrica ρ ;
- (iv) F este o (φ, ψ) - contracție multivocă de tip Feng-Liu în raport cu metrica ρ .

Atunci $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$ și pentru fiecare $x_0 \in X$ există un șir de iterate Picard $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent la un punct $x^* \in \text{Fix}(F)$. Mai mult, are loc următoarea condiție de retrație-deplasare:

$$d(x_0, x^*(x_0)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\psi \circ \varphi)^k(t_0), \quad (3.14)$$

unde $t_0 := d(x_0, x_1)$, $x_1 \in I_{\psi}^{x_0}(\rho)$.

Un caz particular pentru Teorema 3.26 este prezentat mai jos.

Teorema 3.27. *Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrici d și ρ . Fie $F: X \rightarrow P_{cl}(X)$ și $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție crescătoare astfel încât $\psi(t) > t$ pentru orice $t > 0$ și $\psi(0) = 0$. Presupunem:*

- (*i) (X, d) este un spațiu metric complet;
- (*ii) există $R > 0$ astfel încât $d(x, y) \leq R\rho(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$;
- (*iii) $\text{Graph}(F)$ este închis în raport cu metrica ρ ;
- (*iv) există o funcție crescătoare $\varphi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ cu $\varphi(t) < t$ pentru orice $t \in (0, \infty)$ și $\varphi(0) = 0$, astfel încât $\psi \circ \varphi$ este o funcție de comparație tare și următoarea relație are loc

$$D_{\rho}(y, F(y)) \leq \varphi(\rho(x, y)), \text{ pentru orice } (x, y) \in \text{Graph}(F).$$

Atunci obținem $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$ și pentru orice $x_0 \in X$ există un șir de iterate Picard $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent la un punct $x^* \in \text{Fix}(F)$. Mai mult, are loc următoarea condiție de retrație-deplasare:

$$d(x_0, x^*(x_0)) \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\psi \circ \varphi)^k(t_0), \quad (3.15)$$

unde $t_0 := d(x_0, x_1)$, $x_1 \in I_{\psi}^{x_0}(\rho)$.

Continuăm prin a considera extensiile unor proprietăți de stabilitate ale incluziunii de punct fix în contextul (φ, ψ) - contractiilor multivoce neliniare de tip Feng-Liu într-un spațiu echipat cu două metrici. Concepte similare de stabilitate pot fi găsite în [32] și [49]. Să parcurgem mai întâi stabilitatea Ulam-Hyers, a se vedea de exemplu, [43].

Definiția 3.18. Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrice d și ρ . Considerăm un operator multivoc $F: X \rightarrow P(X)$. Incluziunea multivocă de punct fix $x \in F(x), x \in X$ are proprietatea de stabilitate (d, ρ) -Ulam-Hyers generalizată dacă există o funcție crescătoare $\mu: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ cu $\mu(0) = 0$ și μ continuă în 0, astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice ε -punct fix $z \in X$ pentru F (în sensul că $D_\rho(z, F(z)) < \varepsilon$), există $x^* \in Fix(F)$ pentru care

$$d(z, x^*) \leq \mu(\varepsilon).$$

De asemenea, reamintim proprietatea de bine-punere a incluziunii de punct fix. Proprietățile corespunzătoare cazului univoc pot fi găsite în [25], [63] și [62].

Definiția 3.19. Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrice d și ρ . Fie $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc astfel încât $Fix(F) \neq \emptyset$ și $r: X \rightarrow Fix(F)$ o retracție de mulțimi. Atunci incluziunea de punct fix $x \in F(x), x \in X$ este (d, ρ) -bine-pusă generalizat în sensul dat de Reich și Zaslavski dacă pentru orice $x^* \in Fix(F)$ și orice șir $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset r^{-1}(x^*)$ cu

$$D_\rho(y_n, F(y_n)) \longrightarrow 0 \text{ atunci când } n \longrightarrow \infty,$$

avem

$$y_n \xrightarrow{d} x^* \text{ atunci când } n \longrightarrow \infty.$$

Continuăm prin a ne aminti proprietatea de stabilitate a lui Ostrowski, a se vedea [46] și [52].

