

UNIVERSITATEA BABEȘ-BOLYAI  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

**CERCETĂRI DE TEORIE MORSE DISCRETĂ  
ȘI APLICAȚII**

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Conducător științific:

Prof. univ. dr. DORIN ANDRICA

Doctorand:

VASILE REVNIC

CLUJ NAPOCA  
2013

**Cuvinte cheie:** celulă critică, simplex critic, funcții Morse discrete, caracteristica Morse-Smale reală, complexul Morse-Smale, estimarea numărului de simplexe critice

# Cuprins

<b>Introducere</b>	<b>4</b>
<b>1 Teorie Morse pentru CW-complexe regulate</b>	<b>5</b>
1.1 CW-complexe, CW-complexe regulate . . . . .	5
1.2 Funcții Morse discrete pe CW-complexe . . . . .	8
1.3 Teoremele lui Morse pentru CW-complexe regulate . . . . .	9
1.4 Inegalitățile lui Morse în variantă discretă . . . . .	12
1.4.1 Algebra omologică a inegalităților lui Morse. Ordonarea polinoamelor . . . . .	12
1.4.2 Polinomul Poincaré . . . . .	13
1.4.3 Inegalitățile lui Morse . . . . .	13
1.4.4 Câmpuri vectoriale de tip gradient . . . . .	14
1.4.5 Descrierea combinatorială a câmpurilor de tip gradient . . . . .	17
<b>2 Caracteristica Morse-Smale discretă</b>	<b>19</b>
2.1 Funcții Morse pe complexe simpliciale . . . . .	19
2.2 Operații cu funcții Morse discrete . . . . .	20
2.3 Caracteristica Morse-Smale discretă pentru complexe simpliciale . . . . .	22
2.4 Funcții Morse discrete exacte. Funcții Morse discrete F-perfecte . . . . .	23
<b>3 Funcții Morse discrete perfecte</b>	<b>33</b>
3.1 Teorema de clasificare a suprafețelor . . . . .	33
3.2 Condiții suficiente ca o funcție Morse discretă să fie exactă . . . . .	34
3.3 Funcții Morse discrete $\mathbb{Z}$ -perfecte definite pe 2-complexe . . . . .	36
3.4 Funcții Morse discrete F-perfecte definite pe 2-complexe . . . . .	38
<b>4 Optimalitate omologică în teoria Morse discretă</b>	<b>39</b>
4.1 Omologia complexelor de lanțuri . . . . .	39
4.2 Algebrizarea teoriei Morse discrete . . . . .	39
4.3 Teorie Morse discretă și optimalitate . . . . .	43
4.4 Invarianța topologică a numerelor Morse-Smale pentru 3-complexe . . . . .	48
<b>Bibliografie</b>	<b>49</b>

# Introducere

Teoria Morse discretă a fost formulată de Robin Forman într-o serie de lucrări din perioada 1995-2003, articolul de referință fiind [31]. O prezentare detaliată a acestui subiect se poate găsi, de asemenea, în lucrările [30], [35]. Lucrările [33], [36] conțin extinderi ale acestei teorii, în timp ce în lucrările [37], [39], [61] apar unele aplicații.

Teoria Morse discretă se formulează foarte clar în limbajul CW-complexelor. În această lucrare vom prezenta, pe scurt, noțiuni și rezultate fundamentale referitoare la CW-complexe. Acestea reprezintă un tip de spații topologice introduse de J.H.C. Whitehead în [92], [93], cu scopul de a satisface unele cerințe ce apar în mod natural în teoria omotopiei.

Lucrarea este structurată în 4 capitole care asigură unitatea conținutului și relevanța tematicii cercetate. Lucrarea are la bază o bibliografie cu 93 referințe.

Capitolul 1 este structurat în patru secțiuni și are în principal un caracter monografic. Obiectivul principal al acestui capitol este de a prezenta, într-o formă succintă, noțiunile și rezultatele de bază ce vor fi utilizate în capitolele următoare.

Acest capitol se bazează pe publicațiile lui R. Forman [31], [32], G. Cicortaș [20], D. Andrica [2].

Capitolul 2 este structurat în patru secțiuni și conține rezultatele originale ale autorului obținute în studiul caracteristicii Morse-Smale pentru funcții Morse discrete definite pe: cercul unitate  $S^1$ , sfera 2-dimensională  $S^2$ , planul proiectiv real  $P^2(\mathbb{R})$ , sticla lui Klein  $K = P^2(\mathbb{R}) \# P^2(\mathbb{R})$ , banda lui Möbius  $M$ , torul  $T^2 = S^1 \times S^1$ , torul cu 2 găuri  $T_2 = T^2 \# T^2$ , pălăria lui Duncce DH, rezultate menționate în lucrările lui I.C. Lazăr și V. Revnic [57], V. Revnic [81]. Capitolul se bazează pe lucrările lui D. Andrica [2], R. Forman [31], T. Lewiner [59], [60], I.C. Lazăr și V. Revnic [57], V. Revnic [81].

Capitolul 3 este structurat în 4 secțiuni și are un caracter monografic. Sunt prezentate noțiuni de teorie Morse discretă, definiții și proprietăți ale funcțiilor Morse discrete perfecte pe complexe 2-dimensionale. Capitolul se bazează pe lucrările lui M. Armstrong [10], J. Hopcroft și R.E. Tarjan [53], H. Lopes, J. Rossignac, A. Safonova, A. Szymczak și G. Tavares [65], T. Lewiner [59], [60], [61], J.R. Munkers [79], R. Ayala, D. Fernandez-Ternero și J.A. Vilches [11].

Capitolul 4 este structurat în patru secțiuni și conține aspecte cu caracter monografic referitoare la optimalitate obținută prin folosirea complexelor de lanțuri în teoria Morse discretă. Acest capitol se bazează pe publicațiile lui H. Molina-Abril și P. Real [73], [74], [75], A. Hatcker [50], R. Ayala, D. Fernandez-Ternero și J.A. Vilches [11], M.M. Cohen [21], M. Desbrun, E. Konso și Y. Tong [24], S. Eilengerg și S. Mac Lane [29], R. Forman [30], [31], [38], E.E. Moise [77], F. Sergeraert [85], T. Lewiner, H. Lopes, G. Tavares și L. Matmidia [63].

Nu aș vrea să închei această introducere fără a mulțumi domnului prof. univ. dr. Dorin Andrica, conducătorul meu științific, pentru observațiile, sugestiile, sprijinul substanțial și amabilitatea cu care a răspuns întotdeauna solicitărilor mele pe parcursul stagiului de elaborare a prezentei lucrări. Domnului conf. univ. dr. Cornel Pinteș, domnului conf. univ. dr. Paul Blaga, doamnei lect. univ. dr. Liana Țopan, le adresez mulțumiri pentru observațiile pertinente, sugestiile deosebit de utile și ajutorul acordat în realizarea acestei lucrări, în calitate de membri ai comisiei de îndrumare. Doresc de asemenea să adresez sincere mulțumiri membrilor Catedrei de Geometrie de la Universitatea Babeș-Bolyai din Cluj-Napoca, pentru încrederea și sprijinul acordat în realizarea acestei teze.

# Capitolul 1

## Teorie Morse pentru CW-complexe regulate

### 1.1 CW-complexe, CW-complexe regulate

Vom considera doar CW-complexe finite. CW-complexele sunt formate din celule. Pentru a le defini riguros, considerăm următoarele mulțimi:

$B^n = \{x \in E^n : |x| \leq 1\}$ , bila unitate închisă din spațiul Euclidian  $n$ -dimensional  
 $S^{(n-1)} = \{x \in E^n : |x| = 1\}$ , frontiera bilei  $B^n$  (sfera unitate  $(n - 1)$ -dimensională).

**Definiția 1.1.1** O  $n$ -celulă este un spațiu topologic care este omeomorf cu  $\text{int}B^n$ .

O  $n$ -celulă închisă este un spațiu topologic care este omeomorf cu  $B^n$ .

Dacă  $\sigma$  este o  $n$ -celulă închisă, atunci cu  $\dot{\sigma}$  notăm submulțimea lui  $\sigma$  corespunzătoare sferei  $S^{(n-1)} \subset B^n$  printr-un omeomorfism între  $B^n$  și  $\sigma$ .

**Definiția 1.1.2** O celulă este un spațiu topologic care este o  $n$ -celulă pentru un  $n$  oarecare.

Operația fundamentală pentru CW-complexe este aceea de **atașare de celule**.

**Definiția 1.1.3** Fie  $X$  un spațiu topologic,  $\sigma$  o  $n$ -celulă și  $f : \dot{\sigma} \rightarrow X$  o funcție continuă.

Fie  $X \cup_f \sigma$  suma disjunctă dintre  $X$  și  $\sigma$ , factorizată în raport cu relația de echivalență prin care un punct  $s \in \dot{\sigma}$  se identifică cu  $f(s) \in X$ .

Spunem că spațiul  $X \cup_f \sigma$  a fost obținut din  $X$  prin atașarea celulei  $\sigma$  iar funcția  $f$  este numită **aplicație de atașare**.

De fapt, prin acest proces  $\sigma$  este lipită lui  $X$  prin intermediul frontierei sale. Trebuie remarcat faptul că aplicația de atașare trebuie definită pe întreg  $\dot{\sigma}$ , asta înseamnă că toată frontiera lui  $\sigma$  trebuie lipită de  $X$ .

Tipul de omotopie al spațiului  $X \cup_f \sigma$  depinde doar de tipul de omotopie a lui  $X$  și de clasa de omotopie a lui  $f$ .

**Exemplul 1.1.4** Dacă  $X$  este un cerc, atunci Figura 1.1(i) ne arată cum poate fi atașată o 1-celulă la cerc. Atașarea unei 1-celule la cerc nu ne poate conduce la spațiul ilustrat în Figura 1.1(ii) deoarece nu întreaga frontieră este lipită de cerc.

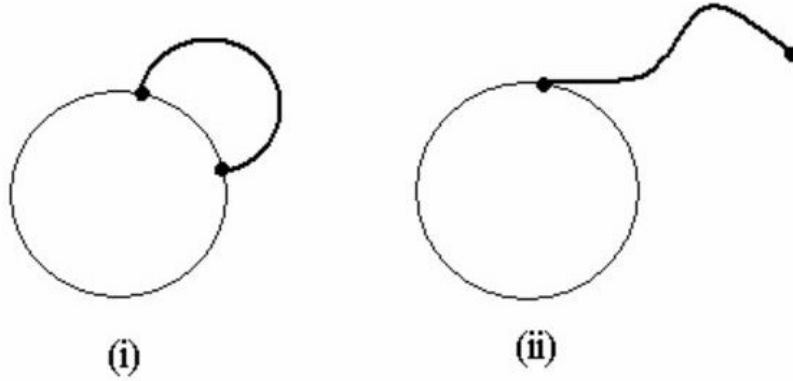


Figura 1.1. (i) 1-celulă atașată la cerc; (ii) 1-celulă neatașată la cerc

**Definiția 1.1.5** Un spațiu  $X$  este un **CW-complex** dacă se construiește prin atașări succesive de celule, în felul următor:

1. Pornim cu o mulțime discretă  $X_0$ , ale cărei puncte vor fi privite ca 0-celule și se vor numi vârfuri.

2. Inductiv, formăm scheletul de ordin  $n$ , notat  $X_n$ , atașând spațiului  $X_{n-1}$ ,  $n$ -celulele  $e_\alpha^n$  cu aplicațiile de atașare  $\varphi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X_{n-1}$ . Notăm  $X_n = X_{n-1} \cup_\alpha e_\alpha^n$ .

3. Putem să oprim acest algoritm luând  $X = X_n$  pentru un anumit  $n < \infty$  sau putem continua, luând  $X = \bigcup_n X_n$ . O mulțime  $A \subset X$  este deschisă (închisă) dacă și numai dacă  $A \cap X_n$  este deschisă (închisă) în  $X$ , pentru orice  $n$ .

Dacă  $X = X_n$  se spune că  $X$  este un **CW-complex finit dimensional**, iar  $n$  este dimensiunea lui. Altfel,  $X$  este **infinit dimensional**.

Șirul  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n, \dots$  formează o CW-descompunere a spațiului  $X$ .

**Exemplul 1.1.6** 1) Un complex celular 1-dimensional  $X = X_1$  se numește **graf**. El constă dintr-un anumit număr de vârfuri, care sunt 0-celule, cărora li se atașează muchiile, acestea fiind 1-celulele complexului  $X$ .

**Definiția 1.1.7** Un **complex simplicial finit** este format dintr-o mulțime de vârfuri  $V$  și o familie  $K$  de submulțimi ale lui  $V$ , cu următoarele proprietăți:

- (i)  $V \subseteq K$
- (ii) dacă  $\alpha \in K$  și  $\beta \subseteq \alpha$ , atunci  $\beta \in K$ .

Notăm complexul simplicial cu  $K$ . Elementele lui  $K$  le numim **simplexe**. Dacă  $\alpha \in K$  conține  $d + 1$  vârfuri linear independente spunem că dimensiunea lui  $\alpha$  este  $d$  sau că  $\alpha$  este un  $d$ -simplex și notăm  $\alpha^{(d)}$ . Dacă  $\beta \subset \alpha$ , spunem că  $\beta$  este o față a lui  $\alpha$  și notăm  $\beta \prec \alpha$  sau  $\alpha \succ \beta$ . Observăm că un  $d$ -simplex este o  $d$ -celulă.

2) Un complex simplicial finit va fi un CW-complex, în care CW-descompunerea este formată din simplexe închise.

Într-un CW-complex  $X$  orice celulă va avea o aplicație caracteristică  $\Phi_\alpha : \overline{e_\alpha^n} \rightarrow X$ , care extinde aplicația de atașare  $\varphi_\alpha$ , iar  $\Phi_\alpha|_{e_\alpha^n}$  este un omeomorfism.

Un subcomplex al unui CW-complex  $X$  este o submulțime închisă  $A$  a lui  $X$  care este o reuniune de celule ale lui  $X$ . Orice subcomplex  $A$  este, la rândul său, un CW-complex.

De exemplu, orice schelet  $X_n$  este un subcomplex al CW-complexului  $X$ .

Dacă  $A$  este un subcomplex al lui  $X$  spunem că  $(X, A)$  este o **CW-pereche**.

Un CW-complex este finit dacă are un număr finit de celule. Orice astfel de CW-complex este compact, deoarece prin atașarea unei celule compactitatea se păstrează. Reciproc, orice subspațiu compact al unui CW-complex este conținut într-un subcomplex finit.

Menționăm câteva proprietăți ale CW-complexelor:

**Teorema 1.1.8** Orice spațiu CW-complex este un spațiu topologic normal și în particular Hausdorff.

**Teorema 1.1.9** Orice punct într-un CW-complex admite vecinătăți deschise contractibile, deci CW-complexele sunt spații local contractibile. În particular, CW-complexele sunt spații local liniar conexe.

**Teorema 1.1.10** Orice CW-complex finit  $X$  este retract euclidian de vecinătate, adică pentru un anumit  $n$  există o scufundare  $i : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  astfel încât  $i(X)$  este retract al unei vecinătăți în  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.1.11** O varietate netedă compactă este omotopic echivalentă cu un CW-complex finit.

Fie  $M$  un CW-complex finit,  $K$  mulțimea celulelor din  $M$  și  $K_p$  mulțimea celulelor de dimensiune  $p$ .

Vom utiliza următoarele notații.

(i)  $\sigma^{(p)}$  este o  $\sigma$  celulă de dimensiune  $p$ .

(ii)  $\sigma \prec \tau$ ,  $\sigma$  este o **față** a lui  $\tau$  dacă  $\sigma \neq \tau$  și  $\sigma \subset \bar{\tau}$ , unde  $\bar{\tau}$  este închiderea lui  $\tau$ .

(iii)  $\sigma \preceq \tau$  dacă  $\sigma \prec \tau$  sau  $\sigma = \tau$ .

Presupunem că  $\sigma^{(p)}$  este o față a lui  $\tau^{(p+1)}$ .

Fie  $B$  bila închisă de dimensiune  $p+1$  și  $h : B \rightarrow M$  funcția caracteristică pentru  $\tau$ , adică  $h$  este funcția continuă care duce interiorul lui  $B$  omeomorf în  $\tau$ .

**Definiția 1.1.12** Spunem că  $\sigma^{(p)}$  este o **față regulată** a lui  $\tau^{(p+1)}$  dacă:

(i) restricția  $h : h^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma$ ,  $x \mapsto h(x)$  este un omeomorfism;

(ii)  $h^{-1}(\sigma)$  este o  $p$ -bilă închisă.

În caz contrar spunem că  $\sigma^{(p)}$  este o **față iregulară** a lui  $\tau^{(p+1)}$ .

**Definiția 1.1.13**  $M$  este un **CW-complex regulat** dacă toate fețele sale sunt regulate.

În particular, orice complex simplicial este CW-complex regulat.

Presupunem  $\sigma^{(p)}$  este o față regulată a lui  $\tau^{(p+1)}$ . Alegem câte o orientare pentru fiecare celulă din  $M$  și considerăm  $\sigma, \tau$  elemente din grupurile  $C_p(M, \mathbb{Z})$  și  $C_{p+1}(M, \mathbb{Z})$ . Avem

$$\langle \partial\tau, \sigma \rangle = \pm 1,$$

unde  $\langle \partial\tau, \sigma \rangle$  este numărul de incidență a lui  $\tau$  și  $\sigma$ .

**Teorema 1.1.14** Presupunem că  $\tau^{(p+1)} \succ \sigma^p \succ \nu^{(p-1)}$ , atunci una dintre următoarele afirmații este adevărată:

(i)  $\sigma$  este o față iregulară a lui  $\tau$ ;

(ii)  $\nu$  este o față iregulară a lui  $\sigma$ ;

(iii) există o  $p$ -celulă  $\tilde{\sigma} \neq \sigma$  care verifică  $\tau \succ \tilde{\sigma} \succ \nu$ .

**Teorema 1.1.15** Fie  $M$  un CW-complex regulat. Presupunem că pentru două numere  $p, r \geq 1$  avem  $\tau^{(p+r)} \succ \nu^{(p-1)}$ . Atunci există celulele  $p+r-1$  dimensionale  $\sigma^{(p)}$  și  $\tilde{\sigma}^{(p)}$  care verifică următoarele relații:

$$\tilde{\sigma} \neq \sigma, \tau \succ \sigma \succ \nu, \tau \succ \tilde{\sigma} \succ \nu.$$

**Definiția 1.1.16** Două CW-complexe  $M, N$  sunt **izomorfe** dacă există un omeomorfism  $h : N \rightarrow M$  care aplică fiecare celulă a lui  $N$  omeomorf pe o unică celulă a lui  $M$ .

Spunem că  $\tilde{M}$  este o **subdiviziune** a lui  $M$  dacă există un omeomorfism  $h : \tilde{M} \rightarrow M$  care aplică fiecare celulă a lui  $\tilde{M}$  într-o unică celulă a lui  $M$ . Spunem că  $M$  și  $N$  sunt **echivalente** dacă există o subdiviziune finită  $\tilde{M}$  a lui  $M$  și o subdiviziune finită  $\tilde{N}$  a lui  $N$  astfel încât  $\tilde{M}$  și  $\tilde{N}$  sunt izomorfe.

Următoarea noțiune va juca un rol central în considerațiile următoare.

**Definiția 1.1.17** Fie  $M$  un CW-complex și  $\sigma^p \prec \tau^{(p+1)}$  două celule ale lui  $M$  cu proprietățile următoare:

- (i)  $\sigma$  este față regulară a lui  $\tau$ ;
- (ii)  $\sigma$  nu este față pentru nici o altă celulă.

Fie  $N = M \setminus (\sigma \cup \tau)$ . Vom spune că  $M$  **colapsează** în  $N$ .

Mai general, spunem că  $M$  **colapsează** în  $N$  și scriem  $M \searrow N$ , dacă  $N$  se obține din  $M$  printr-un număr finit de operații ca mai sus.

## 1.2 Funcții Morse discrete pe CW-complexe

Considerăm  $M$  un CW-complex finit. Fie  $K$  mulțimea celulelor din  $M$  și  $K_p$  mulțimea celulelor de dimensiune  $p$ . În lucrarea [31] R. Forman definește noțiunea de funcție Morse discretă și cea de punct critic al unei astfel de funcții.

**Definiția 1.2.1** O funcție Morse discretă pe  $M$  este o funcție  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  care pentru orice  $\sigma \in K_p$  verifică:

- (i) Dacă  $\sigma^{(p)}$  este o față iregulară a lui  $\tau^{(p+1)}$  atunci  $f(\tau) > f(\sigma)$ . Mai mult, avem:

$$\#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)} \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} \leq 1.$$

- (ii) Dacă  $\nu^{(p-1)}$  este o față iregulară a lui  $\sigma^{(p)}$  atunci  $f(\nu) < f(\sigma)$ . Mai mult, avem:

$$\#\{\nu^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)} \mid f(\nu) \geq f(\sigma)\} \leq 1.$$

Cu alte cuvinte, există cel mult o  $(p+1)$ -celulă și cel mult o  $(p-1)$ -celulă astfel ca  $f(\sigma)$  să fie "echilibrată" de valorile funcției  $f$  pe celulele respective.

Notăm faptul că o funcție Morse discretă nu este o funcție continuă pe  $K$ .

**Definiția 1.2.2** Fie  $f$  o funcție Morse discretă pe  $M$ . Spunem că  $\sigma \in K_p$  este un **punct critic de index  $p$**  dacă avem

- (i)  $\#\{\tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)} \mid f(\tau) \leq f(\sigma)\} = 0$ ;
- (ii)  $\#\{\nu^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)} \mid f(\nu) \geq f(\sigma)\} = 0$ .

Numărul real  $f(\sigma)$  se numește **valoare critică** a lui  $f$ .

**Exemplul 1.2.3** Dacă  $M$  este regular atunci din Definițiile 1.2.1 și 1.2.2 rezultă că minimum lui  $f$  trebuie să fie un vârf, care trebuie să fie punct critic de index 0. Acest lucru se obține din faptul că dacă  $p \geq 1$ , atunci fiecare  $p$ -celulă are cel puțin 2 fețe  $(p-1)$ -dimensionale.

**Exemplul 1.2.4** Dacă  $M$  este o varietate  $n$ -dimensională triangulată fără frontieră atunci maximum lui  $f$  este o  $n$ -față, care trebuie să fie un punct critic de index  $n$ .

Această proprietate rezultă din faptul că dacă  $p \leq n-1$ , atunci fiecare  $p$ -celulă este o față a cel puțin 2 celule  $(p+1)$ -dimensionale.

Din Definiția 1.2.2 avem că  $\sigma$  nu este o  $p$ -celulă critică dacă și numai dacă una dintre următoarele condiții este adevărată:

- (i) există  $\tau^{(p+1)} \succ \sigma^{(p)}$  astfel încât  $f(\tau) \leq f(\sigma)$ ;
- (ii) există  $\nu^{(p-1)} \prec \sigma^{(p)}$  astfel încât  $f(\nu) \geq f(\sigma)$ .

**Lema 1.2.5** *Condițiile (i) și (ii) nu pot avea loc simultan.*



Orice CW-complex  $M$  admite o funcție Morse discretă, considerând, de exemplu

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}, f(\sigma) = \dim(\sigma).$$

În acest caz, orice celulă va fi un punct critic al lui  $f$ .

O funcție Morse discretă pe un CW-complex poate induce o funcție Morse discretă pe un subcomplex al acestuia. Reciproc, o funcție Morse discretă definită pe un subcomplex se poate extinde la întreg complexul celular.

**Propoziția 1.2.6** *Fie  $M$  un CW-complex și  $N$  un subcomplex al său. Restricția oricărei funcții Morse discrete pe  $M$  la  $N$  este o funcție Morse discretă. Dacă  $\sigma \subseteq N$  este un punct critic al lui  $f$ , atunci  $\sigma$  este un punct critic al lui  $f|_N$ .*

Demonstrația rezultă direct din Definițiile 1.2.1 și 1.2.2.

