Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca
Şcoala Doctorală de Matematică şi Informatică

Probleme de control pentru sisteme de tip Kolmogorov

Rezumatul tezei de doctorat

Student doctorand
Alexandru Hofman

Conducător ştiinţific
Prof. univ. dr. Radu Precup

CLUJ-NAPOCA
2025

Cuprins

Introducere

Numeroase modele matematice care descriu procese din lumea reală sunt formulate prin ecuaţii şi sisteme diferenţiale. Acestea includ, de obicei, un set de parametri, dintre care unii sunt fixaţi, iar alţii sunt asociaţi cantităţilor variabile din model şi pot fi ajustaţi pentru a atinge un anumit obiectiv, definit printr-o condiţie de controlabilitate.

Modificarea parametrilor este realizată matematic prin introducerea unor parametri de control, ale căror expresii pot fi, în multe cazuri, exprimate în funcţie de variabilele de stare. Odată încorporate în ecuaţiile modelului, acestea conduc la ecuaţii funcţional-diferenţiale, al căror studiu poate fi redus la analiza unor probleme de punct fix. Astfel, metoda punctului fix devine un instrument fundamental în problemele de control. Aplicarea acestei metode variază în funcţie de specificul fiecărei probleme, aşa cum este detaliat şi în monografia lui J. M. Coron [7].

În această teză, studiem probleme de control relative la sisteme diferenţiale de tip Kolmogorov. Sistemul clasic Kolmogorov este de forma

$$\begin{cases} x' = xf\,(x, y) \\ y' = yg\,(x, y) \end{cases} \tag{1}$$

şi reprezintă modelul matematic al dinamicii populaţiilor în care $f(x, y)$ şi $g(x, y)$ reprezintă ratele *per capita* ale celor două populaţii. Exemplul cel mai cunoscut de astfel de sisteme îl reprezintă sistemul Lotka-Volterra

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = \delta xy - \gamma y. \end{cases} \tag{2}$$

Pe lângă sistemele Kolmogorov de ordinul întâi în teză sunt definite şi analizate sistemele de tip Kolmogorov de ordinul doi, de forma

$$\begin{cases} \left(\frac{x'}{x}\right)' = f(x, y) \\ \left(\frac{y'}{y}\right)' = g(x, y). \end{cases} \tag{3}$$

În limbajul dinamicii populaţiilor, $f(x, y)$ descrie schimbarea ratei *per capita* $\frac{x'}{x}$, iar

$g(x,y)$ exprimă schimbarea ratei *per capita* $\frac{y'}{y}$.

Relativ la aceste sisteme, sunt formulate mai multe probleme de control, unde parametrii de control pot fi valori numerice reale, vectori, sau funcţii de timp. De asemenea, aceşti parametri pot fi fie cantităţi aditive sau multiplicative care modifică ratele de creştere, fie termeni care apar direct în structura neliniară a ecuaţiilor.

Metoda utilizată pe parcursul tezei este metoda punctului fix, care constă în reducerea problemei de control la o ecuaţie de punct fix. În acest scop, sunt aplicate diverse rezultate din teoria punctului fix, inclusiv principiul contracţiilor al lui Banach, teorema vectorială de punct fix a lui Perov, precum şi teoremele de punct fix ale lui Schauder, Krasnoselskii şi Avramescu. În cazul problemelor multivoce, utilizăm teoremele de punct fix ale lui Nadler şi Bohnenblust-Karlin.

Teza este structurată în şase capitole fiecare conţinând mai multe secţiuni şi subsecţiuni. În cele ce urmează, vom detalia rezultatele obţinute în fiecare capitol.

Capitolul 1: Preliminarii

Capitolul 1 este dedicat conceptelor preliminare esenţiale şi rezultatelor fundamentale care sunt utilizate pe tot parcursul tezei. În Secţiunea 1.1, introducem noţiunea de problemă generală de control. Secţiunea 1.2 face referire la forma generală a sistemului Kolmogorov de ordinul întâi unde prin analogie se deduce şi forma sistemului Kolmogorov de ordinul doi. În Secţiunea 1.3 este dată definiţia matricei convergente la zero şi sunt menţionate proprietăţile matricelor de acest fel.
Continuăm cu Secţiunea 1.4 unde prezentăm noţiunea de metrică Pompeiu-Hausdorff. Ultimele trei secţiuni prezintă rezultatele necesare utilizate pe tot parcursul tezei, anume, teoremele de punct fix folosite, norma de tip Bielecki precum şi teorema lui Arzelà-Ascoli.

Capitolul 2: Probleme de control pentru sisteme de tip Kolmogorov

În Capitolul 2, studiem trei probleme de control de tip Kolmogorov, fiecare cu condiţii iniţiale şi de controlabilitate specifice. În Secţiunea 2.1 se analizează un sistem Kolmogorov în care ambele populaţii sunt influenţate de acelaşi parametru de control. Problema constă în găsirea unei soluţii astfel încât raportul dintre cele două populaţii să urmeze o evoluţie dorită. Aplicând teorema de punct fix a lui Banach împreună cu norme de tip Bielecki şi impunând condiţii suficiente, obţinem existenţa (şi unicitatea) unei soluţii, atât pe întregul spaţiu, cât şi într-o bilă.

A doua secţiune este dedicată studiului unui sistem în care controlul influenţează rata *per capita* a uneia dintre cele două populaţii, având ca obiectiv atingerea unui prag prestabilit într-un interval de timp fixat. Existenţa soluţiei este demonstrată prin aplicarea teoremei de punct fix a lui Schauder.

În cea de-a treia secţiune, aplicăm teorema de punct fix a lui Banach pentru a demonstra existenţa unei soluţii a unei probleme de control în care rata *per capita* este modificată doar pentru una dintre cele două populaţii, având ca obiectiv atingerea unui nivel prestabilit al populaţiei totale la momentul final.

În cele din urmă, Secţiunea 2.4 prezintă trei exemple de sisteme Kolmogorov aplicate în biologie, ilustrând utilitatea rezultatelor teoretice obţinute. Aceste exemple includ modele din dinamica populaţiilor şi epidemiologie.

Contribuţiile noastre în acest capitol sunt următoarele: În Secţiunea 2.1: Teorema 2.1 şi Teorema 2.2. În Secţiunea 2.2: Teorema 2.3. În Secţiunea 2.3: Teorema 2.4. În ultima Secţiune 2.4: Exemplul 1, Exemplul 2 şi Exemplul 3.

Toate aceste rezultate au fost incluse în lucrarea A. Hofman şi R. Precup [13].

Capitolul 3: Abordarea vectorială prin metode de punct fix a problemelor de control pentru sisteme diferenţiale Kolmogorov

În acest capitol, analizăm trei probleme de control de tip Kolmogorov cu condiţii iniţiale. Metoda utilizată este corelată cu tipul de sistem considerat, oferind o abordare adaptată fiecărui caz. Metoda folosită este cea vectorială, care permite folosirea unor constante mai precise, eliminând dependenţa de tipul de normă utilizat.

Sistemul analizat în Secţiunea 3.1 impune un control asupra fiecărei rate *per capita* a celor două populaţii. Existenţa soluţiei este demonstrată prin aplicarea teoremei lui Perov, sub ipoteza unor condiţii de tip Lipschitz, şi a teoremei lui Schauder, prin impunerea unor condiţii de creştere logaritmică.

În Secţiunea 3.2, studiem o problemă de control în care intervin modificări ale ratelor de creştere. Soluţia este garantată prin intermediul teoremei de punct fix a lui Perov.

Secţiunea 3.3 combină cele două probleme analizate în secţiunile anterioare, considerând un sistem în care, pentru o populaţie, controlul este aplicat asupra ratei de creştere, în timp ce pentru cealaltă populaţie, acesta este impus asupra ratei *per capita.*

În final, Secţiunea 3.4 prezintă patru aplicaţii ale rezultatelor obţinute în cele trei secţiuni anterioare. Aceste aplicaţii ilustrează utilitatea metodei propuse şi validează aplicabilitatea teoremelor de punct fix în contexte diverse.

Contribuţiile noastre în acest capitol sunt prezentate mai jos. În Secţiunea 3.1: Teorema 3.1, Teorema 3.2. În Secţiunea 3.2: Teorema 3.3. În Secţiunea 3.3: Teorema 3.4, Remarca 3.1. În ultima Secţiune 3.4: Exemplul 1, Exemplul 2, Exemplul 3 şi Exemplul 4.

Toate aceste rezultate sunt originale şi au fost incluse în lucrarea A. Hofman şi R. Precup [15].

Capitolul 4: Probleme de control pentru ecuaţii şi sisteme diferenţiale de tip Kolmogorov de ordinul doi

În Capitolul 4, prezentăm ecuaţiile şi sistemele diferenţiale de ordinul doi de tip Kolmogorov. Investigăm mai multe probleme de control cu timp finit T fixat şi starea finală x_T fixată, cu control aditiv sau multiplicativ. Controlabilitatea acestor probleme este demonstrată aplicând tehnici de punct fix, teoremele lui Banach, Schauder, Krasnoselskii, Avramescu şi Perov.

În Secţiunea 4.1 studiem probleme cu control aditiv relative la ecuaţii Kolmogorov de ordinul doi. Impunând o condiţie Lipschitz şi folosind teorema de punct fix a lui Banach demonstrăm existenţa şi unicitatea soluţiei. Observăm că dacă se renunţă la condiţiile Lipschitz şi impunem în locul acestora condiţii de creştere logaritmică atunci folosind teorema de punct fix a lui Schauder se obţine că problema de control are cel puţin o soluţie.

Ultimul rezultat din această secţiune combină primele două rezultate anterioare, şi se bazează pe teorema de punct fix a lui Krasnoselskii pentru o sumă de doi operatori.

Se continuă apoi cu probleme cu control multiplicativ unde pentru demonstrarea controlabilităţii folosim principiul contracţiilor al lui Banach.

În Secţiunea 4.2, ne concentrăm pe probleme de control pentru un sistem Kolmogorov de ordinul doi. Primul rezultat garantează existenţa şi unicitatea soluţiei utilizând teorema de punct fix a lui Perov. În continuare se obţine un rezultat de existenţă bazat pe aplicarea teoremei de punct fix a lui Schauder. În finalul acestui capitol, prezentăm o aplicaţie la problema de control a teoremei de punct fix a lui Avramescu.

Contribuţiile noastre în acest capitol sunt următoarele. În Secţiunea 4.1: Teorema 4.1, Remarca 4.1, Teorema 4.2, Remarca 4.2, Teorema 4.3, Teorema 4.4. În Secţiunea 4.2: Teorema 4.5, Teorema 4.6, Teorema 4.7.

Toate aceste rezultate sunt originale şi au fost incluse în lucrarea A. Hofman şi R. Precup [14].

Capitolul 5: Metode de punct fix cu operatori multivoci pentru probleme de control

În Capitolul 5 ne concentrăm pe aplicarea metodelor de punct fix cu operatori multivoci în rezolvarea unei probleme de control pentru ecuaţii de tip Kolmogorov de ordinul întâi. Aici, condiţia de controlabilitate este exprimată sub forma unei incluziuni, iar pentru demonstrarea existenţei soluţiilor sunt utilizate teoreme de punct fix pentru operatori multivoci, precum teorema lui Nadler, teorema lui Bohnenblust-Karlin şi versiunea multivocă a teoremei lui Krasnoselskii.

Secţiunea 5.1 este dedicată rezolvării problemei de control prin aplicarea teoremei de punct fix a lui Nadler într-o bilă de rază dată a spaţiului $C[0,T]$. În Secţiunea 5.2 rezolvăm problema de control cu ajutorul teoremei de punct fix a lui Bohnenblust-Karlin, sub ipoteza unor condiţii de creştere logaritmică. În ultima secţiune, reprezentând operatorul de punct fix ca suma a doi operatori, obţinem o soluţie prin aplicarea versiunii multivoce a teoremei lui Krasnoselskii.

Contribuţiile noastre în acest capitol sunt următoarele. În Secţiunea 5.1: Lema 5.1, Teorema 5.1. În Secţiunea 5.2: Teorema 5.2, Lema 5.2. În Secţiune 5.3: Teorema 5.3.

Toate rezultatele sunt originale şi au fost incluse în lucrarea A. Hofman [12].

Capitolul 6: Algoritmi pentru rezolvarea problemelor de control relative la sisteme Kolmogorov

Acest capitol este dedicat dezvoltării şi analizei unor algoritmi teoretici pentru rezolvarea problemelor de control asociate sistemelor de tip Kolmogorov, atât de ordinul întâi, cât şi de ordinul doi. Algoritmii propuşi se bazează pe metoda sub şi supra soluţiilor, ce permite construirea unui şir de soluţii aproximative care, sub anumite condiţii, converge către soluţia exactă a problemei de control.

În cele două secţiuni ale capitolului, stabilim condiţii suficiente pentru ca algoritmul să fie convergent. Aceste condiţii ajută la determinarea unei soluţii unice în funcţie de condiţia de control, utilizând teorema de punct fix a lui Perov, alături de alte rezultate relevante. De asemenea, în Secţiunea 6.2, este prezentat şi un algoritm pentru obţinerea unei soluţii aproximative a problemei.