Definiția 3.20. Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrice d și ρ . Fie $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc astfel încât $Fix(F) \neq \emptyset$ și $r: X \rightarrow Fix(F)$ o retracție de mulțimi. Atunci operatorul multivoc posedă proprietatea de stabilitate (d, ρ) -Ostrowski dacă pentru orice $x^* \in Fix(F)$ și pentru orice șir $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset r^{-1}(x^*)$ cu

$$D_\rho(z_{n+1}, F(z_n)) \longrightarrow 0 \text{ atunci când } n \longrightarrow \infty,$$

avem

$$z_n \xrightarrow{d} x^* \text{ atunci când } n \longrightarrow \infty.$$

Ultima definiție pe care o vom reaminti aici este proprietatea de dependență de date.

Definiția 3.21. Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrici d și ρ . Considerăm un operator multivoc $F: X \rightarrow P(X)$. Incluziunea de punct fix $x \in F(x), x \in X$ are proprietatea de dependență de date generalizată în raport cu perechea de metrici (d, ρ) dacă pentru orice operator multivoc $G: X \rightarrow P(X)$ cu următoarele proprietăți:

- (i) $Fix(G) \neq \emptyset$;
- (ii) există $\eta > 0$ cu $H_\rho(F(x), G(x)) \leq \eta$, pentru orice $x \in X$,

există o funcție crescătoare $\mu: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ cu $\mu(0) = 0$ și μ continuă în 0, astfel încât pentru orice $y^* \in Fix(G)$ există $x^* \in Fix(F)$ cu

$$d(x, y) \leq \mu(\eta).$$

În demonstrațiile următoarelor noastre rezultate, condiția generalizată de retracție-deplasare tare de mai jos se va dovedi utilă.

Definiția 3.22. Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrici d și ρ . Fie $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc cu $Fix(F) \neq \emptyset$. Spunem că F satisface condiția generalizată de retracție-deplasare tare dacă există o funcție crescătoare $\mu: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ cu $\mu(0) = 0$ și μ este continuă în 0 și retracția de mulțimi $r: X \rightarrow Fix(F)$ astfel încât

$$d(x, r(x)) \leq \mu(D_\rho(x, F(x))), \text{ pentru orice } x \in X. \quad (3.16)$$

Vom reproduce acum un rezultat abstract, care a fost demonstrat în [49].

Teorema 3.28. Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrici d și ρ . Fie $F: X \rightarrow P(X)$ un operator multivoc cu $Fix(F) \neq \emptyset$. Presupunem că F satisface condiția generalizată de retracție-deplasare tare. Atunci incluziunea de punct fix $x \in F(x), x \in X$ are proprietatea de stabilitate (d, ρ) -Ulam-Hyers generalizată, este (d, ρ) -bine-pusă generalizat în sensul Reich-Zaslavski și satisface proprietatea de dependență de date generalizată în raport cu perechea de metrici (d, ρ) .

Următorul rezultat demonstrează condiția generalizată de retracție-deplasare tare pentru (φ, ψ) -contracții multivoce neliniare de tip Feng-Liu pe un spațiu înzestrat cu două metrici.

Teorema 3.29. Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrici d și ρ și $F: X \rightarrow P_{cl}(X)$. Presupunem:

- (i) (X, d) este un spațiu metric complet;
- (ii) există $R > 0$ cu $d(x, y) \leq R\rho(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$;
- (iii) $\text{Graph}(F)$ este închis în raport cu metrica ρ ;
- (iv) F este o (φ, ψ) - contracție multivocă de tip Feng-Liu în raport cu metrica ρ .

Atunci, F satisface condiția generalizată de retracție-deplasare tare.

Finally, we fuse Teorema 3.28 and Teorema 3.29 into the subsequent result.

În final, combinăm Teorema 3.28 și Teorema 3.29 în rezultatul următor.