**Propoziția 1.2.7** *Fie  $M$  un CW-complex și  $N$  un subcomplex al său. Orice funcție Morse discretă pe  $N$  poate fi prelungită la o funcție Morse discretă pe  $M$ .*

*Altfel spus, dacă  $f$  este o funcție Morse discretă pe  $N$ , există o funcție Morse discretă  $g$  pe  $M$  astfel încât  $g(\sigma) = f(\sigma)$ , pentru orice  $\sigma \subseteq N$ .*

Funcția Morse  $g$  definită mai sus prezintă dezavantajul că orice față a lui  $M \setminus N$  este punct critic. În aplicații, este important să găsim funcții care au mai puține puncte critice.

**Propoziția 1.2.8** *Fie  $M$  un CW-complex și  $N$  un subcomplex astfel încât  $M \searrow N$ . Fie  $f$  o funcție Morse discretă pe  $N$  și  $c = \max_{\sigma \subseteq N} f(\sigma)$ .*

*Funcția  $f$  se poate prelungi la o funcție Morse discretă pe  $M$  astfel încât  $N = M_c$  și  $f$  nu are puncte critice în  $M \setminus N$ .*

Propoziția 1.2.8 arată că  $n$ -simplexul standard  $\Delta_n$  admite o funcție Morse cu un singur punct critic, deoarece  $\Delta_n$  colapsează într-un vârf.

## 1.3 Teoremele lui Morse pentru CW-complexe regulate

Teoria Morse discretă pentru CW-complexe regulate a fost introdusă de R. Forman în [31]. În aceeași lucrare, el a extins rezultatele obținute la clasa CW-complexelor generale.

Fie  $M$  un CW-complex regulat și  $f$  o funcție Morse discretă pe  $M$ . Pentru  $c \in \mathbb{R}$  definim complexul de subnivel  $c$  astfel:

**Definiția 1.3.1** Pentru  $c \in \mathbb{R}$  definim:

$$M_c(f) = M_c = \bigcup_{f(\sigma) \leq c} \bigcup_{\tau \leq \sigma} \tau, \sigma \in K.$$

$M_c$  este mulțimea tuturor celulelor unde  $f$  ia valori  $\leq c$ , împreună cu fețele lor.

În particular,  $M_c$  este un subcomplex al lui  $M$ .

Pentru a demonstra că o celulă  $\sigma \in K$  cu proprietatea  $f(\sigma) < c$  este conținută în  $M_c$ , trebuie să arătăm că există  $\tau \in K$  astfel încât  $\sigma \prec \tau$  și  $f(\tau) \leq c$ .

Observăm că este suficient să considerăm doar  $\tau$  cu proprietatea:

$$\dim(\tau) = \dim(\sigma) + 1.$$

Acest lucru reiese din lema următoare.

**Lema 1.3.2** [31] Fie  $\sigma$  o  $p$ -celulă a lui  $M$  și presupunem  $\tau \succ \sigma$ . Atunci există o  $(p+1)$ -celulă  $\tilde{\tau}$  cu proprietățile  $\sigma \prec \tilde{\tau} \preceq \tau$ ,  $f(\tilde{\tau}) \leq f(\tau)$ .

**Teorema 1.3.3** [31] Dacă  $a, b \in \mathbb{R}$  astfel încât  $[a, b]$  să nu conțină valori critice ale lui  $f$ , atunci  $M_b$  colapsează la  $M_a$ , notat  $M_b \searrow M_a$ .

**Teorema 1.3.4** Dacă  $\sigma^{(p)}$  este o celulă critică de dimensiune  $p$  cu  $f(\sigma) \in [a, b]$  și  $[a, b]$  nu mai conține și alte valori critice, atunci  $M_b$  este omotopic echivalent cu  $M_a$  la care se lipește o celulă de dimensiune  $p$  de-a lungul frontierei (adică  $M_b$  este omotopic echivalent cu  $M_a \bigcup_{\dot{e}^p}$ ).

Fie  $M_p(f)$  numărul de puncte critice de index  $p$  ale lui  $f$ .

Numerele  $M_p$  se numesc **numerele Morse** ale lui  $f$ .

Din Teoremele 1.3.3 și 1.3.4 rezultă următoarea proprietate.

**Corolarul 1.3.5**  $M$  este omotopic echivalent cu un CW-complex care are exact  $M_p(f)$  celule de dimensiune  $p$ .

### Exemplul 1.3.6

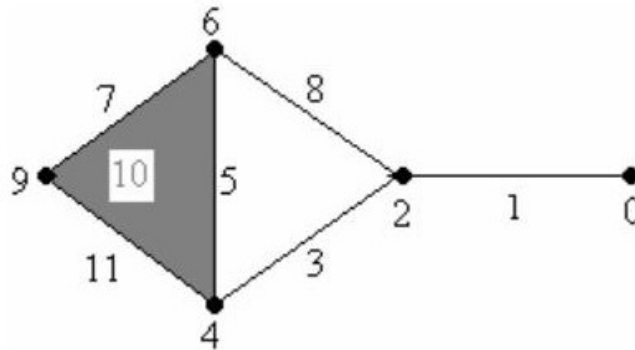


Figura 1.2

În Figura 1.2,  $f^{-1}(0)$  este un simplex critic de index 0,  $f^{-1}(8)$  este un simplex critic de index 1. Alte simplexe critice nu mai sunt, deci rezultă că  $M$  este omotopic echivalent cu un cerc, fapt evident ce se observă și din figură.

### Exemplul 1.3.7

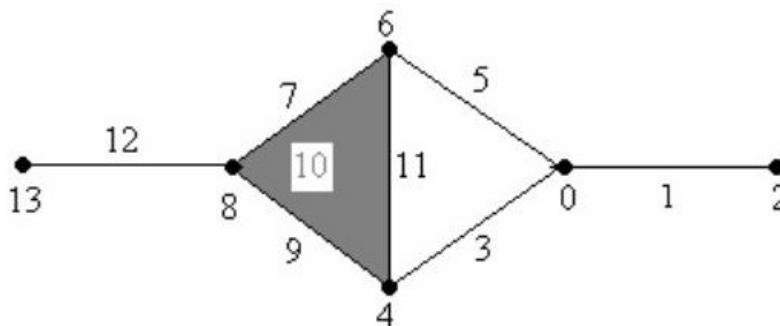


Figura 1.3

În Figura 1.3 avem un complex simplicial  $M$  pe care am definit o funcție Morse discretă. Avem 2 simplexe critice  $f^{-1}(0)$  și  $f^{-1}(9)$ , și alte simplexe critice nu există. Complexul simplicial  $M$  poate fi construit succesiv în următorii pași:

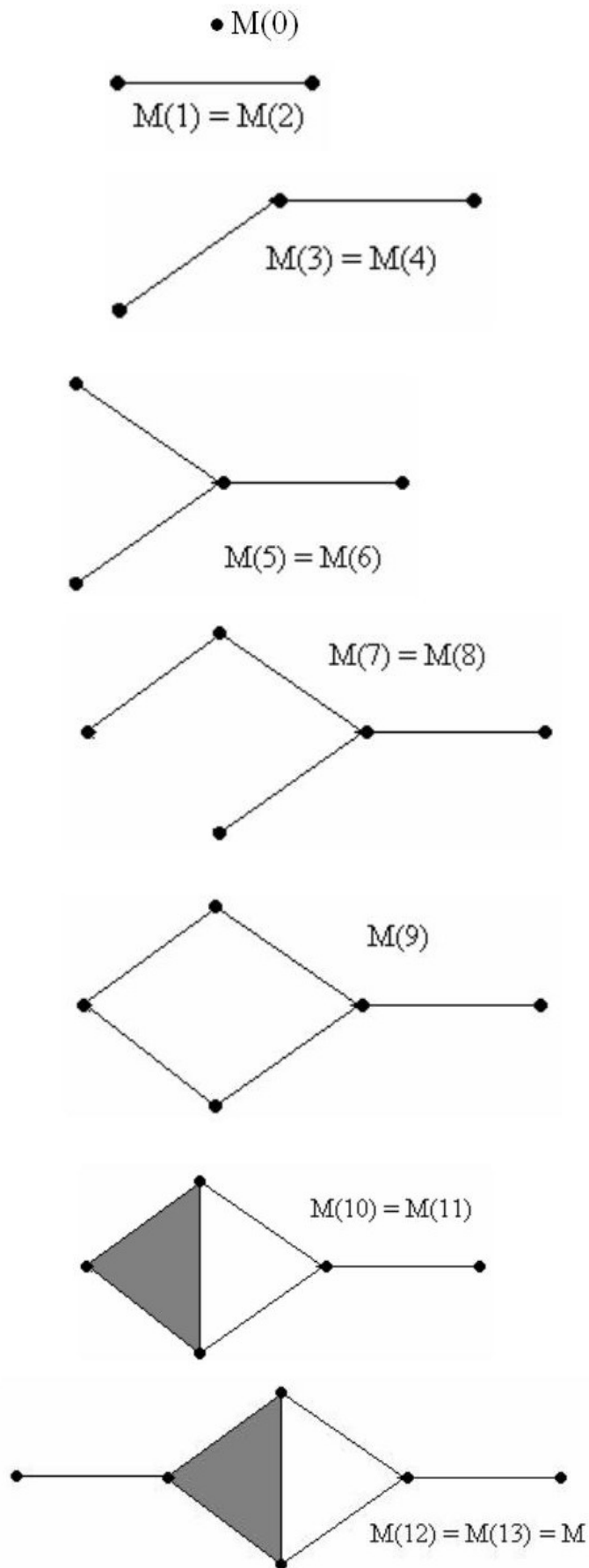


Figura 1.4

## 1.4 Inegalitățile lui Morse în variantă discretă

### 1.4.1 Algebra omologică a inegalităților lui Morse.

#### Ordonarea polinoamelor

Fie  $p \in \mathbb{R}[T]$ , un polinom în variabila  $T$ ,  $p = p_0 + p_1T + p_2T^2 + \dots + p_nT^n$ .

**Definiția 1.4.1** Fie  $q \in \mathbb{R}[T]$ , un alt polinom în  $T$ ,  $q = q_0 + q_1T + q_2T^2 + \dots + q_mT^m$ .

Spunem că  $p$  **domină**  $q$ , și scriem  $p \succeq q$  dacă seria formală

$$\frac{p(T) - q(T)}{T + 1}$$

este un polinom cu toți coeficienții pozitivi.

Relația  $\succeq$  are următoarele proprietăți:

- 1) " $\succeq$ " este o relație de ordine parțială pe  $\mathbb{R}[T]$ ;
- 2)  $p \succeq q$  implică  $p(-1) = q(-1)$ ;
- 3) " $\succeq$ " este o relație de ordine aditivă, adică avem

$$p_1 \succeq q_1, p_2 \succeq q_2 \text{ implică } p_1 + p_2 \succeq q_1 + q_2$$

- 4) Presupunem că  $p \succeq q$  și fie  $r \in \mathbb{R}[T]$  un polinom cu coeficienți pozitivi. Atunci  $pr \succeq qr$ .

Relația  $p \succeq 0$  implică faptul că funcția rațională

$$\begin{aligned} & (p_0 + p_1T + p_2T^2 + \dots + p_nT^n)(1 + T)^{-1} \\ &= (p_0 + p_1T + p_2T^2 + \dots + p_nT^n)(1 - T + T^2 - T^3 + \dots) \\ &= p_0 + (p_1 - p_0)T + (p_2 - p_1 + p_0)T^2 + \dots \end{aligned}$$

este un polinom cu coeficienți pozitivi, adică au loc inegalitățile

$$\begin{aligned} p_0 &\geq 0 \\ p_1 - p_0 &\geq 0 \\ p_2 - p_1 + p_0 &\geq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ p_n - p_{n-1} + p_{n-2} - \dots + (-1)^n p_0 &\geq 0. \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

**Observația 1.4.2** De fapt, ultima inegalitate are loc cu egalitate deoarece  $p$  este divizibil cu  $T + 1$ , adică avem în mod necesar  $p(-1) = 0$ .

Evident, avem  $p \succeq 0$  dacă și numai dacă au loc relațiile (1.4.1).

**Observația 1.4.3** Dacă  $p \succeq 0$ , atunci  $p_j \geq 0$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ .

În general, aceste inegalități sunt mai slabe decât condiția  $p \succeq 0$ , după cum arată următorul exemplu.

**Exemplul 1.4.4** Polinomul  $p = 1 + T^3$  are coeficienți pozitivi, dar  $p \not\succeq 0$ .

Relația  $p \succeq q$  este echivalentă cu  $p - q \succeq 0$ , deci cu relațiile:

$$\begin{aligned}
 p_0 &\geq q_0 \\
 p_1 - p_0 &\geq q_1 - q_0 \\
 p_2 - p_1 + p_0 &\geq q_2 - q_1 + q_0 \\
 &\dots\dots\dots \\
 p_{n-1} - p_{n-2} + p_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}p_0 &\geq q_{n-1} - q_{n-2} + q_{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}q_0 \\
 p_n - p_{n-1} + p_{n-2} - \dots + (-1)^n p_0 &= q_n - q_{n-1} + q_{n-2} - \dots + (-1)^n q_0
 \end{aligned}
 \tag{1.4.2}$$

Evident din  $p \succeq q$  rezultă inegalitățile  $p_j \geq q_j$ ,  $j = 0, 1, \dots$

**Lema 1.4.5** *Dacă  $p \succeq q$  și pentru un indice  $j$  avem  $p_j \geq q_j$ , atunci  $p_{j-1} \geq q_{j-1}$  sau  $p_{j+1} \geq q_{j+1}$ .*

**Lema 1.4.6** (Principiul lacunar al lui Morse) *Fie  $p, q \in \mathbb{R}[T]$ . Presupunem că polinomul  $p$  conține numai puteri pare și coeficienții lui  $q$  sunt pozitivi. Atunci:*

$$p \succeq q \Rightarrow p = q.$$

### 1.4.2 Polinomul Poincaré

Fie  $K$  corp,  $C_q$  spațiu vectorial peste  $K$ ,  $\dim_K C_q < \infty$  și  $\dim_K C_q = 0$  pentru  $q$  suficient de mare. Notăm:

$$C_* = \bigoplus_{q \geq 0} C_q.$$

**Definiția 1.4.7** Polinomul Poincaré asociat lui  $C_*$  este:

$$P_{C_*} = \sum_{q \geq 0} (\dim_K C_q) T^q.$$

**Lema 1.4.8** (Euler-Poincaré-Morse) *Fie  $C_*$  un complex de lanțuri graduat finit dimensional peste  $K$  și  $H_* = H_*(C)$  omologia lui  $C_*$ . Atunci*

$$P_{C_*} \succeq P_{H_*}.$$

### 1.4.3 Inegalitățile lui Morse

Fie  $K$  un corp,  $\beta_i = \dim H_i(M, K)$  **numerele Betti** cu coeficienți în  $K$  și  $\chi$  caracteristica Euler-Poincaré ale CW-complexului regular  $M$ .

**Teorema 1.4.9** (Inegalitățile tari ale lui Morse) *Pentru orice  $j \geq 0$  au loc inegalitățile*

$$m_j - m_{j-1} + \dots \pm m_0 \geq \beta_j - \beta_{j-1} + \dots \pm \beta_0.$$

Din Teorema 1.4.9 rezultă imediat

**Teorema 1.4.10** (Inegalitățile slabe ale lui Morse)

(i) *Pentru orice  $j \geq 0$  avem:*

$$m_j \geq \beta_j.$$

(ii)  $\chi(M) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \dots \pm \beta_m = m_0 - m_1 + m_2 - \dots \pm m_m$ ,

unde  $m$  este dimensiunea lui  $M$ .

### 1.4.4 Câmpuri vectoriale de tip gradient

Cum putem atribui numere fiecărui simplex dintr-un complex simplicial astfel încât să definim o funcție Morse discretă? În practică nu este necesar să definim funcția Morse discretă. Este suficient să găsim câmpul vectorial de tip gradient al respectivei funcții Morse.

Considerăm exemplul din Figura 1.5.

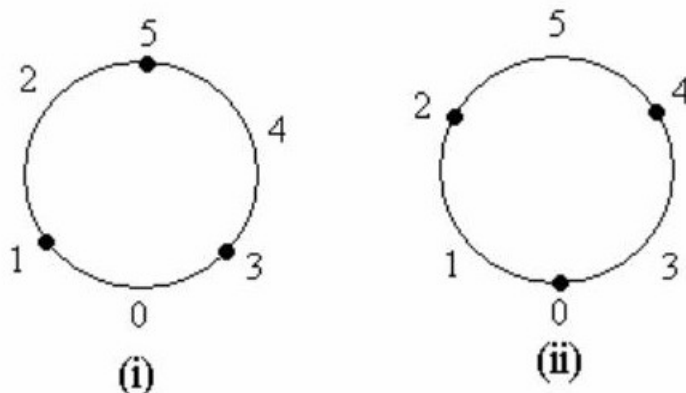


Figura 1.5

Simplexele necritice apar în perechi. De exemplu, muchia  $f^{-1}(1)$  nu este critică pentru că are un vecin de dimensiune mai mică căruia i s-a atribuit o dimensiune mai mare și anume, vârful  $f^{-1}(2)$ . Analog, vârful  $f^{-1}(2)$  nu este critic pentru că are un vecin de dimensiune mai mare căruia i s-a atribuit o valoare mai mică, adică muchia  $f^{-1}(1)$ . Această împerechere este marcată printr-o săgeată dinspre vârful  $f^{-1}(2)$  înspre muchia  $f^{-1}(1)$ . În mod analog, considerăm o săgeată dinspre vârful  $f^{-1}(4)$  înspre muchia  $f^{-1}(3)$  (Figura 1.6).

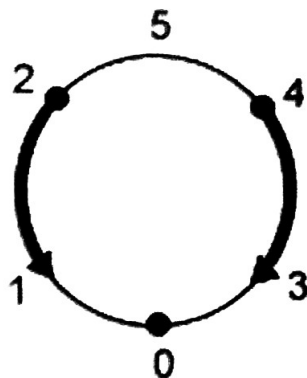


Figura 1.6. Câmpul vectorial de tip gradient al funcției Morse prezentat în Figura 1.5

Acest proces poate fi aplicat oricărui complex simplicial cu o funcție Morse discretă. Săgețile sunt desenate după cum urmează. Presupunem că  $\alpha^{(p)}$  este un simplex necritic cu  $\beta^{(p+1)} \succ \alpha$  care satisface relația  $f(\beta) \leq f(\alpha)$ . În acest caz, se desenează o săgeată de la  $\alpha$  la  $\beta$ . În Figura 1.7 avem un exemplu mai complicat. A se observa că funcția Morse discretă din această figură are un vârf critic,  $f^{-1}(0)$  și o muchie critică,  $f^{-1}(11)$ . Acest complex simplicial este omotopic echivalent cu un CW-complex cu exact o 0-celulă și o 1-celulă, adică cu un cerc.

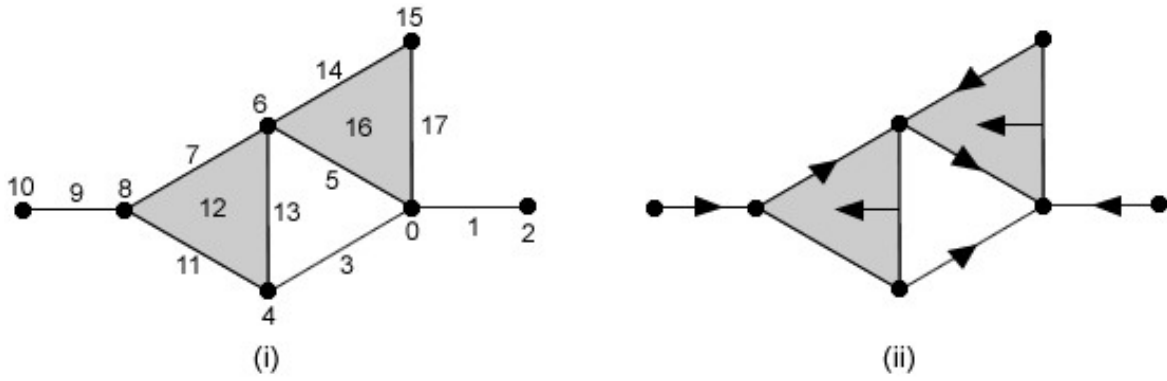


Figura 1.7. Un alt exemplu de câmp vectorial de tip gradient

Fiecare simplex  $\alpha$  satisface exact una din următoarele proprietăți:

1.  $\alpha$  este coada a exact unei săgeți;
2.  $\alpha$  este vârful a exact unei săgeți;
3.  $\alpha$  nu este nici vârful nici coada vreunei săgeți.

A se observa că un simplex este critic dacă nu este nici coada nici vârful vreunei săgeți.

Cu aceste săgeți se lucrează mult mai ușor decât cu funcția Morse discretă originală. Acest câmp vectorial de tip gradient conține, de fapt, întreaga informație despre funcție de care avem nevoie în majoritatea aplicațiilor. Așadar, dacă ni se dă un complex simplicial, nu e nevoie să găsim o funcție Morse discretă, ci doar câmpul vectorial de tip gradient.

Presupunem că am atașat săgeți simplexelor astfel încât fiecare simplex să satisfacă exact una din proprietățile de mai sus. Cum ne dăm seama dacă respectiva mulțime de săgeți este câmpul vectorial de tip gradient al unei funcții Morse discrete?

Fie  $K$  un complex simplicial cu o funcție Morse discretă  $f$ . Nu caracterizăm câmpul vectorial discret de tip gradient  $V$  al lui  $f$  ca fiind o colecție de săgeți, ci o colecție de perechi de simplexe din  $K$ ,  $\alpha^p \prec \beta^{p+1}$ . Avem că  $\alpha^p \prec \beta^{p+1}$  este în  $V$  dacă și numai dacă  $f(\beta) \leq f(\alpha)$ . Altfel spus,  $\alpha^p \prec \beta^{p+1}$  se află în  $V$  dacă și numai dacă am desenat o săgeată pentru care  $\alpha$  reprezintă coada, iar  $\beta$  reprezintă vârful săgeții. Din proprietățile funcției Morse discrete rezultă că fiecare simplex se află în cel mult o pereche din  $V$ . Aceste observații intuitive pot fi formalizate în următoarea definiție.

**Definiția 1.4.11** Un **câmp vectorial discret** pentru  $K$  este o colecție de perechi de simplexe din  $K$ ,  $\alpha^p \prec \beta^{p+1}$  astfel încât fiecare simplex să se afle în cel mult o pereche din  $V$ .

Dacă se consideră un câmp vectorial neted pe o varietate netedă, este normal să studiem sistemul dinamic indus prin fluxul de-a lungul câmpului vectorial. Același studiu poate fi făcut și pentru un câmp vectorial discret.

Se consideră un câmp vectorial discret al unui complex simplicial  $K$ . O **V-cale** este un șir de simplexe

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

astfel încât pentru fiecare  $i = 0, \dots, r$ ,  $\alpha \prec \beta \in V$  și  $\beta_i \succ \alpha_{i+1} \neq \alpha_i$ . O asemenea cale este o **cale netrivială închisă** dacă avem  $r \geq 0$  și  $\alpha_0 = \alpha_{r+1}$ . O V-cale pentru un câmp vectorial de tip gradient  $V$  al unei funcții Morse discrete, vom numi **o cale de tip gradient a lui  $f$** .

Următoarea teoremă rezultă din această definiție.

**Teorema 1.4.12** Fie  $V$  un câmp vectorial de tip gradient al unei funcții Morse discrete  $f$ . Un șir de simplexe

$$\alpha_0^{(p)}, \beta_0^{(p+1)}, \alpha_1^{(p)}, \beta_1^{(p+1)}, \alpha_2^{(p)}, \dots, \beta_r^{(p+1)}, \alpha_{r+1}^{(p)}$$

este o  $V$ -cale dacă și numai dacă avem

$$\alpha_i \prec \beta_i \succ \alpha_{i+1} \text{ pentru oricare } i = 0, 1, \dots, r \text{ și}$$

$$f(\alpha_0) \geq f(\beta_0) > f(\alpha_1) \geq f(\beta_1) > \dots \geq f(\beta_r) > f(\alpha_{r+1}).$$

Cu alte cuvinte, căile gradient ale lui  $f$  sunt exact acele șiruri "continue" de simplexe de-a lungul cărora  $f$  este descrescătoare. În particular, această teoremă spune că dacă  $V$  este un câmp vectorial de tip gradient atunci nu există  $V$ -căi netriviiale închise. Principalul rezultat al acestei secțiuni spune că inversa acestei afirmații este adevărată.