Contribuţiile noastre în acest capitol sunt dupa cum urmează: Lema 6.1, Lema 6.2, Teorema 6.1, Teorema 6.2, Teorema 6.3, Teorema 6.4, Teorema 6.5.

Toate rezultatele sunt originale şi au fost incluse în lucrările A. Hofman [10, 11].

Publicaţiile autorului:

1. A. Hofman, R. Precup. *On some control problems for Kolmogorov type systems.* Mathematical Modelling and Control., 2(3):90–99, 2022, `https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/mmc.2022011`.

2. A. Hofman. *An algorithm for solving a control problem for Kolmogorov systems.* Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematica., 68(2):331–340, 2023, `https://doi.org/10.24193/subbmath.2023.2.09`.

3. A. Hofman, R. Precup. *Vector fixed point approach to control of Kolmogorov differential systems.* Contemporary Mathematics., 5:1968–1981, 2024, `https://doi.org/10.37256/cm.5220242840`.

4. A. Hofman, R. Precup. *Control problems for Kolmogorov type second order equations and systems.* Journal of Fixed Point Theory and Applications., 27(1):1–18, 2024, https://link.springer.com/article/10.1007/s11784-024-01160-5.

5. A. Hofman. *Fixed point methods with multi-valued operators for control problems.* Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization., 44(2):153–165, 2024, https://doi.org/10.7151/dmdico.1250.

6. A. Hofman. *Upper and lower solution method for control of second-order Kolmogorov type systems.* Journal of Numerical Analysis and Approximation Theory., 2025, acceptat.

Capitolul 1

Preliminarii

În capitolul de deschidere al tezei, stabilim conceptele fundamentale şi rezultate care stau la baza cercetării noastre. În cadrul acestui capitol, prezentăm mai multe noţiuni şi rezultate binecunoscute, inclusiv problema generală de control, sisteme de tip Kolmogorov, conceptul de matrice convergentă la zero, noţiunea de metrică Pompeiu-Hausdorff, norme de tip Bielecki şi diverse teoreme de punct fix, teorema lui Arzelà-Ascoli.

Conceptele discutate aici sunt bine documentate în literatură. Unele dintre referinţele notabile includ lucrări de C. Avramescu [2], V. Barbu [4], J. M. Coron [7], A. Granas şi J. Dugundji [9], R. I. Petru [25], R. Precup [28,29], L. C. Evans [8].

1.1 Problema generală de control

Controlul ecuaţiilor diferenţiale este subiectul la numeroase studii în literatură. În general vorbind, el constă în determinarea unor parametri ai ecuaţiei sau a sistemului de ecuaţii în aşa fel încât soluţia să satisfacă anumite condiţii, altele decât cele impuse de bine punerea problemelor, cum ar fi condiţiile iniţiale sau de frontieră (vezi V. Barbu [4]).

În lucrarea I. Ş. Haplea, L. G. Parajdi şi R. Precup [16] a fost introdus un principiu de controlabilitate pentru o problemă de control generală relativă la ecuaţiile operatoriale, în cadrul teoriei punctului fix. Problema generală de control constă în găsirea perechii (w, λ), o soluţie a următorului sistem

$$\begin{cases} w = H_0(w, \lambda), \\ w \in W, \ \lambda \in \Lambda, \ (w, \lambda) \in \mathcal{D}, \end{cases} \tag{1.1}$$

asociat ecuaţiei de punct fix $w = H_0(w, \lambda)$. În cazul aceasta w reprezintă variabila de stare, λ este variabila de control, W este domeniul stărilor, Λ domeniul controalelor şi $\mathcal{D}$ este domeniul de controlabilitate, în mod curent dat printr-o anumită condiţie sau proprietate impusă lui w, sau ambelor w şi λ. De notat forma foarte generală a problemei de control, în termeni de mulţimi, unde W, Λ şi $\mathcal{D} \subset W \times \Lambda$ nu sunt în mod necesar mulţimi structurate şi H_0 este orice aplicaţie de la mulţimea $W \times \Lambda$ în W.

În acest context, spunem că ecuaţia $w = H_0(w, \lambda)$ este controlabilă în mulţimea $W \times \Lambda$ în raport cu $\mathcal{D}$, dacă problema (1.1) admite soluţii. Dacă soluţia este unică spunem că ecuaţia este în mod unic controlabilă.

Fie Σ mulţimea tuturor soluţiilor posibile ale ecuaţiei de punct fix şi fie Σ_1 mulţimea acelor w ce sunt componentele întâi ale soluţiilor ecuaţiei de punct fix, adică

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{(w, \lambda) \in W \times \Lambda : \ w = H_0(w, \lambda)\}, \\ \Sigma_1 &= \{w \in W : \text{ pentru care } \exists\, \lambda \in \Lambda \text{ încât } (w, \lambda) \in \Sigma\}. \end{aligned}$$

Este clar că, mulţimea soluţiilor problemelor de control (1.1) este $\Sigma \cap \mathcal{D}$.

Considerăm aplicaţia multivocă $F_0 : \Sigma_1 \to \Lambda$ definită astfel

$$F_0(w) = \{\lambda \in \Lambda : \quad (w, \lambda) \in \Sigma \cap \mathcal{D}\}.$$

În mare vorbind, F_0 ne dă expresia variabilei de control în termenii variabilei de stare.

Avem următorul principiu general de rezolvare a problemei de control (1.1).

Propoziţie 1. *Dacă pentru o extensie oarecare $F : W \to \Lambda$ a lui F_0 din Σ_1 pe W, există un punct fix $w \in W$ al aplicaţiei*

$$H(w) := H_0(w, F(w)),$$

adică,

$$w = H_0(w, \lambda), \tag{1.2}$$

unde $\lambda \in F(w)$, atunci perechea (w, λ) este o soluţie a problemei de control (1.1).

Demonstraţie. În mod evident, $(w, \lambda) \in \Sigma$. Prin urmare, avem $w \in \Sigma_1$, iar deoarece $F(w)$ este o extensie, acesta coincide cu $F_0(w)$, adică

$$F(w) = F_0(w).$$

Astfel, rezultă că $\lambda \in F_0(w)$, iar din definiţia lui F_0 deducem că perechea (w, λ) aparţine mulţimii $\mathcal{D}$. Deci $(w, \lambda) \in \Sigma \cap \mathcal{D}$ rezolvă (1.1). □

Aplicabilitatea acestui principiu general a fost testată în lucrarea lui I. Ş. Haplea, L. G. Parajdi şi R. Precup [16] pe un sistem ce modelează dinamica celulară în contextul leucemiei, precum şi în R. Precup [30], unde este abordată o problemă de control pentru sistemul pradă-prădător de tip Lotka-Volterra.

1.2 Sisteme de tip Kolmogorov

Sistemul Kolmogorov a fost introdus ca o generalizare a modelului matematic dat de matematicianul Volterra din dinamica populaţiei (K. Sigmund [33]). Acesta ia în considerare rate *per capita* generale ale două populaţii care interacţionează şi arată după cum urmează

$$\begin{cases} x' = xf\left(x, y\right), \\ y' = yg\left(x, y\right). \end{cases} \tag{1.3}$$

În mod natural, când se studiază interacţiunea dintre două specii, cele două rate f şi g depind în mod explicit de o serie de parametri. Unii dintre aceşti parametri sunt specifici celor două specii şi nu suportă schimbări, alţii pot fi influenţaţi, chiar adăugaţi, cu scopul de a controla evoluţia şi de a atinge un echilibru dorit.

Prin schimbările de variabilă $x = e^u$ şi $y = e^v$, sistemul (1.3) se transformă în forma normală

$$\begin{cases} u' = f\left(e^u, e^v\right) \\ v' = g\left(e^u, e^v\right). \end{cases}$$

În acest capitol, printr-o ecuaţie Kolmogorov de ordinul întâi înţelegem o ecuaţie de forma $x' = xf(t, x)$. Ca şi mai înainte, schimbarea de variabilă $x = e^u$ conduce la $u' = f\left(t, e^u\right)$. Prin analogie spunem că o ecuaţie de ordinul doi este o ecuaţie Kolmogorov de ordinul doi dacă are forma

$$\left(\frac{x'}{x}\right)' = f(t, x),$$

echivalent

$$x'' - \frac{1}{x}x'^2 = xf(t, x).$$

În acest caz, în limbajul dinamicii populaţiilor, $f(t, x)$ exprimă modificarea ratei *per capita* $\frac{x'}{x}$. Mai general, numim ecuaţii Kolmogorov de ordinul n, ecuaţiile de forma

$$\left(\frac{x'}{x}\right)^{(n-1)} = f(t, x).$$

Toate aceste ecuaţii au proprietatea că prin schimbarea de variabilă $x = e^u$, ele devin respectiv

$$u'' = f\left(t, e^u\right)$$

şi

$$u^{(n)} = f\left(t, e^u\right).$$

1.3 Matrice convergente la zero

Matricele convergente la zero sunt importante în studiul sistemelor de ecuaţii. Spre exemplu, ele preiau rolul constantelor de contracţie în versiunea vectorială a teoremei de punct fix a lui Banach, datorată lui Perov.

Definiţie 2. *Se spune că o matrice pătratică cu elemente nenegative $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ este convergentă la zero dacă*

$$M^k \to 0_n \quad \text{când} \quad k \to \infty,$$

unde O_n reprezintă matricea zero de ordin n.

Următoarele afirmaţii sunt echivalente (A. Berman şi R. J. Plemmons [5]):

(a) M este convergentă la zero;

(b) $\rho(M) < 1$;

(c) $I - M$ este nesingulară şi $(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + ...$;

(d) $I - M$ este nesingulară şi inversa sa $(I - M)^{-1}$ este de asemenea cu valori nenegative (aici I reprezintă matricea unitate de aceiaşi dimensiune).

Menţionăm că o matrice pătratică de ordinul doi, $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ cu valori nenegative este convergentă la zero dacă şi numai dacă

$$\text{tr } M < \min\{2,\ 1 + \det M\}, \tag{1.4}$$

adică

$$a + d < 2 \quad \text{şi} \quad a + d < 1 + ad - bc. \tag{1.5}$$

Reţinem că dacă M este convergentă la zero, atunci $a < 1$ şi $d < 1$.

1.4 Noţiunea de metrică Pompeiu-Hausdorff

Dacă A şi B sunt două submulţimi ale unui spaţiu metric (X, d) şi $a \in A, b \in B$, atunci definim:

$$D(a, B) = \inf_{b\in B} d(a, b), \qquad \rho(A, B) = \sup_{a\in A} D(a, B),$$

$$D(b, A) = \inf_{a \in A} d(a, b), \qquad \rho(B, A) = \sup_{b \in B} D(b, A),$$

iar metrica Pompeiu-Hausdorff este definită prin

$$H(A, B) = \max\{\rho(A, B), \rho(B, A)\}.$$

Notăm cu $\mathcal{P}_{b,cl}(X)$ mulţimea tuturor submulţimilor nevide, mărginite şi închise ale lui X şi $\mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$ mulţimea tuturor submulţimilor nevide, mărginite, închise şi convexe ale lui X.

1.5 Teoreme de punct fix

Definiţie 3. *Fie (X, d) un spaţiu metric. O aplicaţie $T : X \to X$ se numeşte contracţie pe X, dacă există $q \in [0, 1)$ astfel încât oricare ar fi $x, y \in X$ avem că*

$$d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y).$$

Definiţie 4. *Fie $T : X \to X$. Punctul $x \in X$ se numeşte punct fix a lui T dacă $T(x) = x$.*

Teorema 1.1 (Banach)**.** *Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi $T : X \to X$ o contracţie. Atunci T admite un punct fix unic $x^* \in X$ (adică $T(x^*) = x^*$). Mai mult, x^* poate fi obţinut prin metoda aproximaţiilor succesive: pornind de la un element arbitrar $x_0 \in X$, ca limită a şirului x_n definit recurent prin $x_n = T(x_{n-1})$, adică $x_n \to x^*$.*

Teorema 1.2 (Schauder)**.** *Fie X un spaţiu Banach, $D \subset X$ o submulţime nevidă, închisă, mărginită şi convexă şi $N : D \to D$ un operator compact (adică continuu, cu $N(D)$ relativ compact). Atunci N are cel puţin un punct fix în D.*

Teorema 1.3 (Krasnoselskii)**.** *Fie D o submulţime nevidă, convexă, mărginită, închisă a unui spaţiu Banach X, $A : D \to X$ o contracţie şi $B : D \to X$ o funcţie continuă pentru care $B(D)$ este relativ compactă. Dacă mai mult,*

$$A(x) + B(y) \in D \quad \text{pentru orice} \;\; x, y \in D,$$

atunci aplicaţia $A + B$ are cel puţin un punct fix.

Teorema 1.4 (Avramescu)**.** *Fie (D_1, d) un spaţiu metric complet, D_2 o submulţime nevidă, convexă, închisă a unui spaţiu normat Y şi fie $N_i : D_1 \times D_2 \to D_i$, $i = 1, 2$ funcţii continue. Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiţii:*

(a) *Există o constantă $L \in [0, 1)$ astfel încât*

$$d(N_1(x, y),\ N_1(\overline{x}, y)) \leq Ld(x,\ \overline{x})$$

pentru orice $x, \overline{x} \in D_1$ *şi* $y \in D_2$;

(b) $N_2(D_1 \times D_2)$ *este o submulţime relativ compactă a lui* Y.