Teorema 3.30. *Fie X o mulțime nevidă înzestrată cu două metrici d și ρ și $F: X \rightarrow P_{cl}(X)$. Presupunem:*

- (i) (X, d) este un spațiu metric complet;
- (ii) există $R > 0$ cu $d(x, y) \leq R\rho(x, y)$ pentru orice $x, y \in X$;
- (iii) $\text{Graph}(F)$ este închis în raport cu metrica ρ ;
- (iv) F este o (φ, ψ) - contracție multivocă de tip Feng-Liu în raport cu metrica ρ .

Atunci incluziunea de punct fix $x \in F(x), x \in X$ are proprietatea de stabilitate (d, ρ) -Ulam-Hyers generalizată, este (d, ρ) -bine-pusă generalizat în sensul Reich-Zaslavski și satisface proprietatea de dependență de date generalizată în raport cu perechea de metrici (d, ρ) .

Concluzii și direcții de cercetare

După cum am văzut în această teză, am dezvoltat mai multe rezultate de punct fix pentru diferite generalizări ale contractiilor clasice univoce și multivoce. În plus, am prezentat aplicații pentru majoritatea teoremelor demonstrate, precum și proprietăți de stabilitate ale problemei punctului fix. Aceste rezultate îmbogățesc literatura actuală și oferă, de asemenea, mijloace pentru cercetări ulterioare.

În ceea ce privește cercetările viitoare, rezultatele prezentate în teză oferă noi direcții de studiu. O direcție ar putea fi obținerea altor rezultate locale de punct fix, precum și a rezultatelor de omotopie sau continuare, prin verificarea ipotezelor considerate și urmând aceeași metodă de demonstrație pentru alte tipuri de generalizări ale contractiilor, cum ar fi Sehgal, Zamfirescu, Singh și alții. Articolul lui Rhoades, [64] din 1977, oferă implicații demonstrate pentru mai multe tipuri de contractii generalizate.

O a doua traiectorie de cercetare este de a încerca să opereze în contextul spațiilor metrice generalizate. S-ar putea verifica dacă metodele de demonstrație utilizate în capitolele de mai sus pot fi adaptate pentru a obține teoreme similare de punct fix. O abordare de cercetare mai practică este investigarea unor aplicații la incluziuni diferențiale și integrale.

În concluzie, rezultatele dovedite în această teză reprezintă progrese în teoria punctului fix, axată pe operatori non-self. Acestea reprezintă îmbunătățiri ale literaturii teoretice, dar contribuie și la cazuri de utilizare mai practice.

Bibliografie

- [1] Ravi P. Agarwal and Donal O'Regan. "Fixed point theory for generalized contractions on spaces with two metrics". In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 248.2 (2000), pp. 402–414. DOI: [10.1006/jmaa.2000.6914](https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.6914).
- [2] Ravi P. Agarwal et al. *Fixed Point Theory in Metric Type Spaces*. Cham: Springer, 2015. DOI: [10.1007/978-3-319-24082-4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-24082-4).
- [3] Cristian D. Alecsa and Adrian Petruşel. "Some variants of Ćirić's multi-valued contraction principle". In: *Annals of West University of Timisoara - Mathematics and Computer Science* LVII.1 (2019), pp. 23–42. DOI: [10.2478/awutm-2019-0004](https://doi.org/10.2478/awutm-2019-0004).
- [4] Alireza Amini-Harandi. "Fixed point theory for set-valued quasi-contraction maps in metric spaces". In: *Applied Mathematics Letters* 24 (2011), pp. 1791–1794. DOI: [10.1016/j.aml.2011.04.033](https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.04.033).
- [5] Jan Andres and Lech Górniewicz. "On the Banach contraction principle for multi-valued mappings". In: *Approximation, Optimization and Mathematical Economics*. Ed. by Michel Lassonde. Heidelberg: Physica, 2001, pp. 1–23.
- [6] Jean Pierre Aubin and Hélène Frankowska. *Set-Valued Analysis*. Springer, 1990.
- [7] Mădălina Berinde and Vasile Berinde. "On a general class of multi-valued weakly Picard mappings". In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 326.2 (2007), pp. 772–782. DOI: [10.1016/j.jmaa.2006.03.016](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.03.016).
- [8] Vasile Berinde. "Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration". In: *Nonlinear Analysis Forum* (2004), pp. 43–54.