**Teorema 1.4.13** *Un câmp vectorial discret  $V$  este un câmp vectorial de tip gradient al unei funcții Morse discrete dacă și numai dacă nu există  $V$ -căi netriviiale închise.*

Se poate observa asemănarea acestei teoreme cu o altă teoremă din domeniul grafurilor orientate.

**Teorema 1.4.14** *Fie  $G$  un graf orientat. Atunci există o funcție strict descrescătoare cu valori reale definită pe mulțimea vârfurilor dacă și numai dacă nu există cicluri orientate.*

Importanța Teoremei 1.4.13 este subliniată în exemplul următor. Vom construi câmpul vectorial discret pentru o triangulare a planului proiectiv real și vom folosi această teoremă pentru a verifica că acest câmp vectorial este un câmp vectorial de tip gradient.

**Exemplul 1.4.15** Figura 1.8 (i) reprezintă o triangulare a planului proiectiv real  $\mathbb{P}^2$ .

A se observa că vârfurile de-a lungul frontierei cu aceleași etichete sunt considerate precum muchiile a căror puncte de extrem au aceleași etichete. În Figura 1.8 (ii) este prezentat câmpul vectorial discret  $V$  al acestui complex simplicial. Se poate observa că nu există  $V$ -căi închise (pentru că toate  $V$ -căile se îndreaptă înspre frontiera figurii și nu există  $V$ -căi închise pe frontieră). Astfel, câmpul vectorial discret este un câmp vectorial de tip gradient. Singurele simplexe care nu sunt nici coada nici capul vreunei săgeți sunt vârful etichetat 1, muchia  $e$  și triunghiul  $t$ . Planul proiectiv este omotopic echivalent cu un CW-complex cu exact o 0-celulă, o 1-celulă și o 2-celulă.

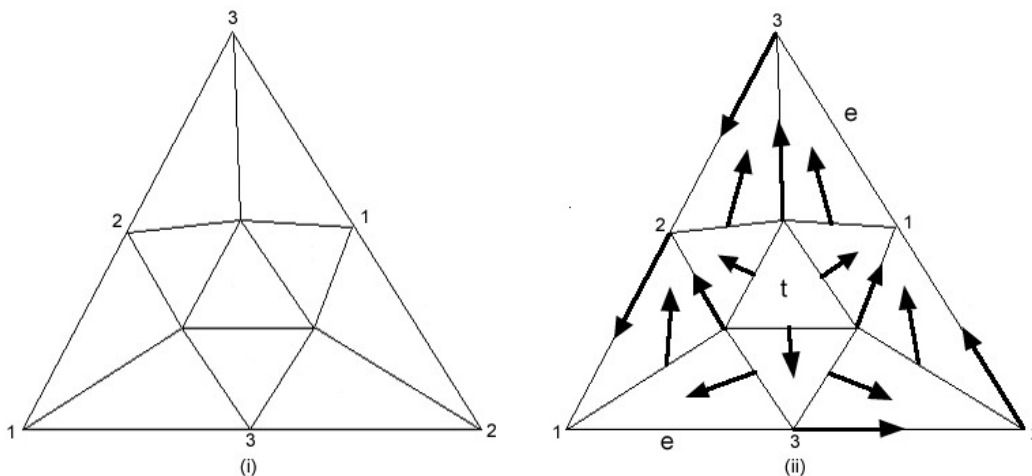


Figura 1.8.

- (i) O triangulare pentru planul proiectiv real
- (ii) Un câmp vectorial discret de tip gradient pentru  $\mathbb{P}^2$



### 1.4.5 Descrierea combinatorială a câmpurilor de tip gradient

Noțiunea de câmp vectorial gradient are o descriere pur combinatorială cu ajutorul căreia putem reformula teoria Morse.

Prin diagrama Hasse a lui  $K$  înțelegem mulțimea parțial ordonată de simplexe din  $K$ . Ordonația se face după relația față. Diagrama Hasse este un graf orientat. Vârfurile grafului se află în corespondența 1-1 cu simplexele din  $K$ . Există o muchie directă de la  $\beta$  la  $\alpha$  dacă și numai dacă  $\alpha$  este o față de codimensiune 1 a lui  $\beta$  (Figura 1.9).

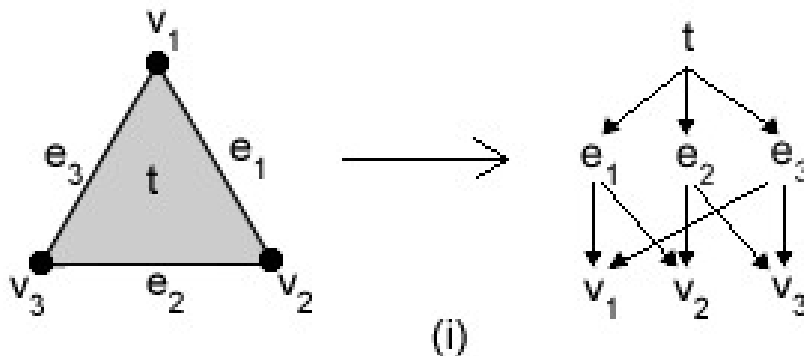


Figura 1.9. De la un câmp vectorial discret la o diagramă Hasse orientată

Fie  $V$  un câmp vectorial combinatorial. Modificăm graful orientat după cum urmează. Dacă  $\{\alpha \prec \beta\} \in V$ , inversăm orientarea muchiei dintre  $\alpha$  și  $\beta$ , astfel încât să meargă de la  $\alpha$  la  $\beta$  (Figura 1.10). O  $V$ -cale poate fi considerată o cale orientată în acest graf modificat. Există în această diagramă Hasse modificată și unele căi orientate care nu sunt  $V$ -căi după cum le-am definit.

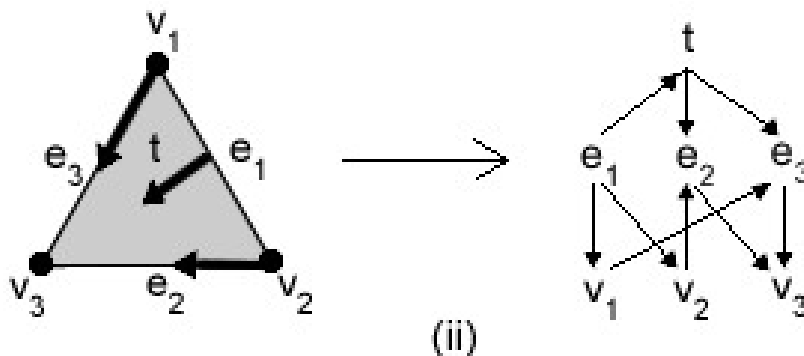


Figura 1.10. De la un câmp vectorial discret la o diagramă Hasse orientată

**Teorema 1.4.16** *Nu există  $V$ -căi netriviiale închise dacă și numai dacă nu există căi orientate netriviiale închise în diagrama Hasse orientată corespunzătoare.*

Astfel, un câmp vectorial discret reprezintă, în limbaj combinatorial, o împerechere parțială a diagramei Hasse. Un câmp vectorial discret este un câmp vectorial de tip gradient dacă această împerechere parțială este aciclică în sensul de mai sus.

Vom reformula în continuare în acest limbaj câteva dintre teoremele precedente. Complicații pot să apară pentru că mai sus nu s-a considerat și mulțimea vidă. De obicei, mulțimea vidă este inclusă în diagrama Hasse, fiind considerată un simplex de dimensiunea  $-1$ .

**Teorema 1.4.17** *Fie  $V$  o împerechere parțială aciclică pentru diagrama Hasse a lui  $K$  (presupunem că mulțimea vidă nu este împerecheată cu un alt simplex). Fie  $u_p$  numărul de  $p$ -simplexe neîmperecheate. Atunci  $K$  este omotopic echivalent cu un CW-complex care are exact  $u_p$  celule de dimensiunea  $p$ , pentru fiecare  $p \geq 0$ .*

Un caz particular important este obținut dacă  $V$  este o împerechere completă. Adică, dacă fiecare simplex (de această dată se consideră și simplexul vid) este împerecheat cu un alt simplex. În acest caz, se obține următorul rezultat.

**Teorema 1.4.18** *Fie  $V$  o împerechere completă și aciclică a diagramei Hasse a lui  $K$ . Atunci  $K$  colapsează la un vârf, astfel încât  $K$  este, în particular, contractibil.*

# Capitolul 2

## Caracteristica Morse-Smale discretă

### 2.1 Funcții Morse pe complexe simpliciale

Fie  $K$  un complex simplicial finit.

**Definiția 2.1.1** O funcție  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  este o **funcție Morse discretă** dacă pentru orice  $\sigma^{(p)} \in K$  au loc relațiile:

- (1)  $\#\{\beta^{(p+1)} \succ \alpha^{(p)} \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\} \leq 1$  și
- (2)  $\#\{\gamma^{(p-1)} \prec \alpha^{(p)} \mid f(\gamma) \geq f(\alpha)\} \leq 1$ .

**Exemplul 2.1.2** Considerăm două complexe simpliciale. Indicăm funcțiile scriind lângă fiecare simplex ce valoare are funcția pe acel simplex.

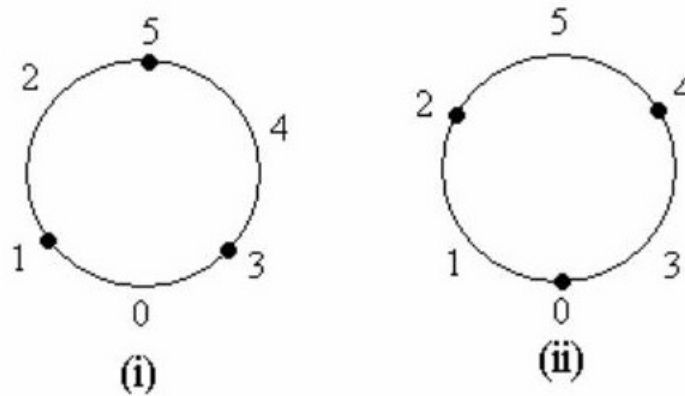


Figura 2.1

Funcția de la (i) din Figura 2.1 nu este o funcție Morse discretă deoarece latura  $f^{-1}(0)$  încalcă regula (2) din definiție, deoarece are 2 vecini cu dimensiune mai mică pe care funcția ia valori mai mari. Mai mult vârful  $f^{-1}(5)$  încalcă regula (1), deoarece are 2 vecini de dimensiune mai mare pe care funcția ia valori mai mici.

Funcția de la (ii) din Figura 2.1 este o funcție Morse discretă.

Trebuie remarcat faptul că o funcție Morse discretă nu este o funcție continuă pe  $K$  deoarece nu am considerat nici o topologie pe  $K$ . Funcția atribuie fiecărui simplex o singură valoare.

Reamintim faptul că un  $p$ -simplex  $\alpha^{(p)}$  este **critic** de index  $p$  dacă următoarele relații au loc:

- (1)  $\#\{\beta^{(p+1)} \succ \alpha^{(p)} \mid f(\beta) \leq f(\alpha)\} = 0$  și
- (2)  $\#\{\gamma^{(p-1)} \prec \alpha^{(p)} \mid f(\gamma) \geq f(\alpha)\} = 0$ .

**Exemplul 2.1.3** În Figura 2.1 (ii): vârful  $f^{-1}(0)$  și latura  $f^{-1}(5)$  sunt simplexe critice și altele nu mai sunt.

Dacă  $K$  este un complex simplicial  $m$ -dimensional cu o funcție Morse discretă, atunci notăm cu  $\mu_j$  numărul de simplexe critice de index  $j$ .

Pentru orice corp  $F$ , notăm cu  $\beta_j = \dim H_j(K, F)$  numerele Betti în raport cu  $F$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ . Atunci au loc **inegalitățile slabe ale lui Morse**:

- (i) pentru orice  $j = 0, 1, \dots, m$  (unde  $m$  este dimensiunea lui  $K$ ), avem:  $\mu_j \geq \beta_j$ .
- (ii)  $\mu_0 - \mu_1 + \mu_2 - \dots + (-1)^m \mu_m = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \dots + (-1)^m \beta_m = \chi(K)$  (relația lui Euler).

Dar au loc și **inegalitățile tari ale lui Morse**:

Pentru orice  $j = 0, 1, \dots, m$ ,

$$\mu_j - \mu_{j-1} + \dots + (-1)^j \mu_0 \leq \beta_j - \beta_{j-1} + \dots + (-1)^j \beta_0.$$

Fie  $K$  un complex simplicial cu exact  $c_j$  simplexe de dimensiune  $j$ , pentru orice  $j = 0, 1, \dots, m$ , unde  $m = \dim K$ . Fie  $C_j(K, \mathbb{Z})$  spațiul  $\mathbb{Z}^{c_j}$ .

Mai precis  $C_j(K, \mathbb{Z})$  este grupul abelian liber generat de  $j$ -simplexele din  $K$ , fiecare simplex fiind înzestrat cu o orientare.

Atunci pentru orice  $j$  există aplicațiile frontieră  $\partial_j : C_j(K, \mathbb{Z}) \rightarrow C_{j-1}(K, \mathbb{Z})$ , care satisfac relația  $\partial_{j-1} \circ \partial_j = 0$ .

Atunci complexul de lanțuri

$$0 \longrightarrow C_m(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1}(K, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_{m-1}} \dots \xrightarrow{\partial_1} C_0(K, \mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

determină omologia lui  $K$ . Pentru orice  $j = 0, 1, \dots, m$ , definim:  $H_j(C, \partial) = \text{Ker}(\partial_j) / \text{Im}(\partial_{j+1})$ .

Atunci pentru orice  $j$  are loc izomorfismul:  $H_j(C, \partial) \cong H_j(K, \mathbb{Z})$ , unde  $H_j(K, \mathbb{Z})$  este omologia singulară a lui  $K$ .

## 2.2 Operații cu funcții Morse discrete

Fie  $f$  și  $g$  două funcții Morse discrete definite pe două complexe celulare  $K$  și  $L$ , iar  $V$  și  $W$  câmpurile discrete de tip gradient pentru cele două funcții.

Dacă  $L$  este un subcomplex al lui  $K$  atunci restricția  $g = f|_L$  este o funcție Morse discretă pe  $L$ .

Dacă  $L$  este o subdiviziune pentru  $K$ , atunci putem construi  $g$  din  $f$  cu același număr de celule critice. Acest lucru poate fi realizat prin rafinarea locală a câmpului discret de vectori de tip gradient pentru fiecare celulă subdivizată, ca în Figura 2.2.

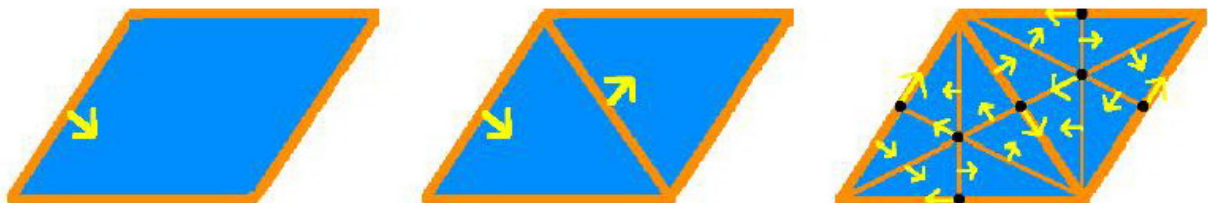


Figura 2.2. Rafinarea unui câmp discret de vectori de tip gradient

O demonstrație completă a acestui lucru se poate găsi în [31, secțiunea 12].

Produsul cartezian  $K \times L$  a două complexe celulare este un complex celular care este definit prin următoarele relații:

$$(\alpha_K, \alpha_L) \prec (\beta_K, \beta_L)$$

dacă  $\alpha_K = \beta_k$  și  $\alpha_L \prec \beta_L$ , sau  $\alpha_K \prec \beta_K$  și  $\alpha_L = \beta_L$ .

Un câmp discret de vectori de tip gradient  $V \times W$  poate fi definit pe produsul cartezian  $K \times L$  astfel încât să admită  $\sum_q m_q(f) \cdot m_{p-q}(g)$  celule critice de index  $p$ , prin

$$\begin{cases} \text{dacă } \alpha_K \text{ nu este critic, } V(\alpha_K) = 0, & (V \times W)(\{\alpha_K, \alpha_L\}) = 0 \\ \text{dacă } \alpha_K \text{ nu este critic, } V(\alpha_K) = \beta_K, & (V \times W)(\{\alpha_K, \alpha_L\}) = \{\beta_K, \alpha_L\} \\ \text{dacă } \alpha_K \text{ este critic, } V(\alpha_L) = 0, & (V \times W)(\{\alpha_K, \alpha_L\}) = 0 \\ \text{dacă } \alpha_K \text{ este critic, } V(\alpha_L) = \beta_L, & (V \times W)(\{\alpha_K, \alpha_L\}) = \{\alpha_K, \beta_L\} \end{cases}$$

Aceasta corespunde funcției Morse discrete  $f \times g : K \times L \rightarrow \mathbb{R}$ , unde

$$(f \times g)(x, y) = f(x)g(y).$$

Figurile 2.3 și 2.4 reprezintă un exemplu de produs cartezian dintre un segment și un triunghi.

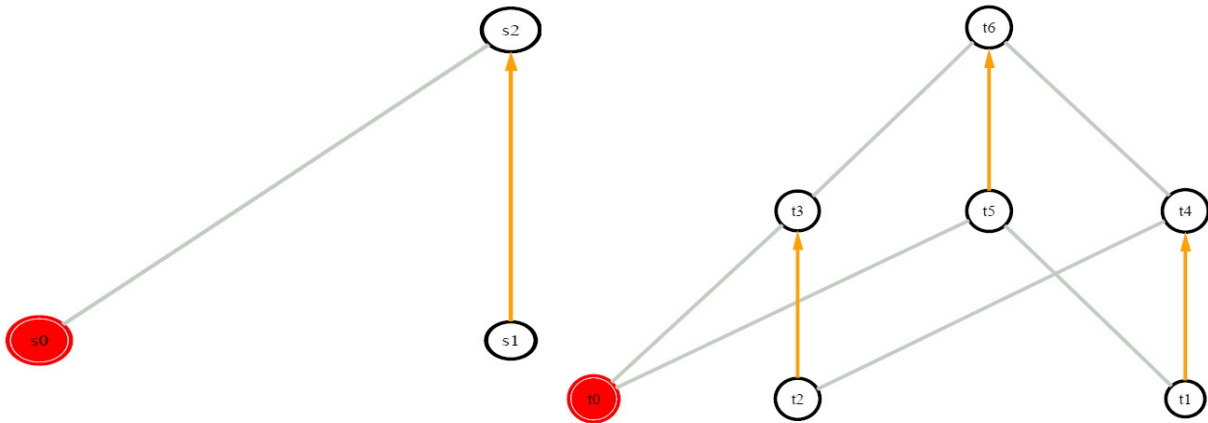


Figura 2.3. Diagrama Hasse pentru câmpurile discrete de vectori de tip gradient definite pe un segment și pe un triunghi

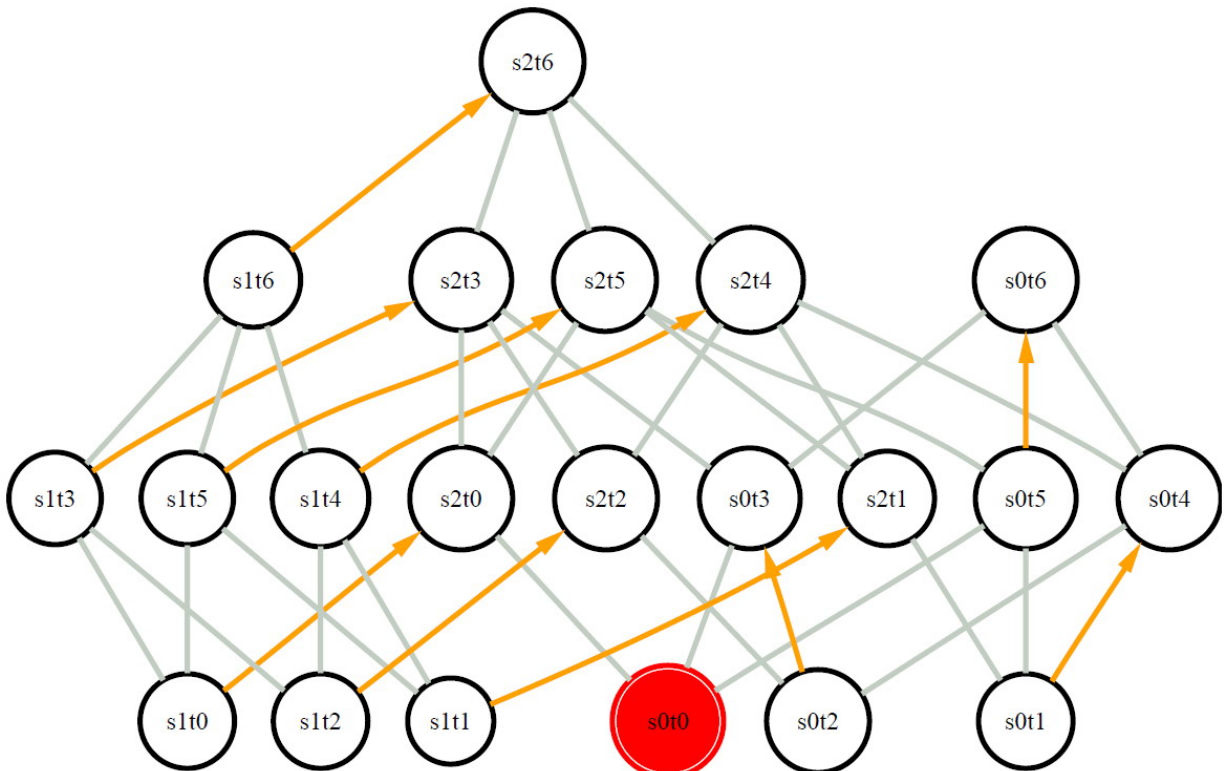


Figura 2.4. Diagrama Hasse pentru produsul cartezian a câmpurilor discrete de vectori de tip gradient din Figura 2.3

## 2.3 Caracteristica Morse-Smale discretă pentru complexe simpliciale

Considerăm  $K^m$  un complex simplicial finit  $m$ -dimensional.

Fie  $\Omega(K)$  mulțimea formată din toate funcțiile Morse discrete definite pe  $K$ .

Este evident că  $\Omega(K) \neq \emptyset$ , deoarece avem exemplul trivial de funcție Morse discretă  $f(\sigma) = \dim \sigma$ ,  $\sigma \in K$ .

Pentru  $f \in \Omega(K)$ , fie  $\mu_j(f)$  numărul de simplexe critice de index  $j$  din  $K$  ale lui  $f$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ . Fie  $\mu(f)$  numărul definit prin

$$\mu(f) = \sum_{j=0}^m \mu_j(f),$$

adică  $\mu(f)$  este numărul total de simplexe critice din  $K$  ale lui  $f$ .

**Definiția 2.3.1** Numărul:

$$\gamma(K) = \min\{\mu(f) : f \in \Omega(K)\},$$

se numește **caracteristica Morse-Smale** discretă a complexului simplicial  $K$ .

Deci caracteristica Morse-Smale discretă reprezintă numărul minim de simplexe critice pentru toate funcțiile Morse discrete definite pe  $K$ .

Într-un mod analog se definesc numerele  $\gamma_j(K)$ , pentru  $j = 0, 1, \dots, m$ , astfel:

$$\gamma_j(K) = \min\{\mu_j(f) : f \in \Omega(K)\},$$

care reprezintă numărul minim de simplexe critice de dimensiune  $j$ , pentru toate funcțiile Morse discrete definite pe  $K$ .