Atunci există $(x, y) \in D_1 \times D_2$ *cu*

$$N_1(x, y) = x, \quad N_2(x, y) = y.$$

Teorema 1.5 (Perov). *Fie* $(X, \|\cdot\|)$ *un spaţiu Banach,* D *o submulţime nevidă şi închisă a lui* $X \times X$ *şi* $N : D \to D$, $N = (N_1, N_2)$, $N_i : D \to X$ $(i = 1, 2)$ *un operator cu următoarea proprietate*

$$\begin{bmatrix} \|N_1(x) - N_1(y)\| \\ \|N_2(x) - N_2(y)\| \end{bmatrix} \leq M \begin{bmatrix} \|x_1 - y_1\| \\ \|x_2 - y_2\| \end{bmatrix}$$

pentru orice $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in D$, *unde* M *este o matrice de ordinul doi convergentă la zero. Atunci* N *are un unic punct fix în* D *care este limita şirului de aproximaţii succesive* $\left(N^k(x)\right)_{k \geq 1}$ *pornind de la orice* $x \in X$.

Vom încheia această secţiune amintind două teoreme de punct fix pentru aplicaţii multivoce şi cu o versiune multivocă a teoremei de punct fix a lui Krasnoselskii pentru o sumă de doi operatori, un caz particular al unui rezultat mai general obţinut de R. I. Petru [25].

Teorema 1.6 (Nadler). *Fie* (X, d) *un spaţiu metric complet şi* $N : X \to \mathcal{P}_{b,cl}(X)$ *astfel încât*

$$H(N(x), N(y)) \leq Ld(x, y),$$

pentru orice $x, y \in X$, *unde* $L < 1$. *Atunci există* $x^* \in X$ *cu* $x^* \in N(x^*)$.

Teorema 1.7 (Bohnenblust-Karlin). *Fie* X *un spaţiu Banach,* D *o submulţime nevidă, convexă, închisă şi mărginită a lui* X *şi fie* $N : D \to \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$ *o aplicaţie superior semicontinuă cu* $N(D)$ *relativ compactă. Atunci există cel puţin un punct fix* $x \in D$ *pentru* N, *adică* $x \in N(x)$.

Teorema 1.8. *Fie* X *un spaţiu Banach şi* $D \in \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$. *Presupunem că* $N_1 : D \to X$ *şi* $N_2 : D \to \mathcal{P}_{b,cl,cv}(X)$ *satisfac:*

(i) N_1 *este contracţie.*

(ii) N_2 *este inferior semicontinuu cu* $N_2(D)$ *relativ compactă.*

(iii) $N_1(u) + N_2(\overline{u}) \subset D$ *pentru orice* $u, \overline{u} \in D$.

Atunci $N_1 + N_2$ *are cel puţin un punct fix în* D.

1.6 Norme de tip Bielecki

Spunem că o ecuaţie integrală este de *tip Volterra* dacă integrala implicată este pe un interval variabil, ca în cazul unei ecuaţii de forma

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^t \psi(t, s, x(s))\, ds, \quad t \in [a, b] \tag{1.6}$$

şi că este de *tip Fredholm* dacă integrala implicată este dată pe un interval fix, ca în ecuaţia

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^b \psi(t, s, x(s))\, ds, \quad t \in [a, b].$$

În cazul în care ecuaţia implică ambele tipuri de integrale, spunem că este de *tip Volterra-Fredholm.*

Atunci când avem de-a face cu ecuaţii de tip Volterra, este convenabil ca, în loc de norma max pe spaţiul $C[a, b]$ dată de $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$, să considerăm o normă echivalentă definită de

$$\|x\|_\theta = \max_{t\in[a,b]} \left(|x(t)|\, e^{-\theta(t-a)}\right),$$

pentru un număr $\theta > 0$ adecvat. O astfel de normă se numeşte *normă Bielecki* şi este echivalentă cu norma max, după cum rezultă din inegalităţile

$$e^{-\theta(b-a)} \|x\| \le \|x\|_\theta \le \|x\| \qquad (x \in C[a, b]).$$

În mod similar, folosind norme Bielecki constantele din condiţiile de creştere ale termenilor neliniari pot fi facute oricât de mici.

1.7 Teorema lui Arzelà-Ascoli

Teorema 1.9. *O submulţime $M \subset C[a, b]$ este relativ compactă dacă şi numai dacă:*

(a): *Mulţimea M este uniform mărginită, adică există o constantă $C > 0$ astfel încât pentru orice $f \in M$, avem*

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \le C.$$

(b): *Mulţimea M este echicontinuă, adică pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât*

$$\sup_{f\in M} |f(x) - f(y)| \le \varepsilon, \quad \textit{pentru orice } x, y \in [a, b] \textit{ cu } |x - y| \le \delta.$$

Pe baza teoremei Arzelà-Ascoli şi a proprietăţilor funcţiilor derivabile, următorul rezultat are loc:

Teorema 1.10. *Fie $M \subset C^1[a, b]$ şi notăm $M' = \{f' : f \in M\}$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

1. *Mulţimea M este relativ compactă în $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$;*
2. *Mulţimile M şi M' sunt uniform mărginite.*

Capitolul 2

Probleme de control pentru sisteme de tip Kolmogorov

Prezentul capitol este structurat în trei părţi. **Secţiunea 2.1** se ocupă cu o primă problemă de control pe care o tratăm cu ajutorul teoremei de punct fix a lui Banach ce garantează existenţa şi unicitatea soluţiei. Pentru aceasta se impune condiţia Lipschitz asupra termenilor neliniari şi se utilizează norme de tip Bielecki care nu obligă constantele Lipschitz să fie supuse unor restricţii. În continuare, în **Secţiunea 2.2** sunt slăbite condiţiile care asigură controlabilitatea, via teorema de punct fix a lui Schauder, în cazul unui control independent de t.

În **Secţiunea 2.3** este prezentată o a treia problemă de control în care controlul are efect asupra ratei generale de creştere iar în **Secţiunea 2.4** am prezentat trei exemple de sisteme de tip Kolmogorov ce intervin în biologie.

Rezultatele din acest capitol au fost publicate în lucrările A. Hofman şi R. Precup [13].

2.1 Prima problemă de control

Să considerăm următoarea problemă de control pentru sistemul Kolmogorov general cu condiţii iniţiale

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left(f(x,y) - \lambda(t)\right) \\ y'(t) = y(t)\left(g(x,y) - c\lambda(t)\right) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

unde $\lambda(t)$ este funcţia de control şi c un factor pozitiv, $c \neq 1$. Dorim să găsim o soluţie pozitivă (x, y, λ) în aşa fel încât

$$\frac{y(t)}{x(t)} = r(t), \tag{2.2}$$

unde r este o funcţie continuă pozitivă dată pe un interval de timp $[0, T]$. Astfel problema constă în găsirea modului cum să schimbăm ratele de creştere *per capita* pentru ca raportul celor două populaţii să urmeze o evoluţie dorită dată de funcţia $r(t)$, pe un interval de timp fixat $[0, T]$. Factorul de corecţie c exprimă faptul că efectul intervenţiei de control asupra celor două rate se manifestă diferit la cele două specii.

Avem următorul rezultat.

Teorema 2.1. *Presupunem că funcţiile* $f, g \in C^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, $r \in C^1[0, T]$, $r > 0$ *pe* $[0, T]$ *şi că funcţiile*

$$x \cdot f_x(x, y), \quad y \cdot f_y(x, y), \quad x \cdot g_x(x, y), \quad y \cdot g_y(x, y) \tag{2.3}$$

sunt mărginite pe $\mathbb{R}_+^2$. *Atunci problema de control (2.1)-(2.2) are o unică soluţie* (x, y, λ) *cu* $x, y > 0$.

Dacă ipoteza privind mărginirea funcţiilor (2.3) este îndepărtată avem următorul rezultat de existenţă şi unicitate.

Teorema 2.2. *Presupunem că* $f, g \in C^1\left(\mathbb{R}_+^2\right)$, $r \in C^1[0, T]$, $r > 0$ *pe* $[0, T]$ *şi că funcţia*

$$-\frac{c}{1-c} f(x, y) + \frac{1}{1-c} g(x, y) \tag{2.4}$$

este mărginită superior pe $\mathbb{R}_+^2$. *Atunci problema de control (2.1)-(2.2) are o unică soluţie* (x, y, λ) *cu* $x, y > 0$.

2.2 A doua problemă de control

Considerăm problema de control pentru sistemul Kolmogorov

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)[f(x, y) - \lambda] \\ y'(t) = y(t) \cdot g(x, y) \\ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

unde λ este o constantă. Dorim să găsim o soluţie astfel încât

$$x(T) = x_1.$$

Astfel, problema revine la a schimba în mod constant rata *per capita* doar a uneia din cele două populaţii pentru a atinge un prag dorit într-un timp fixat.

Teorema 2.3. *Fie* $f, g \in C\left(\mathbb{R}_+^2\right)$.

(a) *Dacă* f *şi* g *sunt mărginite pe* $\mathbb{R}_+^2$, *atunci pentru fiecare* $T > 0$, *problema de control are o soluţie* (x, y, λ) *cu* $x, y > 0$.

(b) *Dacă pentru orice* $x_0, y_0, x_1 \geq 1$, *atunci pentru fiecare* $\rho_0 > \max\{x_0, x_1, y_0\}$, *există* $T_{\rho_0} > 0$ *astfel încât* $T \in (0, T_{\rho_0}]$, *problema de control are o soluţie* (x, y, λ) *cu* $0 < x, y \leq \rho_0$.

2.3 A treia problemă de control

Problema constă în modificarea ratei de creştere şi nu a ratei *per capita*, a uneia dintre cele două populaţii astfel încât la momentul de timp T, populaţia totală să atingă un nivel dorit γ.

Mai exact considerăm problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)f(x(t), y(t)) - \lambda \\ y'(t) = y(t)g(x(t), y(t)) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0 \\ x(T) + y(T) = \gamma. \end{cases} \tag{2.6}$$

Teorema 2.4. *Fie* $\rho > \max\{|x_0|, |y_0|, |y_0 - \gamma|\}$, $f, g \in C^1\left([-\rho, \rho]^2\right)$, M_ρ *o margine a funcţiilor* $|xf(x, y)|$, $|yg(x, y)|$ *pe* $[-\rho, \rho]^2$ *şi* $\overline{M}_\rho$ *o margine pentru valoarea absolută a derivatelor parţiale ale funcţiilor* $xf(x, y)$, $yg(x, y)$ *pe* $[-\rho, \rho]^2$. *Dacă* T *satisface*

$$T \leq \frac{\rho - \max\{|x_0|,\ |y_0 - \gamma|\}}{2M_\rho}, \quad T \leq \frac{\rho - |y_0|}{M_\rho}, \quad T < \frac{1}{3\overline{M}_\rho}, \tag{2.7}$$

atunci problema de control are o unică soluţie (x, y, λ) *cu* $|x|, |y| \leq \rho$.

2.4 Aplicaţii

Exemplul 1

Acest exemplu se referă la Teorema 2.1. Mai precis, considerăm următorul

$$\begin{cases} x' = \left(\dfrac{a}{1 + x^2 + y^2} - \lambda(t)\right)x, \\ y' = \left(\dfrac{b}{1 + x^2 + y^2} - \lambda(t)c\right)y, \end{cases}$$

în condiţia de control (2.2). Aici avem

$$f(x,y) = \frac{a}{1+x^2+y^2}, \qquad g(x,y) = \frac{b}{1+x^2+y^2}$$

şi funcţiile (2.3) sunt

$$\begin{aligned} x \cdot f_x(x,y) &= -\frac{2ax^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ y \cdot f_y(x,y) &= -\frac{2ay^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ x \cdot g_x(x,y) &= -\frac{2bx^2}{(1+x^2+y^2)^2}, \\ y \cdot g_y(x,y) &= -\frac{2by^2}{(1+x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Evident, valorile lor absolute sunt mărginite pe $\mathbb{R}_+^2$ de $2\,|a|$ şi $2\,|b|$, respectiv.

Din Teorema 2.1, rezultă că sistemul este unic controlabil. Expresia funcţiei de control $\lambda(t)$ este dată de formula

$$\lambda(t) = \frac{r'(t)}{(1-c)r(t)} + \frac{1}{1-c}\left(f(e^{u(t)}, e^{v(t)}) - g(e^{u(t)}, e^{v(t)})\right) \tag{2.8}$$

în termenii variabilelor de stare.

Exemplul 2

Următorul exemplu ilustrează Teorema 2.2. Sistemul diferenţial reprezintă un model matematic al dinamicii celulare, în hematologie, considerat în lucrarea [21]. Mai exact, considerăm problema de control

$$\begin{cases} x' = \left(a\left(1 - \dfrac{gx+y}{A}\right) - \lambda(t)\right)x, \\ y' = \left(b\left(1 - \dfrac{x+y}{B}\right) - c\lambda(t)\right)y, \end{cases}$$

unde $0 < a < b$, $0 < c < 1$, $g \geq 1$ şi $A, B > 0$, din nou sub condiţia de control (2.2) care exprimă evoluţia dorită a raportului dintre densitatea $y(t)$ a celulelor leucemice şi densitatea $x(t)$ a celulelor sănătoase pe o perioadă de timp. Problema este motivată prin necesitatea dezvoltării unei scheme de tratament pentru bolnavii de leucemie cronică.