- [9] Vasile Berinde, Ștefan Mărușter, and Ioan A. Rus. “Saturated contraction principles for non self operators, generalizations and applications”. In: *Filomat* 31.11 (2017), pp. 3391–3406.
- [10] Vasile Berinde and Mădălina Păcurar. “Fixed point theorems for non-self single-valued almost contractions”. In: *Fixed Point Theory* 14.2 (2013), pp. 301–311. DOI: [10.2298/FIL1711391B](https://doi.org/10.2298/FIL1711391B).
- [11] Vasile Berinde and Mădălina Păcurar. “Iterative approximation of fixed points of single-valued almost contractions”. In: *Fixed Point Theory and Graph Theory*. Ed. by Mohammad R. Alfuraidan and Qamrul Hasan Ansari. Amsterdam: Elsevier/Academic Press, 2016, pp. 29–97. DOI: [10.1007/s11784-020-0769-9](https://doi.org/10.1007/s11784-020-0769-9).
- [12] Franco S. de Blasi et al. “Generic existence and approximation of fixed points for nonexpansive set-valued maps”. In: *Set-Valued and Variational Analysis* 17 (2009), pp. 97–112.
- [13] Santi K. Chatterjea. “Fixed-point theorems”. In: *Comptes Rendus de L’Academie Bulgare des Sciences* 25.6 (1972), pp. 727–730.
- [14] Cristian Chifu, Adrian Petrușel, and Gabriela Petrușel. “Fixed point results for non-self nonlinear graphic contractions in complete metric spaces with applications”. In: *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 22.4 (2020), pp. 97–112.
- [15] Adela Chiș-Novac, Radu Precup, and Ioan A. Rus. “Data dependence of fixed points for non-self generalized contractions”. In: *Fixed Point Theory* 10.1 (2009), pp. 73–87.
- [16] Ljubomir B. Ćirić. “A generalization of Banach’s contraction principle”. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 45 (1974), pp. 267–273. DOI: [10.2307/2040075](https://doi.org/10.2307/2040075).
- [17] Ljubomir B. Ćirić. “Fixed points for generalized multi-valued contractions”. In: *Matematički Vesnik* 9.24 (56 1972), pp. 265–272.
- [18] Ljubomir B. Ćirić. “Generalized contractions and fixed-point theorems”. In: *Publications de l’Institut Mathématique* 12 (1971), pp. 19–26.
- [19] Roberto Conti. “Un’osservazione sulle trasformazioni continue di uno spazio metrico e alcune applicazioni”. In: *Le Matematiche* 15 (1960), pp. 92–97.

- [20] Howard H. Covitz and Sam B. Nadler Jr. “Multi-valued contraction mappings in generalized metric spaces”. In: *Israel Journal of Mathematics* 8 (1970), pp. 5–11.
- [21] Yuqiang Feng and Sanyang Liu. “Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multi-valued Caristi type mappings”. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 317.1 (2006), pp. 103–112.
- [22] Marlène Frigon. *Application de la théorie de la transversalité à des problèmes non linéaires pour des équations différentielles ordinaires*. Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1990.
- [23] Marlène Frigon and Andrzej Granas. “Resultats du type Leray - Schauder pour des contractions multi - voques”. In: *Topological Methods in Non-linear Analysis* 4 (1994), pp. 197–208. DOI: [10.12775/TMNA.1994.026](https://doi.org/10.12775/TMNA.1994.026).
- [24] George Gabor, Lech Górniewicz, and Mirosław Ślosarski. “Generalized topological essentiality and coincidence points of multivalued maps”. In: *Set-Valued Analysis* 17.1 (2009), pp. 1–19.
- [25] Kazimierz Goebel. “Metric Environment of the Topological Fixed Point Theorems”. In: *Handbook of Metric Fixed Point Theory*. Ed. by William A. Kirk and Brailey Sims. Dordrecht: Springer Netherlands, 2001, pp. 577–611. DOI: [10.1007/978-94-017-1748-9_17](https://doi.org/10.1007/978-94-017-1748-9_17).
- [26] Lech Górniewicz and Mirosław Ślosarski. “Topological essentiality and differential inclusions”. In: *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 45.2 (1992), pp. 177–193.
- [27] Andrzej Granas and James Dugundji. *Fixed Point Theory*. Berlin: Springer, 2003.
- [28] Robab Hambarani Haghi, Shahram Rezapour, and Naseer Shahzad. “On fixed points of quasi-contraction type multifunctions”. In: *Applied Mathematics Letters* 25 (2012), pp. 843–845. DOI: [10.1016/j.aml.2011.10.029](https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.10.029).
- [29] Jacek Jachymski. “A stationary point theorem characterizing metric completeness”. In: *Applied Mathematics Letters* 24 (2011), pp. 169–171.
- [30] Calvin F. K. Jung. “On generalized complete metric spaces”. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 75 (1969), pp. 81–86.