O problemă complicată în topologia combinatorială este să calculăm efectiv aceste numere asociate unui complex finit dimensional.

Un algoritm finit de calcul pentru aceste numere, pentru orice complex simplicial finit încă nu este cunoscut.

Fie  $L^m$  un complex simplicial și fie  $\psi : L \rightarrow K$  un izomorfism simplicial.

Fie  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  și  $g : L \rightarrow \mathbb{R}$ , două funcții Morse discrete definite pe complexe simpliciale  $K$  respectiv  $L$  astfel încât următoarea diagramă este comutativă:

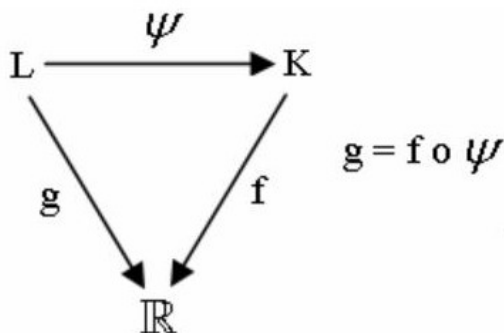


Figura 2.5

Considerăm mulțimile critice ale funcțiilor  $f$  și  $g$

$$C(f) = \{\alpha \mid \alpha \text{ este simplex critic a lui } f\}$$

$$C(g) = \{\beta \mid \beta \text{ este simplex critic a lui } g\}$$

Cum  $\psi$  este un izomorfism simplicial rezultă că are loc următoarea relație

$$C(f) = \psi(C(g)).$$

Rezultă astfel inegalitatea  $\#C(f) \geq \gamma(L)$ , pentru orice funcție Morse pe complexul simplicial  $K$ . Prin urmare, avem  $\gamma(K) \geq \gamma(L)$ . În mod analog demonstrăm inegalitatea  $\gamma(K) \leq \gamma(L)$  și deci obținem  $\gamma(K) = \gamma(L)$ .

În concluzie, pentru complexe simpliciale izomorfe  $K$  și  $L$  avem

$$\gamma(K) = \gamma(L) \text{ și } \gamma_j(K) = \gamma_j(L), \quad j = 0, 1, \dots, m.$$

Deci numerele  $\gamma(K)$  și  $\gamma_j(K)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , sunt invarianți ai complexului simplicial  $K$ .

## 2.4 Funcții Morse discrete exacte. Funcții Morse discrete F-perfecte

Considerăm  $K^m$  un complex simplicial finit  $m$ -dimensional.

Este evident că  $\Omega(K) \neq \emptyset$ , deoarece avem exemplul trivial de funcție Morse discretă  $f(\sigma) = \dim \sigma$ , pentru orice simplex  $\sigma \in K$ .

Fie  $H_j(K, F)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , grupurile de omologie singulară cu coeficienții în corpul  $F$  și

$$\beta_j(K, F) = \text{rank} H_j(K, F) = \dim_F H_j(K, F), \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

numerele Betti ale lui  $K$  în raport cu  $F$ .

Pentru orice  $f \in \Omega(K)$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , au loc **inegalitățile slabe ale lui Morse**:

$$\mu_j(f) \geq \beta_j(K, F).$$

**Definiția 2.4.1** Funcția Morse discretă  $f \in \Omega(K)$  este **exactă** (sau optimală) dacă:

$$\mu_j(f) = \beta_j(K, F), \quad \text{pentru } j = 0, 1, \dots, m.$$

Deci o funcție Morse discretă exactă are un număr minim de simplexe critice pentru orice dimensiune.

**Definiția 2.4.2** Funcția Morse discretă  $f \in \Omega(K)$  este **F-perfectă** dacă:

$$\mu_j(f) = \beta_j(K, F), \quad \text{pentru } j = 0, 1, \dots, m.$$

Folosind inegalitățile slabe ale lui Morse și definiția caracteristicii Morse-Smale obținem inegalitățile:

$$\mu_j(f) \geq \min\{\mu_j(f) : f \in \Omega(K)\} = \gamma_j(K) \geq \beta_j(K, F).$$

**Teorema 2.4.3** Complexul simplicial  $K$  are funcții Morse discrete F-perfecte dacă și numai dacă

$$\gamma(K) = \beta(K, F),$$

unde  $\beta(K, F) = \sum_{j=0}^m \beta_j(K, F)$  este numărul Betti total al lui  $K$  în raport cu  $F$ .

Fie  $K^m$  un complex simplicial finit  $m$ -dimensional. Se știe că  $C_j(K, \mathbb{Z})$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , sunt grupuri abeliene libere finit generate cu atâția generatori câte  $j$ -simplexe sunt în  $K$ .

Deoarece subgrupurile și grupurile factor ale unui grup finit generat sunt finit generate atunci grupul de omologie singulară  $H_j(K, \mathbb{Z})$  este finit generat.

Din teorema fundamentală a grupurilor libere finit generate avem

$$H_j(K, \mathbb{Z}) \simeq A_j \oplus B_j,$$

unde  $A_j$  este un grup liber și  $B_j$  este subgrupul de torsiune a lui  $H_j(K, \mathbb{Z})$ .

Deci grupurile de omologie singulară  $H_j(K, \mathbb{Z})$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , sunt finit generate și avem

$$H_j(K, \mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}_{n_{j_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_{j_{\beta(j)}}})$$

unde  $\mathbb{Z}$  este luat de  $\beta_j$  ori în grupul liber și  $\beta_j = \beta_j(K, \mathbb{Z})$ ,  $j = 0, 1, \dots, m$ , reprezintă numerele Betti ale lui  $K$  în raport cu grupul  $(\mathbb{Z}, +)$ , adică

$$\beta_j(K, \mathbb{Z}) = \text{rank} H_j(K, \mathbb{Z}).$$

**Exemplul 2.4.4** Considerăm cercul unitate  $S^1$ . Omologia singulară a lui  $S^1$  este:

$$H_j(S^1, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & j = 0 \\ \mathbb{Z}, & j = 1 \end{cases}$$

Rezultă că avem:

$$\beta_0(S^1, \mathbb{Z}) = 1, \quad \beta_1(S^1, \mathbb{Z}) = 1.$$

Atunci numărul Betti total este:

$$\beta(S^1, \mathbb{Z}) = \beta_0(S^1, \mathbb{Z}) + \beta_1(S^1, \mathbb{Z}) = 1 + 1 = 2.$$

Folosind Teorema 2.4.3 rezultă

$$\gamma(S^1) = \beta(S^1, \mathbb{Z}) = 2.$$

Aceasta înseamnă că putem construi o funcție Morse discretă pe complexul simplicial dat de triangularea cercului  $S^1$  din Figura 2.6, care are exact 2 simplexe critice.

O astfel de funcție este  $\mathbb{Z}$ -exactă și este definită în Figura 2.6. Simplexele critice din figură sunt încercuite.

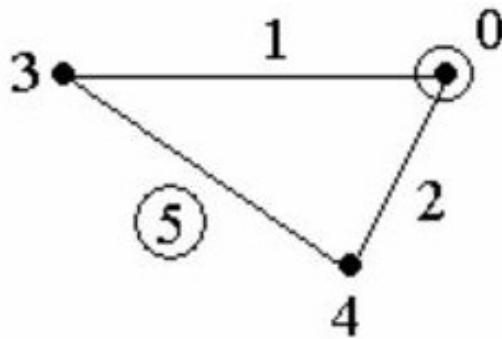


Figura 2.6. Funcție Morse discretă cu 2 simplexe critice pentru cercul unitate  $S^1$

**Exemplul 2.4.5** Considerăm sfera 2-dimensională  $S^2$  cu triangularea dată în Figura 2.7.



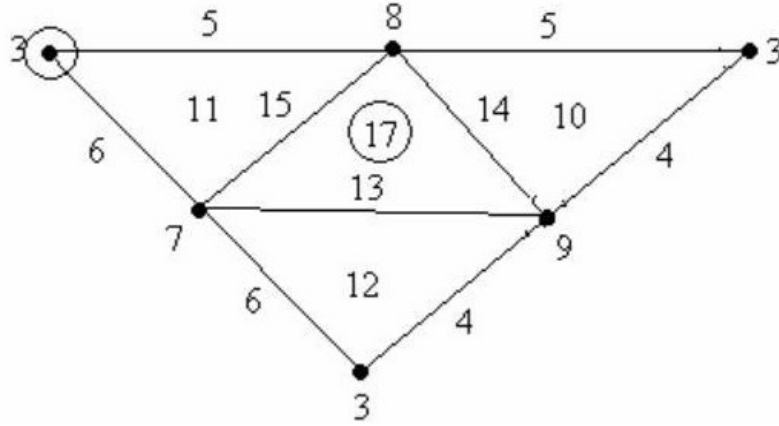


Figura 2.7. Funcție Morse discretă cu 2 simplexe critice pentru sfera 2-dimensională  $S^2$

Omologia singulară a lui  $S^2$  este:

$$H_j(S^2, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & j = 0 \\ 0, & j = 1 \\ \mathbb{Z}, & j = 2 \end{cases}$$

Rezultă că avem:

$$\beta_0(S^2, \mathbb{Z}) = 1, \quad \beta_1(S^2, \mathbb{Z}) = 0, \quad \beta_2(S^2, \mathbb{Z}) = 1.$$

Atunci numărul Betti total este

$$\beta(S^2, \mathbb{Z}) = \sum_{j=0}^2 \beta_j(S^2, \mathbb{Z}) = 1 + 0 + 1 = 2.$$

Folosind Teorema 2.4.3 rezultă

$$\gamma(S^2) = \beta(S^2, \mathbb{Z}) = 2.$$

Aceasta înseamnă că putem construi o funcție Morse discretă pentru complexul simplicial definit de triangularea sferei  $S^2$  din Figura 2.7, care are exact 2 simplexe critice. O astfel de funcție este  $\mathbb{Z}$ -exactă și este definită în Figura 2.7, simplexele critice sunt încercuite.

**Exemplul 2.4.6** Considerăm planul proiectiv real  $P^2(\mathbb{R})$  cu triangularea dată în Figura 2.8.

Omologia singulară a lui  $P^2(\mathbb{R})$  peste  $\mathbb{Z}_2$  este dată de

$$H_j(P^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad j = 0, 1, 2.$$

Rezultă că avem

$$\beta_0(P^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) = 1, \quad \beta_1(P^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) = 1, \quad \beta_2(P^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) = 1.$$

Atunci numărul Betti total este

$$\beta(P^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) = \beta_0(P^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) + \beta_1(P^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) + \beta_2(P^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Folosind Teorema 2.4.3 rezultă

$$\gamma(P^2(\mathbb{R})) = \beta(P^2(\mathbb{R}), \mathbb{Z}_2) = 3.$$

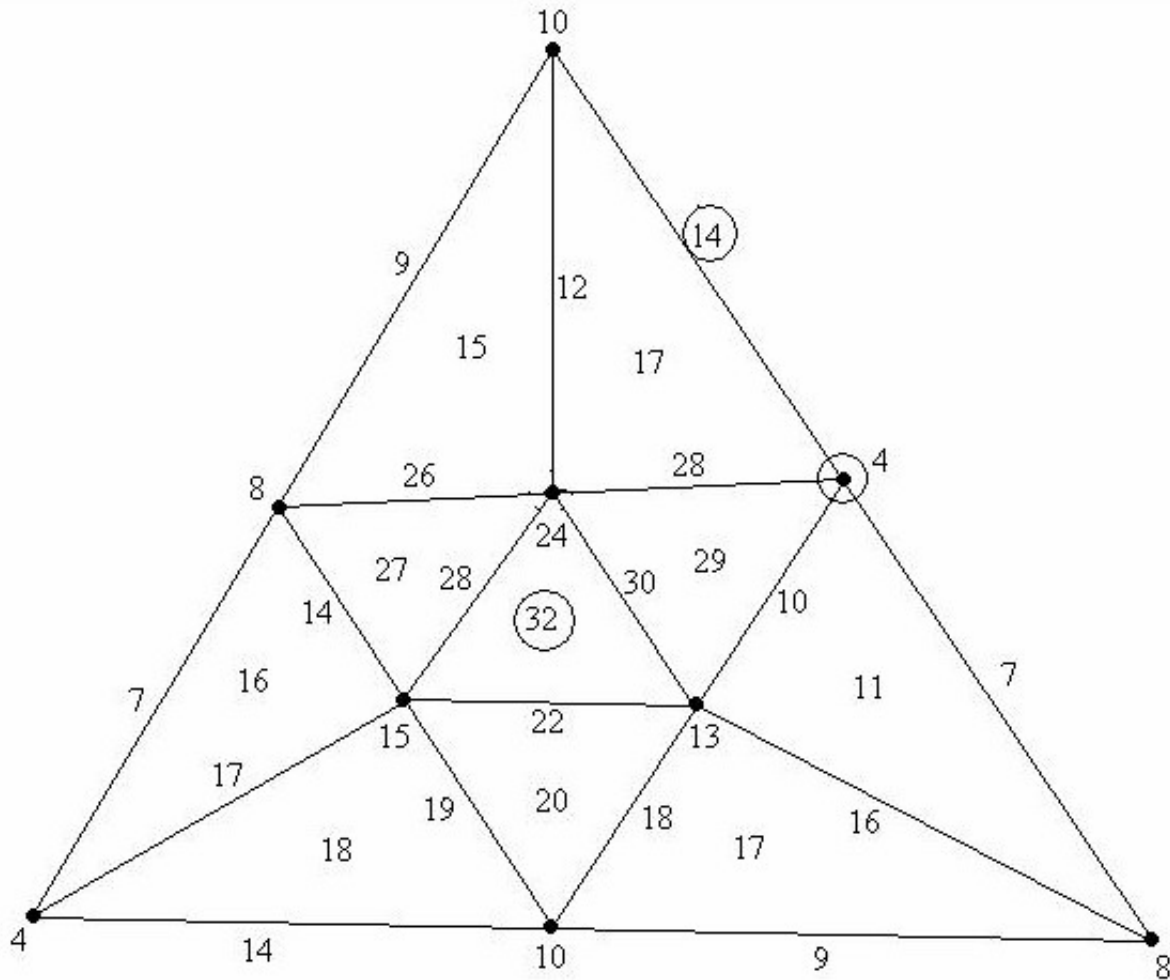


Figura 2.8. Funcție Morse discretă cu 3 simplexe critice pentru planul proiectiv real  $P^2(\mathbb{R})$

Aceasta arată faptul că există funcții Morse discrete definite pe complexul simplicial dat de triangularea planului proiectiv real  $P^2(\mathbb{R})$  din Figura 2.8, care au exact 3 simplexe critice.

O astfel de funcție este  $\mathbb{Z}_2$ -exactă și este definită în Figura 2.8. Simplexele critice din figură sunt încercuite.

**Exemplul 2.4.7** Considerăm banda lui Möbius  $M$  cu triangularea din Figura 2.9. Omologia singulară a lui  $M$  peste  $\mathbb{Z}$  este

$$H_j(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \text{ pentru } j = 0, 1 \text{ și } H_2(M, \mathbb{Z}) = 0.$$

Din formula coeficienților universali în omologie (vezi [2, pag. 118]) avem că:

$$H_k(M; \mathbb{Z}) \simeq (H_k(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_2) \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}_2; H_{k-1}(M; \mathbb{Z})), \quad k \in \mathbb{Z},$$

unde  $\text{Tor}(\mathbb{Z}_2; H_{k-1}(M; \mathbb{Z}))$  este produsul de torsiune al grupurilor  $(\mathbb{Z}_2, +)$  și  $H_{k-1}(M; \mathbb{Z})$ .

Atunci avem

$$H_0(M; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad H_1(M; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad H_2(M; \mathbb{Z}_2) \simeq 0,$$

și rezultă că

$$\beta_0(M; \mathbb{Z}_2) = 1, \quad \beta_1(M; \mathbb{Z}_2) = 1, \quad \beta_2(M; \mathbb{Z}_2) = 0.$$

Atunci numărul Betti total este

$$\beta(M, \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Pe de altă parte, din Teorema 2.4.3, avem relația

$$\gamma(M) = \beta(M, \mathbb{Z}_2) = 2.$$

Aceasta înseamnă că există funcții Morse discrete pentru complexul simplicial definit de triangularea din Figura 2.9 pentru banda lui Möbius  $M$ , care au exact 2 simplexe critice. O astfel de funcție este  $\mathbb{Z}_2$ -exactă și este definită în Figura 2.9, unde simplexele critice sunt încercuite.

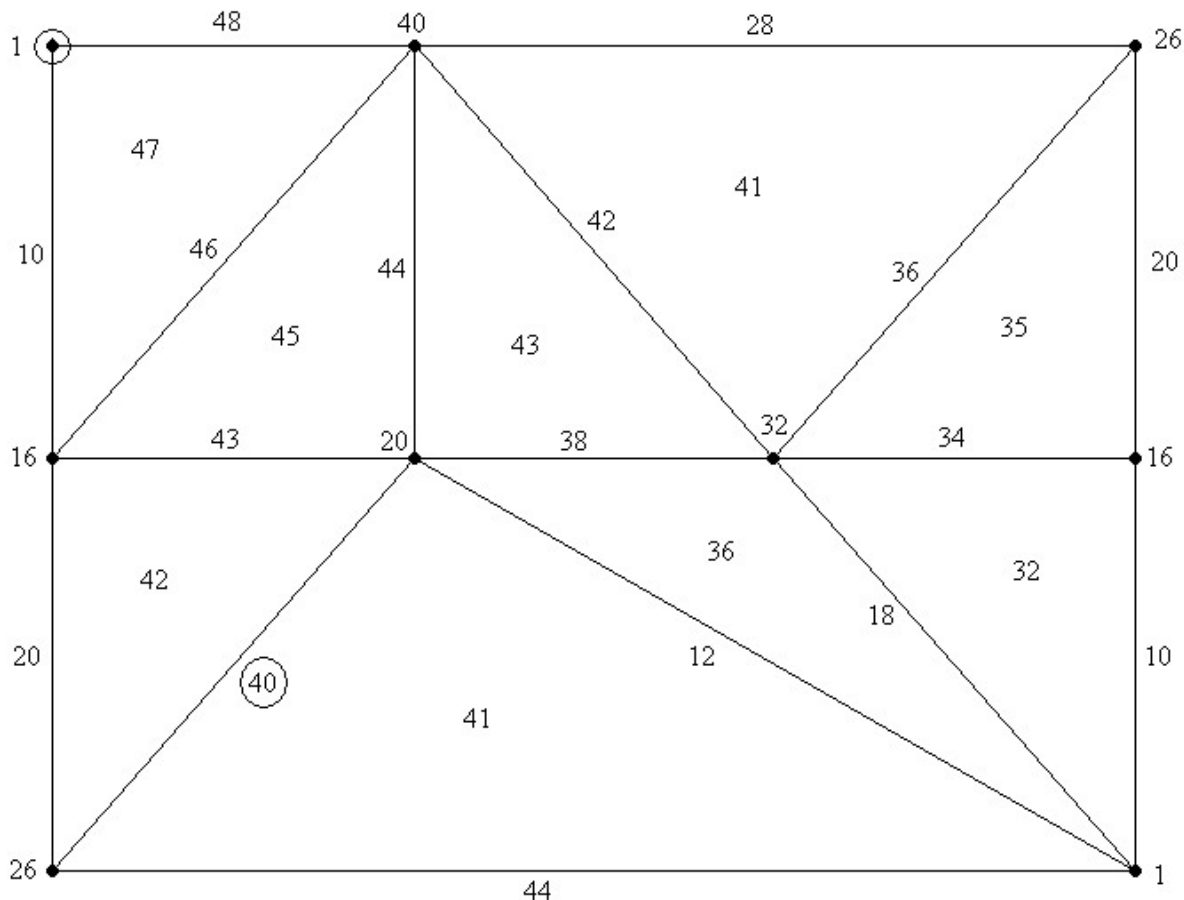


Figura 2.9. Funcție Morse discretă cu 2 simplexe critice pentru banda lui Möbius  $M$

**Exemplul 2.4.8** Considerăm sticla lui Klein  $K = P^2(\mathbb{R}) \# P^2(\mathbb{R})$  cu triangularea dată în Figura 2.10, unde  $\#$  reprezintă suma conexă.

Omologia singulară a lui  $K$  peste  $\mathbb{Z}$  este

$$H_0(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(K, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, \quad H_2(K, \mathbb{Z}) = 0.$$

Aplicând din nou formula coeficienților universali în omologie, avem

$$H_0(K, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad H_1(K, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad H_2(K, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Rezultă că  $\beta_0(K, \mathbb{Z}_2) = 1$ ,  $\beta_1(K, \mathbb{Z}_2) = 2$ ,  $\beta_2(K, \mathbb{Z}_2) = 1$ , deci numărul Betti total este

$$\beta(K, \mathbb{Z}_2) = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Folosind Teorema 2.4.3, avem relația

$$\gamma(K) = \beta(K, \mathbb{Z}_2) = 4.$$

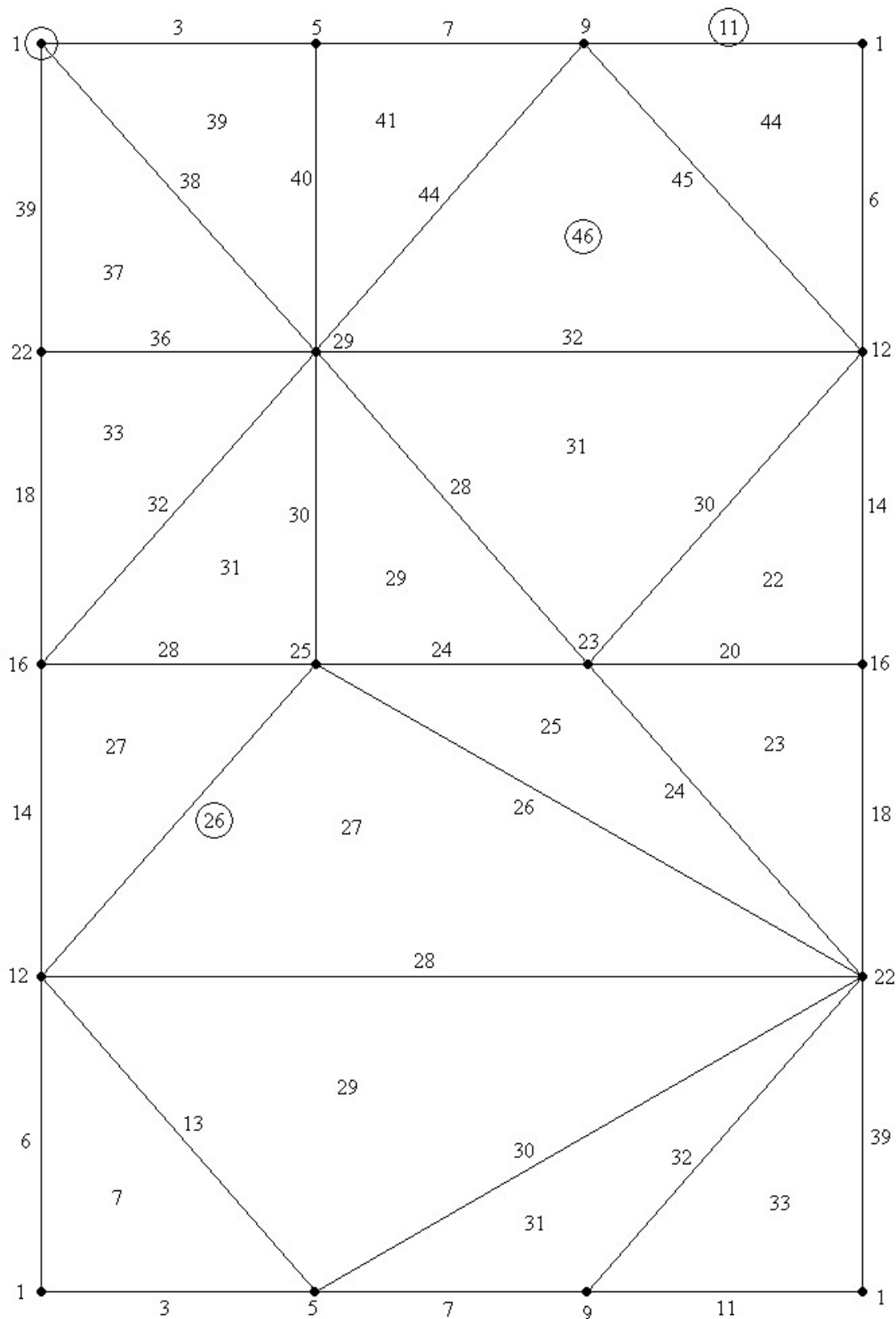


Figura 2.10. Funcție Morse discretă cu 4 simplexe critice definită pe sticla lui Klein  $K$

Aceasta înseamnă că există funcții Morse discrete definite pe complexul simplicial definit de triangularea din Figura 2.10 a sticlei lui Klein  $K$ , cu exact 4 simplexe critice. O astfel de funcție este  $\mathbb{Z}_2$ -exactă și este construită în Figura 2.10. Simplexele critice din figură sunt încercuite.