În cazul acesta avem

$$f(x,y) = a\left(1 - \frac{gx+y}{A}\right), \quad g(x,y) = b\left(1 - \frac{x+y}{B}\right),$$

pentru care, în mod evident, condiţia de mărginire a funcţiilor (2.3) nu are loc. În schimb funcţia,

$$-cf(x,y) + g(x,y) = b - ac - \left(\frac{b}{B} - \frac{acg}{A}\right)x - \left(\frac{ac}{A} - \frac{b}{B}\right)y,$$

este mărginită superior pe $\mathbb{R}_+^2$ de $b - ac$ dacă

$$\frac{acg}{A} \leq \frac{b}{B}. \tag{2.9}$$

Astfel, conform Teoremei 2.2, dacă condiţia (2.9) este îndeplinită, atunci sistemul este controlabil. Rezolvarea numerică a problemei conduce la o aproximare a funcţiei de control $\lambda(t)$ ce poate fi pusă în legatură cu doza de medicament necesară obţinerii evoluţiei dorite a pacientului.

Exemplul 3

Încheiem această secţiune de aplicaţii cu următorul exemplu în care luăm în considerare binecunoscutul model epidemiologic SIR

$$\begin{cases} S' = -aSI, \\ I' = aSI - bI, \\ R' = bI. \end{cases}$$

Aici $S(t)$, $I(t)$ şi $R(t)$ reprezintă numărul susceptibililor, infectaţilor şi recuperaţilor/ imunizaţi la momentul t, respectiv într-o populaţie închisă de mărimea N. Prin urmare, $S(t) + I(t) + R(t) = N$, ceea ce permite reducerea studiului la un sistem bidimensional de tip Kolmogorov,

$$\begin{cases} S' = -aSI, \\ I' = aSI - bI. \end{cases}$$

Fie S_0, I_0 şi $R_0 = N - (S_0 + I_0)$ valorile iniţiale ale celor trei funcţii.

Introducând o rată constantă de vaccinare λ, sistemul devine

$$\begin{cases} S' = -aSI - \lambda, \\ I' = aSI - bI. \end{cases}$$

Problema de control constă în găsirea ratei de vaccinare λ astfel încât la momentul T, populaţia imunizată $R(T)$ să atingă o anumită fracţie pN din populaţia totală

N, cu valoarea dorită $p \in (0,1)$. Aşadar condiţia de controlabilitate va fi

$$S(T) + I(T) = (1-p)\,N.$$

Problema este un caz particular al problemei generale de control (2.6). Aici $\rho = N$, $\gamma = (1-p)\,N,\ x = S,\ y = I,\ f(S,I) = -aI$ şi $g(S,I) = aS - b$. Prin calcule simple avem că $M_N = \overline{M}_N = aN + b$. Astfel Teorema 2.4 garantează că sistemul este unic controlabil în timp T dacă T este suficient de mic în sensul inegalităţiilor (2.7). Cu toate acestea, dacă o margine superioară $\overline{\lambda}$ pentru rata vaccinării λ este impusă, atunci o limită inferioară pentru T este de asemenea necesară. Într-adevăr, din

$$\lambda = \frac{1}{T}(x_0 + y_0 - \gamma) + \frac{1}{T}\int_0^T (x(s)\,f(x(s), y(s)) + y(s)\,g(x(s), y(s)))\,ds, \quad (2.10)$$

din moment ce $I \le N$, avem

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda} &\ge \lambda = \frac{1}{T}(S_0 + I_0 - (1-p)\,N) + \frac{1}{T}\int_0^T (-aSI + (aS-b)\,I)\,ds \\
&= \frac{1}{T}(S_0 + I_0 - (1-p)\,N) - \frac{b}{T}\int_0^T I ds \ge \frac{1}{T}(S_0 + I_0 - (1-p)\,N) - bN \\
&= \frac{1}{T}(pN - R_0) - bN,
\end{aligned}$$

de unde

$$T \ge \frac{pN - R_0}{bN + \overline{\lambda}}.$$

Capitolul 3

Abordarea vectorială prin metode de punct fix a problemelor de control pentru sisteme diferenţiale Kolmogorov

În acest capitol vom utiliza metoda vectorială pentru probleme de control relative la sisteme de ecuaţii. Metoda este descrisă pe cazul sistemelor Kolmogorov care provin frecvent din dinamica populaţiilor. Sunt considerate trei tipuri de probleme: probleme cu control al ambelor rate de creştere *per capita*, probleme cu parametri de control acţionând ratele de creştere şi probleme care combină primele două tipuri. Controlabilitatea este obţinută folosind o abordare vectorială bazată pe teorema de punct fix a lui Perov şi pe matrice care sunt convergente la zero.

Acest capitol este împărţit în patru secţiuni. În **Secţiunea 3.1**, ne ocupăm de o primă problemă de control unde ambele controale acţionează asupra ratelor *per capita*. În **Secţiunea 3.2** controlul se aplică asupra ratelor de creştere şi nu asupra ratelor *per capita*, în timp ce în **Secţiunea 3.3** controlul acţionează asupra unei singure ecuaţii. În cele din urmă, în **Secţiunea 3.4** oferim câteva exemple ce utilizează teoremele prezentate în cele trei secţiuni, concluzionând asupra existenţei şi unicităţii soluţiilor.

Rezultatele din acest capitol au fost publicate în lucrarea A. Hofman şi R. Precup [15].

Pentru simplitate, vom considera doar sisteme bidimensionale Kolmogorov, dar tehnica folosită şi rezultatele obţinute pot fi adaptate la cazul general al sistemelor $n-$ dimensionale. În toate cazurile, x_0, y_0 sunt stările iniţiale la timpul $t = 0$ şi x_T, y_T sunt valorile dorite la un moment dat T. De asemenea, x, y sunt variabile de stare şi λ, μ sunt parametri de control. Astfel condiţiile de controlabilitate sunt

$$x(T) = x_T,\ y(T) = y_T.$$

În cele ce urmează, folosim următoarele constante care se exprimă cu ajutorul valorilor iniţiale şi finale:

$$C_1 := |\ln x_0| + \left|\ln \frac{x_0}{x_T}\right|, \quad C_2 := |\ln y_0| + \left|\ln \frac{y_0}{y_T}\right|. \tag{3.1}$$

3.1 Prima problemă de control

Considerăm problema de control

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\left(f(x(t), y(t)) - \lambda\right) \\ y'(t) = y(t)\left(g(x(t), y(t)) - \mu\right). \end{cases} \tag{3.2}$$

Cu presupunerea că stările x, y sunt mărginite, primul rezultat obţinut garantează faptul că sistemul poate fi controlat în mod unic. Aici se modifică ratele *per capita* la ambele populaţii.

Teorema 3.1. *Fie $\rho > 0$ astfel încât $\ln \rho > C_1$, $\ln \rho > C_2$ şi fie $f, g : [0, \rho]^2 \to \mathbb{R}$ mărginite de o constantă $C > 0$. Presupunem că f şi g satisfac condiţiile Lipschitz*

$$|f(x, y) - f(\bar{x}, \bar{y})| \ \leq\ a_{11}\,|x - \bar{x}| + a_{12}|y - \bar{y}|, \tag{3.3}$$
$$|g(x, y) - g(\bar{x}, \bar{y})| \ \leq\ a_{21}\,|x - \bar{x}| + a_{22}|y - \bar{y}|, \tag{3.4}$$

pentru orice $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in [0, \rho]$. Atunci, pentru orice

$$0 < T \leq \min\left\{\frac{\ln \rho - C_1}{C},\ \frac{\ln \rho - C_2}{C}\right\} \tag{3.5}$$

pentru care matricea

$$M := \rho T [a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 2} \tag{3.6}$$

converge la zero, problema de control (3.2) are o unică soluţie $(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*)$ cu x^*, y^* pozitive şi $\|x^*\|_\infty \leq \rho$, $\|y^*\|_\infty \leq \rho$.

Pentru următorul rezultat în loc de condiţiile Lipschitz asupra funcţiilor f şi g, presupunem o creştere logaritmică.

Teorema 3.2. *Fie $f, g : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ continue astfel încât satisfac condiţiile de creştere* *logaritmică*

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq a_{11}\,|\ln x| + a_{12}\,|\ln y| + b_1, \\ |g(x,y)| &\leq a_{21}\,|\ln x| + a_{22}\,|\ln y| + b_2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ *şi constantele* $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{R}_+ \ (i, j = 1, 2)$. *Atunci, pentru orice* $T > 0$ *pentru care matricea*

$$M = T[a_{ij}]$$

converge la zero, problema de control (3.2) are cel puţin o soluţie $(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*)$ *cu* $x^* > 0$ *şi* $y^* > 0$.

3.2 A doua problemă de control

Considerăm următoarea problemă de control

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)f(x(t), y(t)) - \lambda \\ y'(t) = y(t)g(x(t), y(t)) - \mu, \end{cases} \tag{3.8}$$

unde în acest sistem se modifică ratele de creştere.

Teorema 3.3. *Presupunem că funcţiile* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *satisfac următoarele condiţii Lipschitz*

$$\begin{aligned} |xf(x,y) - \overline{x}f(\overline{x},\overline{y})| &\leq a_{11}|x - \overline{x}| + a_{12}|y - \overline{y}|, \\ |yg(x,y) - \overline{y}g(\overline{x},\overline{y})| &\leq a_{21}\,|x - \overline{x}| + a_{22}|y - \overline{y}|, \end{aligned}$$

pentru orice $x, y, \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$ *şi matricea*

$$M = T\,[a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 2}$$

este convergentă la zero. În aceste condiţii problema de control (3.8) are soluţie unică.

3.3 A treia problemă de control

Considerăm acum problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(f(x(t), y(t)) - \lambda) \\ y'(t) = y(t)g(x(t), y(t)) - \mu, \end{cases} \tag{3.9}$$

căreia îi aplicăm din nou teorema de punct fix a lui Perov prin combinarea tehnicilor utilizate pentru primele două probleme. Astfel cerem continuitatea Lipschitz lui $f(x,y)$ şi $yg(x,y)$.

Căutăm soluţii (x,y) cu $x,y \in C[0,T]$, $x > 0$ pe $[0,T]$ şi $\|x\|_\infty \leq \rho$.

Teorema 3.4. *Fie $f,g : [0,\rho] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât*

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y})| &\leq a_{11}|x-\bar{x}| + a_{12}|y-\bar{y}|, \\ |yg(x,y) - \bar{y}g(\bar{x},\bar{y})| &\leq a_{21}|x-\bar{x}| + a_{22}|y-\bar{y}|, \end{aligned}$$

pentru orice $x,\bar{x} \in [0,\rho]$ şi $y,\bar{y} \in \mathbb{R}$. Presupunem că

$$|f(x,y)| \leq C$$

pentru $(x,y) \in [0,\rho] \times \mathbb{R}$,

$$C_1 + TC \leq \ln \rho \tag{3.10}$$

şi că matricea

$$M = T \begin{bmatrix} \rho a_{11} & a_{12} \\ \rho a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

este convergentă la zero. Atunci problema de control are o soluţie unică $(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*)$ astfel încât $x^* > 0$ şi $\|x^*\|_\infty \leq \rho$.

Remarca 3.1. Demonstraţiile teoremelor anterioare arată avantajul metodei vectoriale în comparaţie cu cea scalară şi anume că ne permite, ca în locul mai multor condiţii impuse pe constantele implicate în inegalităţiile Lipschitz sau în cele de creştere, să formulăm o singură condiţie impusă cumulativ folosind o matrice ale cărei elemente sunt aceste constante.