- [31] Marek Kuczma. *Functional equations in a single variable*. Monografie Matematyczne, 46. Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1968.
- [32] Abdul Latif, Tanveer Nazir, and Mujahid Abbas. “Stability of Fixed Points in Generalized Metric Spaces”. In: *Journal of Nonlinear and Variational Analysis* 2 (2018), pp. 287–294. DOI: [10.23952/jnva.2.2018.3.04](https://doi.org/10.23952/jnva.2.2018.3.04).
- [33] Tania Lazăr, Donal O’Regan, and Adrian Petruşel. “Fixed points and homotopy results for Ćirić-type multivalued operators on a set with two metrics”. In: *Bulletin of the Korean Mathematical Society* 45.1 (2008), pp. 67–73. DOI: [/10.4134/BKMS.2008.45.1.067](https://doi.org/10.4134/BKMS.2008.45.1.067).
- [34] Tania Lazăr, Adrian Petruşel, and Naseer Shahzad. “Fixed points for non-self operators and domain invariance theorems”. In: *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 70.1 (2009), pp. 117–125. DOI: [/10.1016/j.na.2007.11.037](https://doi.org/10.1016/j.na.2007.11.037).
- [35] Teck-Cheong Lim. “On fixed point stability for set-valued contractive mappings with applications to generalized differential equations”. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 110.2 (1985), pp. 436–441.
- [36] Adrian Magdaş. *Contributions to fixed point theory for cyclic operators and applications*. Cluj-Napoca: Presa Univ. Clujeană, 2020.
- [37] Janusz Matkowski and Roman Węgrzyk. “On equivalence of some fixed point theorems for selfmappings of metrically convex space”. In: *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana* 15-A.5 (1978), pp. 359–369.
- [38] Mădălina Moga. “On some qualitative properties of Ćirić’s fixed point theorem”. In: *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Matematica* 67 (2022), pp. 47–54. DOI: [10.24193/subbmath.2022.1.04](https://doi.org/10.24193/subbmath.2022.1.04).
- [39] Mădălina Moga and Radu Truşcă. “Fixed point and stability results for multi-valued nonlinear graph contractions in complete metric spaces”. In: *The Journal of Analysis* 33 (2025), pp. 717–742. DOI: [10.1007/s41478-024-00858-6](https://doi.org/10.1007/s41478-024-00858-6).
- [40] Mădălina Moga and Radu Truşcă. “On some fixed point theorems for Ćirić operators”. In: *Miskolc Mathematical Notes* 25.2 (2024), pp. 871–885. DOI: [10.18514/MMN.2024.4502](https://doi.org/10.18514/MMN.2024.4502).