**Exemplul 2.4.9** Considerăm triangularea torului  $T^2 = S^1 \times S^1$ , dată în Figura 2.11.

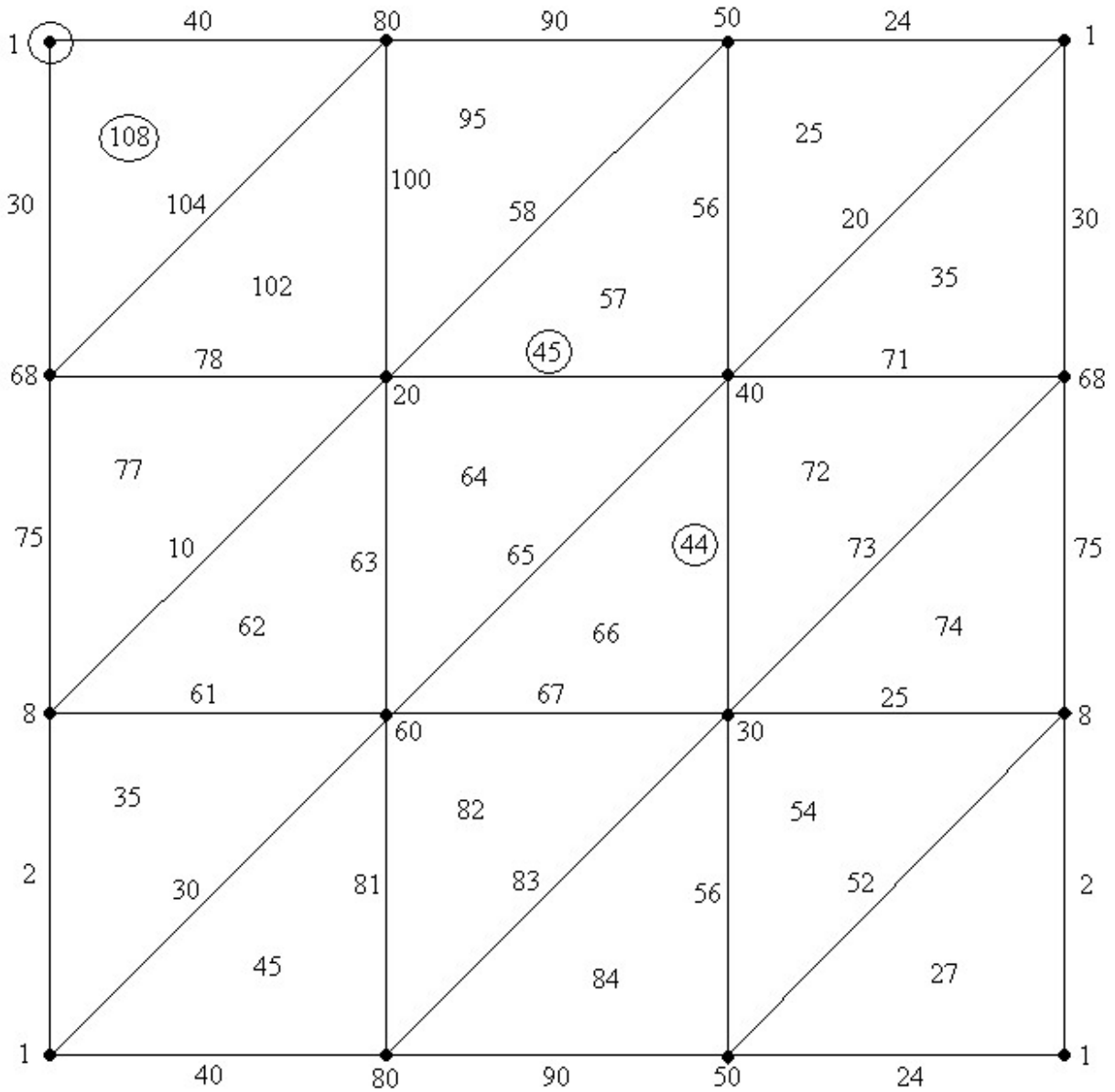


Figura 2.11. Funcție Morse discretă cu 4 simplexe critice definită pe torul  $S^1 \times S^1$

Omologia singulară a torului  $T^2 = S^1 \times S^1$  peste  $\mathbb{Z}$  este

$$H_0(T^2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_2(T^2) = \mathbb{Z}.$$

Atunci, prin aplicarea din nou a formulei coeficienților universali, avem

$$H_0(T^2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad H_1(T^2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad H_2(T^2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Rezultă că

$$\beta_0(T^2, \mathbb{Z}_2) = 1, \quad \beta_1(T^2, \mathbb{Z}_2) = 2, \quad \beta_2(T^2, \mathbb{Z}_2) = 1,$$

deci numărul Betti total este

$$\beta(T^2, \mathbb{Z}_2) = \sum_{j=0}^2 \beta_j(T^2, \mathbb{Z}_2) = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Pe de altă parte, folosind Teorema 2.4.3, avem relația

$$\gamma(S^1 \times S^1) = \beta(S^1 \times S^1, \mathbb{Z}_2) = 4,$$

fapt ce arată că există funcții Morse discrete pe complexul simplicial definit de triangularea din Figura 2.11 a torului  $T^2$ , care au exact 4 simplexe critice. O astfel de funcție este  $\mathbb{Z}_2$ -exactă și este definită în Figura 2.11. Simplexele critice din figură sunt încercuite.

**Exemplul 2.4.10** Considerăm triangularea torului cu 2 găuri obținut dintr-o sumă conexă de 2 toruri  $T^2$ , dată în Figura 2.12.

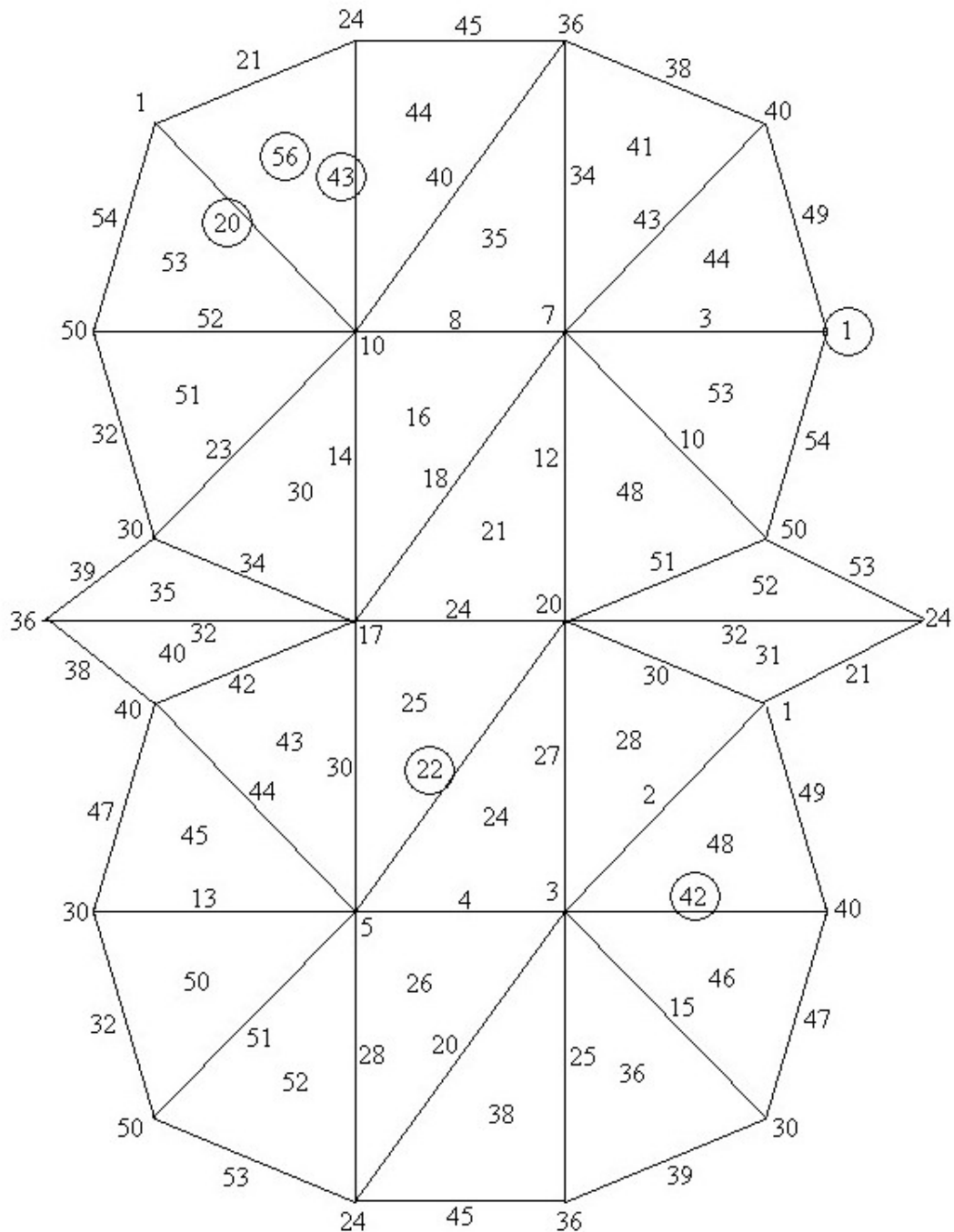


Figura 2.12. Funcție Morse discretă cu 6 simplexe critice definită pe sumă conexă de 2 toruri

Omologia singulară a torului cu 2 găuri  $T_2 = T^2 \# T^2$  peste  $\mathbb{Z}$  este

$$H_0(T_2) = \mathbb{Z}, \quad H_1(T_2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad H_2(T_2) = \mathbb{Z}.$$

Atunci, prin aplicarea din nou a formulei coeficienților universali, avem

$$H_0(T_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad H_1(T_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad H_2(T_2, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Rezultă că

$$\beta_0(T_2, \mathbb{Z}_2) = 1, \quad \beta_1(T_2, \mathbb{Z}_2) = 4, \quad \beta_2(T_2, \mathbb{Z}_2) = 1,$$

deci numărul Betti total este

$$\beta(T_2, \mathbb{Z}_2) = \sum_{j=0}^2 \beta_j(T_2, \mathbb{Z}_2) = 1 + 4 + 1 = 6.$$

Pe de altă parte, folosind Teorema 2.4.3, avem relația  $\gamma(T_2) = \beta(T_2, \mathbb{Z}_2) = 6$ , fapt ce arată că există funcții Morse discrete pe complexul simplicial definit de triangularea din Figura 2.12 a torului cu 2 găuri  $T_2$ , care au exact 6 simplexe critice. O astfel de funcție este  $\mathbb{Z}_2$ -exactă și este definită în Figura 2.12. Simplexele critice din figură sunt încercuite.

**Exemplul 2.4.11** Considerăm triangularea pălăriei lui Dunce dată în Figura 2.13.

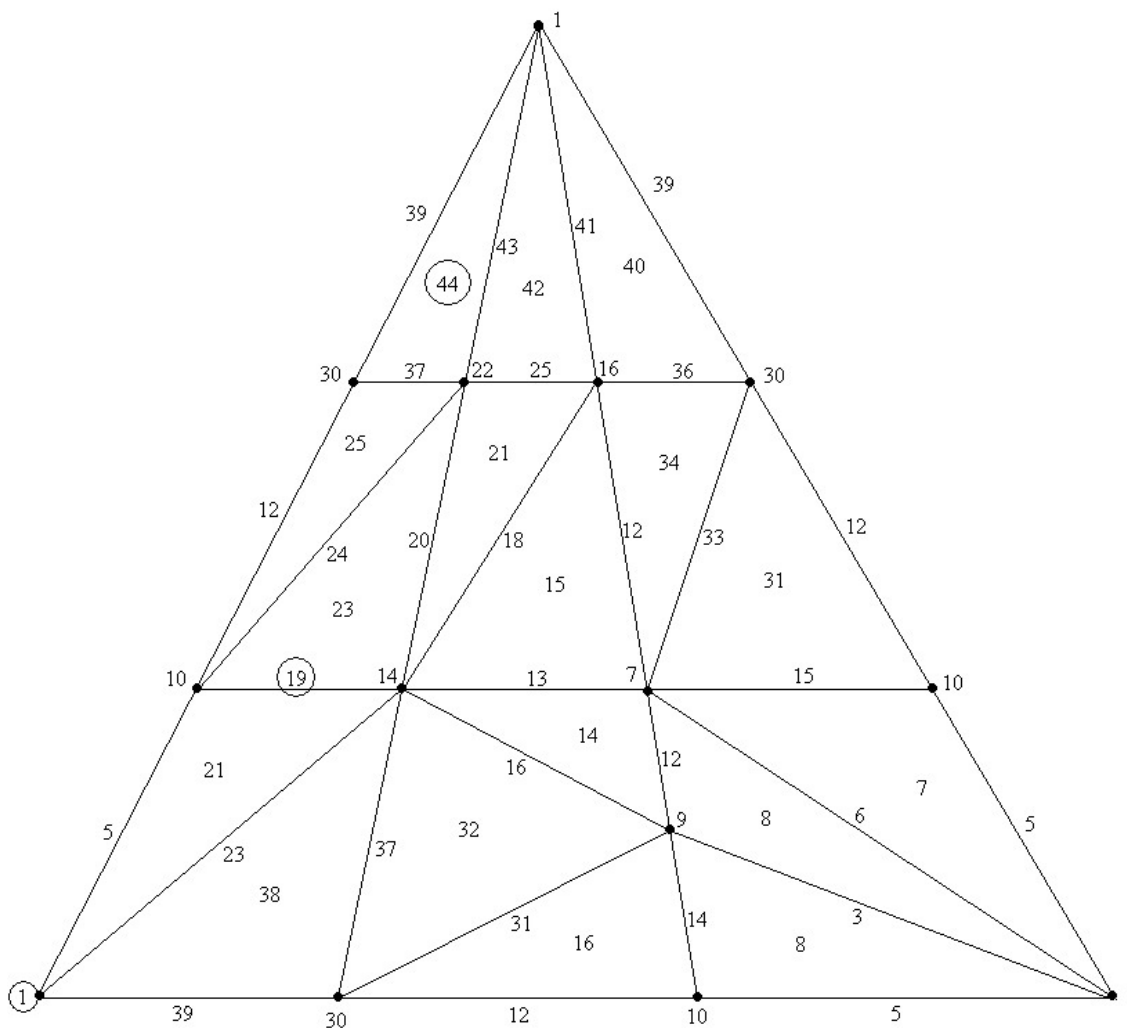


Figura 2.13. Funcție Morse discretă cu 3 simplexe critice definită pe pălăria lui Dunce

Omologia singulară a pălăriei lui Duncce DH peste  $\mathbb{Z}$  este

$$H_0(DH) = \mathbb{Z}, \quad H_1(DH) = \mathbb{Z}, \quad H_2(DH) = \mathbb{Z}.$$

Atunci prin aplicarea din nou a formulei coeficienților universalii avem

$$H_0(DH, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad H_1(DH, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad H_2(DH, \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Rezultă că

$$\beta_0(DH, \mathbb{Z}_2) = 1, \quad \beta_1(DH, \mathbb{Z}_2) = 1, \quad \beta_2(DH, \mathbb{Z}_2) = 1,$$

deci numărul Betti total este:

$$\beta(DH, \mathbb{Z}_2) = \sum_{j=0}^2 \beta_j(DH, \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Pe de altă parte, folosind Teorema 2.4.3, avem relația  $\gamma(DH) = \beta(DH, \mathbb{Z}_2) = 3$ , fapt ce arată că există funcții Morse discrete pe complexul simplicial definit de triangularea din Figura 2.13 a pălăriei lui Duncce, care au exact 3 simplexe critice. O astfel de funcție este  $\mathbb{Z}_2$ -exactă și este definită în Figura 2.13. Simplexele critice din figură sunt încercuite.



# Capitolul 3

## Funcții Morse discrete perfecte

În acest capitol studiem funcțiile Morse discrete perfecte definite pe complexe simpliciale 2-dimensionale. Aceste funcții Morse discrete au proprietatea următoare: numărul de simplexe critice de dimensiune  $i$  coincide cu numerele Betti de ordin  $i$  ale complexului simplicial. Se stabilesc condiții pentru ca un 2-complex să admită funcții Morse discrete perfecte, și reciproc, obținem proprietățile topologice ale unui 2-complex în ipoteza că, complexul admite astfel de funcții. Aceste rezultate pot fi considerate ca fiind un punct de plecare în studiul funcțiilor Morse discrete perfecte pentru complexe simpliciale 3-dimensionale.

### 3.1 Teorema de clasificare a suprafețelor

**Teorema 3.1.1** (Clasificarea suprafețelor fără frontieră) *Orice suprafață conexă compactă fără frontieră este omeomorfă cu exact una dintre următoarele suprafețe: sfera  $S^2$ , o sumă conexă  $T_g$  de toruri,  $g > 0$ , sau o sumă conexă  $M_g$  de plane proiective,  $g > 0$ .*

O demonstrație pentru această teoremă se găsește în [10].

Sfera (Figura 3.1(a)) și sumele conexe de toruri (Figura 3.1(b)) sunt suprafețe orientabile în timp ce banda lui Möbius nu este orientabilă.

Numărul  $g$  se numește genul suprafeței. Numerele Betti (calculate cu coeficienții din  $\mathbb{Z}_2$ ) și orientabilitatea caracterizează complet topologia unei suprafețe, deoarece putem calcula explicit grupurile de omologie ale suprafețelor fundamentale [10].



Figura 3.1. Exemple de suprafețe fără frontieră:  
(a) Sfera 2-dimensională; (b) Suma conexă de două toruri;  
(c) Sticla lui Klein: suma conexă de două plane proiective

**Propoziția 3.1.2** (Grupurile de omologie ale suprafețelor fundamentale)

$$\begin{aligned} H_0(S^2) &= \mathbb{Z}_2, & H_1(S^2) &= 0, & H_2(S^2) &= \mathbb{Z}_2, \\ H_0(T_g) &= \mathbb{Z}_2, & H_1(T_g) &= 2g \cdot \mathbb{Z}_2, & H_2(T_g) &= \mathbb{Z}_2, \\ H_0(M_g) &= \mathbb{Z}_2, & H_1(M_g) &= g \cdot \mathbb{Z}_2, & H_2(M_g) &= \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

**Propoziția 3.1.3** (Clasificarea suprafețelor cu frontieră) *Orice suprafață conexă compactă cu frontieră nevidă este omeomorfă cu exact una din următoarele suprafețe: o sferă, o sumă finită conexă de toruri sau o sumă finită de plane proiective, în fiecare caz fiind îndepărtate un număr finit de discuri deschise.*

O demonstrație pentru această extindere a teoremei pentru suprafețe închise poate fi găsită în [10].

Grupul de omologie  $H_0$  rămâne la fel și  $H_2$  se anulează pentru suprafețe cu frontieră.

De exemplu, identificând frontierele a două discuri cu frontiera unui cilindru (Figura 3.2(a)) obținem un spațiu omeomorf cu sfera. Identificând frontiera unui disc cu frontiera bandei lui Möbius (Figura 3.2(b)) obținem un spațiu omeomorf cu planul proiectiv.

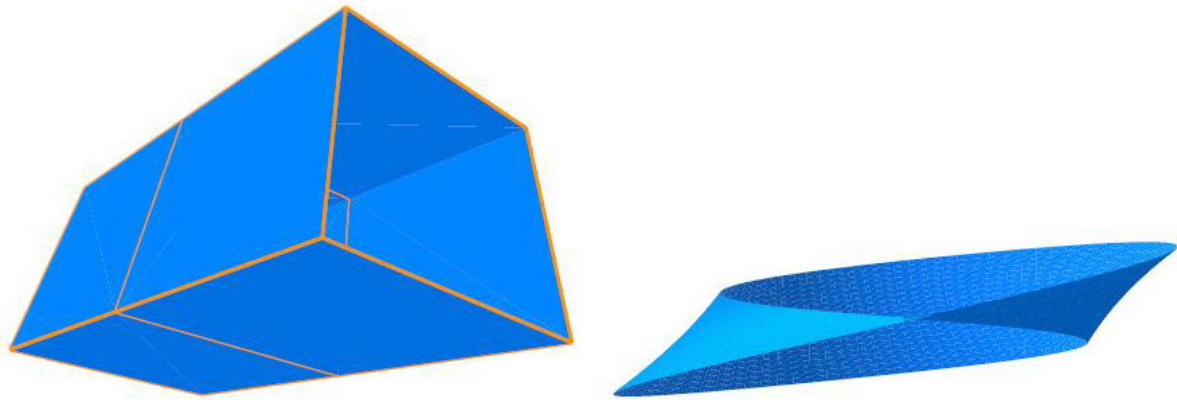


Figura 3.2. Exemple de suprafețe cu frontieră nevidă:  
(a) Cilindrul; (b) Banda lui Möbius

## 3.2 Condiții suficiente ca o funcție Morse discretă să fie exactă

În acest paragraf vom enunța condiții suficiente care asigură faptul că o funcție Morse discretă este exactă sau optimală.

**Propoziția 3.2.1** (Suprafețe fără frontieră) *Fie  $f$  o funcție Morse discretă definită pe o suprafață compactă conexă fără frontieră. Dacă  $f$  are exact un vârf critic, o față critică și posibil mai multe muchii critice, atunci  $f$  este optimală.*

**Propoziția 3.2.2** (Suprafețe cu frontieră) *Fie  $f$  o funcție Morse discretă definită pe o suprafață compactă conexă cu frontieră nevidă. Dacă  $f$  are un vârf critic, nu are fețe critice și posibil mai multe muchii critice, atunci  $f$  este optimală.*

Algoritmul de construcție a unei funcții Morse discrete exacte este descris în cele ce urmează.

Dacă avem un complex celular finit conex  $K$  care are topologia unei varietăți diferentiabile 2-dimensionale conexe, algoritmul de construcție se face în patru pași:

1. Construim arborele generat pe pseudograful dual al lui  $K$ .
2. Dacă  $K$  are frontieră, atunci adăugăm o buclă la  $T$ .
3. Definim o funcție Morse discretă pe  $T$ .
4. Definim o funcție Morse discretă pe complementara lui  $T$ .

**Primul pas.** (Construcția unui arbore generat de o față) Arborele  $T$  poate fi construit pe pseudograful dual conform unor algoritmi standard [53]. În particular, putem folosi unele strategii de reducere. De exemplu, algoritmul de reducere utilizat în lucrarea [65] (Figura 3.3), care în cazul torului triangulat conduce la arboreii din Figura 3.4.