3.4 Aplicaţii

Exemplul 1

Exemplul care urmează ilustrează Teorema 3.1. Considerăm următorul sistem de autolimitare

$$\begin{cases} x' = x\left(\frac{10^{-4}}{1+x^2+y^2} - \lambda\right) \\ y' = y\left(\frac{2\cdot 10^{-4}}{1+4x^2+y^2} - \mu\right), \end{cases}$$

unde $T = 5,\ \rho = 100,\ x_0 = e,\ y_0 = e^2$ iar condiţiile finale de controlabilitate sunt $x_5 = e^2$ şi $y_5 = e$. Avem că $C = 2 \cdot 10^{-4}$,

$$\begin{array}{ll} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| = \left|-\frac{2\cdot 10^{-4}x}{(1+x^2+y^2)^2}\right| \leq 10^{-4}, & \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \left|-\frac{2\cdot 10^{-4}y}{(1+x^2+y^2)^2}\right| \leq 10^{-4}, \\ \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| = \left|-\frac{8\cdot 2\cdot 10^{-4}x}{(1+4x^2+y^2)^2}\right| \leq 4\cdot 10^{-4}, & \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| = \left|-\frac{2\cdot 2\cdot 10^{-4}y}{(1+4x^2+y^2)^2}\right| \leq 2\cdot 10^{-4}. \end{array}$$

Astfel condiţiile Lipschitz (3.3) şi (3.4) devin

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(\bar{x},\bar{y})| &\leq 10^{-4}|x-\bar{x}| + 10^{-4}|y-\bar{y}|, \\ |g(x,y) - g(\bar{x},\bar{y})| &\leq 4\cdot 10^{-4}|x-\bar{x}| + 2\cdot 10^{-4}|y-\bar{y}|. \end{aligned}$$

De asemenea, în acest caz, folosind (3.1), avem $C_1 = 2$ şi $C_2 = 3$. Pentru $T = 5$, condiţia (3.5) este satisfăcută. În plus, matricea M dată de (3.6) este

$$M = 100\cdot 5\cdot \begin{bmatrix} 10^{-4} & 10^{-4} \\ 4\cdot 10^{-4} & 2\cdot 10^{-4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\cdot 10^{-2} & 5\cdot 10^{-2} \\ 20\cdot 10^{-2} & 10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Reamintim condiţia necesară şi suficientă (1.4) pentru ca o matrice

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

de ordinul doi să fie convergentă la zero

$$\operatorname{tr} M < \min\{2,\ 1 + \det M\}, \tag{3.12}$$

adică

$$a + d < 2 \quad \text{şi} \quad a + d < 1 + ad - bc. \tag{3.13}$$

Reţinem că dacă M este convergentă la zero, atunci $a < 1$ şi $d < 1$. În cazul nostru, avem

$$\begin{aligned} \text{tr } M &= 5 \cdot 10^{-2} + 10^{-1} < 2, \\ \text{tr } M &< 1 + \det M = 1 + (5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1} - 5 \cdot 10^{-2} \cdot 20 \cdot 10^{-2}). \end{aligned}$$

Deci această condiţie este satisfăcută pentru matricea M. Aplicăm Teorema 3.1 şi obţinem că problema de control are o soluţie unică cu $\|x^*\|_\infty \leq 100$ şi $\|y^*\|_\infty \leq 100$.

Exemplul 2

Aplicăm Teorema 3.2 cu următoarea alegere a funcţiilor f şi g:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{10} \frac{x}{x + y + 1} \ln x + 1, \\ g(x, y) &= \frac{1}{10} \frac{y}{x + y + 1} \ln y + 1 \quad (x, y > 0), \end{aligned}$$

extinse prin continuitate la $x = 0$ şi respectiv $y = 0$, adică $f(0, y) = g(x, 0) = 1 \ (x, y \in \mathbb{R}_+)$. Folosind condiţiile de creştere logaritmică obţinem următoarea relaţie

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{10} \frac{x}{x + y + 1} \ |ln \ x| + 1,$$

de unde deoarece $x, y \in \mathbb{R}_+^2$ avem că $\frac{x}{x+y+1} \leq 1$. Deci prima condiţie din (3.7) este satisfăcută cu $a_{11} = \frac{1}{10}, a_{12} = 0, b_1 = 1$. Similar

$$|g(x, y)| \leq \frac{1}{10} |ln \ y| + 1$$

de unde rezultă că $a_{21} = 0, a_{22} = \frac{1}{10}, b_2 = 1$. Verificăm dacă ipotezele Teoremei 3.2 sunt îndeplinite pentru $T = 5$ şi dacă matricea M este convergentă la zero.

În acest caz, avem

$$\begin{aligned} \text{tr } M &= \frac{5}{10} + \frac{5}{10} < 2, \\ \text{tr } M &< 1 + \det M = 1 + \left(\frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} \right) = 3,5. \end{aligned}$$

Aşadar matricea M este convergentă la zero. Ipotezele Teoremei 3.2 sunt îndeplinite pentru $T = 5$ şi matricea convergentă la zero este

$$M = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

Obţinem că sistemul Kolmogorov corespunzător este controlabil pentru oricare valori iniţiale şi finale ale lui x şi y.

Exemplul 3

Următoarele funcţii fac ca ipotezele Teoremei 3.3 să fie satisfăcute

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{10}(1+\sin y)\frac{\sin x}{x}, \\ g(x,y) &= \frac{1}{10}(1+\sin x)\frac{\sin y}{y}. \end{aligned}$$

Aici se înţelege că $f(0,y) = \frac{1}{10}(1+\sin y)$ şi $g(x,0) = \frac{1}{10}(1+\sin x)$. Avem că

$$\begin{array}{ll} \left|\frac{\partial(xf(x,y))}{\partial x}\right| = \left|\frac{cos\ x\cdot(1+sin\ y)}{10}\right| \leq \frac{2}{10}, & \left|\frac{\partial(xf(x,y))}{\partial y}\right| = \left|\frac{sin\ x\cdot cos\ y}{10}\right| \leq \frac{1}{10}, \\ \left|\frac{\partial(yg(x,y))}{\partial x}\right| \leq \frac{1}{10}, & \left|\frac{\partial(yg(x,y))}{\partial y}\right| \leq \frac{2}{10}. \end{array}$$

Deci condiţiile Lipschitz devin

$$\begin{aligned} |xf(x,y) - \bar{x}f(\bar{x},\bar{y})| &\leq \frac{2}{10}|x-\bar{x}| + \frac{1}{10}|y-\bar{y}|, \\ |yg(x,y) - \bar{y}g(\bar{x},\bar{y})| &\leq \frac{1}{10}|x-\bar{x}| + \frac{2}{10}|y-\bar{y}|. \end{aligned}$$

Verificăm dacă ipotezele Teoremei 3.3 sunt îndeplinite pentru $T = 3$ şi că în acest caz matricea M este convergentă la zero. Aici matricea M este

$$M = 3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 \\ 0,3 & 0,6 \end{bmatrix}.$$

Verificăm condiţia necesară şi suficientă ca o matrice de ordinul 2 să fie convergentă la zero, anume

$$\text{tr } M < \min\{2,\ 1+\det M\}.$$

Avem că

$$\begin{aligned} \text{tr } M &= \frac{6}{10} + \frac{6}{10} < 2, \\ \text{tr } M &< 1 + \det\ M = 1 + 2,7 = 3,7. \end{aligned}$$

Condiţia este satisfăcută şi rezultă că matricea M este convergentă la zero. Aplicăm Teorema 3.3 şi obţinem că problema de control are soluţie unică.

Exemplul 4

Ilustrăm Teorema 3.4 considerând următoarele funcţii:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{100\left(1+x^2+y^2\right)}, \\
g(x,y) &= \frac{1}{100}\left(1+\sin x\right)\frac{\sin y}{y},
\end{aligned}
$$

pentru care $a_{11} = a_{12} = a_{21} = \frac{1}{100}$, $a_{22} = \frac{2}{100}$ şi $C = \frac{1}{100}$, independent de ρ. Luând $x_0 = 1$ şi $x_T = e$, avem $C_1 = 1$. În continuare, luând $T = 10$ şi $\rho = e^2$ toate ipotezele Teoremei 3.4 sunt satisfăcute. Aici matricea M este

$$
M = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} e^2 & 1 \\ e^2 & 2 \end{bmatrix}
$$

şi se constată imediat că este convergentă la zero. Conform Teoremei 3.4 problema de control are o soluţie unică astfel încât $x^* > 0$ şi $\|x^*\|_\infty \le \rho$.

Capitolul 4

Probleme de control pentru ecuaţii şi sisteme diferenţiale de tip Kolmogorov de ordinul doi

În acest capitol sunt definite ecuaţiile şi sistemele diferenţiale de ordinul doi de tip Kolmogorov. Spre deosebire de ecuaţiile de ordinul întâi care exprimă rata *per capita*, în cazul ecuaţiilor de ordinul doi se exprimă rata schimbării ratei *per capita*. Sunt studiate mai multe probleme de control cu timp finit T fixat şi starea finală x_T fixată, cu control aditiv sau multiplicativ. Controlabilitatea lor este demonstrată cu metode de punct fix, teoremele lui Banach, Schauder, Krasnoselskii, Avramescu şi Perov.

Acest capitol este împărţit în două secţiuni. **Secţiunea 4.1** curpinde două subsecţiuni. În **Subsecţiunea 4.1.1** studiem o problemă de control aditiv folosind teorema de punct fix a lui Banach pentru a demonstra existenţa şi unicitatea soluţiei. Investigăm existenţa unei soluţii în următoarea Teoremă 4.2 folosind condiţiile de creştere logaritmică şi utilizând teorema de punct fix a lui Schauder. Continuăm cu următorul rezultat care combină cele două rezultate menţionate anterior, cu ajutorul teoremei de punct fix a lui Krasonselskii pentru o sumă de doi operatori. Ultimul rezultat se referă la o problemă cu un control multiplicativ pentru care se foloseşte teorema de contracţie a lui Banach.

Continuăm cu **Secţiunea 4.2** unde folosim teoremele de punct fix ale lui Perov, Schauder şi Avramescu pentru a demonstra controlabilitatea sistemelor Kolmogorov de ordinul doi.

Rezultatele din acest capitol au fost publicate în lucrarea A. Hofman şi R. Precup [14].

4.1 Controlul ecuaţiilor Kolmogorov de ordinul doi

4.1.1 Probleme cu controlul aditiv

Considerăm următoarea problemă de control a unei ecuaţii Kolmogorov de ordinul doi

$$\begin{cases} \left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)' = f(t, x(t)) - \lambda \\ x(0) = a, \quad x'(0) = 0 \\ x > 0 \text{ pe } [0, T], \quad x(T) = x_T, \end{cases} \tag{4.1}$$

unde $a,\ x_T > 0$, iar controlul aditiv λ este scalar.

Primul nostru rezultat este o teoremă de existenţă şi unicitate a soluţiei (x, λ) astfel încât x să fie situat într-o bilă de rază ρ din spaţiul $C[0, T]$ înzestrat cu norma Chebyshev

$$\|x\|_\infty = \max_{t \in [0,T]} |x(t)|.$$

Notăm

$$\alpha = \ln a, \quad u_T = \ln x_T, \quad \gamma = 2\frac{\alpha - u_T}{T^2}, \quad R = \ln \rho$$

şi pentru un număr nenegativ L, în cazul în care $L = 0$, prin $\frac{1}{L}$ înţelegem $+\infty$.

Teorema 4.1. *Fie $L \in \mathbb{R}_+$ şi $\rho > 0$. Presupunem că*

$$\exp(\max\{|\alpha|, |u_T|\} + 1) \leq \rho < \frac{2}{LT^2}, \tag{4.2}$$

funcţia $f : [0, T] \times [0, \rho] \to \mathbb{R}$ este continuă, $f(\cdot, 0) \equiv 0$ şi satisface condiţia Lipschitz

$$|f(t, v) - f(t, \overline{v})| \leq L|v - \overline{v}|, \tag{4.3}$$

pentru orice $t \in [0, T]$, $v, \overline{v} \in [0, \rho]$. Atunci problema de control are o unică soluţie (x^*, λ^*) cu $x^* > 0$, $\|x^*\|_\infty \leq \rho$ şi

$$\lambda^* = \frac{2}{T^2}\left(\ln\frac{a}{x_T} + \int_0^T \int_0^\tau f(s, x^*(s))ds d\tau\right). \tag{4.4}$$

Remarca 4.1. *Dacă nu cerem ca soluţia să satisfacă $\|x^*\|_\infty \leq \rho$, adică raza ρ nu este dată dinainte, dar presupunem totuşi că $f : [0, T] \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este continuă şi satisface condiţia Lipschitz (4.3) pentru orice $t \in [0, T]$, $v, \overline{v} \in [0, +\infty)$, pentru L cu*

$$\exp(\max\{|\alpha|, |u_T|\} + 1) < \frac{2}{LT^2},$$

atunci putem concluziona că problema de control are o soluţie unică (x^*, λ^*) cu

$x^* > 0$ şi

$$\|x^*\|_\infty < \frac{2}{LT^2}.$$

Într-adevăr pentru existenţă este suficient să luăm orice număr ρ ca în (4.2) şi să aplicăm rezultatul anterior. Pentru unicitate, presupunem că x^{**} provine dintr-o altă soluţie. Atunci $\|x^*\|_\infty \leq \rho < \|x^{**}\|_\infty < \frac{2}{LT^2}$, ceea ce contrazice concluzia Teoremei 4.1 aplicată pentru $\rho' = \|x^{**}\|_\infty$ în locul lui ρ.

Folosind teorema de punct fix a lui Schauder, nu avem nevoie ca f să satisfacă o condiţie Lipschitz. În schimb, vom presupune o condiţie de creştere logaritmică.

Teorema 4.2. *Presupunem că funcţia $f : [0, T] \times [0, \rho] \to \mathbb{R}$ este continuă şi satisface condiţia de creştere*

$$|f(t, v)| \leq l_1 |\ln v| + l_2, \tag{4.5}$$

pentru orice $t \in [0, T]$, $v \in (0, \rho]$ şi anumite constante $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+$ cu $l_1 < \frac{2}{T^2}$. În plus, presupunem că

$$\rho \geq \exp\left(\frac{2\max\{|\alpha|, |u_T|\} + T^2 l_2}{2 - T^2 l_1}\right). \tag{4.6}$$

Atunci problema de control (4.1) are cel puţin o soluţie (x^*, λ^*) cu $x^* > 0$, $\|x^*\|_\infty \leq \rho$ şi λ^* este dat de (4.4).