- [41] Sam B. Nadler Jr. “Multi-valued contraction mappings”. In: *Pacific Journal of Mathematics* 30.2 (1969), pp. 475–488.
- [42] Donal O’Regan. “The topological transversality theorem for multi-valued maps with continuous selections”. In: *Mathematics* 7 (2019), p. 1113. DOI: [10.3390/math7111113](https://doi.org/10.3390/math7111113).
- [43] Traian Petru, Adrian Petruşel, and Jen-Chih Yao. “Ulam–Hyers Stability for Operatorial Equations and Inclusions via Nonself Operators”. In: *Taiwanese Journal of Mathematics* 15 (2011), pp. 2195–2212.
- [44] Adrian Petruşel. “Multivalued weakly Picard operators and applications”. In: *Scientiae Mathematicae Japonicae* 59.1 (2004), pp. 169–202.
- [45] Adrian Petruşel and Gabriela Petruşel. “Fixed point results for multi-valued locally contractive operators”. In: *Applied Set-Valued Analysis and Optimization* 2.2 (2020), pp. 175–181.
- [46] Adrian Petruşel and Gabriela Petruşel. “Some Variants of the Contraction Principle for Multi-valued Operators, Generalizations and Applications”. In: *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 20 (2019), pp. 2187–2203.
- [47] Adrian Petruşel, Gabriela Petruşel, and Gheorghe Moţ. *Topics in Nonlinear Analysis and Applications to Mathematical Economics*. Cluj-Napoca: House of the Book of Science, 2007.
- [48] Adrian Petruşel, Gabriela Petruşel, and Jen-Chih Yao. “New fixed point results for nonlinear Feng-Liu contractions with applications”. In: *Topological Methods in Nonlinear Analysis* 63.1 (2024), pp. 153–166. DOI: [10.12775/TMNA.2023.030](https://doi.org/10.12775/TMNA.2023.030).
- [49] Adrian Petruşel, Gabriela Petruşel, and Jen-Chih Yao. “On Some Stability Properties for Fixed Point Inclusions”. In: *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 22.8 (2021), pp. 1465–1474.
- [50] Adrian Petruşel, Radu Precup, and Marcel-Adrian Şerban. “On the approximation of fixed points for condensing non-self mappings on metric spaces”. In: *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 25 (2020), pp. 733–747.

- [51] Adrian Petrușel and Ioan A. Rus. “Graphic contraction principle and applications”. In: *Mathematical Analysis and Applications*. Ed. by Themistocles M. Rassias and Panos M. Pardalos. Springer Optimization and Its Applications. Cham: Springer International Publishing, 2019, pp. 411–432. DOI: [10.1007/978-3-030-31339-5_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-31339-5_15).
- [52] Adrian Petrușel, Ioan A. Rus, and Marcel-Adrian Serban. “Basic Problems of the Metric Fixed Point Theory and the Relevance of a Metric Fixed Point Theorem for Multivalued Operators”. In: *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 15 (2014), pp. 493–513.
- [53] Adrian Petrușel and Radu Trușcă. “Iterative approximations for non-self operators”. In: *2019 21st International Symposium on Symbolic and Numeric Algorithms for Scientific Computing (SYNASC)*. Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society, 2019, pp. 307–310. DOI: [10.1109/SYNASC49474.2019.00050](https://doi.org/10.1109/SYNASC49474.2019.00050).
- [54] Adrian Petrușel, Radu Trușcă, and Jen-Chih Yao. “Some local fixed point theorems for generalized multi-valued contractions with applications”. In: *Journal of Nonlinear and Convex Analysis* 23.12 (2022), pp. 2835–2845.
- [55] Gabriela Petrușel. “Generalized multivalued contractions which are quasi-bounded”. In: *Demonstratio Mathematica* 40 (2007), pp. 639–648. DOI: [10.1515/dema-2007-0314](https://doi.org/10.1515/dema-2007-0314).
- [56] Simeon Reich. “A fixed point theorem for locally contractive multi-valued functions”. In: *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées* 17 (1972), pp. 569–572.
- [57] Simeon Reich. “Fixed points of contractive functions”. In: *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana* 5 (1972), pp. 26–42.
- [58] Simeon Reich. “Some fixed point problems”. In: *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei* 57 (1974), pp. 194–198.
- [59] Simeon Reich. “Some remarks concerning contraction mappings”. In: *Canadian Mathematical Bulletin* 14.1 (1971), pp. 19–26. DOI: [10.4153/CMB-1971-024-9](https://doi.org/10.4153/CMB-1971-024-9).
- [60] Simeon Reich and Alexander J. Zaslavski. “A fixed point theorem for Matkowski contractions”. In: *Fixed Point Theory* 8 (2007), pp. 303–307.