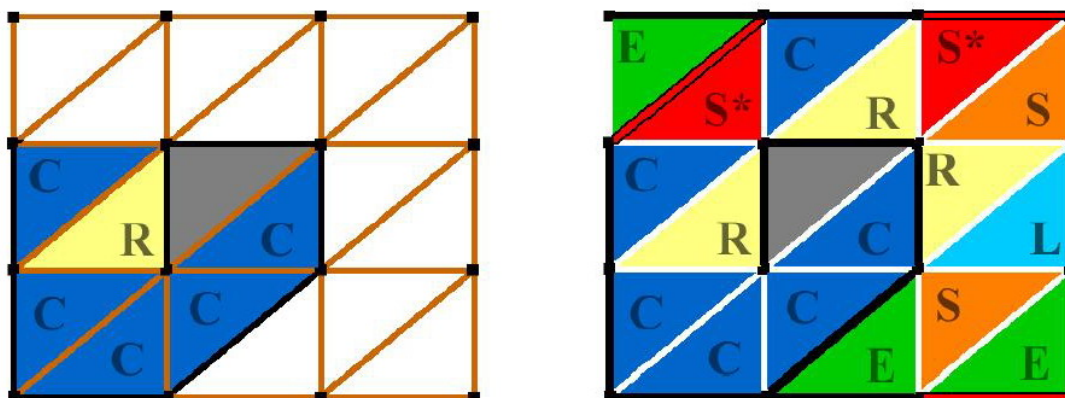


Figura 3.3. Codurile de reducere pe torul triangulat

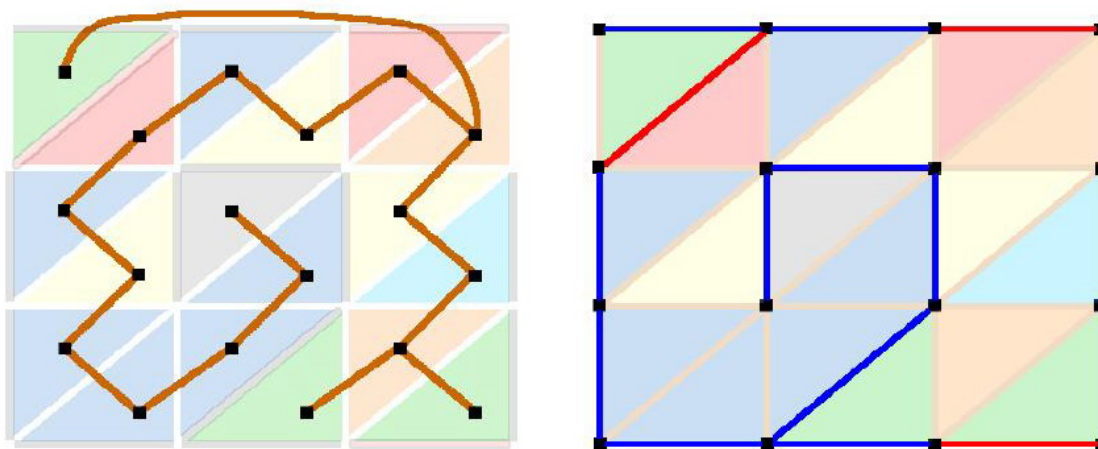


Figura 3.4. Arborele  $T$  generat de o față și graful său complementar  $G$

**Pasul doi.** (Adăugarea unei bucle) Testăm dacă suprafața are frontieră. Dacă găsim o buclă, o adăugăm la  $T$ , deci  $T$  devine un pseudograf. De exemplu în Figura 3.5, bucla de valoare 21 a fost adăugată la  $T$ .

**Pasul 3.** (Definirea funcției pe  $T$ ) Selectăm o cale pe  $T$  și atribuim fiecărui nod din  $T$  (adică la fiecare 2-celulă din  $K$ ) înălțimea lui în arbore plus o constantă  $c$ . Asociem fiecărei intersecții (adică la fiecare 1-celulă valoarea minimă a celor două extremități (conform Figurii 3.5). Rezultatul acestui proces aplicat exemplului din Figura 3.3 este ilustrat în Figura 3.6.

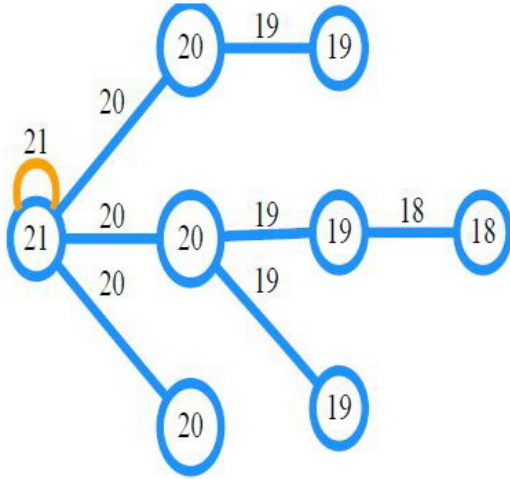


Figura 3.5. Bucla adăugată la pasul 2 la o față generatoare a arborelui  $T$  (fără celule critice)

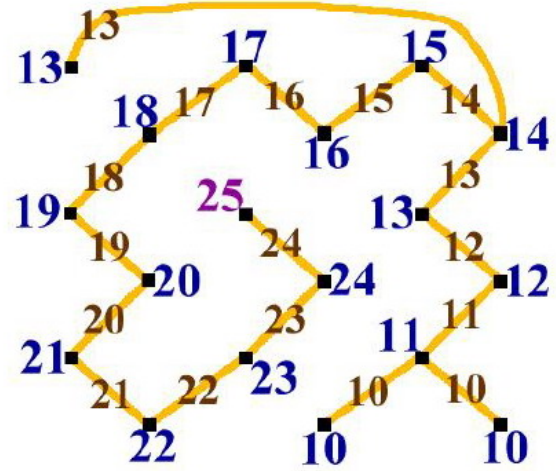


Figura 3.6. Funcția Morse discretă definită pe arborele generator  $T$  din Figura 3.3 (cu o față critică)

În construcția noastră, valoarea inițială a lui  $c$  trebuie să fie cel puțin numărul vârfurilor lui  $K+1$ . **Pasul 4.** (Definirea funcției pe complementul lui  $T$ ) Considerăm  $G$ , complementul lui  $T$ .  $G$  este un graf fără bucle ale cărui noduri sunt vârfurile din  $K$ , și ale cărui intersecții sunt muchiile lui  $K$  care nu sunt reprezentate în  $T$ . Construim un alt arbore  $U$  pe  $G$ . Asociem fiecărui nod din  $G$  distanța pe muchii la drumul lui  $U$  și la fiecare intersecție a lui  $U$  valoarea maximă pe cele două extremități. În final atribuim valoarea  $(c-1)$  la fiecare intersecție a lui  $G \setminus U$  (conform muchiei critice cu valoarea 12 din Figura 3.7). Rezultatul acestui proces pe exemplul din Figura 3.3 este ilustrat în Figura 3.8.

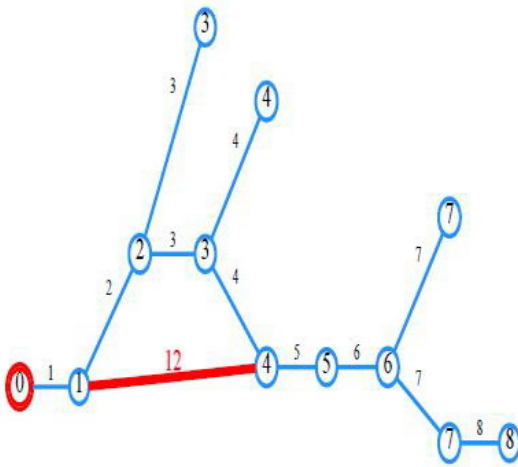


Figura 3.7. Graficul complement  $G$  al modelului cilindru și funcția Morse discretă definită pe el (un vârf critic și o muchie critică)

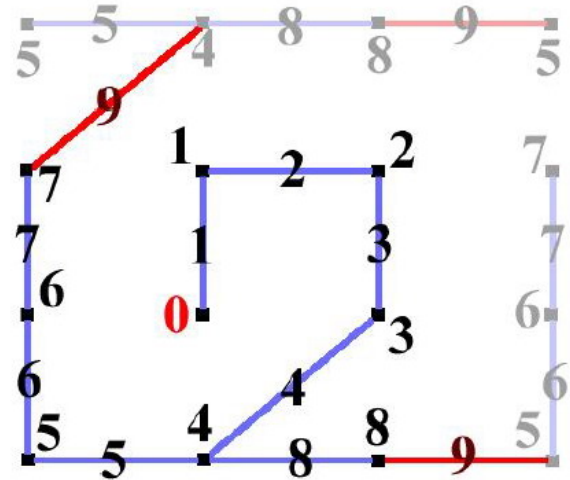


Figura 3.8. Funcția Morse discretă definită pe graficul complement  $G$  din Figura 3.3 (un vârf critic și 2 muchii critice)

### 3.3 Funcții Morse discrete $\mathbb{Z}$ -perfecte definite pe 2-complexe

Vom începe studiul existenței funcțiilor Morse discrete și perfecte definite pe un 2-complex considerând cazul omologiei cu coeficienți întregi. Următorul rezultat demonstrează că orice complex 1-dimensional admite o funcție Morse discretă  $\mathbb{Z}$ -perfectă.

**Propoziția 3.3.1** *Orice graf conex admite o funcție Morse discretă  $\mathbb{Z}$ -perfectă.*

Deoarece arborele generat este construit într-un timp liniar și în demonstrația Propoziției 3.3.1 orice simplex este parcurs cel puțin odată, atunci este posibil să definim un algoritm ce construiește funcții Morse discrete  $\mathbb{Z}$ -perfecte pe  $G$  într-un timp de complexitate liniară.

Propoziția 3.3.1 poate fi extinsă pentru orice 2-complex care colapsează la un graf în modul următor:

**Corolarul 3.3.2** *Fie  $K$  un 2-complex care colapsează într-un graf  $G$  conținut în  $K$ . Atunci  $K$  admite o funcție Morse discretă  $\mathbb{Z}$ -perfectă.*

Este interesant faptul că orice suprafață cu frontieră care colapsează într-un graf, admite o funcție Morse discretă  $\mathbb{Z}$ -perfectă.

Următorul rezultat ne arată cum colapsibilitatea unui complex general poate fi exprimată cu ajutorul caracteristicii Morse-Smale.

**Lema 3.3.3** *Fie  $K$  un complex. Atunci  $K$  este colapsibil dacă și numai dacă  $\gamma(K) = 1$ .*

Următoarele rezultate realizează legături între existența funcțiilor Morse discrete  $\mathbb{Z}$ -perfecte definite pe un 2-complex cu unele omologii de grup triviale și tipul de omotopie simplă.

**Propoziția 3.3.4** *Fie  $K$  un 2-complex compact și conex care admite funcții Morse discrete  $\mathbb{Z}$ -perfecte. Atunci au loc următoarele rezultate:*

1. *Dacă, complexul  $K$  este aciclic, atunci  $K$  este colapsibil.*
2. *Dacă  $H_0(K) = 0$  și  $H_1(K) = 0$ , atunci  $K$  are același tip de omotopie simplă ca o mucie a sferei  $S^2$ .*
3. *Dacă  $H_0(K) = 0$  și  $H_2(K) = 0$ , atunci  $K$  are același tip de omotopie simplă ca un graf.*

**Corolarul 3.3.5** *Fie  $K$  un 2-complex compact și conex. Dacă,  $K$  este aciclic și nu este colapsibil, atunci  $K$  nu admite funcții Morse discrete  $\mathbb{Z}$ -perfecte.*

Fie  $co(K)$  numărul minimal de 2-simplexe  $f_1, \dots, f_{co(K)}$ , care trebuie îndepărtate din  $K$  astfel încât  $K - \{f_1, \dots, f_{co(K)}\}$  să fie colapsibil la un graf. Următoarea teoremă stabilește relația dintre numărul  $co(K)$  și existența funcțiilor Morse discrete  $\mathbb{Z}$ -perfecte pe complexul  $K$ .

**Teorema 3.3.6** *Fie  $K$  un 2-complex compact și conex. Atunci  $K$  admite funcții Morse discrete  $\mathbb{Z}$ -perfecte dacă și numai dacă  $co(K) = \beta_2(K; \mathbb{Z})$ .*

**Corolarul 3.3.7** *Fie  $K$  o suprafață compactă și conexă fără frontieră. Atunci  $K$  admite funcții Morse discrete  $\mathbb{Z}$ -perfecte dacă și numai dacă  $K$  este orientabilă.*

**Observația 3.3.8** Corolarul 3.3.7 poate fi extins în mod direct la 2-pseudovarietăți diferențiabile, în modul următor. O 2-pseudovarietate diferențiabilă  $K$  admite o funcție Morse discretă  $\mathbb{Z}$ -perfectă dacă și numai dacă  $K$  este orientabilă.

## 3.4 Funcții Morse discrete F-perfecte definite pe 2-complexe

În această secțiune vom discuta problema generală de existență a funcțiilor Morse discrete F-perfecte definite pe un 2-complex, unde  $F$  este câmp. Această problemă se pune în mod natural atunci când studiem de ce un 2-complex nu admite funcții Morse discrete  $\mathbb{Z}$ -perfecte. Aceasta este influențată de următoarele două aspecte: natura grupului fundamental al complexului și existența elementelor de torsiune în grupul de omologie al complexului.

În primul avem exemple cum ar fi planul proiectiv real, casa lui Bing sau mai general orice 2-complex necolapsibil și aciclic. Toate aceste complexe au în comun faptul că sunt omologic triviale dar nu sunt topologic triviale. În cele ce urmează vom demonstra faptul că aceste complexe nu admit funcții Morse discrete F-perfecte, pentru orice câmp  $F$ .

**Teorema 3.4.1** *Un 2-complex  $K$  este aciclic, necolapsibil și conex, nu admite funcții Morse discrete F-perfecte, pentru orice câmp  $F$ .*

Notăm faptul că în cazul al doilea, deși aceste tipuri de complexe nu admit funcții Morse discrete  $\mathbb{Z}$ -perfecte, ele pot admite funcții Morse discrete F-perfecte, pentru un câmp  $F$  convenabil. În particular, Corolarul 3.3.7 caracterizează aceste suprafețe ce admit funcții Morse discrete  $\mathbb{Z}$ -perfecte ca fiind suprafețele orientabile.

Totuși următorul rezultat ne arată cum influențează schimbarea coeficienților existența funcțiilor Morse discrete perfecte.

**Propoziția 3.4.2** *Orice suprafață compactă, conexă, neorientabilă și fără frontieră admite funcții Morse discrete  $\mathbb{Z}_2$ -perfecte.*

**Corolarul 3.4.3** *Orice suprafață compactă și conexă admite o funcție Morse discretă  $\mathbb{Z}_2$ -perfectă.*

**Observația 3.4.4** Mai mult, orice spațiu pseudoproiectiv, aceasta însemnând un spațiu obținut prin alipirea unei 2-bile la  $S^1$  printr-o aplicație de grad  $p$ , admite funcții Morse discrete  $\mathbb{Z}_p$ -perfecte. Acest lucru poate fi demonstrat repetând argumentul din demonstrația Propoziției 3.4.2.

În literatura de specialitate rezultatele referitoare la existența funcțiilor Morse discrete optime (exacte) sunt restricționate la suprafețe triangulabile. Acest capitol extinde studiul la cazul 2-complexelor simpliciale. Noțiunea de funcție Morse discretă optimală (exactă) nu este echivalentă cu cea de funcție Morse discretă perfectă. Apare astfel o nouă problemă: cum determinăm o funcție Morse discretă optimală pentru un 2-complex aciclic, necontractibil. Pe de altă parte rezultatele din Capitolul 3 pot fi privite ca un prim pas în studiul funcțiilor Morse discrete perfecte definite pe varietăți diferentiabile 3-dimensionale triangulabile. Aceasta poate fi efectuată prin colapsarea varietății diferentiabile 3-dimensionale la un 2-complex, așa numitul spin al varietății diferentiabile 3-dimensionale, și problema se reduce la găsirea unei funcții perfecte pe un 2-complex.

# Capitolul 4

## Optimalitate omologică în teoria Morse discretă

### 4.1 Omologia complexelor de lanțuri

Fie  $\Lambda$  un câmp comutativ și  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  o mulțime finită de simboluri. Fie  $l$  un număr întreg pozitiv. Considerăm  $B^l = \{x \in E^l \mid |x| \leq 1\}$  bila închisă de rază 1 în spațiul Euclidian  $l$ -dimensional  $E^l$ .

Notăm cu  $\Lambda[x_1, x_2, \dots, x_n]$  combinațiile liniare formale  $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$ , unde  $\lambda_i \in \Lambda$ .

**Definiția 4.1.1** Un **operator diferențial** pentru un complex celular  $K$  cu coeficienți în  $\Lambda$ , este o aplicație liniară  $d : \Lambda[K] \rightarrow \Lambda[K]$ , definită astfel încât imaginea unei  $p$ -celule  $\sigma$  este o combinație liniară a unor  $(p-1)$ -celule ale frontierei  $\partial(\sigma)$  și satisface condiția  $d \circ d = 0$ .

Considerând complexul celular  $K$  scufundat în  $E^l$ , realizarea geometrică  $|K|$  a lui  $K$  este un complex celular regulat și triangulabil și de aceea operatorul diferențial  $\partial$  cu coeficienți din câmpul  $\Lambda$  poate fi definit întotdeauna. Acest operator, numit **operator de frontieră**, determină complet omologia singulară a lui  $|K|$  ([50]).

Complexul de lanțuri canonic asociat complexului celular  $K$  este spațiul vectorial graduat  $(C_*(K), \partial)$ , unde  $C_p(K) = \Lambda[K_p]$ ,  $p = 0, 1, \dots, r$ , și  $\partial : C_p(K) \rightarrow C_{p-1}(K)$  este operatorul de frontieră definit anterior pentru complexul celular  $K$ .

De exemplu, a găsi un operator de frontieră  $\partial$  pentru un complex simplicial este simplu, dar nu este în general ușor de a găsi pentru complexe celulare. Următorul rezultat este fundamental pentru teoria complexelor celulare ([50]).

**Teorema 4.1.2** Fie  $K$  un complex celular finit. Atunci există aplicația frontieră algebrică  $\partial_p : C_p(K, \Lambda) \rightarrow C_{p-1}(K, \Lambda)$ , pentru fiecare  $p$ , astfel încât  $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$  și există complexul diferențial  $\{C_p(K, \Lambda), \partial_p\}_{p=0}^r$  care determină omologia lui  $|K|$ . Dacă definim  $H_p(C, \partial) = \text{Ker}(\partial_p) / \partial_{p+1}(C)$  avem  $H_p(C, \partial) \cong H_p(|K|, \Lambda)$ .

### 4.2 Algebrizarea teoriei Morse discrete

Scopul teoriei Morse discrete este să găsim colapsuri simpliciale care transformă un complex  $K$  în unul mai simplu. Acest lucru poate fi realizat folosind în esență noțiuni algebrice în care funcțiile Morse discrete sunt folosite deoarece țin evidența colapsurilor și ordinea în care sunt făcute acestea. Acum, reactualizăm mecanismul algebric subliniat în teoria Morse discretă, stabilim o nouă metodă pentru a lucra cu complexe de lanțuri asociate complexelor celulare finite și arătăm că arborii sunt contextul combinatorial potrivit pentru a rezolva problema omologică computațională.

**Definiția 4.2.1** Un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $(C, d, \phi)$  este un modul graduat  $C = \{C_p\}_{p=0}^n$  înzestrat cu două aplicații liniare: un operator diferențial  $d : C_* \rightarrow C_{*+1}$ , și un operator integral  $\phi : C_* \rightarrow C_{*+1}$ , satisfăcând relațiile  $d \circ d = 0$ ,  $\phi \circ \phi = 0$ .

Acest operator integral poate fi numit și **operatorul de omotopie de lanțuri** ([29]).

Vom reprezenta un operator integral printr-o săgeată dusă de la o celulă cu dimensiune mai mică spre o celulă cu dimensiune mai mare (vezi Figura 4.1).

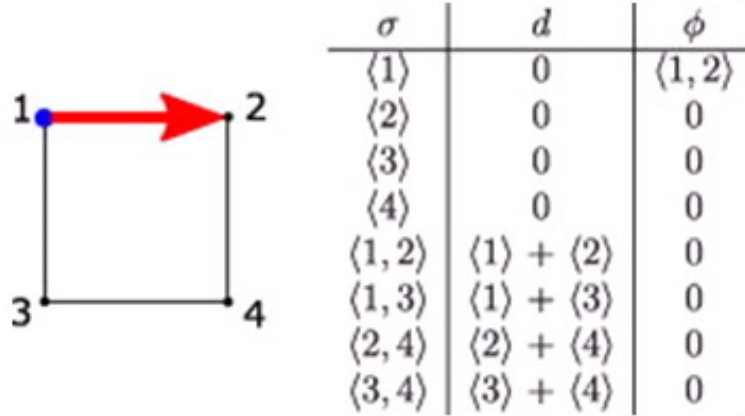


Figura 4.1. Un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri și un operator integral (reprezentat printr-o săgeată)

**Definiția 4.2.2** Un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $(C, d, \phi)$  este  **$d$ -pur** dacă satisface relația  $d = d \circ \phi \circ d$  (numită condiția de omologie).

Un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $(C, d, \phi)$  este  **$\phi$ -pur** dacă satisface relația  $\phi = \phi \circ d \circ \phi$  (numită condiția de retract tare de deformare).

Un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri care este  $d$ -pur și  $\phi$ -pur se numește  **$\mathbb{Z}$ -complex omologic de lanțuri**.

În acest caz  $d$ , respectiv  $\phi$  sunt operatorul diferențial omologic și operatorul integral omologic.

De exemplu,  $\mathbb{Z}$ -complexul de lanțuri din Figura 4.2 este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri omologic deoarece relațiile  $d = d \circ \phi \circ d$  și  $\phi = \phi \circ d \circ \phi$  sunt îndeplinite pentru orice celulă din complex.

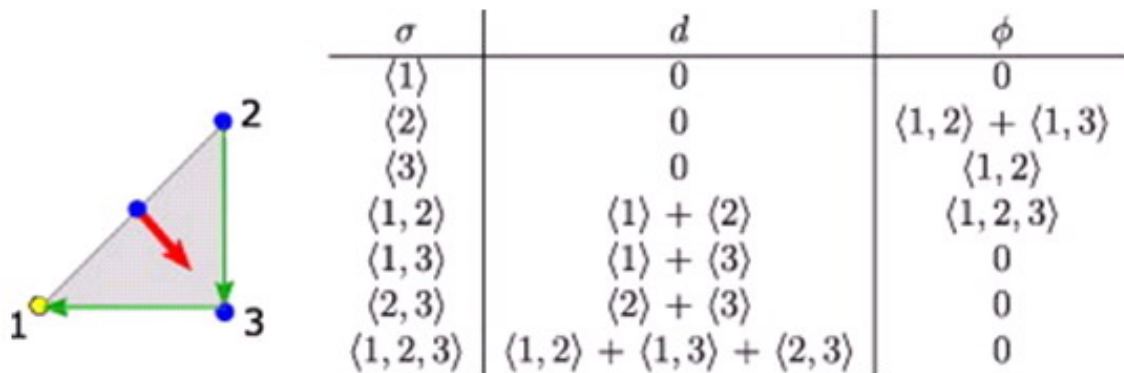


Figura 4.2. Un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri omologic.

Operatorul integral omologic este reprezentat prin săgeți

Fie două  $\mathbb{Z}$ -complexe de lanțuri  $(C, d, \phi)$  și  $(C', d', \phi')$ . O **aplicație de  $\mathbb{Z}$ -complexe de lanțuri**  $(f, g) : (C, d, \phi) \rightarrow (C', d', \phi')$  este o pereche de aplicații liniare  $f : C \rightarrow C'$ ,  $g : C' \rightarrow C$  ce îndeplinesc relațiile:

$$f \circ d = d' \circ f, \quad g \circ d' = d \circ g, \quad f \circ \phi = \phi' \circ f, \quad g \circ \phi' = \phi \circ g.$$



**Definiția 4.2.3** Fie două  $\mathbb{Z}$ -complexe de lanțuri  $(C, d, \phi)$  și  $(C', d', \phi')$ .

Spunem că cele două sunt echivalente dacă există o aplicație de  $\mathbb{Z}$ -complexe de lanțuri  $(f, g)$  care satisface relațiile:

$$f \circ g = id_{C'} - d' \circ \phi' - \phi' \circ d' \text{ și } g \circ f = id_C - d \circ \phi - \phi \circ d.$$

Două  $\mathbb{Z}$ -complexe de lanțuri echivalente sunt reprezentate în Figura 4.3.