Remarca 4.2. *Aici, din nou, dacă nu avem nevoie ca soluţia să satisfacă $\|x^*\|_\infty \leq \rho$, adică raza ρ nu este dată apriori, dar presupunem totuşi că $f : [0, T] \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este continuă şi satisface condiţia de creştere (4.5) pentru orice $t \in [0, T]$, $v \in (0, +\infty)$ şi constantele $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+$ cu $l_1 < \frac{2}{T^2}$, atunci problema de control are cel puţin o soluţie. Această afirmaţie este evidentă dacă folosim rezultatul de mai sus pentru oricare $\rho \geq \rho_0$, unde*

$$\rho_0 = \exp\left(\frac{2\max\{|\alpha|, |u_T|\} + T^2 l_2}{2 - T^2 l_1}\right).$$

Luând în particular $\rho = \rho_0$, găsim o soluţie $\|x^*\|_\infty \leq \rho_0$.

Următorul rezultat combină cele două anterioare presupunând că f se reprezintă ca $f = f_1 + f_2$, unde f_1 satisface o condiţie Lipschitz în timp ce f_2 satisface o condiţie de creştere logaritmică. Rezultatul se bazează pe teorema de punct fix a lui Krasnoselskii pentru o sumă de doi operatori. Aici sign $L = 1$ dacă $L > 0$ şi sign $L = 0$ dacă $L = 0$.

Teorema 4.3. *Presupunem că funcţia $f : [0, T] \times [0, \rho] \to \mathbb{R}$ este continuă şi se reprezintă ca $f = f_1 + f_2$, unde f_1 este ca în Teorema 4.1 şi f_2 este ca în Teorema*

4.2. În plus, să presupunem că

$$\rho \geq \exp\left(\frac{2\max\{|\alpha|,|u_T|\}+T^2 l_2+2sign\ L}{2-T^2 l_1}\right). \tag{4.7}$$

Atunci problema de control (4.1) are cel puţin o soluţie (x^*,λ^*) *cu* $x^*>0,\ \|x^*\|_\infty \leq \rho$ *şi* λ^* *dat de (4.4).*

Deoarece $f=f_1+f_2$ se observă că dacă $L>0$ şi $f_2=0$ atunci $f=f_1$ şi se reduce la Teorema 4.1 (unde $l_1=l_2=0$), iar Teorema 4.2 se reduce la Teorema 4.3 dacă $f_1=0$, când $L=0$ şi $f=f_2$.

4.1.2 Probleme cu control multiplicativ

Considerăm următoarea problemă de control

$$\begin{cases} \left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)' = \lambda f(t,x(t)) \\ x(0)=a, \quad x'(0)=0 \\ x>0 \text{ pe } [0,T], \quad x(T)=x_T, \end{cases} \tag{4.8}$$

cu parametrul de control multiplicativ λ.

Avem următorul rezultat asupra controlabilităţii unice în ipoteza că o margine este dată pentru soluţiile pozitive ale ecuaţiei.

Teorema 4.4. *Fie*

$$\rho \geq \exp\left(|\alpha|+|u_T-\alpha|\right),$$

$\alpha \neq u_T$ *şi* $f:[0,T]\times[0,\rho]\to(0,+\infty)$ *o funcţie continuă care satisface condiţia Lipschitz*

$$|f(t,x)-f(t,y)| \leq L|x-y|$$

pentru orice $t\in[0,T]$ *şi* $x,y\in[0,\rho]$. *Dacă*

$$L<\frac{f_\rho}{\rho T^2|u_T-\alpha|},$$

unde $f_\rho := \int_0^T\int_0^\tau \min_{x\in\left[\frac{1}{\rho},\rho\right]} f(s,x)dsd\tau$, *atunci există o soluţie unică* (x^*,λ^*) *pentru problema de control (4.8) cu* $x^*>0,\ \|x^*\|_\infty\leq\rho$ *şi*

$$\lambda^*=\frac{u_T-\alpha}{\int_0^T\int_0^\tau f(s,x^*)dsd\tau}.$$

4.2 Controlul sistemelor Kolmogorov de ordinul doi

Considerăm următoarea problemă de control pentru un sistem Kolmogorov de ordinul doi

$$\begin{cases} \left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)' = f(x(t), y(t)) - \lambda \\ \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' = g(x(t), y(t)) - \mu \\ x(0) = a,\ x'(0) = 0, \quad y(0) = b,\ y'(0) = 0 \\ x\left(T\right) = x_T, \quad y\left(T\right) = y_T, \end{cases} \tag{4.9}$$

unde $a, b,\ x_T,\ y_T > 0$ iar controalele λ şi μ sunt scalare.

Notăm

$$\begin{aligned} & R = \ln \rho, \quad u_T = \ln x_T, \quad v_T = \ln y_T, \quad \alpha = \ln a, \quad \beta = \ln b, \\ & \gamma = \frac{2}{T^2}\left(\alpha - u_T\right), \quad \theta = \frac{2}{T^2}\left(\beta - v_T\right). \end{aligned}$$

Următoarea teoremă garantează controlabilitatea unică a sistemului într-o bilă de o rază dată.

Teorema 4.5. *Fie*

$$\rho \geq \exp\left(1 + \max\left\{\left|\alpha\right|, \left|u_T\right|, \left|\beta\right|, \left|v_T\right|\right\}\right) \tag{4.10}$$

şi funcţiile $f, g : [0, \rho]^2 \to \mathbb{R},\ f\left(0, \cdot\right) \equiv 0,\ g\left(\cdot, 0\right) \equiv 0$ *astfel încât*

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(\overline{x}, \overline{y})| & \leq a_{11}|x - \overline{x}| + a_{12}|y - \overline{y}|, \\ |g(x, y) - g(\overline{x}, \overline{y})| & \leq a_{21}|x - \overline{x}| + a_{22}|y - \overline{y}|, \end{aligned}$$

pentru orice $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in [0, \rho]$ *unde* $a_{ij}\ \ (i, j = 1, 2)$ *sunt constante nenegative astfel încât matricea*

$$M = \frac{\rho T^2}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

este convergentă la zero. Atunci problema de control are o soluţie unică $(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*)$ *cu* $x^*, y^* > 0$ *şi* $\|x^*\|_\infty,\ \|y^*\|_\infty \leq \rho$.

Dacă în loc de condiţiile Lipschitz funcţiile f şi g satisfac condiţiile de creştere logaritmică, atunci avem următorul rezultat de existenţă.

Teorema 4.6. *Fie* $f, g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ *continue astfel încât satisfac condiţiile de creştere* *logaritmică*

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &\leq a_{11}\,|\ln x| + a_{12}\,|\ln y| + b_1, \\ |g(x,y)| &\leq a_{21}\,|\ln x| + a_{22}\,|\ln y| + b_2, \end{aligned} \tag{4.11}$$

pentru orice $x, y \in (0, \infty)$ *şi constantele* $a_{ij},\ b_i \in \mathbb{R}_+\ (i, j = 1, 2)$. *Atunci, pentru orice* $T > 0$ *pentru care matricea*

$$M = \frac{T^2}{2}\,[a_{ij}]_{1 \leq i,j \leq 2}$$

este convergentă la zero, problema de control (4.9) are cel puţin o soluţie $(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*)$ *cu* $x^* > 0$ *şi* $y^* > 0$.

Încheiem acest capitol cu o aplicaţie la problema de control (4.9) a teoremei de punct fix a lui Avramescu atunci când f satisface o condiţie Lipschitz doar în raport cu prima variabilă, iar g are o creştere logaritmică în a doua variabilă.

Teorema 4.7. *Fie* ρ *astfel încât*

$$\rho \geq \max\left\{\exp\left(1 + \max\left\{|\alpha|, |u_T|\right\}\right),\ \exp\frac{2\max\left\{|\beta|, |v_T|\right\} + T^2 c}{2 - T^2 b}\right\} \tag{4.12}$$

cu $f, g : [0, \rho]^2 \to \mathbb{R}$ *continue cu* $f(0, \cdot) \equiv 0$. *Presupunem că*

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(\overline{x}, y)| &\leq a\,|x - \overline{x}| \quad \text{pentru orice } x, \overline{x}, y \in [0, \rho], \\ |g(x,y)| &\leq b\,|\ln y| + c \quad \text{pentru orice } x \in [0, \rho],\ y \in (0, \rho], \end{aligned}$$

unde $a < \frac{2}{\rho T^2}$ *şi* $b < \frac{2}{T^2}$. *Atunci problema (4.9) are cel puţin o soluţie* $(x^*, y^*, \lambda^*, \mu^*)$ *cu* $x^*, y^* > 0$ *şi* $\|x^*\|_\infty, \|y^*\|_\infty \leq \rho$.

Capitolul 5

Metode de punct fix cu operatori multivoci pentru probleme de control

În acest capitol ne ocupăm de probleme de control pentru ecuaţiile de ordinul întâi de tip Kolmogorov, în care condiţia de controlabilitate este dată de o incluziune. Folosim tehnica punctului fix bazată pe teoremele lui Nadler, Bohnenblust-Karlin şi pe versiunea multivocă a teoremei lui Krasonselskii pentru o sumă de doi operatori [9, 18, 25]. Pentru alte tehnici de punct fix în teoria controlului ne referim la [7, 30].

Acest capitol cuprinde trei secţiuni. În **Secţiunea 5.1,** prezentăm primul rezultat care se referă la controlul ecuaţiilor Kolmogorov de ordinul întâi pentru cazul multivoc, unde am utilizat teorema de punct fix a lui Nadler demonstrând existenţa soluţiei într-o bilă de rază ρ a spaţiului $C[0,T]$ înzestrat cu norma Chebyshev. În **Secţiunea 5.2** am utilizat teorema de punct fix a lui Bohnenblust-Karlin considerând în locul condiţiei Lipschitz asupra funcţiei f, mai general, o condiţie de creştere cel mult liniară. În cele din urmă, în **Secţiunea 5.3** am prezentat o aplicaţie a versiunii multivoce a teoremei de punct fix a lui Krasonselskii obţinută în [25]. Aceasta garantează existenţa a cel puţin unei soluţii a problemei de control.

Rezultatele din acest capitol au fost publicate în A. Hofman [12].

Considerăm problema de control

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)f(t,x(t)) - \lambda x \\ x(0) = x_0 \\ x > 0 \text{ pe } \; [0,T], \;\; x_T := x(T) \in [a,b], \end{cases} \tag{5.1}$$

unde condiţia de controlabilitate este de tip incluziune, mai precis $x(T) \in [a,b]$. Aici $a, b \in \mathbb{R}_+$ iar $\lambda \in \mathbb{R}$ este parametrul de control.

5.1 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Nadler

Primul nostru rezultat este o teoremă de existenţă a soluţiei (x, λ) a problemei de control cu x localizat într-o bilă de rază ρ a spaţiului $C[0,T]$ înzestrat cu norma Chebyshev $\|x\|_\infty = \max_{t\in[0,T]} |x(t)|$. În cele ce urmează considerăm notaţiile:

$$\alpha = \ln a, \quad \beta = \ln b, \; u_0 = \ln x_0, \; u_T = \ln x_T, \; R = \ln \rho.$$

Pentru a demonstra rezultatul nostru avem nevoie de următoarea lemă.

Lema 5.1. *Fie $(X, ||\cdot||)$ un spaţiu normat, x_1 şi $x_2 \in X$ şi M o submulţime mărginită a lui X. Atunci avem*

$$H(x_1 + M, x_2 + M) \leq ||x_1 - x_2||.$$

Lema de mai sus se aplică atunci când pentru un operator N, valoarea $N(u)$ este suma unei funcţii cu un interval de funcţii.

Teorema 5.1. *Fie $\rho > 0$ şi funcţia $f : [0,T] \times [0,\rho] \to \mathbb{R}$ continuă, astfel încât $f(\cdot, 0) \equiv 0$ şi următoarea condiţie Lipschitz*

$$|f(t,v) - f(t,\overline{v})| \leq L|v - \overline{v}|, \tag{5.2}$$

este satisfăcută pentru orice $t \in [0,T]$, $v, \overline{v} \in [0,\rho]$, cu $0 < L < \frac{1}{\rho T}$. În plus, presupunem că

$$\rho \geq \exp\left(|u_0| + \max\{\beta, |\alpha|\} + 1\right). \tag{5.3}$$

Atunci problema de control (5.1) are cel puţin o soluţie (x^*, λ^*) cu $x^* > 0$, $\|x^*\|_\infty \leq \rho$ şi

$$\lambda^* \in \left[\frac{1}{T}\left(u_0 - \beta + \int_0^T f(s, x^*(s))ds\right), \; \frac{1}{T}\left(u_0 - \alpha + \int_0^T f(s, x^*(s))ds\right)\right]. \tag{5.4}$$

5.2 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Bohnenblust-Karlin

Folosind teorema de punct fix a lui Bohnenblust-Karlin, nu avem nevoie ca f să satisfacă o condiţie Lipschitz. În schimb vom presupune o condiţie de creştere logaritmică.