- [61] Simeon Reich and Alexander J. Zaslavski. “A note on Rakotch contractions”. In: *Fixed Point Theory* 9.1 (2008), pp. 267–273.
- [62] Simeon Reich and Alexander J. Zaslavski. *Genericity in Nonlinear Analysis*. New York: Springer, 2014.
- [63] Simeon Reich and Alexander J. Zaslavski. “Well-posedness of Fixed Point Problems”. In: *Far East Journal of Mathematical Sciences* Special Volume, Part III (2001), pp. 393–401.
- [64] Billy E. Rhoades. “A Comparison of Various Definitions of Contractive Mappings”. In: *Transactions of The American Mathematical Society* 226 (1977), pp. 257–290. DOI: [10.2307/1997954](https://doi.org/10.2307/1997954).
- [65] Biagio Ricceri. “Une propriété topologique de l’ensemble des points fixes d’une contraction multivoques à valeurs convexes”. In: *Rendiconti dell’Accademia Nazionale dei Lincei* 81 (1987), pp. 283–286.
- [66] Ioan A. Rus. *Generalized Contractions and Applications*. Cluj-Napoca: Transilvania Press, 2001.
- [67] Ioan A. Rus. “The generalized retraction methods in fixed point theory for nonself operators”. In: *Fixed Point Theory* 15.2 (2014), pp. 559–578.
- [68] Ioan A. Rus and Șerban Marcel-Adrian. “Some fixed point theorems for nonself generalized contraction”. In: *Miskolc Mathematical Notes* 17.2 (2017), pp. 1021–1031. DOI: [10.18514/MMN.2017.1186](https://doi.org/10.18514/MMN.2017.1186).
- [69] Ioan A. Rus, Adrian Petrușel, and Gabriela Petrușel. *Fixed Point Theory*. Cluj-Napoca: Cluj University Press, 2008.
- [70] Ioan A. Rus, Adrian Petrușel, and Alina Sîntămărian. “Data dependence of the fixed point set of multivalued weakly Picard operators”. In: *Studia Universitatis Babeș-Bolyai Mathematica* 46.2 (2001), pp. 111–121.
- [71] Ioan A. Rus, Adrian Petrușel, and Alina Sîntămărian. “Data dependence of the fixed point set of some multivalued weakly Picard operators”. In: *Nonlinear Analysis* 52 (2003), pp. 1947–1959.
- [72] Ioan. A. Rus. “Some fixed point theorems in metric spaces”. In: *Rendiconti dell’Istituto di Matematica dell’Università di Trieste* 3 (1971), pp. 169–172.
- [73] Jean Saint-Raymond. “Multivalued contractions”. In: *Set-Valued Analysis* 2 (1994), pp. 559–571.

- [74] Radu Trușcă. “Local fixed point theorems and open mapping principles for generalized contractions”. In: *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio Mathematica* 64 (2021), pp. 215–223.
- [75] Radu Trușcă. “Some local fixed point theorems and applications to open mapping principles and continuation results”. In: *Arabian Journal of Mathematics* 10 (2021), pp. 711–723. DOI: [10.1007/s40065-021-00331-3](https://doi.org/10.1007/s40065-021-00331-3).
- [76] Ting Wang. “Fixed point theorems and fixed point stability for multi-valued mappings on metric spaces”. In: *Journal of Nanjing University Mathematical Biquarterly* 6 (1989), pp. 16–23.
- [77] Roman Węgrzyk. *Fixed-point theorems for multi-valued functions and their applications to functional equations*. Warszawa: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, 1982.