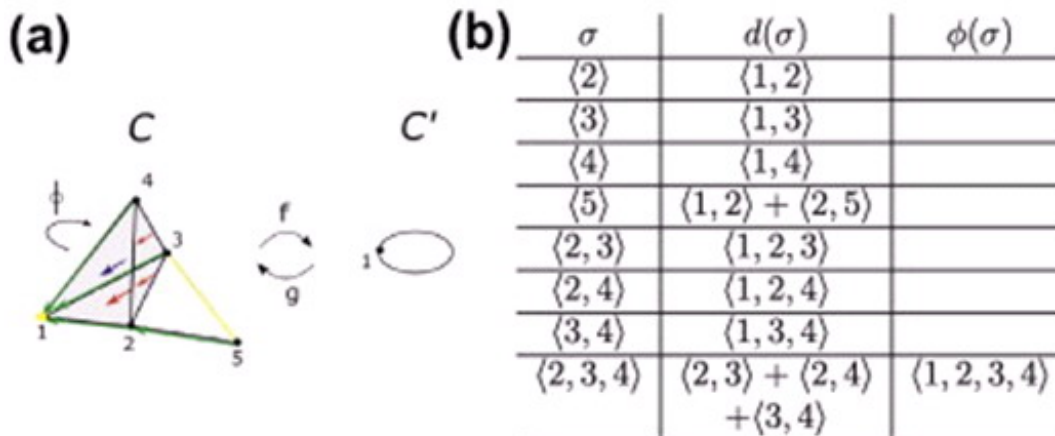


Figura 4.3. (a) Două  $\mathbb{Z}$ -complexe de lanțuri echivalente  $(C, d, \phi)$  și  $(C', d', \phi')$ .  
(b) Valorile operatorilor  $d$  și  $\phi$  pentru complexul  $(C, d, \phi)$

Omologia  $H_*(C, d, \phi)$  a  $\mathbb{Z}$ -complexului de lanțuri  $(C, d, \phi)$  este grupul abelian graduat  $H_*(C)$ , astfel încât  $(H_*(C), 0, 0)$  este echivalent cu  $(C, d, \phi)$ . Omologia diferențială respectiv integrală a unui  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $(C, d, \phi)$  este omologia complexului  $(C, d, 0)$ , respectiv a lui  $(C, 0, \phi)$ .

Dacă  $(C, d, \phi)$  este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri omologic atunci avem

$$H_*(C, d, \phi) \simeq H_*(C, d, 0) \simeq H_*(C, 0, \phi).$$

Noțiunea de  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri pur este întâlnită în lucrările lui Sergeraert ([85]), Forman ([31], [30]) și în teoria discretă a formelor diferențiale ([24]).

Relația de echivalență a  $\mathbb{Z}$ -lanțurilor poate fi văzută ca fiind extinderea naturală a echivalenței omotopice pentru complexe la cazul integral (vezi, spre exemplu [29]).

Calculul omologiei unui complex de lanțuri  $(C, d)$  poate fi obținut direct din operatorul integral  $\phi : C_* \rightarrow C_{*+1}$ , care satisface relația de retract tare de deformare și din condițiile omologice referitoare la operatorul diferențial  $d$  ([46], [47]).

**Propoziția 4.2.4** Fie  $(C, d, \phi)$  un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri,  $\pi : C_* \rightarrow C_*$  o aplicație liniară (numită **fluxul** lui  $(C, d, \phi)$ ) definită prin

$$\pi = id_C - d \circ \phi - \phi \circ d$$

și  $\Delta : C_* \rightarrow C_*$  o aplicație liniară (numită **Laplacianul** lui  $(C, d, \phi)$ ) definită prin

$$\Delta = d \circ \phi + \phi \circ d.$$

Atunci au loc următoarele relații:

$$(a) \quad d \circ \pi = d - d \circ \phi \circ d = \pi \circ d \text{ și } \phi \circ \pi = \phi - \phi \circ d \circ \phi = \pi \circ \phi.$$

În cazul  $\mathbb{Z}$ -complexului de lanțuri omologic avem:

$$d \circ \pi = 0 = \pi \circ d \text{ și } \phi \circ \pi = 0 = \pi \circ \phi.$$

(b)  $d \circ \Delta = d \circ \phi \circ d = \Delta \circ d$  și  $\phi \circ \Delta = \phi \circ d \circ \phi = \Delta \circ \phi$ .

În cazul  $\mathbb{Z}$ -complexului de lanțuri omologic avem:

$$d \circ \Delta = d = \Delta \circ d \text{ și } \phi \circ \Delta = \phi = \Delta \circ \phi.$$

(c) Dacă avem un  $p$ -lanț  $a$ , atunci avem relația:

$$a = \pi(a) + \Delta(a).$$

(d)  $\pi^2 = \pi - \phi \circ (d - d \circ \phi \circ d) - (d - d \circ \phi \circ d) \circ \phi = \pi - d \circ (\phi - \phi \circ d \circ \phi) - (\phi - \phi \circ d \circ \phi) \circ d$ .

(e)  $\Delta^2 = (d + \phi)\Delta(d + \phi)$ .

(f)  $\pi \circ \Delta = (d - d \circ \phi \circ d) \circ \phi + \phi \circ (d - d \circ \phi \circ d) = d \circ (\phi - \phi \circ d \circ \phi) + (\phi - \phi \circ d \circ \phi) \circ d = \Delta \circ \pi$ .

**Definiția 4.2.5** Un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $\pi(C, d, \phi) = (\pi(C), d|_{\pi(C)}, \phi|_{\pi(C)})$  este **complexul armonnic** asociat lui  $(C, d, \phi)$ . Dacă  $(C, d, \phi)$  este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $d$ -pur sau  $\phi$ -pur atunci avem relațiile:

$$\pi^2 = \pi \circ \pi = \pi \text{ și } \pi(C) = \{x \in C \mid x = \pi(x)\}.$$

Cu alte cuvinte, complexul armonnic  $(\pi(C), d|_{\pi(C)}, \phi|_{\pi(C)})$  asociat  $\mathbb{Z}$ -complexului de lanțuri pur  $(C, d, \phi)$  este format din lanțurile  $\pi$ -echivalente ale lui  $C$ .

Dacă  $(C, d, \phi)$  este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri omologic, atunci complexul lui armonnic este de forma  $(\pi(C), 0, 0)$  și pentru un  $p$ -lanț, aplicația de lanțuri  $\pi$  descrie un ciclu reprezentativ al clasei de omologie asociat acestui  $p$ -lanț.

În Figura 4.3 avem două  $\mathbb{Z}$ -complexe de lanțuri echivalente  $(C, d, \phi)$  și  $(C', d', \phi')$ . Complexul  $(C, d, \phi)$  din stânga este  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $\phi$ -pur. Complexul din dreapta  $(C', d', \phi')$  este complexul armonnic al complexului  $(C, d, \phi)$ .  $(C', d', \phi')$  este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri omologic ( $d'(\sigma) = 0, \phi'(\sigma) = 0, \forall \sigma \in C'$ ).

**Definiția 4.2.6**  $\mathbb{Z}$ -complexul de lanțuri  $\Delta(C, d, \phi) = (\Delta(C), d|_{\Delta(C)}, \phi|_{\Delta(C)})$  este **complexul laplacian** asociat lui  $(C, d, \phi)$ . Dacă  $(C, d, \phi)$  este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $d$ -pur sau  $\phi$ -pur atunci avem relațiile:

$$\Delta^2 = \Delta \circ \Delta = \Delta \text{ și } \Delta(C) = \{x \in C \mid x = \Delta(x)\}.$$

Cu alte cuvinte, complexul laplacian  $\Delta(C, d, \phi)$  asociat unui  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri pur  $(C, d, \phi)$  este format din toate lanțurile  $\Delta$ -echivalente.

**Propoziția 4.2.7** Dacă  $(C, d, \phi)$  este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri pur (diferențial sau integral), atunci au loc următoarele proprietăți:

(1)  $\pi \circ \Delta = 0 = \Delta \circ \pi$ .

(2)  $(C, d, \phi) = \pi(C, d, \phi) \oplus \Delta(C, d, \phi)$  ca  $\mathbb{Z}$ -complexe de lanțuri.

În particular,  $\text{Ker } \Delta = \pi(C)$  și  $\Delta(C) = \text{Ker } \pi$ .

(3)  $\Delta(C) = \phi(C) \oplus (d \circ \phi)(C)$  ca module graduate.

Dependența lui  $\pi$  și  $\Delta$  relativ la  $d$  și  $\phi$  o vom nota cu  $\pi_{(d, \phi)}$  și  $\Delta_{(d, \phi)}$ .

Următoarea propoziție este un rezultat fundamental în utilizarea  $\mathbb{Z}$ -complexelor de lanțuri în teoria Morse discretă. De fapt, ilustrează faptul că a folosi operatorii integrali puri și omotopii de complexe de lanțuri pentru a descompune complexe de lanțuri finit generate este un lucru important.

**Propoziția 4.2.8** Dacă  $(C, d, \phi)$  este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri pur (diferențial sau integral), atunci are loc proprietatea:

$$\text{Ker } \phi \cong \pi(C) \oplus \phi(C) \cong \text{Ker } \Delta(C) \oplus \phi(C)$$

ca module graduate.

În particular, o aplicație de  $\mathbb{Z}$ -complexe de lanțuri  $(f, g)$  satisface relațiile:

$$f \circ \pi_{(d, \phi)} = \pi_{(d', \phi')} \circ f, \quad g \circ \pi_{(d', \phi')} = \pi_{(d, \phi)} \circ g,$$

$$f \circ \Delta_{(d, \phi)} = \Delta_{(d', \phi')} \circ f, \quad g \circ \Delta_{(d', \phi')} = \Delta_{(d, \phi)} \circ g.$$

Aceasta înseamnă că  $f$  și  $g$  sunt compatibile relativ la fluxurile și laplacienii respectivi.

Următorul rezultat este esențial pentru a pune în evidență omologia  $\mathbb{Z}$ -complexelor de lanțuri.

**Lema 4.2.9** (Lema complexului de lanțuri) *Un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $(C, d, \phi)$  este echivalent cu complexul său armonic  $\pi(C, d, \phi)$ . Complexul armonic  $\pi(C, d, \phi)$  este de forma  $(\pi(C), d_\pi, \phi_\pi)$ , unde*

$$d_\pi(\pi(x)) = d - (d \circ \phi \circ d)(x) \text{ și } \phi_\pi(\pi(x)) = \phi - (\phi \circ d \circ \phi)(x).$$

**Corolarul 4.2.10** *Complexul armonic  $\pi(C, d, \phi)$  asociat unui  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $(C, d, \phi)$   $d$ -pur (respectiv  $\phi$ -pur) este de forma  $(\pi(C), 0, \phi_\pi)$  (respectiv  $(\pi(C), d_\pi, 0)$ ) și avem  $\phi_\pi(\pi(x)) = \phi - (\phi \circ d \circ \phi)(x)$  (respectiv  $d_\pi(\pi(x)) = d - (d \circ \phi \circ d)(x)$ ).*

Un exemplu pentru Lema 4.2.9 poate fi văzut în Figura 4.3, unde  $(C, d, \phi)$  este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $\phi$ -pur și  $(C', d', \phi')$  este complexul său armonic.

În cele ce urmează vom da câteva definiții legate de perturbarea  $\mathbb{Z}$ -complexelor de lanțuri.

**Definiția 4.2.11** Un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $(C, d, \phi)$  este  **$d$ -punctual nilpotent** (respectiv  **$\phi$ -punctual nilpotent**) dacă pentru orice  $a \in C$  există  $u(a) \in \mathbb{N}$  ce verifică relația:

$$d \circ (id_C - d \circ \phi - \phi \circ d)^{n(a)} = 0 \text{ (respectiv } \phi \circ (id_C - d \circ \phi - \phi \circ d)^{n(a)} = 0).$$

Cea mai mică valoare pentru  $n(a)$  este numit **gradul diferențial** (respectiv integral) al nilpotenței lui  $a$ .

**Propoziția 4.2.12** *Dacă avem un  $\mathbb{Z}$ -lanț complex  $(C, d, \phi)$   $\phi$ -punctual nilpotent (respectiv  $d$ -punctual nilpotent), el este echivalent cu  $\mathbb{Z}$ -complexul de lanțuri  $(C, d, \tilde{\phi})$   $\phi$ -pur (respectiv echivalent cu  $\mathbb{Z}$ -complexul de lanțuri  $(C, \tilde{d}, \phi)$   $d$ -pur).*

În continuare, toate  $\mathbb{Z}$ -complexele de lanțuri vor fi considerate  $\phi$ -punctual nilpotente. Rezultate asemănătoare pot fi determinate pentru  $\mathbb{Z}$ -complexe de lanțuri  $d$ -punctual nilpotente.

## 4.3 Teorie Morse discretă și optimalitate

În această secțiune, vom vedea că toate rezultatele de până acum pot fi folosite ca un instrument puternic pentru a ajunge la rezultate combinatoriale interesante în teoria Morse discretă.

**Definiția 4.3.1** Fie  $(K, \partial)$  un complex celular finit. Un operator  $h : C_*(K) \rightarrow C_{*\pm r}(K)$  este numit **combinatorial** dacă pentru orice  $p$ -celulă  $\sigma^{(p)}$ ,  $h(\sigma^{(p)}) = \lambda\beta^{(p\pm r)}$ , unde  $\lambda \in \mathbb{Z}$  și  $\beta$  este o  $(p\pm r)$ -celulă.

În continuare vom da câteva noțiuni de bază din teoria Morse discretă cu câteva mici modificări și fără să folosim, în principal, funcții Morse discrete.

**Definiția 4.3.2** Un câmp de vectori de **tip combinatorial**  $\mathcal{V}$  definit pe un complex celular conex  $K$  este o colecție de perechi disjuncte de celule  $\{\alpha^{(p)} < \beta^{(p+1)}\}$ .

**Definiția 4.3.3** Un  $\mathcal{V}$ -drum sau un **drum de tip gradient**  $\gamma$  este un șir alternant de celule  $a_0^{(p)}, b_0^{(p\pm 1)}, a_1^{(p)}, b_1^{(p\pm 1)}, a_2^{(p)}, \dots$  astfel încât pentru orice pereche de celule consecutive, una dintre celule este o față pentru cealaltă și următoarea condiție este satisfăcută: fie  $\{a_i^{(p)} < b_i^{(p\pm 1)}\}$  sau  $\{b_i^{(p\pm 1)} < a_{i+1}^{(p)}\}$  aparțin lui  $\mathcal{V}$ ,  $\forall i \geq 0$ .

Dacă ultima celulă din drumul de tip gradient  $\gamma$  este  $\alpha_r^{(p)}$  atunci spunem că  $\gamma$  **are lungimea**  $r$  ([38]).

Dacă celulele  $b_i$  din drumul de tip gradient  $\gamma$  sunt de dimensiune  $p + 1$  și drumul are lungimea  $r \cdot \frac{1}{2}$  atunci drumul de tip gradient  $\gamma$  se numește  **$\mathcal{V}$ -drum superior** sau **drum de tip gradient superior**.

Pentru celulele  $a$  și  $b$ , fie  $\Gamma(a, b)$  mulțimea drumurilor de tip gradient de la  $a$  la  $b$  (de orice lungime), astfel încât prima celulă să fie  $a$  iar ultima celulă să fie  $b$ , din șirul de celule.

Un  $\mathcal{V}$ -drum este **netrivial și închis** dacă  $r \geq 1$  și prima și ultima celulă din șir sunt aceleași.

**Definiția 4.3.4** Un **câmp discret de tip gradient** este un câmp vectorial combinatorial ce conține  $\mathcal{V}$ -drumuri închise și netriviale.

În acest mod poate fi considerat o împerechere de celule aciclice.

O celulă  $\alpha$  este **celulă critică** a lui  $\mathcal{V}$  dacă ea nu este împerecheată cu nici o celulă din  $\mathcal{V}$ .

**Definiția 4.3.5** Un **operator combinatorial integral** definit pe un complex celular  $K$  este o colecție de perechi disjuncte de celule  $\{\alpha^{(p)}, \beta^{(p+1)}\}$  (nu neapărat incidente) de aceleași componente conexe.

De aceea, un câmp discret de vectori de tip gradient este un operator special de tipul operatorului combinatorial și integral.

Forman în lucrările ([30], [31]) a demonstrat că topologia unei varietăți diferențiabile este legată de celulele critice ale unei funcții discrete definite pe varietate, mimând rezultatele lui Morse în cazul neted.

Numărul de celule critice depinde de câmpul vectorial discret de tip gradient considerat (vezi Figura 4.4).

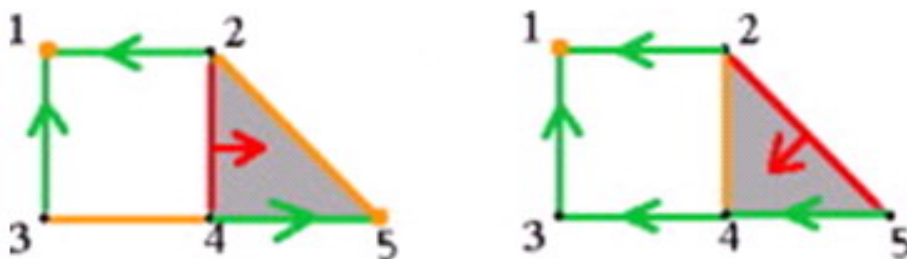


Figura 4.4. O împerechere de celule în stânga ( $\langle 1, \langle 5 \rangle$ ,  $\langle 3, 4 \rangle$  și  $\langle 2, 5 \rangle$  sunt critice) și o împerechere de celule optimală în dreapta ( $\langle 1 \rangle$  și  $\langle 2, 4 \rangle$  sunt critice). Împerecherea este reprezentată cu o săgeată de la celula cu dimensiune mai mică spre una cu dimensiune mai mare pereche cu ea

În lucrarea ([63]), problema optimalității (minimizarea numărului de celule critice pentru câmpul vectorial combinatorial) pentru o varietate 2-dimensională este analizată utilizând diagramele Hasse și hipergrafurile. Această problemă nu este încă rezolvată pentru cazul general.

Nu este întotdeauna posibil să obținem un număr de celule critice care să coincidă cu numerele Betti ale complexului. Acesta este cazul pentru complexe: casa lui Bing, pălăria lui Dunce, care sunt contractibile dar nu sunt colapsibile (vezi [11]).

Următoarele rezultate ne arată că folosind operatorii integrali pentru complexe de lanțuri, putem rezolva această problemă și putem reduce complexul inițial la numărul minim de celule critice, care corespund cu numerele Betti. Aceasta înseamnă că putem să garantăm optimalitatea omologică (care este numită ”perfectiune” în teoria Morse discretă, vezi [11]).

**Definiția 4.3.6** Dacă avem un drum de tip gradient superior  $\gamma \in \Gamma(a, b)$  format din șirul alternant  $\gamma : a_0^{(p)}, b_0^{(p+1)}, a_1^{(p)}, b_1^{(p+1)}, \dots, a_t^{(p)}, b_t^{(p+1)}$ , **drumul omotopic corespondent** este definit prin șirul:  $b_0^{(p+1)}, b_1^{(p+1)}, \dots, b_t^{(p+1)}$ .

În primul rând operatorii integrali combinatoriali derivați din câmpurile vectoriale combinatoriale sunt  $\phi$ -punctual nilpotente.

**Propoziția 4.3.7** *Un câmp vectorial discret de tip gradient  $\mathcal{V}$  generează un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $(C(K), d, V)$   $\phi$ -punctual nilpotent.*

Combinând Propozițiile 4.2.4, 4.2.7, 4.2.8, 4.2.12, 4.3.7, obținem următorul rezultat care este cheia interpretării teoriei Morse discretă în termenii  $\mathbb{Z}$ -complexelor de lanțuri.

**Propoziția 4.3.8** *Considerăm  $V$  un câmp vectorial de tip gradient.*

*Dacă  $(C, d, V)$  este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $\phi$ -punctual nilpotent, atunci există un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri  $\phi$ -pur  $(C, d, \tilde{V})$  echivalent cu  $(C, d, V)$ , astfel încât complexul lui armonic este*

$$\pi(C, d, \tilde{V}) = (\text{Ker } \tilde{V} \setminus \tilde{V}(C), d_\pi, 0).$$

Acest ultim  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri este constituit din combinații liniare finite de celule critice diferite din  $V$  și  $d_\pi$  poate fi privit ca fiind operatorul de frontieră corespunzător complexului celular determinat de celulele critice, numit și complexul celular Morse armonic  $M(C, d, V)$  asociat lui  $(C, d, V)$ .

Analog, complexul laplacian  $\Delta(C, d, \tilde{V})$  poate fi privit ca un complex de lanțuri aciclic ale complexului celular  $M(C, d, V)$ , numit și complexul Morse de tip laplacian asociat lui  $(C, d, V)$ . Mai mult, operatorul de frontieră  $\partial_M$  este determinat de relația:

$$\partial_M(\Delta(\sigma^{(p)})) = d \circ \tilde{V} \circ d(\sigma^{(p)}), \quad \forall \sigma^{(p)} \in C.$$

Are loc relația  $H_*(M(C, d, V)) \cong H_*(K, \Lambda)$ , unde  $\Lambda$  este câmpul comutativ considerat. Mai mult operatorul de frontieră  $d_\pi$  al complexului Morse celular  $M(C, d, V)$  are o interpretare clară în termeni de drumuri de tip gradient ale lui  $\tilde{V}$ .

**Propoziția 4.3.9** *În condițiile Propoziției 4.3.8 pentru o  $p$ -celulă  $\alpha$ ,  $\tilde{V}(\alpha)$  este un drum omotopic de lanțuri.*

În lucrarea ([74]), un operator integral  $\phi$  care dă  $\mathbb{Z}$ -complexul până la omologie este determinat printr-un complex celular filtrat folosind o tehnică de tip incremental.

Având o  $p$ -celulă  $\sigma$ ,  $\phi(\sigma)$  este o sumă de celule  $(p + 1)$ -dimensionale în care cel puțin o celulă  $\tau$  satisface  $\sigma \in \partial(\tau)$ .

Operatorul  $\phi$  generează în mod natural un operator integral și combinatorial pe  $K$ .

Datorită faptului că  $\tilde{V}(C)$  admite o bază combinatorială și complexul de lanțuri  $(\tilde{V}(C) \oplus (d \circ \tilde{V}(C)), d)$  este aciclic, putem presupune că suma  $\omega$  de elemente din baza combinatorială a lui  $\tilde{V}(C)$  satisface relația  $d(\omega) = 0$ .

Aceasta înseamnă că  $\omega$  poate fi reprezentat, în termeni de grafe, folosind arbori. În acești arbori, nodurile sunt  $p$ -celulele și  $(p + 1)$ -celulele, ale complexului,  $\forall p \geq 0$ .

Vecinii unei  $p$ -celule sunt  $(p + 1)$ -celulele și viceversa (vezi Figura 4.5).

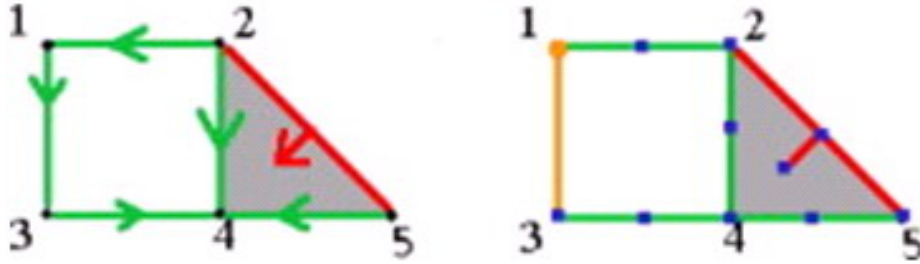


Figura 4.5. Un câmp vectorial de tip combinatorial (în stânga).