Teorema 5.2. *Presupunem că funcţia* $f : [0,T] \times [0,\rho] \to \mathbb{R}$ *este continuă şi satisface condiţia de creştere*

$$|f(t,v)| \le l_1 |\ln v| + l_2, \tag{5.5}$$

pentru orice $t \in [0,T]$, $v \in (0,\rho]$ *şi unele constante* $l_1, l_2 \in \mathbb{R}_+$ *cu* $l_1 < \frac{1}{T}$. *În plus, să presupunem că*

$$\rho \ge \exp\left(\frac{C + l_2 T}{1 - l_1 T}\right), \tag{5.6}$$

unde $C := |u_0| + \max\{\beta, |\alpha|\}$. *Atunci problema de control (5.1) are cel puţin o soluţie* (x^*, λ^*) *cu* $x^* > 0$, $\|x^*\|_\infty \le \rho$ *şi* λ^* *satisfăcând (5.4).*

Lema 5.2. *Fie* N *un operator multivoc de la* $D \subset C\,[0,T]$, *la submulţimile lui* $C\,[0,T]$ *definit prin*

$$N(u)(t) = \Gamma(u)(t) + \frac{t}{T}[\alpha,\beta],$$

unde $\Gamma : D \to C\,[0,T]$ *este un operator univoc continuu şi prin* $\frac{t}{T}[\alpha,\beta]$ *înţelegem mulţimea de funcţii continue*

$$\left\{ z \in C\,[0,T] : \; z(t) = \frac{t}{T}\zeta, \quad \zeta \in [\alpha,\beta] \right\}.$$

Atunci operatorul multivoc N *este superior semicontinuu.*

5.3 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Krasnoselskii

Motivaţi de expresia operatorului $\Gamma(u)$, care conţine atât termeni integrali de tip Volterra, cât şi de tip Fredholm, în cele ce urmează vom utiliza versiunea multivocă a teoremei de punct fix a lui Krasnoselskii pentru suma a doi operatori.

Teorema 5.3. *Fie* $f : [0,T] \times [0,\rho] \to [-C, C]$ *continuă şi*

$$|f(t,v) - f(t,\overline{v})| \le L|v - \overline{v}|, \tag{5.7}$$

pentru orice $v, \overline{v} \in [0,\rho]$, $t \in [0,T]$, *unde* $C, L > 0$. *În plus, presupunem că*

$$\rho \ge \exp\left(|u_0| + \max\{\beta, |\alpha|\} + 2TC\right). \tag{5.8}$$

Atunci problema de control (5.1) are soluţii (x^*, λ^*) *cu* $x^* > 0$, $||x^*||_\infty \le \rho$ *şi* λ^* *ca în (5.4).*

În comparaţie cu rezultatul dat de Teorema 5.1, în acest caz, nu există nici o restricţie asupra constantei Lipschitz L.

Capitolul 6

Algoritmi pentru rezolvarea problemelor de control relative la sisteme Kolmogorov

În acest capitol, vom utiliza metoda sub şi supra soluţiilor pentru a construi un algoritm iterativ care permite obţinerea soluţiei problemei de control pentru sisteme de tip Kolmogorov. Vom demonstra că, sub ipoteza unor condiţii relativ simple, algoritmul propus este convergent către soluţia problemei. Rezultatul privind convergenţa algoritmului reprezintă totodată un rezultat de existenţă pentru problema de control.

Pe parcursul acestui capitol, studiem două tipuri de sisteme de tip Kolmogorov. Aceste sisteme depind de un parametru real λ, care reprezintă variabila de control, iar scopul nostru este găsirea unei soluţii (x, y) astfel încât următoarea condiţie de control să fie satisfăcută:

$$\varphi(x, y) = 0.$$

Funcţia $\varphi : C([0, T]; \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, generală, care satisface anumite condiţii specifice. Un exemplu relevant în practică de alegere a lui φ este următorul

$$\varphi(x, y) = \alpha x(T) + \beta y(T) - \gamma, \quad \text{unde } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Algoritmul pe care îl propunem în cele ce urmează necesită ca problema de control (sistemul) să satisfacă două cerinţe fundamentale: pentru orice valoare a lui λ, să admită o soluţie unică şi ca această soluţie să depindă continuu de parametrul λ. Aceste cerinţe sunt esenţiale pentru a asigura stabilitatea şi convergenţa metodei propuse.

Acest algoritm se aplică în prezenţa unei subsoluţii $(\underline{x}, \underline{y}, 0)$ şi a unei suprasoluţii $(\overline{x}, \overline{y}, 1)$ a problemei de control.

Tripletul $(\underline{x}, \underline{y}, 0)$ este o subsoluţie a problemei de control dacă $(\underline{x}, \underline{y})$ este soluţie a problemei Cauchy şi $\varphi(\underline{x}, \underline{y}) < 0$ iar $(\overline{x}, \overline{y}, 1)$ este o suprasoluţie a problemei de control dacă $(\overline{x}, \overline{y})$ este soluţie a problemei Cauchy şi $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) > 0$.

Forma generală a algoritmului este următoarea:

Algoritm 1 (Metoda bisecţiei)**.**

Pasul 1. Iniţializăm $\underline{\lambda}_0 := 0$, $\overline{\lambda}_0 := 1$, $\underline{x}_0 := \underline{x}$, $\underline{y}_0 := \underline{y}$, $\overline{x}_0 := \overline{x}$, $\overline{y}_0 := \overline{y}$.

Pasul 2. La orice iteraţie $k \geq 1$, *definim*

$$\lambda_k := \frac{\underline{\lambda}_{k-1} + \overline{\lambda}_{k-1}}{2},$$

și rezolvăm sistemul pentru $\lambda := \lambda_k$, *obţinând soluţia* (x_k, y_k). *Dacă* $\varphi(x_k, y_k) < 0$, *atunci pentru urmatorul pas alegem*

$$\underline{\lambda}_k := \lambda_k,\ \overline{\lambda}_k := \overline{\lambda}_{k-1},\ \underline{x}_k := x_k,\ \underline{y}_k := y_k,\ \overline{x}_k := \overline{x}_{k-1},\ \overline{y}_k := \overline{y}_{k-1},$$

altfel, dacă $\varphi(x_k, y_k) > 0$ *vom considera*

$$\underline{\lambda}_k := \underline{\lambda}_{k-1},\ \overline{\lambda}_k := \lambda_k,\ \underline{x}_k := \underline{x}_{k-1},\ \underline{y}_k := \underline{y}_{k-1},\ \overline{x}_k := x_k,\ \overline{y}_k := y_k,$$

iar mai apoi repetăm Pasul 2 pentru $k := k + 1$.

Pasul 3 (Condiția de oprire).

Algoritmul se opreşte atunci când

$$|\varphi(x_k, y_k)| < \delta,$$

unde $\delta > 0$ *reprezintă o eroare acceptată.*

Capitolul de faţă este structurat în două secţiuni. În **Secţiunea 6.1**, utilizăm algoritmul bisecţiei pentru a determina o soluţie a unei probleme de tip Kolmogorov de ordinul întâi, astfel încât condiţia de control să fie îndeplinită. Vom stabili condiţiile în care sistemul admite o soluţie unică şi vom demonstra că aceasta depinde continuu de parametrul de control. De asemenea, vom demonstra convergenţa algoritmului bisecţiei, obţinând astfel o soluţie pentru problema de control considerată.

Rezultatele din această secţiune au fost publicate în lucrarea A. Hofman [11].

Pentru **Secţiunea 6.2** vom proceda într-un mod similar cu cel din prima secţiune, însă pentru un sistem de tip Kolmogorov de ordinul doi. În acest context, utilizând metoda sub şi supra soluţiilor, vom adapta algoritmul bisecţiei pentru problema considerată şi vom demonstra convergenţa acestuia. De asemenea, vom analiza atât algoritmul prin care se obţine o soluţie exactă, cât şi un algoritm aproximativ.

Rezultatele din această secţiune au fost publicate în lucrarea A. Hofman [10].

6.1 Metoda sub şi supra soluţiilor pentru sisteme de tip Kolmogorov de ordinul întâi

În cele ce urmează, vom prezenta problema de control căreia îi vom aplica algoritmul bisecţiei. Pentru început, considerăm o problemă cu controlul ratei de creştere a primei ecuaţii, anume problema

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)f(x(t), y(t)) - \lambda \\ y'(t) = y(t)g(x(t), y(t)) \\ x(0) = x_0, \ y(0) = y_0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Aici λ este constant, iar condiţia de controlabilitate este

$$\varphi(x, y) = 0,$$

unde funcţia φ se presupune a fi continuă.

Pentru a putea utiliza algoritmul de mai sus, este necesar, în primul rând, să determinăm condiţiile în care problema (6.1) admite o soluţie unică şi mai mult, aceasta este dependentă continuu de parametrul λ.

Lema 6.1. *Presupunem că $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii Lipschitz continue şi că $|f| \le C_f$, $|g| \le C_g$. Atunci, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, problema Cauchy* (6.1) *admite o soluţie unică, care depinde continuu de parametrul λ.*

Pentru a putea utiliza algoritmul de mai sus, este necesar, în primul rând, să determinăm condiţiile în care problema (6.1) admite o soluţie unică şi mai mult, aceasta este dependentă continuu de parametrul λ.

Lema 6.2. *Presupunem că $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sunt funcţii Lipschitz continue şi că $|f| \le C_f$, $|g| \le C_g$. Atunci, pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, problema Cauchy* (6.1) *admite o soluţie unică, care depinde continuu de parametrul λ.*

Alternativ, avem

Lema 6.3. *Fie $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încât funcţiile $xf(x, y)$ şi $yg(x, y)$ sunt Lipschitz continue pe spaţiul $\mathbb{R}^2$. Atunci pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$, problema Cauchy* (6.1) *are o soluţie unică ce depinde continuu de parametrul λ.*

Din Lemele 6.2 şi 6.3, obţinem două rezultate de convergenţă bazate pe Algoritmul 1.

Teorema 6.1. *Presupunem că* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *sunt funcţii Lipschitz continue pe* $\mathbb{R}^2$ *şi că* $|f| \leq C_f$, $|g| \leq C_g$. *În plus, presupunem că*

$$\varphi(S_1(0), S_2(0)) < 0 \text{ şi } \varphi(S_1(1), S_2(1)) > 0. \tag{6.2}$$

Atunci, Algoritmul 1 este convergent către o soluţie a problemei de control.

În mod similar, folosind Lema 6.3 se poate demonstra rezultatul următor.

Teorema 6.2. *Fie* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *astfel încât funcţiile* $xf(x, y)$, $yg(x, y)$ *sunt Lipschitz continue pe spaţiul* $\mathbb{R}^2$. *Dacă* (6.2) *are loc, atunci algoritmul este convergent la o soluţie a problemei de control.*

6.2 Metoda sub şi supra soluţiilor pentru controlul sistemelor de tip Kolmogorov de ordinul doi

În acestă Subsecţiune, folosind o abordare similară cu cea precedentă, vom introduce o metodă de sub şi supra soluţii pentru controlul sistemelor Kolmogorov de ordinul doi. Sunt definiţi doi algoritmi iterativi, unul exact şi altul aproximativ şi se studiază convergenţa lor. Metoda de lucru utilizează tehnica punctului fix bazată pe teorema lui Perov, matrice convergente la zero şi norme de tip Bielecki.

Aşadar ne ocupăm de probleme de control de tipul

$$\begin{cases} \left(\frac{x'(t)}{x(t)}\right)' = f(x(t), y(t), \lambda) \\ \left(\frac{y'(t)}{y(t)}\right)' = g(x(t), y(t), \lambda), \end{cases} \tag{6.3}$$

unde $t \in [0, T]$, având condiţiile iniţiale

$$x(0) = a, \quad x'(0) = 0, \quad y(0) = b, \; y'(0) = 0, \tag{6.4}$$

unde $a, b > 0$. Aici λ este un vector din $\mathbb{R}^m$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$. Astfel de probleme au aplicaţii în diverse domenii, în special în biomatematică. Condiţia de controlabilitate considerată este de forma

$$\Psi(x(T), y(T)) = 0,$$

unde $\Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă. De exemplu, putem considera

$$\Psi(s, \tau) = s - k\tau \quad \text{sau} \quad \Psi(s, \tau) = s - k,$$

cu k este o constantă dată.

Pentru început, vom prezenta noţiunile de sub şi supra soluţie pentru astfel de probleme de control (vezi [23], [11]).

Definiţia 6.1. *Numim subsoluţie a problemei de control, tripletul* $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\lambda})$ *unde* $(\underline{x}, \underline{y})$ *este o soluţie a problemei Cauchy cu* $\lambda = \underline{\lambda}$ *şi*

$$\Psi(\underline{x}(T), \underline{y}(T)) < 0.$$

Definiţia 6.2. *Tripletul* $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\lambda})$ *este o suprasoluţie a problemei de control dacă* $(\overline{x}, \overline{y})$ *este soluţie a problemei Cauchy cu* $\lambda = \overline{\lambda}$ *şi*

$$\Psi(\overline{x}(T), \overline{y}(T)) > 0.$$

Sub şi supra soluţiile pot fi obţinute cu ajutorul computerului prin încercări repetate pentru diferite valori ale variabilelor de control.

Pentru convergenţa algoritmului, trebuie să garantăm că problema Cauchy (6.3)-(6.4) are o soluţie unică pentru fiecare λ şi că aceasta depinde continuu de parametrul λ.

Teorema 6.3. *Fie* $\alpha = \ln a, \ \beta = \ln b$ *şi*

$$\rho \geq \exp\left(1 + \max\left\{|\alpha|, |\beta|\right\}\right). \tag{6.5}$$

Presupunem că $f, g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *sunt continue astfel încât* $f(0, y, \lambda) \equiv 0, \ g(x, 0, \lambda) \equiv 0$, *pentru orice* $x, y \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *şi satisfac condiţiile Lipschitz*

$$\begin{aligned} |f(x,y,\lambda) - f(\overline{x},\overline{y},\mu)| &\leq a_{11}|x-\overline{x}| + a_{12}|y-\overline{y}| + a_{13}|\lambda-\mu|, \\ |g(x,y,\lambda) - g(\overline{x},\overline{y},\mu)| &\leq a_{21}|x-\overline{x}| + a_{22}|y-\overline{y}| + a_{23}|\lambda-\mu|, \end{aligned}$$

pentru orice $x, y, \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^m$ *şi anumite numere nenegative* a_{ij} $(i = 1, 2; \ j = 1, 2, 3)$. *În plus, să presupunem că matricea*

$$M = \frac{\rho T^2}{2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{6.6}$$

este convergentă la zero. Atunci pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *problema Cauchy (6.3)-(6.4) are o soluţie unică* (x, y) *ce satisface* $\|x\|_\infty \leq \rho$ *şi* $\|y\|_\infty \leq \rho$ *şi depinde continuu de parametrul* λ.

În cele ce urmează, prezentăm un algoritm care, în limită, converge către soluţia problemei de control. Îl numim algoritm exact, deoarece, repetând procesul de un număr (posibil infinit) de ori, se ajunge la soluţia problemei.

6.2.1 Algoritmul exact.

Fie $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{\lambda})$ şi $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{\lambda})$ sub şi supra soluţii ale problemei de control cu $\underline{\lambda} < \overline{\lambda}$.

Pasul 1. Iniţializare $\underline{\lambda}_0 := \underline{\lambda}$, $\overline{\lambda}_0 := \overline{\lambda}$, $\underline{x}_0 := \underline{x}$, $\underline{y}_0 := \underline{y}$, $\overline{x}_0 := \overline{x}$, $\overline{y}_0 := \overline{y}$.

Pasul 2. La orice iteraţie $k \geq 1$, definim $\lambda_k := \dfrac{\underline{\lambda}_{k-1} + \overline{\lambda}_{k-1}}{2}$ şi rezolvăm problema (6.3)-(6.4) pentru $\lambda = \lambda_k$. Obţinem o soluţie

$$(x_k, y_k) = (e^{S_1(\lambda_k)}, e^{S_2(\lambda_k)}).$$

Dacă $\Psi(x_k(T), y_k(T)) < 0$, punem

$$\underline{\lambda}_k := \lambda_k,\ \overline{\lambda}_k := \overline{\lambda}_{k-1},\ \underline{x}_k := x_k,\ \underline{y}_k := y_k,\ \overline{x}_k := \overline{x}_{k-1},\ \overline{y}_k := \overline{y}_{k-1},$$

altfel, pentru $\Psi(x_k(T), y_k(T)) > 0$, luăm

$$\underline{\lambda}_k := \underline{\lambda}_{k-1},\ \overline{\lambda}_k := \lambda_k,\ \underline{x}_k := \underline{x}_{k-1},\ \underline{y}_k := \underline{y}_{k-1},\ \overline{x}_k := x_k,\ \overline{y}_k := y_k$$

şi repetăm Pasul 2 pentru $k := k + 1$. Evident, dacă $\Psi(x_k(T), y_k(T)) = 0$, avem soluţia şi am terminat.

Pasul 3 (Condiţia de oprire).

Algoritmul se opreşte atunci când

$$|\Psi(x_k, y_k)| < \delta,$$

pentru o anumită eroare acceptată $\delta > 0$.

Folosind Teorema 6.3 putem demonstra convergenţa algoritmului de mai sus.

Teorema 6.4. *În ipotezele Teoremei 6.3, algoritmul este convergent la o soluţie a problemei de control.*

În continuare presupunem că problema Cauchy poate fi rezolvată aproximativ cu o eroare dorită ε. În această situaţie, algoritmul se modifică după cum urmează.

6.2.2 Algoritmul aproximativ.

Fie $\varepsilon > 0$ o eroare admisibilă, $(\underline{\widetilde{x}}, \underline{\widetilde{y}}, \underline{\widetilde{\lambda}})$ şi $(\overline{\widetilde{x}}, \overline{\widetilde{y}}, \overline{\widetilde{\lambda}})$ sub şi supra soluţii ale problemei Cauchy cu o eroare ε.

Pasul 1. Iniţializare $\underline{\lambda}_0 := \underline{\widetilde{\lambda}}$, $\overline{\lambda}_0 := \overline{\widetilde{\lambda}}$, $\underline{\widetilde{x}}_0 := \underline{\widetilde{x}}$, $\underline{\tilde{y}}_0 := \underline{\widetilde{y}}$, $\overline{\widetilde{x}}_0 := \overline{\widetilde{x}}$, $\overline{\widetilde{y}}_0 := \overline{\widetilde{y}}$.

Pasul 2. La orice iteraţie $k \geq 1$, definim $\lambda_k := \dfrac{\underline{\lambda}_{k-1} + \overline{\lambda}_{k-1}}{2}$ şi rezolvăm aproximativ problema Cauchy şi găsim soluţia aproximativă $(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)$.

Dacă $\Psi(\underline{\widetilde{x}}_k(T), \underline{\widetilde{y}}_k(T)) < 0$, atunci punem

$$\underline{\lambda}_k := \lambda_k,\ \overline{\lambda}_k := \overline{\lambda}_{k-1},\ \underline{\widetilde{x}}_k := \widetilde{x}_k,\ \underline{\widetilde{y}}_k := \widetilde{y}_k,\ \overline{\widetilde{x}}_k := \overline{\widetilde{x}}_{k-1},\ \overline{\widetilde{y}}_k := \overline{\widetilde{y}}_{k-1},$$

altfel, dacă $\Psi(\overline{\widetilde{x}}_k(T), \overline{\widetilde{y}}_k(T)) > 0$ luăm

$$\underline{\lambda}_k := \underline{\lambda}_{k-1},\ \overline{\lambda}_k := \lambda_k,\ \underline{\widetilde{x}}_k := \underline{\widetilde{x}}_{k-1},\ \underline{\widetilde{y}}_k := \underline{\widetilde{y}}_{k-1},\ \overline{\widetilde{x}}_k := \widetilde{x}_k,\ \overline{\widetilde{y}}_k := \widetilde{y}_k,$$

şi repetăm Pasul 2 pentru $k := k + 1$.

Pasul 3 (Condiţia de oprire).

Algoritmul se opreşte atunci când

$$|\Psi(\widetilde{x}_k, \widetilde{y}_k)| < \delta,$$

pentru o anumită eroare admisă $\delta > 0$.

Teorema 6.5. *În ipotezele Teoremei 6.3, dacă în plus Ψ satisface*

$$\left|\Psi(t, s) - \Psi(\overline{t}, \overline{s})\right| \leq L(|t - \overline{t}| + |s - \overline{s}|),$$

pentru orice $t, \overline{t}, s, \overline{s} \in \mathbb{R}$, atunci algoritmul aproximativ ne furnizează tripletul (x^*, y^*, λ^*), unde $\lambda^* = \lim_{k\to\infty} \underline{\lambda}_k = \lim_{k\to\infty} \overline{\lambda}_k$, iar perechea (x^*, y^*) este soluţia exactă a problemei Cauchy pentru $\lambda = \lambda^*$ şi

$$\Psi(x^*(T), y^*(T)) \in [-2\varepsilon L, 2\varepsilon L]\,. \tag{6.7}$$

Remarca 6.1. (a) *Conform estimării (6.7) condiţia de controlabilitate este satisfăcută cu o eroare de $2\varepsilon L$.*

(b) *Dacă $(\tilde{x}^*, \tilde{y}^*)$ este o soluţie aproximativă corespunzătoare lui $\lambda = \lambda^*$, cu eroarea ε, atunci*

$$\Psi(\tilde{x}^*(T), \tilde{y}^*(T)) \in [-4\varepsilon L, 4\varepsilon L]\,. \tag{6.8}$$

Într-adevăr, avem că

$$|\Psi(x^*(T), y^*(T)) - \Psi(\tilde{x}^*(T), \tilde{y}^*(T))| \leq L(|x^*(T) - \widetilde{x}^*(T)| + |y^*(T) - \widetilde{y}^*(T)|) \leq 2\varepsilon L.$$

Rezultă că

$$-4\varepsilon L \leq \Psi(x^*(T), y^*(T)) - 2\varepsilon L \leq \Psi(\widetilde{x}^*(T), \widetilde{y}^*(T)) \leq \Psi(x^*(T), y^*(T)) + 2\varepsilon L \leq 4\varepsilon L,$$

adică (6.8).

Bibliografie

[1] L. J. S. Allen. *An Introduction to Mathematical Biology.* Pearson Education, 2006.

[2] C. Avramescu. On a fixed point theorem. *Studii şi Cercetări Matematice*, 22(2):215–221, 1970.

[3] V. Barbu. *Mathematical Methods in Optimization of Differential Systems.* Springer Science+Business Media, Dordrecht, 1994.

[4] V. Barbu. *Differential Equations.* Springer, Cham, 2016.

[5] A. Berman şi R. J. Plemmons. *Nonnegative matrices in the mathematical sciences.* Academic Press: New York, USA, 1997.

[6] F. Brauer şi C. Castillo-Chavez. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology.* Springer, 2012.

[7] J. M. Coron. *Control and Nonlinearity*, volume 136 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, 2007.

[8] L. C. Evans. *Partial Diferential Equations.* AMS, Providence, Rhode Island, 1998.

[9] A. Granas şi J. Dugundji. *Fixed Point Theory.* Springer, New York, 2003.

[10] A. Hofman. Upper and lower solution method for control of second-order Kolmogorov type systems. *J. Numer. Anal. Approx. Theory, 2025, acceptat.*

[11] A. Hofman. An algorithm for solving a control problem for Kolmogorov systems. *Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math*, 68(2):331–340, 2023.

[12] A. Hofman. Fixed point methods with multi-valued operators for control problems. *Discuss. Math. Differ. Incl. Control Optim.*, 44(2):153–165, 2024.

[13] A. Hofman şi R. Precup. On some control problems for Kolmogorov type systems. *Math. Model. Control*, 2(3):90–99, 2022.

[14] A. Hofman şi R. Precup. Control problems for Kolmogorov type second order equations and systems. *J. Fixed Point Theory Appl.*, 27(1):1–18, 2024.

[15] A. Hofman şi R. Precup. Vector fixed point approach to control of Kolmogorov differential systems. *Commun. Contemp. Math.*, 5:1968–1981, 2024.

[16] I. Ş. Haplea, L. G. Parajdi şi R. Precup. On the controllability of a system modeling cell dynamics related to leukemia. *Symmetry*, 13(10):1867, 2021.

[17] A. N. Kolmogorov. Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 7:74–80, 1936.

[18] M. A. Krasnoselskii. Some problems of nonlinear analysis. *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 10:345–409, 1958.

[19] C. Lois-Prados şi R. Precup. Positive periodic solutions for Lotka-Volterra systems with a general attack rate. *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 52, 2020.

[20] J. D. Murray. *An Introduction to Mathematical Biology, Vol. 1.* Springer, New York, 2011.

[21] B. Neiman. *A Mathematical Model of Chronic Myelogenous Leukemia.* Oxford University, Oxford, 2000.

[22] L. G. Parajdi, F. Pătrulescu, R. Precup şi I. Ş. Haplea. Two numerical methods for solving a nonlinear system of integral equations of mixed Volterra-Fredholm type arising from a control problem related to leukemia. *J. Appl. Anal. Comput.*, 18(3):1797–1812, 2023.

[23] L. G. Parajdi, R. Precup şi I. Ş. Haplea. A method of lower and upper solutions for control problems and application to a model of bone marrow transplantion. *Inter. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 33(3):409–418, 2023.

[24] A. I. Perov. On the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations. *Pviblizhen. Met. Reshen. Differ. Uvavn.*, 2:115–134, 1964.

[25] R. I. Petru. A multivalued version of Krasnoselskii's theorem in generalized Banach spaces. *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa*, 22(2):177–192, 2014.

[26] R. Precup. *Methods in Nonlinear Integral Equations.* Springer Science, Dordrecht, 2002.

[27] R. Precup. Fixed point theorems for decomposable multivalued maps and applications. *Math. Z.*, 22(4):843–861, 2003.

[28] R. Precup. *Lecţii de ecuaţii cu derivate parţiale.* Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2004.

[29] R. Precup. The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems. *Math. Comput. Model. Dyn. Syst.*, 49(3):703–708, 2009.

[30] R. Precup. On some applications of the controllability principle for fixed point equations. *Results Appl. Math.*, 13:100236, 2022.

[31] I. A. Rus. *Principles and Applications of Fixed Point Theory.* Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

[32] I. A. Rus. Fixed points, upper and lower fixed points: abstract Gronwall lemmas. *Carpathian J. Math.*, 20(1):125–134, 2004.

[33] K. Sigmund. Kolmogorov and population dynamics. In É. Charpentier, A. Lesne, and N. K. Nikolski, editors, *Kolmogorov's Heritage in Mathematics.* Springer, Berlin, 2007.