În dreapta o mulțime de arbori de tip gradient unde celulele  $\langle 1 \rangle$  și  $\langle 1, 3 \rangle$  nu aparțin pădurii,  $\langle 2, 5 \rangle$  și  $\langle 2, 4, 5 \rangle$  aparțin arborelui cu dimensiunile 1 și 2 și restul celulelor aparțin arborelui cu dimensiunile 0 și 1

Această pădure este o reprezentare în termeni omologici a complexului celular  $K$  și se numește pădure generată omologic (vezi [73], [74]).

Având o pădure generată omologic, este posibil să distingem două tipuri de arbori: arbori omologic esențiali și omologic neesențiali.

Într-un arbore omologic neesențial numărul de  $p$ -celule este același cu numărul de  $p + 1$ -celule.

Într-un arbore omologic  $c$ -esențial, diferența dintre numărul de  $p$ -celule și numărul de  $p + 1$ -celule este numărul întreg pozitiv  $c$ .

În acest ultim caz există  $c$   $p$ -celule în interiorul acestui arbore ce reprezintă o celulă critică, aceasta însemnând un generator omologic.

De aceea, având o pădure generată omologic, un operator integral de tip combinatorial poate fi direct dedus prin considerarea perechii maxime definite de o  $p$ -celulă și o  $p + 1$ -celulă, folosind o strategie specifică (de exemplu, împerechind două celule neincidente) pentru orice arbore omologic esențial sau neesențial.

În acest proces, doar  $c$   $p$ -celule (celulele critice) ale unui arbore omologic  $c$ -esențial vor rămâne neîmperecheate.

Să subliniem faptul că noțiunea de optimalitate este garantată de găsirea operatorului integral de tip combinatorial. De aceea, numărul minim de celule critice va fi întotdeauna egal cu numerele Betti. În procesul de împerechere, putem găsi unele perechi de celule neincidente  $\{\alpha, \beta\}$ .

Pentru ca să obținem optimalitate în sens Forman (împerechere de celule incidente), se pot aplica rezultatele anulării în sens clasic relativ la drumurile izolate care leagă  $\alpha$  și  $\beta$  (vezi [31]).

**Exemplul 4.3.10** În Figura 4.6a) putem observa complexul  $K$  al celulelor pentru torul  $T^2$ .

Figura 4.6b) și c) reprezintă structura de arbore a unui operator de omotopie  $\phi$  a complexului de lanțuri descris de perechile  $\{0 - \text{celule}, 1 - \text{celule}\}$  și  $\{1 - \text{celule}, 2 - \text{celule}\}$  ale complexului inițial.

Împerecherea combinatorială optimală corespunzătoare este ilustrată în Figura 4.6d) și e). Culorile diferite în Figura 4.6e) reprezintă arbori diferiți ai pădurii generate omologic de 1-celulele și 2-celulele. Tripletul  $(C(K), \partial, \phi)$  este un  $\mathbb{Z}$ -complex de lanțuri omologic.

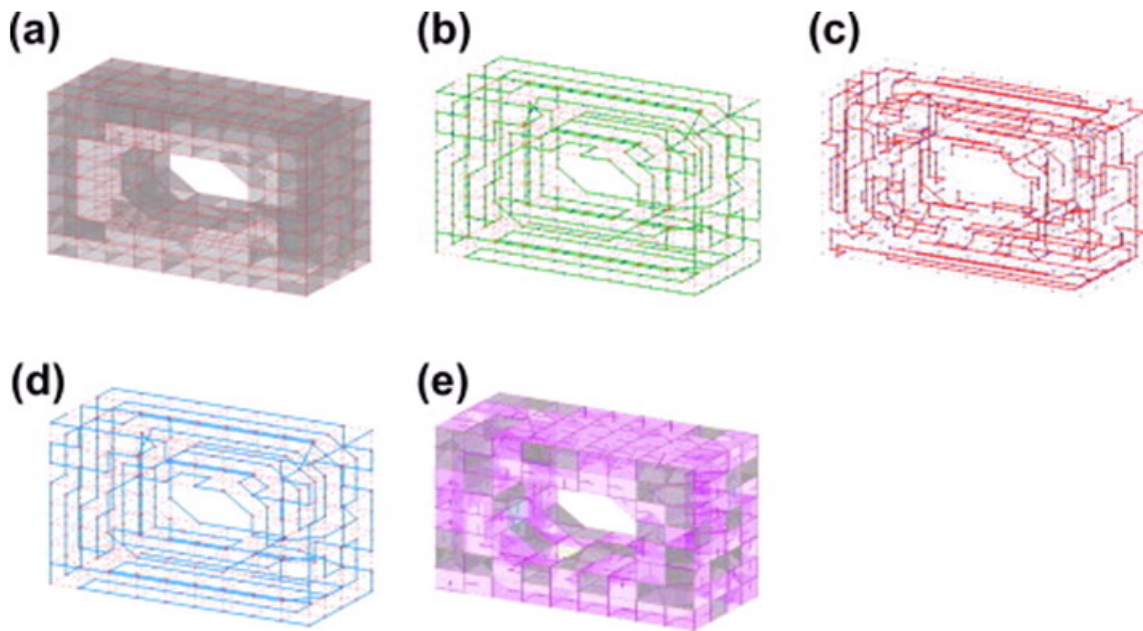


Figura 4.6. Un complex celular pentru torul  $T^2$ , reprezentarea omologică a pădurii generate și împerecherea combinatorială optimală

**Exemplul 4.3.11** În Figura 4.7 se prezintă rezultate similare obținute pentru complexul casa lui Bing cu 2 camere. Datorită faptului că acesta este un complex contractibil care nu este colapsibil, nu este posibil să obținem un câmp vectorial discret de tip gradient optimal. Cu toate acestea, se obține un operator integral combinatorial care implică toate celulele asociate structurilor de pădure generată omologic și care garantează optimalitatea omologică.

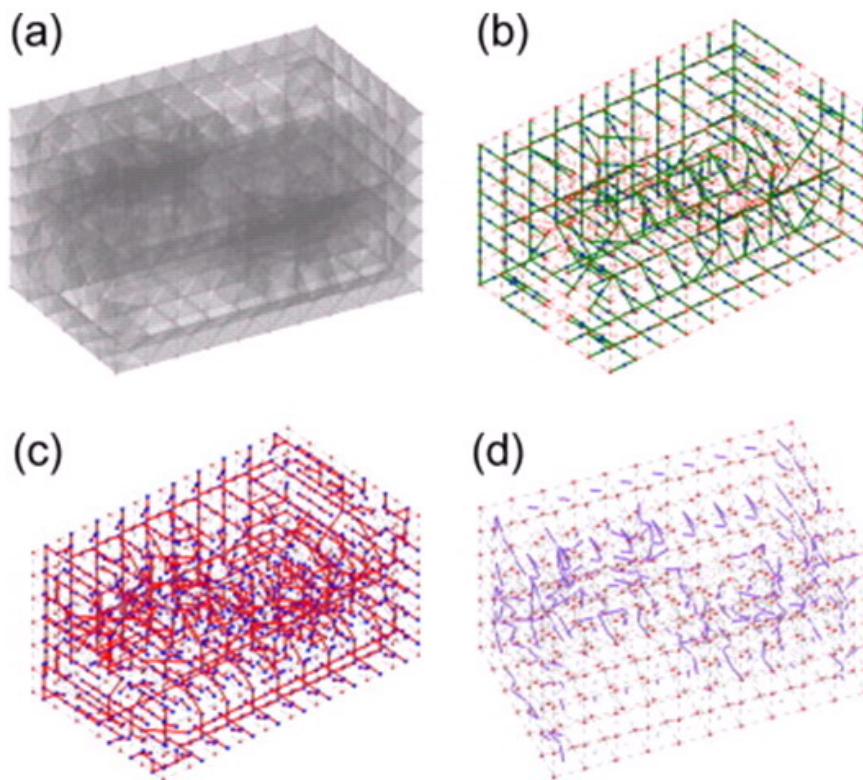


Figura 4.7. (a) Complexul celular pentru casa lui Bing.  
 (b), (c), (d) Reprezentarea omologică a pădurii generate de 0-1 celule, 1-2 celule și 2-3 celule

## 4.4 Invarianța topologică a numerelor Morse-Smale pentru 3-complexe

Numerele Morse discrete sunt legate de omotopia simplă. Pentru a demonstra invarianța lor, am putea demonstra că din punct de vedere topologic complexe celulare echivalente sunt omotopic simple și spațiile omotopice simple au același număr Morse discret. Din păcate prima afirmație nu este adevărată în caz general. Vom folosi în continuare următoarele teoreme ale căror demonstrații pot fi găsite în [77] și [21, 25.1].

**Teorema 4.4.1** *Orice două triangulări ale unei varietăți topologice 3-dimensionale au o subdiviziune comună.*

**Teorema 4.4.2** *Dacă  $K_*$  este o subdiviziune a lui  $K$ , atunci  $K$  și  $K_*$  sunt echivalente în sensul omotopiei simple.*

**Teorema 4.4.3** *Fie  $K$  și  $L$  două varietăți topologice 3-dimensionale omeomorfe. Atunci pentru orice  $p$  avem  $\gamma_p(K) = \gamma_p(L)$ .*



# Bibliografie

- [1] M. Agoston, *Algebraic Topology*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1976.
- [2] D. Andrica, *Critical Point Theory and Some Applications*, Cluj University Press, 2005.
- [3] D. Andrica, *Some Remarks Concerning the Morse-Smale Characteristic of a Compact Manifold*, *Mathematica*, L'Analyse Numerique et la Theorie de l'Approximation, Tome 21, 1, 1992, 9-13.
- [4] D. Andrica, *The Morse-Smale Characteristic of a Simply-Connected Compact Manifold*, *Mathematica*, L'Analyse Numerique et la Theorie de l'Approximation, Tome 22, 2, 1993, 121-124.
- [5] D. Andrica, *On the F-perfect Morse Functions on Compact Manifolds*, *Mathematica*, Tome 41(64), 1999, 3-99.
- [6] D. Andrica, I.C. Lazăr, *Cubical 2-complexes with the 8-property admits a strong convex metric*, *Acta Universitatis Apulensis*, No. 21/2010, 47-54.
- [7] D. Andrica, I.C. Lazăr, *Applications to discrete Morse theory: the collapsibility of  $Cat(0)$  hexagonal complexes of dimension 2*, *Analele Univ. Oradea, Fasc. Matematica*, XVII, No. 1(2010), 17-22.
- [8] D. Andrica, I.C. Lazăr, *Hexagonal 2-complexes have a strongly convex metric*, *An. St. Univ. Ovidius Constanța*, 19(1), 2011, 5-22.
- [9] D. Andrica, C. Pinteau, *Recent results on the size of critical sets*, in "Essays in Mathematics and its Applications" (dedicated to Stephen Smale), P. Pardalos, Th. M. Rassias (Eds.), Springer, 2012.
- [10] M. Armstrong, *Basic topology*, McGraw-Hill, London, 1979.
- [11] R. Ayala, D. Fernandez-Ternero, J.A. Vilches, *Perfect discrete Morse functions on 2-complexes*, *Imagen-a* 1, 2010, 19-25.
- [12] R. Ayala, D. Fernandez-Ternero, J.A. Vilches, *Characterizing equivalent discrete Morse functions*, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 40(2), 2009, 225-235.
- [13] R. Ayala, D. Fernandez-Ternero, J.A. Vilches, *The number of critical elements of discrete Morse functions on non-compact surfaces*, *Topology Appl.* 157(1), 2010, 90-101.
- [14] C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
- [15] M.W. Bern, D. Eppstein, et al., *Emerging challenges in computational topology*, ACM Computing Research Repository, 1999.
- [16] J.-D. Boissonnat and M. Yvinec, *Algorithmic Geometry*, Cambridge University Press, 1998.

- [17] R. Bott, *Morse theory indomitable*, Publications Mathematiques de L'Ihes, 68(1), 1988, 99-114.
- [18] R. Bott, *Lectures on Morse theory, old and new*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. 7, 1982, 331-358.
- [19] D. Burghilea, *Introduction to Differential Topology*, (Romanian), Bucharest, 1973.
- [20] G. Cicortaș, *Elemente de teorie Morse și Aplicații*, Presa Universitară Clujeană, 2008.
- [21] M.M. Cohen, *A course in simple homotopy theory*, Springer, New York, 1973.
- [22] M. Craioveanu, M. Puta, *Introduction to Spectral Geometry*, (Romanian), Ed. Academiei, Bucharest, 1988.
- [23] C.J.A. Delfinado and H. Edelsbrunner, *An Incremental Algorithm for Betti Numbers of Simplicial Complexes*, In Proceedings of 9th Annual Symposium on Computer Geometry, pages 232-239, 1993.
- [24] M. Desbrun, E. Kanso, Y. Tong, *Discrete differential forms for computational modeling*, In: SIGGRAPH '06: ACM SIGGRAPH 2006 Courses, ACM, New York, NY, USA, 2006. 39-54.
- [25] T.K. Dey, H. Edelsbrunner, and S. Guha, *Computational topology*, In B. Chazelle, J. Goodman, and R. Pollack, editors, Advances in Discrete and Computational Geometry, volume 223 of Contemporary mathematics, pages 109-143, American Mathematical Society, Providence, 1999.
- [26] T.K. Dey and S. Guha, *Algorithms for manifolds and simplicial complexes in euclidean 3-Space*, preprint, 2001.
- [27] H. Edelsbrunner, J. L. Harer, and A. Zomorodian, *Hierarchical Morse Complexes for Piecewise Linear 2-Manifolds*, In Proceedings of the 17th Symposium of Computational Geometry, pages 70-79, 2001.
- [28] O. Egecioglu and T.F. Gonzalez, *A computationally intractable problem on simplicial complexes*, Computational Geometry: Theory and Applications, 6:85-98, 1996.
- [29] S. Eilenberg, S. Mac Lane, *On the groups  $H(\pi, n)$* , i, ii, iii, Ann. Math. 58, 55-106, 60, 48-139, 60, 1954, 513-557.
- [30] R. Forman, *A discrete Morse theory for cell complexes*, Geometry, Topology and Physics for Raoul Bott, International Press, Conf. Proc. Lect. Notes Geom. Topol., 4, 1995, 112-125.
- [31] R. Forman, *Morse Theory for cell complexes*, Department of Mathematics, Rice University, Houston, Texas 77251, Received July 20, Adv. Math. 134, 1998, 90-145.
- [32] R. Forman, *Combinatorial Vector Fields and Dynamical Systems*, Math. Zeit. 228, 1998, 629-681.
- [33] R. Forman, *Witten-Morse theory for cell complexes*, Topology 37, 1998, 945-979.
- [34] R. Forman, *The Cohomology Ring and Discrete Morse Theory*, preprint 2001.
- [35] R. Forman, *A user's guide to discrete Morse theory*, Seminaire Lotharigien Combinatoire (electronic), 48, Art. B48c, 35 pp., 2002.
- [36] R. Forman, *Combinatorial Novikov-Morse theory*, Int. J. Math., 13, 2002, 333-368.
- [37] R. Forman, *Morse theory and evasiveness*, Combinatorica, 20, 2002, 489-504.

- [38] R. Forman, *Discrete Morse Theory and the cohomology ring*, Trans. Am. Math. Soc. 354, 2002, 5063-5085.
- [39] R. Forman, *Some applications of combinatorial differential topology*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 73, 2005, 281-313.
- [40] R. Forman, *Combinatorial Differential Topology and Geometry*, New Perspectives in Geometric Combinatorics, MSRI Publications, 38, 1999.
- [41] R. Forman, Applications of combinatorial differential topology, In Proceedings of the Sullivan-Fest, 2000.
- [42] Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Finite and Infinite Dimensional Differentiable Manifolds*, Bucharest, vol. 1, 1976, vol. 2, 1979.
- [43] R. González-Díaz, M.J. Jiménez, B. Medrano, P. Real, *Chain homotopies for object topological representations*, Discrete Appl. Math. 157(3), 2009, 490-499.
- [44] R. González-Díaz, P. Real, *On the cohomology of 3D digital images*, Discrete Appl. Math. 147(2-3), 2005, 245-263.
- [45] M.J. Greenberg, *Algebraic Topology. A First Course*, Addison Wesley, 1981.
- [46] V.K.A.M. Gugenheim, L.A. Lambe, J.D. Stasheff, *Perturbation theory in differential homological algebra*, i, Illinois J. Math., 33, 1989, 357-373.
- [47] V.K.A.M. Gugenheim, L.A. Lambe, J.D. Stasheff, *Perturbation theory in differential homological algebra*, ii, Illinois J. Math., 35(3), 1991, 357-373.
- [48] M. Hachimori, Simplicial complex library, [www.qci.jst.go.jp/~hachi](http://www.qci.jst.go.jp/~hachi).
- [49] J.C. Hart, *Morse theory for implicit surface modeling*, In H.-C. Hege and K. Polthier, editors, Mathematical Visualization, pages 257-268, Berlin, 1998, Springer.
- [50] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [51] P. Hersch, *On optimizing discrete Morse functions*, Adv. in Appl. Math., 35(3), 2005, 294-322.
- [52] M. Hirsch, *Differential topology*, Springer-Verlag, New York, 1976.
- [53] J. Hopcroft and R.E. Tarjan, *Efficient algorithms for graph manipulation*, Communications of the ACM, 16:372-378, 1973.
- [54] E. Koutsofios and S.C. North, *Drawing graphs with dot*, Technical report, AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1993.
- [55] I.C. Lazăr, *The Study of Simplicial Complexes of Nonpositive Curvature*, Ph. D. Thesis, Cluj University Press, 2010.
- [56] I.C. Lazăr, *Discrete Morse theory, simplicial nonpositive curvature, and simplicial collapsibility*, Balkan Journal of Geometry and its Applications, Vol. 17, No. 1, 2012, 58-69.
- [57] I.C. Lazăr, V. Revnic, *Morse-Smale Characteristic in Discrete Morse Theory*, In: Contemporary Geometry and Topology and Related Topics, Proc. of the 8th International Workshop on Differential Geometry and its Applications, Cluj-Napoca, August 19-25, 2007 (D. Andrica and S. Moroianu, Eds.), Cluj University Press, 2008, 201-208.

- [58] J. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer Verlag, 2003.
- [59] T. Lewiner, *Constructing discrete Morse functions*, MsC Thesis, Department of Mathematics, Post-graduate program in Applied Mathematics, Rio de Janeiro, iulie 2002.
- [60] T. Lewiner, *Geometric discrete Morse complexes*, PhD Thesis, Rio de Janeiro, iulie 2005.
- [61] T. Lewiner, H. Lopes, G. Tavares, *Optimal discrete Morse functions for 2-manifolds*, *Comp. Geometry*, 26(3), 2003, 221-233.
- [62] T. Lewiner, H. Lopes, and G. Tavares, *Visualizing Forman's discrete vector field*, In H.-C. Hege and K. Polthier, editors, *Visualization and Mathematics III*, pages 95-112, Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.
- [63] T. Lewiner, H. Lopes, G. Tavares, L. Matmidia, *Towards optimality in Discrete Morse Theory*, *Exp. Math.* 12, 2003.
- [64] H. Lopes, *Algorithms to build and unbuild 2 and 3 dimensional manifolds*, PhD thesis, Department of Mathematics, PUC-Rio, 1996.
- [65] H. Lopes, J. Rossignac, A. Safonova, A. Szymczak, and G. Tavares, *Edgebreaker: a simple compression for surfaces with handles*, In 7th ACM Siggraph Symposium on Solid Modeling and Application, pages 289-296, 2002.
- [66] L. Lovasz and M.D. Plummer, *Matching Theory*, Van Nostrand Reinhold, Amsterdam, 1986.
- [67] A. Lundell, S. Weingram, *The topology of CW-complexes*, New York, 1969.
- [68] A. Markov, *Insolvability of the problem of homeomorphy*, In Proceedings of the International Congress of Mathematics, pages 300-306, 1958.
- [69] Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, Iwanami Series in Modern Mathematics, 1997 (Translations of Mathematical Monographs, Vol. 208 AMS, 2002).
- [70] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schroder, and A.H. Barr, *Discrete Differential-Geometry Operators for Triangulated 2-Manifolds*, In H.-C. Hege and K. Polthier, editors, *Mathematical Visualization III*, Springer, Berlin, 2002.
- [71] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.
- [72] R. Miron, I. Pop, *Topologie Algebrica*, Ed. Academiei Republicii Socialiste Romania, București, 1974.
- [73] H. Molina-Abril, P. Real, *Homological computation using spanning trees*, In: E. Bayro-Corrochano, J.O. Eklundh (Eds.), *Progress in Pattern Recognition, Image Analysis, Computer Vision and Applications*, Vol. 5856 *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2009, 272-278.
- [74] H. Molina-Abril, P. Real, *A homological-based description of subdivided nD objects*, In: P. Real, D. Diaz-Pernil, H. Molina-Abril, A. Berciano, W. Kropatsch (Eds.), *Computer Analysis of Images and Patterns*, Vol. 6854, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin/Heidelberg, 2011, 42-50.
- [75] H. Molina-Abril, P. Real, *Holomological optimality in Discrete Morse Theory through chain homotopies*, *Pattern Recognition Letters* 33, 2012, 1501-1506.

- [76] M. Morse, *The calculus of variations in the large*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ, 18, 1934.
- [77] E.E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds*, Annals of Math., 56(2):96-114, 1952.
- [78] S. Moriyama and F. Takeuchi, *Incremental construction properties in dimension two-shellability, extendable shellability and vertex decomposability*, In Proceedings of the 12th Canadian conference on computational geometry, pages 65-72, Fredericton, 2000.
- [79] J.R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley, Menlo Park, 1984.
- [80] S.C. North, *Neato User's Guide*, Technical report, AT&T Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1992.
- [81] V. Revníc, *Some remarks on the Discrete Morse-Smale characteristic*, Proceedings of the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, ICTAMI 2009, Alba Iulia, Acta Universitatis Apulensis, 18, 221-231, 2009 (presented at the International Conference on Theory and Applications of Mathematics and Informatics, Alba Iulia, September 3th-6th, 2009).
- [82] V. Revníc, *Discrete Morse-Smale characteristic of a simplicial complex*, Theodor Angheluta Seminar (2013), The Fourteenth International Conference on Applied Mathematics and Computer Science, Cluj-Napoca, Romania, August 29-31, 2013.
- [83] V. Revníc, *Optimality in discrete Morse theory*, 9th International Conference on Applied Mathematics (ICAM9), 25-28 September 2013, Baia Mare, Romania.
- [84] V. Revníc, *Perfect discrete Morse functions on surfaces*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica, No. 4, 2013 (va apare).
- [85] F. Sergeraert, *The computability problem in algebraic topology*, Adv. Math. 104, 1994, 1-29.
- [86] Y. Shinagawa, T. Kunii, and Y. Kergosien, *Surface coding based on Morse theory*, IEEE Computer Graphics and Applications, 11:66-78, 1991.
- [87] E.H. Spanier, *Algebraic Topology*, Mc Graw-Hill Book Co., New York, 1966.
- [88] A. Szymczak and J. Rossignac, *Grow & Fold: Compressing the connectivity of tetrahedral meshes*, Computer-Aided Design, 32(8/9):527-538, 2000.
- [89] R.E. Tarjan, *Efficiency of a good but not linear set union algorithm*, Journal of the ACM, 22(2):215-225, 1975.
- [90] G. Taubin and J. Rossignac, *Geometric compression through topological surgery*, ACM Transactions on Graphics, 17(2):84-115, 1998.
- [91] G. Vegter, *Computational topology*, In J.E. Goodman and J. O'Rourke, editors, Handlebook of Discrete Computational Geometry, pages 517-536, CRC Press, 1997.
- [92] J.H.C. Whitehead, *Combinatorial homotopy I*, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 1949, 213-245.
- [93] J.H.C. Whitehead, *Combinatorial homotopy II*, Bull. Amer. Math. Soc., 55, 1949, 453-496.